Algunos ejercicios resueltos tema 4

En esta nota resolveremos algunos de los ejercicios propuestos en la hoja de ejercicios del tema 4. Hay que tener en cuenta que algunos ya han sido resueltos y están disponibles en el fichero tema4_1.pdf

1.- Reducir a forma normal cada uno de los siguientes $\lambda-$términos[1]:

a) $\underline{(\lambda x.xy)(\lambda u.vuu)} \rightarrow \underline{(\lambda u.vuu)y} \rightarrow vyy$

b) $(\lambda x.(\lambda u.xu)x)x$

En este caso, la abstracción $\lambda x.(\lambda u.xu)x$ se aplica a x. La variable x es ligada en la abstracción y libre en el término al que se aplica por lo que no se puede hacer la sustitución directamente. Debemos, por lo tanto, hacer un cambio de variable:

$$(\lambda x.(\lambda u.xu)x)x \equiv \underline{(\lambda y.(\lambda u.yu)y)x} \rightarrow \underline{(\lambda u.xu)x} \rightarrow xx$$

La última sustitución es correcta pues x es libre en la abstracción.

e)

$$(\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u) \equiv \underline{(\lambda x.(\lambda yz.xzy))\ (\lambda uv.u)} \rightarrow \lambda yz.\ (\lambda uv.u)zy \equiv$$

$$\equiv \lambda yz.\underline{((\lambda u.(\lambda v.u)z)y} \rightarrow \lambda yz.\underline{(\lambda v.z)y} \rightarrow \lambda yz.z$$

2.- Consideremos la codificación a la Church de los números naturales 2 y 3, esto es, $\underline{2} \equiv \lambda fx.f(fx)$ y $\underline{3} \equiv \lambda fx.f(f(fx))$. Vamos a calcular $2+3$, $2 \cdot 3$ y 2^3.

$$\textbf{add}\ \underline{2}\ \underline{3} \equiv \underline{(\lambda mnfx.mf(nfx))\ \underline{2}\ \underline{3}} \twoheadrightarrow \lambda fx.\ \underline{2}\ f\ (\underline{3}\ f\ x) \equiv$$

$$\equiv \lambda fx.\ \underline{2}\ f\ \underline{((\lambda gy.g(g(gy)))\ f\ x)} \twoheadrightarrow \lambda fx.\ \underline{2}\ f(f(f(fx))) \equiv$$

$$\equiv \underline{(\lambda gy.g(gy))\ f\ (f(f(fx)))} \twoheadrightarrow \lambda fx.f(f(f(f(fx)))) \equiv \underline{5}$$

[1] En todos los casos subrayamos el término al que aplicamos la reducción

$$\textbf{mult}\ \underline{2}\ \underline{3} \equiv \underline{(\lambda mngy.m(ng)y)\ \underline{2}\ \underline{3}} \twoheadrightarrow \lambda gy.\ \underline{2}\ (\underline{3}\ g)\ y \equiv$$

$$\equiv \lambda gy.\underline{(\lambda fx.f(f(x))(\underline{3}\ g)\ y} \twoheadrightarrow \lambda gy.\underline{3}\ g\ \underline{(\underline{3}\ g\ y)} \twoheadrightarrow \lambda gy.\underline{\underline{3}\ g\ (g(g(gy)))} \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda gy.g(g(g(g(g(gy))))) \equiv \underline{6}$$

$$\textbf{expt}\ \underline{2}\ \underline{3} \twoheadrightarrow \underline{3}\ \underline{2} \equiv \underline{(\lambda fx.f(f(fx)))\ \underline{2}} \to \lambda x.\underline{2}(\underline{2}\ (\underline{2}\ x)) \equiv \lambda x.\underline{2}\ (\underline{2}\ \underline{((\lambda fy.f(fy))\ x)}) \to$$

$$\to \lambda x.\ \underline{2}\ (\underline{2}\ (\lambda y.\ x(xy))) \equiv \lambda x.\underline{2}\ (\underline{(\lambda fz.f(fz))\ (\lambda y.x(xy))}) \to$$

$$\to \lambda x.\underline{2}\ (\lambda z.\ (\lambda y.x(xy))\underline{((\lambda y.x(xy))z)}) \to$$

$$\to \lambda x.\underline{2}\ (\lambda z.\underline{(\lambda y.x(xy))\ (x(xz))}) \to \lambda x.\underline{2}\ (\lambda z.x(x(x(xz))) \equiv$$

$$\equiv \lambda x.\ \underline{(\lambda fy.f(fy))\ (\lambda z.x(x(x(xz)))} \to$$

$$\to \lambda x.\lambda y.(\lambda z.x(x(x(xz)))\underline{((\lambda z.x(x(x(xz)))y))} \to$$

$$\to \lambda x.\lambda y.\underline{(\lambda z.x(x(x(xz)))(x(x(x(xy))))} \to$$

$$\to \lambda x.\lambda y.x(x(x(x(x(x(x(xy))))))) \equiv \lambda xy.x(x(x(x(x(x(x(xy))))))) \equiv \underline{8}$$

3.- El problema 5 de la hoja de ejercicios pedía restar 2 a 4. Esto es lo mismo que aplicar a cuatro dos veces el predecesor. Por lo tanto, vamos a ver cómo funciona el $\lambda-$término **pre** aplicado a $\underline{4}$.

$$\mathbf{pre}\ \underline{4} \to \lambda fx.\ \mathbf{snd}\ (\underline{\underline{4}\ (\mathbf{prefn}\ f)(\mathbf{pair}\ xx)}) \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx.\ \mathbf{snd}(\mathbf{prefn}\ f(\mathbf{prefn}\ f(\mathbf{prefn}\ f(\underline{\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{pair}\ xx)})))))^{(*)} \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx.\ \mathbf{snd}(\mathbf{prefn}\ f(\mathbf{prefn}\ f\underline{(\mathbf{prefn}\ f(\mathbf{pair}\ (fx)\ x)}))) \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx.\ \mathbf{snd}(\mathbf{prefn}\ f\underline{(\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{pair}\ (f(fx))\ (fx))})) \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx.\ \mathbf{snd}\underline{(\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{pair}\ (f(f(fx)))\ f((fx))))}) \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx.\ \underline{\mathbf{snd}(\mathbf{pair}\ (f(f(f(fx))))\ (f(f(fx))))} \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \lambda fx. f(f(fx)) \equiv \underline{3}$$

De forma análoga, se mostraría que **pre** $\underline{3} \twoheadrightarrow \underline{2}$ y, por lo tanto, que **sub** $\underline{4}\ \underline{2} \twoheadrightarrow \underline{2}$.

$^{(*)}$ Veamos cómo funciona el $\lambda-$término **prefn** que se aplica reiteradamente en lo anterior:

$$\mathbf{prefn}\ f\ (\mathbf{pair}\ x\ y) \equiv (\lambda gp.\mathbf{pair}\ ((g\ \mathbf{fst}p))\ (\mathbf{fst}\ p))\ f\ (\mathbf{pair}x\ y) \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \mathbf{pair}\ (f(\mathbf{fst}(\mathbf{pair}\ x\ y)))\ (\mathbf{fst}(\mathbf{pair}\ x\ y)) \twoheadrightarrow \mathbf{pair}\ (fx)\ x.$$