TEMA 5. RECURSIÓN INTENSIVA (BACKTRACKING)

1. Introducción.

Existe una gran cantidad de problemas que se pueden formular en términos de grafos. Se entiendo por grafo, una estructura de datos en la memoria de un ordenador, que representan nodos y aristas en dicha memoria y sobre el que se realizan una serie de operaciones bastante concretas. En estos casos, si se dispone de métodos algorítmicos que permitan resolver el problema (como los que hemos visto en temas anteriores), dichos algoritmos exigen la visita de todos los nodos y/o todas las aristas y un cierto orden en los recorridos.

Otras veces esto no es así. En otros casos el grafo solo existe de forma implícita, debido a su gran tamaño. Es el caso de grafos de juegos como el ajedrez. Los nodos serían las situaciones posibles y las aristas las jugadas válidas. La mayor parte del tiempo, lo único que se tiene es una representación de la situación actual (nodo actual que visitamos) y un pequeño número de situaciones diferentes. En cualquier caso, las técnicas que se usan para recorrerlos son las mismas.

Un grafo implícito es un grafo para el que se dispone de una descripción de sus nodos y aristas de forma que se pueden construir partes relevantes del grafo a medida que progresa el recorrido. El ahorro de tiempo es grande si el recorrido tiene éxito antes de haber construido todo el grafo. También es grande el ahorro de memoria si podemos descartar los nodos que ya han sido examinados. Para ello utilizaremos la técnica de backtracking o recursividad intensiva.

2. Búsqueda exhaustiva.

Si un problema no tiene un método algorítmico que lo resuelva, se realizará una búsqueda exhaustiva de soluciones entre todas las posibilidades. Este método se conoce como fuerza bruta: se generan todos los casos posibles y se testean uno a uno hasta encontrar las soluciones necesarias (a veces basta con encontrar una, otras veces hay que encontrar todas, y otras la mejor).

Sin embargo, muchos de estos problemas pueden resolverse por etapas. Paso a paso se comprueba si se está creando una solución o si se han tomado decisiones que no conseguirán resolver el problema. En cada etapa se estudian las propiedades cuya validez ha de examinarse con objeto de seleccionar las adecuadas para proseguir con el siguiente paso. La gestión de las etapas, las posibles decisiones que se toman y las relaciones entre ellas,

suponen la generación de un árbol de decisiones. En los nodos se encuentran las soluciones parciales, y los enlaces entre ellos son las decisiones tomadas para cambiar de etapa. El avance a lo largo del árbol se detiene cuando se llega a una situación en que no puede tomarse ninguna decisión que permita obtener una solución, o cuando efectivamente se llega a resolver el problema. En estos casos se recupera una solución parcial anterior y se continúa buscando si es necesario.

3. Backtracking.

En su forma básica, la vuelta atrás es un recorrido similar a una búsqueda en profundidad en un grafo dirigido y acíclico. Suele ser un árbol (implícito). Lo normal es usar el recorrido preorden. El objetivo de este recorrido es encontrar soluciones para algún problema y se consigue construyendo soluciones parciales a medida que progresa el recorrido; esto va limitando las regiones en las que se puede encontrar una solución completa. El recorrido tiene éxito si, procediendo de esta forma, se puede definir por completo una solución. En este caso el algoritmo se detendrá (si solo buscamos una solución) o seguirá buscando soluciones alternativas (si las buscamos todas). El recorrido no tiene éxito si en alguna etapa la solución parcial que vamos construyendo no se puede completar. En ese caso, el recorrido vuelve atrás igual que en el recorrido en profundidad, eliminando sobre la marcha los elementos que se hubieran añadido en cada fase. Cuando vuelve a un nodo que tiene uno o más vecinos sin explorar, prosigue el recorrido de una solución.

En otras palabras, el backtracking es un método recursivo para buscar de soluciones por etapas de manera exhaustiva, usando prueba y error para obtener la solución completa del problema añadiendo decisiones a las soluciones parciales. Para ello utiliza como árbol de decisiones la propia organización de la recursión. Cuando se avanza de etapa se realiza una llamada recursiva, y cuando se retrocede lo que se hace es terminar el correspondiente proceso recursivo, con lo que efectivamente se vuelve al estado anterior por la pila de entornos creada en la recursión. En ese caso, el árbol de decisiones no es una estructura almacenada en memoria, sino un árbol implícito y que se habitualmente se denomina árbol de expansión o espacio de búsqueda.

En su forma básica se recorre en preorden el árbol de expansión: primero se evalúa el nodo raíz o actual, y después todos sus hijos de izquierda a derecha. Por tanto, hasta que no se termina de generar una solución parcial (sea válida o no) no se evalúa otra solución distinta. En los nodos del nivel k del árbol se encuentran las soluciones parciales formadas por k etapas o decisiones.

Hay que recordar que el árbol no está almacenado realmente en memoria, solo se recorre a la vez que se genera, por lo que todo lo que quiera conservarse (decisiones tomadas, soluciones ya encontradas al problema, etc.) debe ser guardado en alguna estructura adicional. Finalmente, debido a que la cantidad de decisiones a tomar y evaluar puede ser muy elevada, si es posible, es conveniente tener una función que determine si a partir de un nodo se puede llegar a una solución completa, de manera que utilizando esta función se puede evitar el recorrido de algunos nodos y por tanto reducir el tiempo de ejecución.

El esquema básico del enfoque Backtracking es el siguiente (k representa el nivel, y sol la solución parcial actual, la llamada inicial al procedimiento Backtracking recibiría como parámetros una solución vacía y valor de k igual a 1):

```
proc Backtracking(E/S sol: vector; E k: natural)                {1}
    var hijos: lista de decisiones
    hijos =  crear_nivel(k)                                     {2}
    desde i =  1 hasta total(hijos) hacer
        sol[k] =  hijos(i)                                      {3}
        si es_solución(sol,k) entonces
            tratar_solución(sol)                                {3a}
        sino
            si es_completable(sol,k) entonces
                Backtracking(sol,k+1)                           {3b}
                fsi
        fsi
    fdesde
fproc
```

Este esquema se corresponde con las siguientes ideas:

1. Al llegar a un nodo (al entrar en una llamada recursiva) se tiene una solución parcial formada por k – 1 etapas.
2. Se generan todas las decisiones posibles a partir de la solución parcial actual.
3. Para cada una de esas decisiones, se incorpora a la solución parcial (por lo que ahora tendrá k etapas) y se comprueba si se ha conseguido una solución total
    a. Si es una solución del problema, se gestiona: se guarda en una estructura de soluciones, se compara con otras anteriores, se muestra al usuario… y termina la búsqueda con esas decisiones.

b. Si no es una solución, si se detecta que la solución parcial es completable (en caso de tener una función capaz de detectar esta situación) se hace una nueva llamada recursiva con la nueva solución parcial y el nuevo nivel.

A este esquema básico pueden incorporarse muchas componentes, en general en forma de parámetros que se añaden en la llamada recursiva:

- Si lo único que buscábamos era una solución al problema, el algoritmo debe terminar en el punto (3a). Para ello, puede usarse un parámetro booleano de salida que se marque a TRUE en este punto, y que se use con una condicional en (3) para ver si hay que seguir añadiendo decisiones o no.
- Si lo que se quería eran todas las soluciones, el procedimiento recursivo necesitará otro parámetro de entrada/salida que será la estructura donde se almacenen todas las soluciones encontradas, por ejemplo, una lista que se actualiza en (3a).
- Si se buscaba la mejor solución al problema (como en los problemas de optimización), el procedimiento necesitará otro parámetro de entrada / salida que guarde la mejor solución conocida hasta el momento. Al encontrar una nueva solución en (3a) se compara con la que se pasa por parámetro, actualizándolo si es necesario, y se sigue con la búsqueda.
- Si la creación de los hijos en el punto (2) puede ser costosa, y el conjunto de decisiones que se pueden tomar en cada etapa k es siempre el mismo, se añade un nuevo parámetro al método para llevar un control de las decisiones que se pueden tomar en cada momento, por ejemplo, mediante un conjunto o vector. Cuando se toma una decisión en el apartado (3), se elimina del conjunto para que los hijos no puedan tomarla de nuevo.

Costes y eficiencia en Backtracking: La forma de generar y escoger entre las distintas posibilidades determina la forma del árbol, la cantidad de descendientes de un nodo, la profundidad del árbol, etc., y determina la cantidad de nodos del árbol y por tanto posiblemente la eficiencia del algoritmo, pues el tiempo de ejecución depende en gran medida del número de nodos que se generen y se visiten. Habitualmente, se tendrán como máximo tantos niveles como valores tenga una secuencia solución. Suponiendo que hay n etapas y m posibles decisiones en cada una de ellas (normalmente m es mayor que n) el orden de eficiencia de Backtracking está en $O(m^n)$; aun cuando se pueda tener m=n se consigue el orden potencial $O(n^n)$. En general, la eficiencia depende de:

- el tiempo necesario para generar las decisiones posibles en el pto (2),
- la cantidad de decisiones posibles que se obtienen en (2),
- incorporar una decisión a una solución parcial en el punto (3),
- el número de soluciones parciales que satisfacen es_completable,
- y en mucha menor medida, del tiempo que se tarde en comprobar es_solución y tratar_solución.

Los costes pueden mejorarse si se consigue que crear_nivel tenga alguna función acotadora para generar soluciones (por ejemplo, no basándose solo en la solución actual sino en varios pasos "por delante") que reduzcan el número de nodos generados. No obstante, hay que tener en cuenta que un buen predicado acotador puede precisar mucho tiempo de evaluación. Si se reduce a un solo nodo generado, el método Backtracking se convierte en una solución voraz: hay un total en O(n) nodos a generar en total. Si cada nodo tiene todas las decisiones posibles, pero de forma que no se puedan repetir en distintos niveles, el coste se acerca a O(n!). Si es posible, intentar reordenar las selecciones de forma que la cantidad de decisiones C_i que pueden tomarse en el nivel i sea creciente, es decir, $C_1<C_2<\ldots<C_n$. La idea es que en los primeros casos haya menos posibilidades a evaluar para que el árbol no se expanda demasiado pronto.

El principal problema de esta técnica es que al tener una gran carga de recursión y debido al alto paso de parámetros entre las llamadas, hay que tener en cuenta una serie de consideraciones. En primer lugar, el paso de parámetros únicamente como datos de entrada consume memoria y tiempo, ya que se realizan copias locales para cada uno de los entornos. Puede evitarse con el uso de parámetros por referencia, pero hay que tener cuidado con las modificaciones ya que afectarán en todos los niveles. Como el espacio de búsqueda es implícito, puede que se tengan que rehacer nodos que ya fueron resueltos, y que habrá que recalcular. Una forma de evitarlo (aunque depende del problema a resolver) es generar las decisiones de manera secuencial y evitar reordenaciones (en determinados problemas tomar la decisión 1 y luego la decisión 2 puede ser equivalente a tomar primero la decisión 2 y después la decisión 1). Si es posible, suele incorporarse a la llamada recursiva un parámetro para indicar el rango de decisiones válidas.

Por ser la recursión una forma de programación que genera entornos independientes (distintos estados en la pila de recursión), el error más grave a la hora de usar Backtracking es la corrupción. Se entiende por corrupción el que las modificaciones que se realicen en un entorno afecten involuntariamente a otro distinto. Hay dos tipos: corrupción entre hermanos y corrupción de padres a hijos. La corrupción entre hermanos se produce

cuando un padre trata de manera diferente a sus nodos hijos (punto 3 del esquema). La información que aporta el padre debe ser la misma para todos los hijos; lo único que debe cambiar es la incorporación de la decisión correspondiente a cada uno de ellos, y si no es así la creación de entornos es incorrecta. Hay dos formas de evitar este problema:

- Usar variables auxiliares que sean una copia del entorno del padre y pasarlas a los hijos. Así el entorno del padre está "seguro" ya que las modificaciones se hacen sobre el entorno auxiliar, y para el siguiente hijo se conservan las condiciones originales.
- Si al crear un hijo nuevo se modifica el entorno del padre para pasarlo a la llamada recursiva, al regresar de la misma hay que deshacer las acciones que han producido cambios para el siguiente hijo, y que no le afecten las decisiones de su hermano anterior.

La corrupción de padres a hijos (que realmente se produce en los hijos y afecta a su padre) se debe al paso de parámetros por referencia: como el parámetro es el mismo dentro de todo el árbol de decisión, los cambios que se realizan en los hijos se transmiten "hacia arriba" cuando termina la recursión, afectando por tanto al padre. No hay una forma general para evitar este problema excepto la precaución.

4. El problema de las ocho reinas.

En un tablero de ajedrez (tamaño 8x8) hay que colocar ocho reinas sin que se amenacen unas a otras. En el juego de ajedrez, la reina amenaza a aquellas fichas que se encuentran en su misma fila, columna, o diagonal. La forma más evidente de resolver el problema consiste en probar sistemáticamente todas las maneras de colocar ocho reinas en un tablero usando las coordenadas (x, y); para cada reina se implementaría con un doble bucle Desde, y solo en crear esos entornos (sin comprobar las soluciones) tendríamos un total de 64^8 posibilidades. Más de 281 billones (millones de millones) de casos. Siguiendo sin siquiera comprobar si hay amenazas entre reinas, entre todos esos casos se permitiría colocar distintas reinas en la misma casilla, lo que obviamente no es correcto. La primera mejora sería evitar repeticiones y cuidar el orden de colocación desde la casilla superior izquierda hasta la inferior derecha; así el número de situaciones a examinar sería:

$$\binom{64}{8} = 4.426.165.368$$

pero siguen siendo muchas y aún no se comprueban los requisitos. Una primera mejora de este último método explicado consistiría en no poner nunca más de una reina en una fila. Esto reduce la representación del tablero a un vector de ocho elementos, cada uno de los cuales da la posición de la reina dentro de la fila correspondiente (la reina K estará en la fila K y columna v[K]). Con esta situación se tendría 8 posibilidades para cada reina, es decir 8^8=16.777.216. No solo hemos reducido casos, es que además hemos conseguido avanzar hacia la solución al evitar una situación de amenaza. Ahora evitaremos que dos reinas se encuentren en la misma columna v[K]. Una vez que nos damos cuenta que con la representación del tablero mediante un vector nos impide intentar poner dos reinas en la misma fila, es natural darnos cuenta que también lo podemos hacer con las columnas, por tanto, ahora representaremos el tablero mediante un vector formado por ocho números diferentes entre 1 y 8, mediante una permutación de los ocho primeros números enteros:

- para la primera hay 8 posiciones (columnas) posibles,
- para la segunda ya solo hay 7 posiciones, etc.

La cantidad de casos es de 8!=40.320 posibilidades. Es en este momento cuando podemos empezar a pensar en Backtracking. En vez de crear esas 40.320 posibilidades y testear, vamos poniendo una reina cada vez: si se producen amenazas no seguimos, y si no hay amenazas continuamos con la recursión. Así, evitamos generar los casos como los que empiezan por (1, 2, x, x, x, x, x, x) porque la reina 1 y la reina 2 comparten la misma diagonal principal y se amenazan entre sí; no tiene sentido seguir. Usaremos las siguientes estructuras:

- Un conjunto col que representa las columnas ocupadas por las reinas usadas hasta el momento, con valores entre 1 y 8. Tiene los mismos valores que la solución del problema.
- Un conjunto diag45 que representa las diagonales de 45º del tablero. Una diagonal de 45º tiene la propiedad de que la suma de sus coordenadas es constante, por ejemplo, las casillas (2, 5) y (4, 3) están en la misma diagonal 45º ya que las dos coordenadas suman 7. El conjunto diag45 toma los valores entre 2 y 16.
- Un conjunto diag135 que representa las diagonales de 135º del tablero. Estas diagonales tienen la propiedad de que la diferencia de la primera coordenada menos la segunda es constante; las casillas (2, 4) y (5, 7) están en la misma diagonal 135º. Los valores del conjunto están entre -7 y 7.

El pseudocódigo sería:

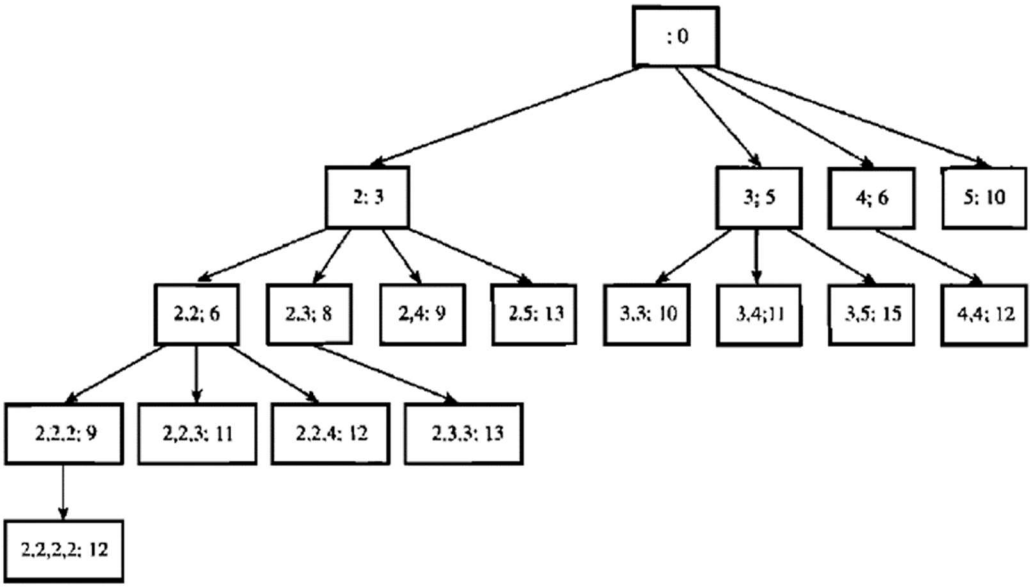
```
proc reinas(E k: natural, E col, diag45, diag135: conjunto, E/S sol: vector)
    si (k > 8)
        Escribir(sol)
    si no
        desde j = 1 hasta 8 hacer
            si (j∉col) y (j+k∉diag45) y (j-k∉diag135)
                sol[k]= j
                reinas(k+1, colU{j}, diag45U{j+k}, diag135U{j-k},sol)
            fsi
        fdesde
    fsi
fproc
```

y la llamada inicial es: reinas(1,Ø,Ø,Ø, sol_vacía).

Por la forma de pasar las estructuras de entorno no es necesario deshacer acciones, y la copia local se realiza en la ejecución de la recursión. El procedimiento anterior necesita 2.057 nodos, y basta con explorar 114 para encontrar una primera solución.

5. El problema de la mochila.

Tenemos n tipos de objetos y un número adecuado de objetos de cada tipo. Para i=1,2,…,n un objeto de tipo i tiene un peso w_i y un valor positivo v_i. La mochila puede llevar un peso que no exceda de W. Nuestro objetivo es llenar la mochila maximizando el valor de los objetos incluidos, sin sobrepasar su capacidad. Podemos tomar un objeto o prescindir de él, pero no podemos tomar una cierta parte de un objeto. Supongamos 4 tipos de objetos de pesos 2,3,4 y 5, cuyos valores son respectivamente 3,5,6 y 10. El valor de W es 8. Explorando el árbol implícito:



Se van cargando los objetos en la mochila por orden creciente de peso. Las cifras a la izquierda del punto y coma son los pesos de los objetos que hemos decidido incluir. A la derecha está el valor actual de la carga. Bajar de un nodo a uno de sus hijos se corresponde con decidir qué clase de objeto se va a poner en la mochila a continuación. Cualquier nodo, tal como el (2,3;8) corresponde a una solución parcial de nuestro problema. Inicialmente, la solución parcial está vacía. El algoritmo de backtracking explora el árbol como un recorrido en profundidad, construyendo nodos y soluciones parciales a medida que avanza. En el ejemplo, el primer nodo que se visita es el (2;3), el siguiente es (2,2;6), el tercero es (2,2,2;9) y el cuarto (2,2,2,2;12). A medida que se visita cada nodo nuevo, se extiende la solución parcial. Después de visitar estos 4 nodos, se bloquea el recorrido: el nodo (2,2,2,2;12) no tiene sucesores no visitados, puesto que añadir más elementos a esta solución parcial violaría la restricción de capacidad. Además, como podría ser la solución óptima de nuestro caso, la memorizamos. El algoritmo vuelve atrás ahora en busca de otras soluciones. En cada paso retrocedido por el árbol, se elimina el elemento correspondiente de la solución parcial. Vuelve primero a (2,2,2;9) que también carece de sucesores. Vuelve a (2,2;6), que tiene dos sucesores: (2,2,3;11) y (2,2,4;12) que no mejoran la solución memorizada antes. Vuelve otro paso más, y así sucesivamente. En (2,3,3;13) encontramos una solución mejor que la que ya tenemos, y después (3,5;15) es aún mejor, y acabará siendo la solución óptima del caso. El algoritmo es el siguiente, suponiendo que los datos n y W, y los vectores w[1..n] y v[1..n] son variables globales:

```
función mochilava(i,r)
    {Calcula el valor de la mejor carga que se puede construir
    empleando elementos de los tipos i a n y cuyo peso total no
    sobrepase r}
    b=0
    {Se prueban por turno las clases de objetos admisibles}
    para k=i hasta n hacer
        si w[k]≤r entonces
            b=max(b,v[k]+mochilava(k,r-w[k]))
    devolver b
```

La ejecución inicial es: mochilava(1,W). Cada llamada recursiva se corresponde con extender el recorrido en profundidad hasta el nivel inmediatamente inferior del árbol, mientras que el bucle para se encarga de examinar todas las posibilidades de un nivel dado. La composición de la carga que se está examinando está dada implícitamente por los valores de k en la pila recursiva.

6. Ramificación y poda.

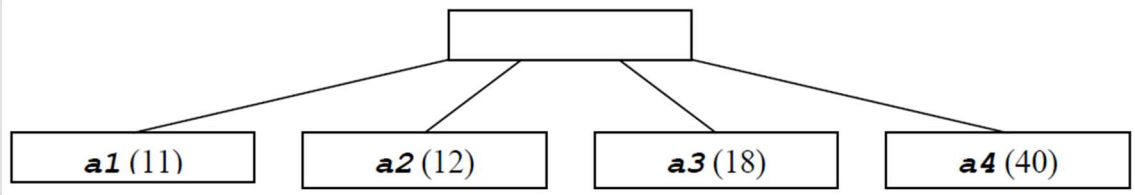
Al igual que la vuelta atrás, la ramificación y poda es una técnica para explorar un grafo dirigido implícito, que normalmente es acíclico (o incluso un árbol). Se trata de buscar la solución óptima de algún problema entre todas las soluciones posibles. En cada nodo, calculamos una cota del posible valor de aquellas soluciones que pudieran encontrarse más adelante en el grafo. Si esa cota muestra que cualquiera de estas soluciones es peor que la mejor hallada hasta el momento, no seguiremos explorando esa parte del grafo. Algunas veces, el cálculo de cotas se combina con un recorrido en anchura o en profundidad, y sirve para podar ciertas ramas de un árbol (o cerrar ciertos caminos de un grafo). Otras veces la cota calculada se utiliza también para seleccionar el camino que, entre los abiertos, parezca más prometedor para explorarlo primero. Las búsquedas en profundidad acaban de explorar los nodos por orden inverso al de su creación, empleando una pila para guardar los nodos que se han generado pero no han sido examinados aún. Las búsquedas en amplitud terminan de explorar los nodos en el orden en que se crean, usando una cola para guardar los nodos creados y aún no examinados. El método de ramificación y poda usa cálculos auxiliares para decidir en cada momento qué nodo debe explorarse y una lista con prioridad (idealmente implementada con un montículo) para almacenar los generados y aún no examinados.

Un ejemplo de ramificación y poda es el problema de la asignación: este problema consiste en asignar N tareas a N agentes, de manera que cada tarea

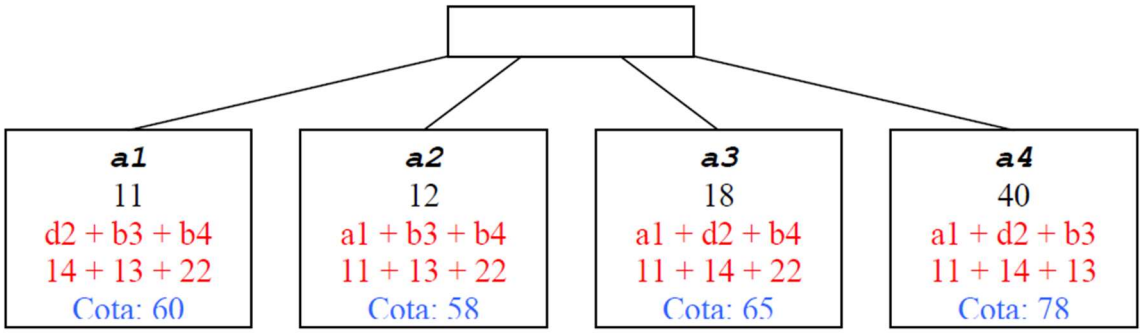
se realice una única vez y cada agente tenga asociada una única tarea. Cada asignación tiene un coste M[i, j], donde i es el agente y j la tarea, así que de las N! posibles asignaciones válidas hay que determinar la que tenga un coste total lo menor posible. Supongamos que la matriz de costes es la siguiente:

	1	**2**	**3**	**4**
a	11	12	18	40
b	14	15	13	22
c	11	17	19	23
d	17	14	20	28

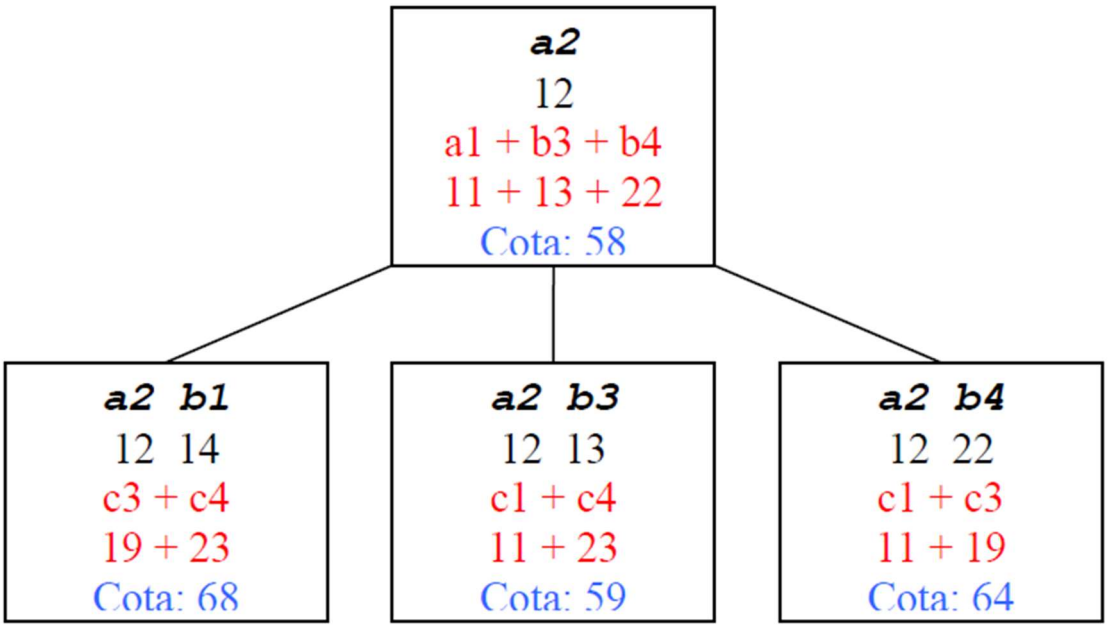
Empezamos creando las cotas: vamos a obtener una cota real, basada en soluciones conocidas y que nos permita podar candidatos no deseables, y otra estimada que sirva para terminar rápidamente el problema si se encuentran candidatos con valores próximos a ella. Para este ejemplo, usaremos como cota real cualquier asignación válida que sea fácil de encontrar; por ejemplo la solución a1, b2, c3, d4, que tiene coste 11+15+19+28=73. Cualquier candidato parcial que tenga un coste superior a 73 será rechazado (podado) ya que en vez de seguir generándolo nos podríamos quedar con la solución completa ya encontrada. Como cota estimada consideraremos, por ejemplo, el coste mínimo que se tendría por parte de los agentes. Los mínimos de las filas serían 11(a1)+13(b3)+11(c1)+14(d2). Hay que observar que esto solo es una estimación de lo mejor que podría pasar, pero que no es una solución real (la tarea 1 se asignaría dos veces), y tendría un coste de 49. Pero también podríamos haber considerado el coste mínimo de realizar las tareas, es decir, los mínimos de las columnas 11(a1)+12(a2)+13(b3)+22(b4)=58. Considerando ambas estimaciones, la cota estimada será max{49, 58} = 58. Así, el rango de valores válidos para explorar será [58, 73]. Para realizar la ramificación y poda recorreremos un árbol implícito en el que los nodos se corresponden con asignaciones parciales de agentes a tareas. En la raíz del árbol no hay asignación. En cada etapa (nivel del árbol) se asigna un agente más. Las posibilidades para la primera asignación serían:



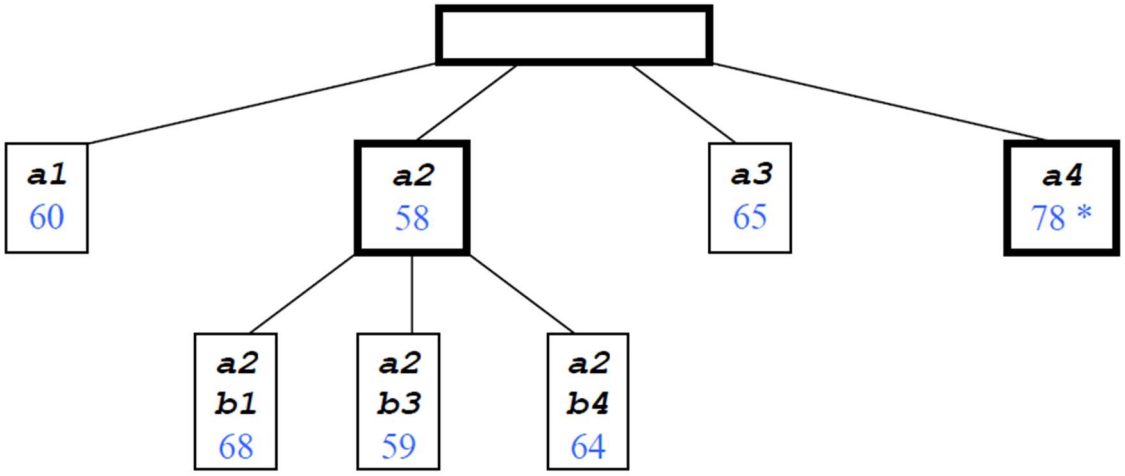
Para poder decidir por cuál de los candidatos sigue la exploración del árbol, en cada nodo se calcula una cota de la mejor solución que se podría conseguir a partir de ese nodo. Consideraremos el mínimo de los costes necesarios para realizar las tareas que aún faltan por asignar; por ejemplo, tras la asignación a1 estimamos el mejor coste de hacer la tarea 2 (que sería d2, coste 14), la tarea 3 (b3, coste 13) y la tarea 4 (b4, coste 22). Una vez más, esto es una estimación y no forma una solución completa posible. Añadimos esta información a los nodos (en negro, las decisiones tomadas; en rojo, las estimaciones; en azul, la cota obtenida):



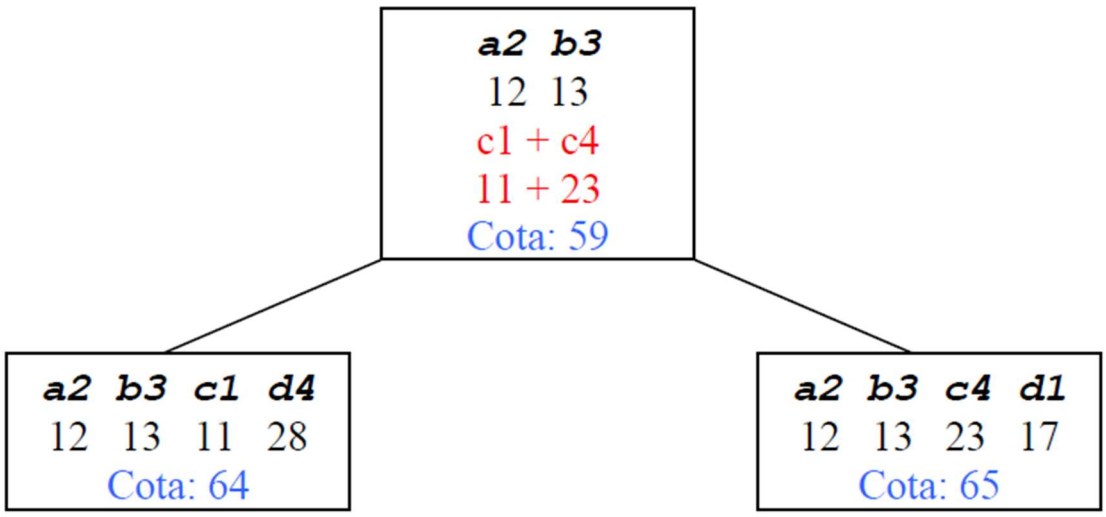
De estos cuatro nodos, podemos ver que el último (el que empieza asignando a4 y que ni siquiera es una solución completa) en el mejor de los casos tiene un coste de 78, que es mayor que la cota superior conocida (y que sí es un solución válida). Por tanto, ese nodo no es necesario explorarlo y se poda. De los otros tres nodos, denominados nodos vivos, se escoge el que tenga la mejor cota disponible y se continúa la exploración, intentando hacer la asignación del agente b.



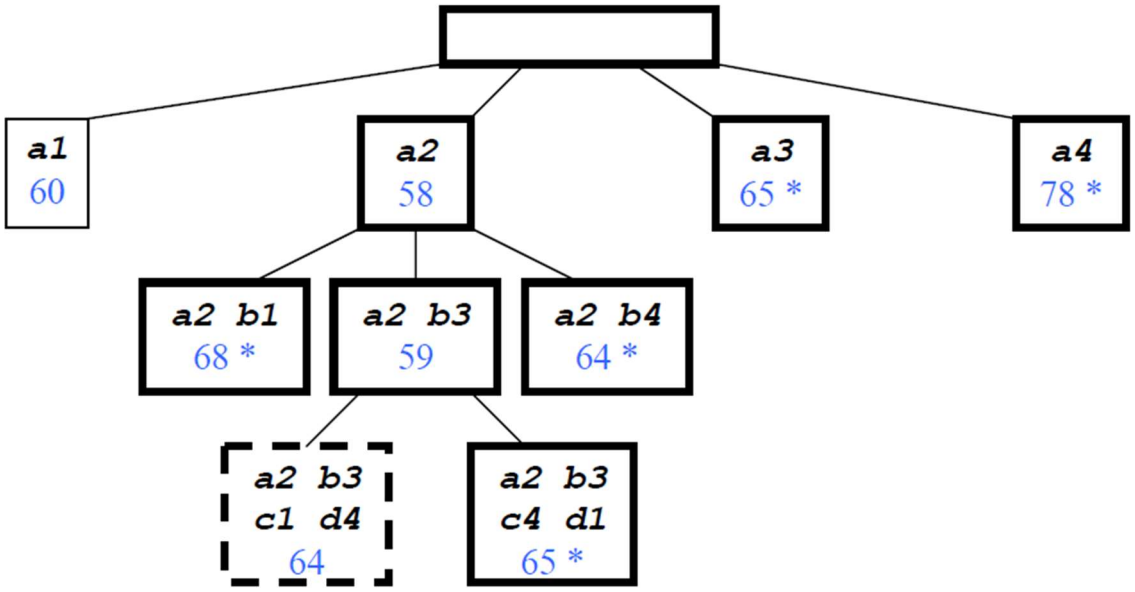
Ahora la estructura simplificada del árbol (recordar que solo se guardan los nodos que aún no han sido explorados) sería como sigue, con los nodos podados marcados con * y los que ya no están en la cola de prioridad con borde oscuro.



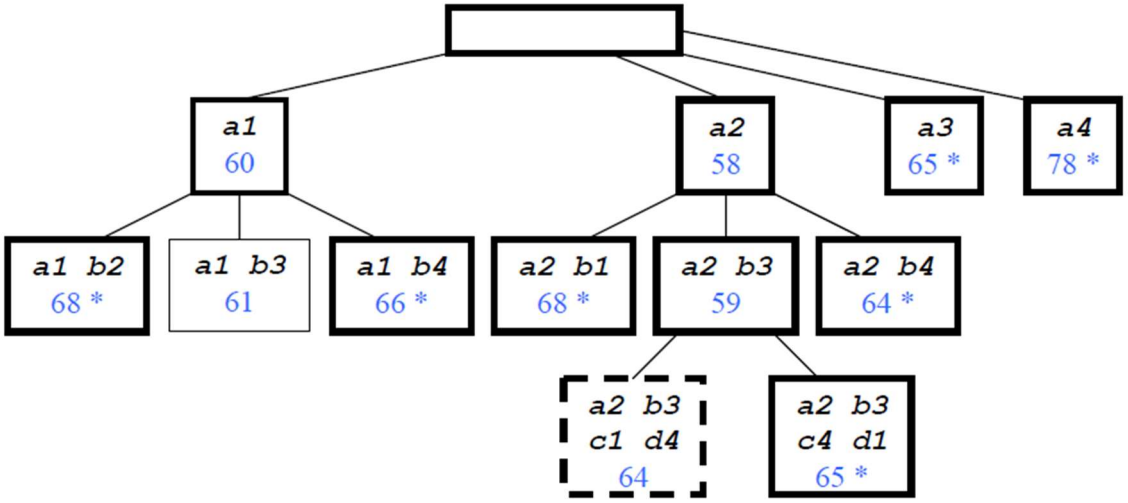
De los nodos vivos se coge el que tenga la cota más pequeña y se añade otro agente, y como solo quedaría una tarea por realizar la estimación es realmente una solución completa.



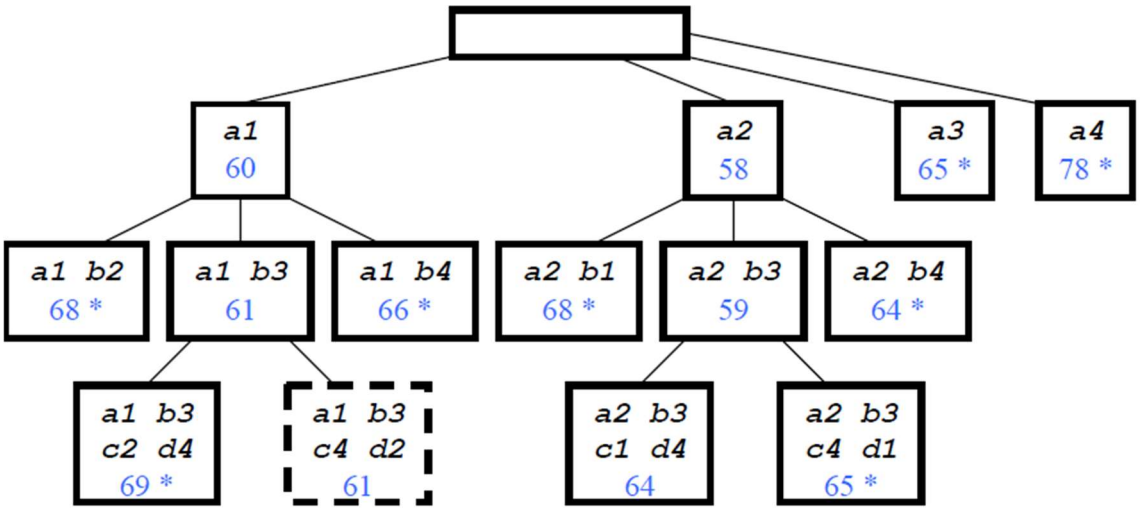
Al haber encontrado una solución mejor que la conocida, la cota superior se actualiza a 64, por lo que el rango de valores admisibles es [58, 64]; esto hace que haya más nodos que se podan automáticamente, y el árbol quedaría (punteada la solución óptima hasta ahora):



Puede verse que al haber encontrado esta solución a2 b3 c1 d4 el árbol se ha visto muy reducido a la hora de explorar nodos vivos, quedando solo uno. Acabamos el ejemplo con los dos últimos árboles implícitos desarrollados tras a1:



y tras desarrollar a1 b3 se encuentra la que finalmente será la solución óptima



Si se hubiese hecho una búsqueda completa se habría necesitado recorrer una cantidad de nodos igual a 4+4*3+4*3*2=40 nodos, mientras que con la ramificación y poda solo ha hecho falta crear 14 nodos.

La necesidad de mantener una lista de nodos que han sido generados pero que no han sido explorados en su totalidad, situados en diferentes niveles del árbol y preferiblemente ordenados por orden de las cotas correspondientes, hace que la ramificación y poda resulten difíciles de programar. El montículo es una estructura de datos ideal para almacenar esta lista. A diferencia del recorrido en profundidad, y de las técnicas relacionadas, el programador no dispone de una formulación recursiva elegante de la ramificación y poda. Sin embargo, suele emplearse en la práctica.

Cuando usamos esta técnica hay que llegar a un equilibrio en los recursos dedicados al cálculo de la cota, aunque suele ser rentable invertir un tiempo razonable en su cálculo. Aunque no es posible asegurar lo bien que se va a comportar esta técnica en un problema dado, lo más probable es que una cota mejor haga que examinemos menos nodos y que alcancemos la solución más rápido. Su inconveniente es que tendremos que emplear más tiempo en cada nodo calculando la cota correspondiente. En el caso peor, podría ocurrir que una cota excelente no nos permita cortar ninguna rama, desperdiciándose el trabajo de su cálculo en cada nodo.