

UNIDAD DE APRENDIZAJE III

Saberes procedimentales	Saberes declarativos	
Expresa un polinomio en sus factores primos	A	Concepto de factores primos algebraicos.
	B	Métodos de factorización de expresiones algebraicas: Factor común. Por agrupación. Trinomio Cuadrado Perfecto. Diferencia de Cuadrados. Suma y diferencia de cubos. Polinomio cubo perfecto. Trinomios de segundo grado. Por evaluación.

A Concepto de factores primos algebraicos

Factorizar una expresión algebraica es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

La factorización puede considerarse como la operación inversa a la multiplicación, pues el propósito de ésta última es hallar el producto de dos o más factores; mientras que en la factorización, se buscan los factores de un producto dado.

Factores o divisores de una expresión algebraica

Son los términos (número primos) que multiplicados entre sí y dan como producto la primera expresión.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{Factorización}} \\
 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
 24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
 24 = 4 \cdot 6 \\
 24 = 8 \cdot 3 \\
 24 = 12 \cdot 2 \\
 \xleftarrow{\text{Multiplicación}}
 \end{array}$$

Al factorizar una expresión, escribimos la expresión como un producto de sus factores. Supongamos que tenemos dos números 3 y 5 y se pide que los multipliquemos, escribiremos $(3)(5) = 15$. En el proceso inverso, tenemos el producto 15 y se nos pide que lo factoricemos; entonces tendremos $15 = (3)(5)$

Ejemplo

Al factorizar el número 20, tendremos $20 = (4)(5)$ o $20 = (10)(2)$.

Advierte que $20 = (4)(5)$ y $20 = (10)(2)$ no están factorizados por completo. Contienen factores que no son números primos. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, etc. Puesto que ninguna de esas factorizaciones está completa, notamos que en la primera factorización $4 = (2)(2)$, de modo que $20 = (2)(2)(5)$ mientras que la segunda factorización $10 = (2)(5)$, de modo que $20 = (2)(5)(2)$, en cualquier caso la factorización completa para 20 es $(2)(2)(5)$.

De ahora en adelante cuando digamos factorizar un número, queremos decir factorizarlo por completo. Además se supone que los factores numéricos son números primos. De esta manera no factorizamos 20 como

$$20 = \left(\frac{1}{4}\right)(80).$$

Con estos preliminares fuera del camino, ahora podemos factorizar algunas expresiones algebraicas.

Ejercicios

Factorizar los siguientes números

1. 124

2. 48

3. 58

4. 64

5. 88

C Métodos de Factorización

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a los que el producto entre sí (de estos factores) nos da la expresión primitiva.

$$a(a+b) = a^2 + ab$$

Así, efectuando el producto entre a y $a+b$, se obtiene:

a y $a+b$, cuyo producto entre sí dan la expresión $a^2 + ab$, éstos son los factores o divisores de $a^2 + ab$. De tal manera que:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

Donde $x+2$ y $x+3$ son los factores de $x^2 + 5x + 6$.

Descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es transformarla en el producto indicado de sus factores.

1. Factorizar un monomio

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección.

Así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b . Por lo tanto, este monomio puede escribirse de la siguiente manera:

$$15ab = (3)(5)(a)(b)$$

2. Factorizar un polinomio

No todo polinomio se puede descomponer en un producto indicado de dos o más factores distintos de 1, ya que de la misma forma que en Aritmética, hay números primos que sólo son divisibles por la unidad y por sí mismos; en Algebra, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles por la unidad y por ellas mismas, en consecuencia, no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así $a+b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible por $a+b$ y por la unidad.

Caso I - Factor común

Sacar el factor común es añadir la literal común de un polinomio, binomio o trinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes, y para sacar esto, hay una regla muy sencilla que dice: Cuadrado del primer término más o menos cuadrado del segundo por el primero más cuadrado del segundo, y no hay que olvidar, que los dos que son positivos iguales funcionan como el primer término, sabiendo esto, será sumamente sencillo resolver los factores comunes.

Factor común monomio

Factor común por agrupación de términos

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

$$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

y si solo si el polinomio es 0 y el tetranomio nos da x .

Factor común polinomio

Primero hay que determinar el factor común de los coeficientes junto con el de las variables (la que tenga menor exponente). Se toma en cuenta aquí que el factor común no solo cuenta con un término, sino con dos. Un ejemplo:

$$5x^2(x - y) + 3x(x - y) + 7(x - y)$$

Se aprecia claramente que se está repitiendo el polinomio $(x - y)$, entonces ese será el factor común. El otro factor será simplemente lo que queda del polinomio original, es decir:

$$5x^2 + 3x + 7$$

La respuesta es:

$$(5x^2 + 3x + 7)(x - y)$$

En algunos casos se debe utilizar el número 1, por ejemplo:

$$5a^2(3a + b) + 3a + b$$

Se puede utilizar como:

$$5a^2(3a + b) + 1(3a + b)$$

Entonces la respuesta es:

$$(3a + b)(5a^2 + 1)$$

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones

1. $a^2 + ab$
2. $b + b^2$
3. $5m^2 + 15m^3$
4. $ab - bc$
5. $x^2y + x^2z$
6. $9a^3x^2 - 18ax^3$
7. $a^3 + a^2 + a$
8. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$
9. $x^3 + x^5 - x^7$
10. $96 - 48mn^2 + 144n^3$
11. $x - x^2 + x^3 - x^4$
12. $a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2$
13. $a(x + 1) + b(x + 1)$
14. $x(a + 1) - 3(a + 1)$
15. $m(a - b) + (a + 1)n$
16. $2x(n - 1) - 3y(n - 1)$
17. $x(a + 1) - a - 1$
18. $a^2 + 1 - b(a^2 + 1)$
19. $3x(x - 2) - 2y(x - 2)$
20. $a^3(a - b + 1) - b^2(a - b + 1)$
21. $4m(a^2 + x - 1) + 3n(x - 1 + a^2)$
22. $x(2x + b + c) - 2a - b - c$
23. $(x + y)(n + 1) - 3(n + 1)$
24. $(x + 1)(x - 2) + 3y(x - 2)$
25. $(x^2 + 2)(m - n) + 2(m - n)$
26. $(a + b)(a - b) - (a - b)(a - b)$
27. $(x - 3)(x - 4) + (x - 3)(x + 4)$
28. $(a + b - 1)(a^2 + 1) - a^2 - 1$
29. $(a + b - c)(x - 3) - (b - c - a)(x - 3)$
30. $3x(x - 1) - 2y(x - 1) + z(x - 1)$

Caso II - Factor común por agrupación de términos

Para trabajar un polinomio por agrupación de términos, se debe tener en cuenta que son dos características las que se repiten. Se identifica porque es un número par de términos.

Ejemplos

Un ejemplo numérico puede ser:

$$2y + 2j + 3xy + 3xj$$

Entonces puedes agruparlos de la siguiente manera:

$$(2y + 2j) + (3xy + 3xj)$$

Aplicamos el Caso I (Factor común)

$$2(y + j) + 3x(y + j)$$

$$(2 + 3x)(y + j)$$

Ejercicios Factorizar las siguientes expresiones

$a^2 + ab + ax + bx$	$6m - 9n + 21nx - 14mx$
$am + bm + an - bn$	$n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
$ax - 2bx - 2ay + 4by$	$1 + a + 3ab + 3b$
$a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$	$3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
$3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$	$2am - 2an + 2a - m + n - 1$
$4a^4 - 1 - a^2 + 4a$	$3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$
$x + x^2 - xy^2 - y^2$	$a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2$
$3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$	$2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$
$6ax + 3a + 1 + 2x$	

Caso III - Trinomio Cuadrado Perfecto

Se identifica por tener tres términos, de los cuales dos tienen raíces cuadradas exactas, y el restante equivale al doble producto de las raíces del primero por el segundo. Para solucionar un Trinomio Cuadrado Perfecto debemos reordenar los términos dejando de primero y de tercero los términos que tengan raíz cuadrada, luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis, separándolos por el signo que acompaña al segundo término, al cerrar el paréntesis elevamos todo el binomio al cuadrado.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos

a. $(5x - 3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$	c. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
b. $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$	
d. $4x^2 + 25y^2 - 20xy$	
organizando los términos tenemos	$4x^2 - 20xy + 25y^2$

Extrayendo la raíz cuadrada del primer y último término y agrupándolos en un paréntesis separado por el signo del segundo término y elevando al cuadrado nos queda:

$$(2x - 5y)^2$$

Al verificar que el doble producto del primero por el segundo término es $-20xy$ determinamos que es correcta la solución. De no ser así, esta solución no aplicaría.

Ejercicios Factorizar las siguientes expresiones

$a^2 - 2ab + b^2$	$16 - 104x^2 + 169x^4$
$a^2 + 2ab + b^2$	$\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
$x^2 - 2x + 1$	$1 + \frac{2b}{3} + \frac{b^2}{9}$
$y^4 + 1 + 2y^2$	$a^4 - a^2b^2 + \frac{b^4}{4}$
$a^2 - 10a + 25$	$\frac{1}{25} + \frac{25x^4}{36} - \frac{x^2}{3}$
$16 + 40x^2 + 25x^4$	$a^2 + 2a(a + b) + (a + b)^2$
$1 + 49a^2 - 14a$	$4 - 4(1 - a) + (1 - a)^2$
$1 - 2a^3 + a^6$	
$4x^2 - 12xy + 9y^2$	

$$\begin{aligned} 9b^2 - 30a^2b + 25a^4 \\ 1 + 14x^2y + 49x^4y^2 \\ 1 + a^{10} - 2a^5 \\ 49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4 \\ a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4m^2 - 4m(n - m) + (n - m)^2 \\ (m - n)^2 + 6(m - n) + 9 \\ (a + x)^2 - 2(a + x)(x + y) + (x + y)^2 \\ (m + n)^2 - 2(a - m)(m + n) + (a - m)^2 \end{aligned}$$

Caso IV - Diferencia de cuadrados

Se identifica por tener dos términos elevados al cuadrado y unidos por el signo menos. Se resuelve por medio de dos paréntesis, (parecido a los productos de la forma $(a - b)(a + b)$, uno negativo y otro positivo.

$$(ay - bx)(ay + bx) = (ay)^2 - (bx)^2$$

O en una forma más general para exponentes pares:

$$(ay)^{2n} - (bx)^{2m} = ((ay)^{2n} - (bx)^{2m})((ay)^{2n} + (bx)^{2m})$$

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones

- | | | |
|--------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - y^2$ | 11. $a^{10} - 49b^{12}$ | 19. $(x + y)^2 - a^2$ |
| 2. $a^2 - 1$ | 12. $196x^2y^4 - 225z^{12}$ | 20. $4 - (a + 1)^3$ |
| 3. $a^2 - 4$ | 13. $\frac{1}{4} - 9a^2$ | 21. $(m - n)^2 - 16$ |
| 4. $9 - b^2$ | 14. $1 - \frac{a^2}{25}$ | 22. $(x - y)^2 - 4z^2$ |
| 5. $1 - 4m^2$ | 15. $\frac{1}{16} - \frac{4x^2}{49}$ | 23. $(a + 2b)^2 - 1$ |
| 6. $a^2 - 25$ | 16. $a^{2n} - b^{2n}$ | 24. $(a + b)^2 - (c + d)^2$ |
| 7. $4a^2 - 9$ | 17. $4x^{2n} - \frac{1}{9}$ | 25. $(a - b)^2 - (c - d)^2$ |
| 8. $25 - 36x^4$ | 18. $a^{2n}b^{4n} - \frac{1}{25}$ | 26. $(a + x)^2 - (x + 2)^2$ |
| 9. $4x^2 - 81y^4$ | | |
| 10. $a^2b^2 - c^2$ | | |

Caso V. Suma y diferencia de cubos.

Es fácil verificar, mediante la multiplicación del segundo miembro de cada ecuación, las siguientes fórmulas de factorización para la suma y la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A + B)(A^2 - AB + B^2) \\ A^3 - B^3 &= (A - B)(A^2 + AB + B^2) \end{aligned}$$

Ejemplos

Factorizar las siguientes expresiones

- a. $y^3 - 27$, observemos primero que se puede escribir en otra forma: $y^3 - 3^3$
Así, advertimos que se trata de la diferencia de dos cubos. Si aplicamos la fórmula de factorización y usamos los siguientes valores $A = y$, y $B = 3$, obtenemos:

$$y^3 - 27 = y^3 - 3^3 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$$

- b. $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
c. $t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones

1. $1 + a^3$
2. $1 - a^3$
3. $x^3 + y^3$
4. $m^3 - n^3$
5. $y^3 - 1$

6. $8x^3 - 1$
7. $64 - a^6$
8. $8x^3 - 27y^3$
9. $x^{12} + y^{12}$
10. $x^9 + y^9$
11. $1 + (x + y)^3$

12. $1 - (a + b)^3$
13. $a^3 + (a + 1)^3$
14. $27x^3 - (x - y)^3$
15. $(x - y)^3 - (x + y)^3$
16. $(m - 2)^3 + (m - 3)^3$

Caso VI. Factorización del cubo perfecto.

Objetivos:

- Explicar cómo se realiza la factorización del cubo perfecto.
- Definir cómo se realiza la factorización mediante la diferencia de cubos.

Cubo perfecto

Se llama cubo perfecto al resultado de elevar un binomio al cubo, esto es:

Binomio al cubo.	Cubo perfecto (polinomio).
$(a+b)^3 =$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Para factorizar el polinomio cubo perfecto se hace lo siguiente:

1. Se escribe un paréntesis.
2. Se saca raíz cúbica del primer término.
3. Se saca raíz cúbica del cuarto término.
4. Se toma el signo del último término.
5. Se eleva al cubo el binomio.

Por lo anterior podemos decir que:

$$(27x^3 + 216y^3) = (3x + 6y)(9x^2 - 12xy + 36y^2)$$

Ejemplos

Realizar los binomios al cubo de las siguientes expresiones

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(x - 1)^3 = x^3 + 3.x^2.(-1) + 3.x.(-1)^2 + (-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(-x + 3)^3 = (-x)^3 + 3.(-x)^2.3 + 3.(-x).3^2 + 3^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$$

$$(-x - 4)^3 = (-x)^3 + 3.(-x)^2.(-4) + 3.(-x).(-4)^2 + (-4)^3 = -x^3 - 12x^2 - 48x - 64$$

$$(x^2 + 1)^3 = (x^2)^3 + 3.(x^2)^2.1 + 3.x^2.1^2 + 1^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

$$(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 + 3^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$$

$$(ax + 2b)^3 = (ax)^3 + 3.(ax)^2.2b + 3.ax.(2b)^2 + (2b)^3 = a^3x^3 + 6x^2a^2b + 12axb^2 + 8b^3$$

Caso VII - Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se identifica por tener tres términos, hay una literal con exponente al cuadrado y uno de ellos es el término independiente. Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados (pudiendo ser números negativos) den como resultado el término del medio.

Ejemplos Factorizar las siguientes expresiones

a. $a^2 + 2a - 15 = (a + 5)(a - 3)$

b. $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

Ejercicios Factorizar las siguientes expresiones

1. $x^2 + 7x + 10$

2. $x^2 - 5x + 6$

3. $x^2 + 3x - 10$

4. $a^2 + 4a + 3$

5. $m^2 + 5m - 17$

6. $y^2 - 9y + 20$

7. $c^2 + 5c - 24$

8. $12 - 8n + n^2$

9. $a^2 + 7a - 18$

10. $x^2 + 7x + 21$

11. $y^2 + y - 30$

12. $20 + a^2 - 21$

13. $28 + a^2 - 11a$

14. $n^2 - 6n - 40$

15. $x^2 - 5x - 36$

16. $x^2 + 15x + 56$

17. $a^2 + 7a - 60$

18. $x^2 + 8x - 180$

Casos especiales.

1. $x^4 + 5x^2 + 4$

2. $x^6 - 6x^3 - 7$

3. $x^2 + 2ax - 15a^2$

4. $a^2 - 4ab - 21b^2$

5. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$

6. $48 + 2x^2 - x^4$

Caso VIII - Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

En este caso se tienen 3 términos: El primer término tiene un coeficiente distinto de uno, la letra del segundo término tiene la mitad del exponente del término anterior y el tercer término es un término independiente, o sea sin una parte literal, así:

$$4x^2 + 12x + 9$$

Para factorizar una expresión de esta forma, se multiplica el término independiente por el coeficiente del primer término ($4x^2$):

$$4x^2 + 12x + (9 * 4)$$

$$4x^2 + 12x + 36$$

Luego debemos encontrar dos números que multiplicados entre sí den como resultado el término independiente y que su suma sea igual al coeficiente del término x :

$$6 * 6 = 36$$

$$6 + 6 = 12$$

Después procedemos a colocar de forma completa el término x^2 sin ser elevado al cuadrado en paréntesis, además colocamos los 2 términos descubiertos anteriormente:

$$(4x + 6)(4x + 6)$$

Para terminar dividimos estos términos por el coeficiente del término x^2 :

$$\frac{(4x + 6)(4x + 6)}{4} = \frac{4x + 6}{2} * \frac{4x + 6}{2}$$

Queda así terminada la factorización:

$$(2x + 3)(2x + 3) = (2x + 3)^2$$

Ejercicios Factorizar las siguientes expresiones

- | | | |
|---------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $2x^2 + 3x - 2$ | 6. $3 + 11a + 10a^2$ | 11. $12x^2 - 7x - 12$ |
| 2. $3x^2 - 5x - 2$ | 7. $12m^2 - 13m - 35$ | 12. $21x^2 + 11x - 2$ |
| 3. $6x^2 + 7x + 2$ | 8. $20y^2 + y - 1$ | 13. $m - 6 + 15m^2$ |
| 4. $5x^2 + 13x - 6$ | 9. $8a^2 - 14a - 15$ | 14. $44n + 20n^2 - 15$ |
| 5. $12x^2 - x - 6$ | 10. $16m + 15m^2 - 15$ | |

Casos especiales.

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1. $6x^4 + 5x^2 - 6$ | 3. $20x^2y^2 + 9xy - 20$ | 5. $6m^2 - 13am - 15a^2$ |
| 2. $5x^6 + 4x^3 - 12$ | 4. $21x^2 - 29xy - 72y^2$ | |

Regla de Ruffini (división algebraica)

Ahora se divide por regla de Ruffini, donde se toma como dividendo los coeficientes del enunciado y como divisor los posibles ceros y se prueba con la regla de Ruffini hasta que salga la división exacta (es decir de residuo cero).

-2	1	1	-5	-6
	-2	2	6	
	1	-1	-3	0
	Coef.			Resto

Se puede notar que al probar con menos dos, la división salió exacta.

Dos términos

Ahora, nuestra respuesta consta de 2 términos

Primer término

El -2 salió de un $x + 2$ porque si $x + 2 = 0$, saldría $x = -2$. Eso quiere decir que nuestro primer término es $x + 2$

Nota: Siempre se iguala a cero y siempre los primeros términos son de la forma $x + a$.

Segundo término

El segundo término es el coeficiente de nuestra división por Ruffini, es decir, el segundo término es $x^2 - x - 3$.

Nota: En el segundo término, a veces todavía se puede descomponer por aspa simple; si ese es el caso, se debe descomponer.

Resultado final

El resultado final es el siguiente:

$$(x + 2)(x^2 - x - 3)$$

Nota: Se debe dejar así, no se debe multiplicar, puesto que eso sería retroceder todos los pasos.

Ejercicios

Factorizar las siguientes expresiones

1. $x^3 + x^2 - x - 1$
2. $x^3 - 4x^2 + x + 6$
3. $a^3 - 3a^2 - 4a + 12$
4. $m^3 - 12m + 16$
5. $n^3 - 7n + 6$
6. $x^3 - 6x^2 + 32$
7. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
8. $x^4 - 22x^2 - 75$
9. $n^5 - 30n^3 - 25n^2 - 36n - 180$
10. $x^5 - 25x^3 + x^2 - 25$