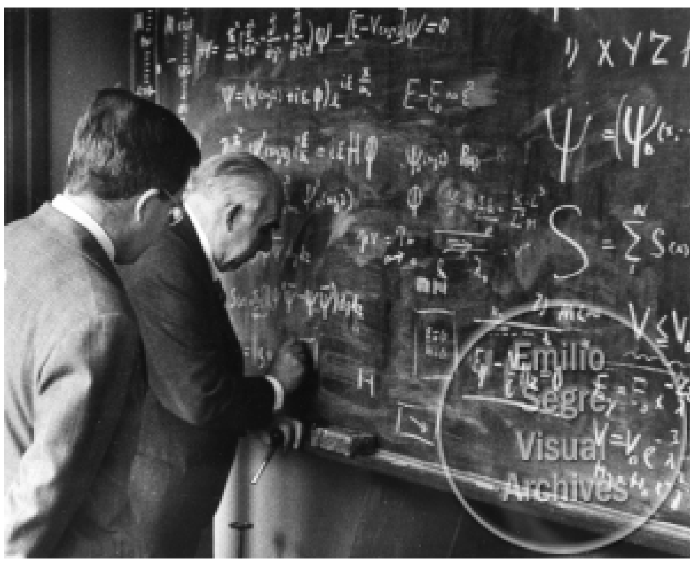
Contenidos

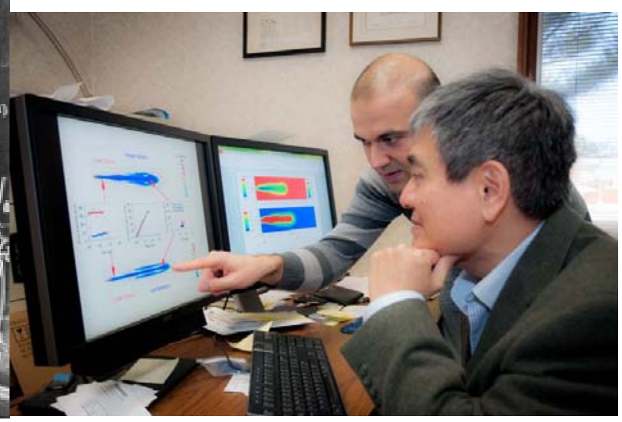
- Las funciones en la modelización.
- Modelamiento gráfico.
- Geometría analítica.
- Modelamiento con funciones.

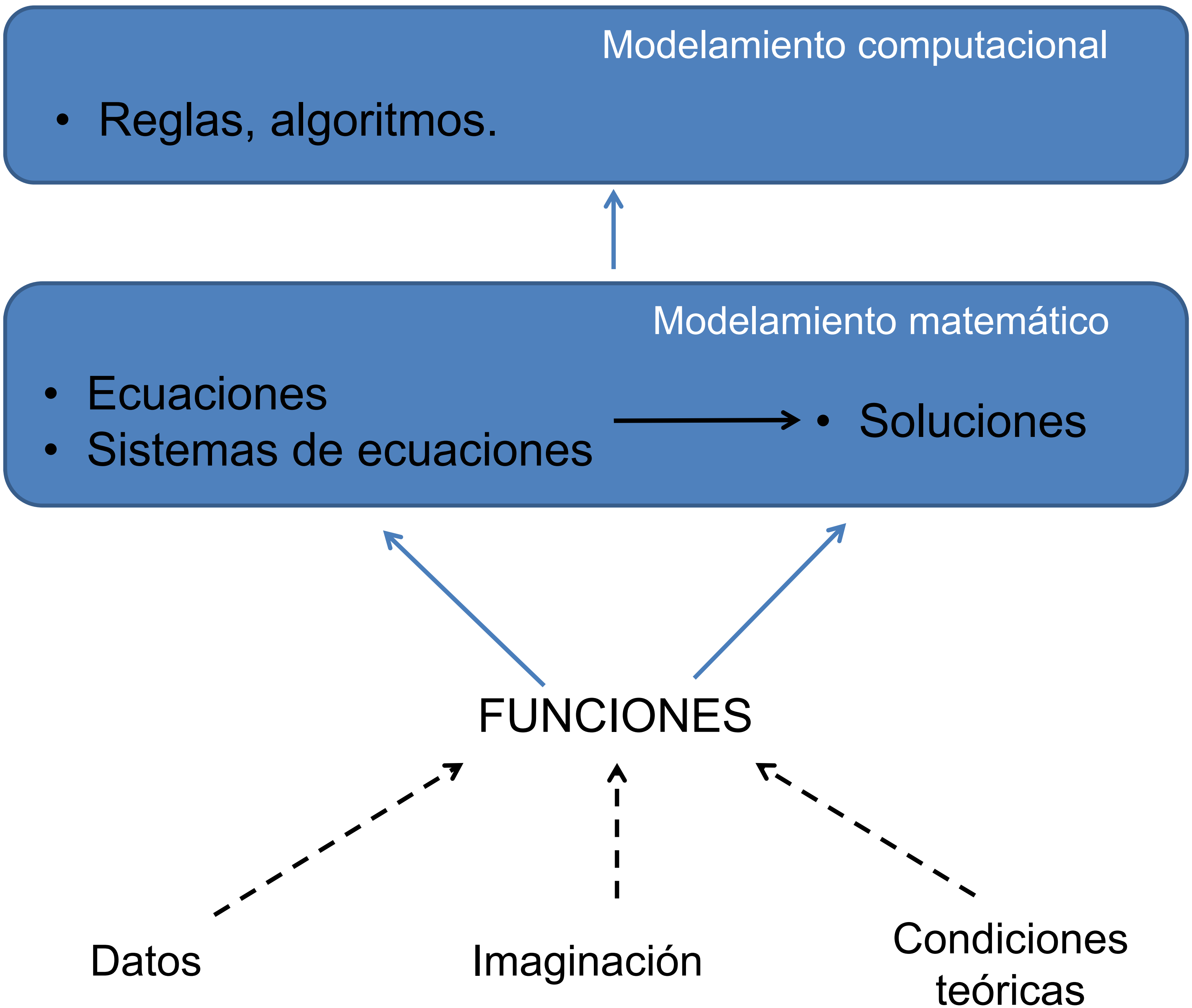
Modelos de infancia

Modelos físicos

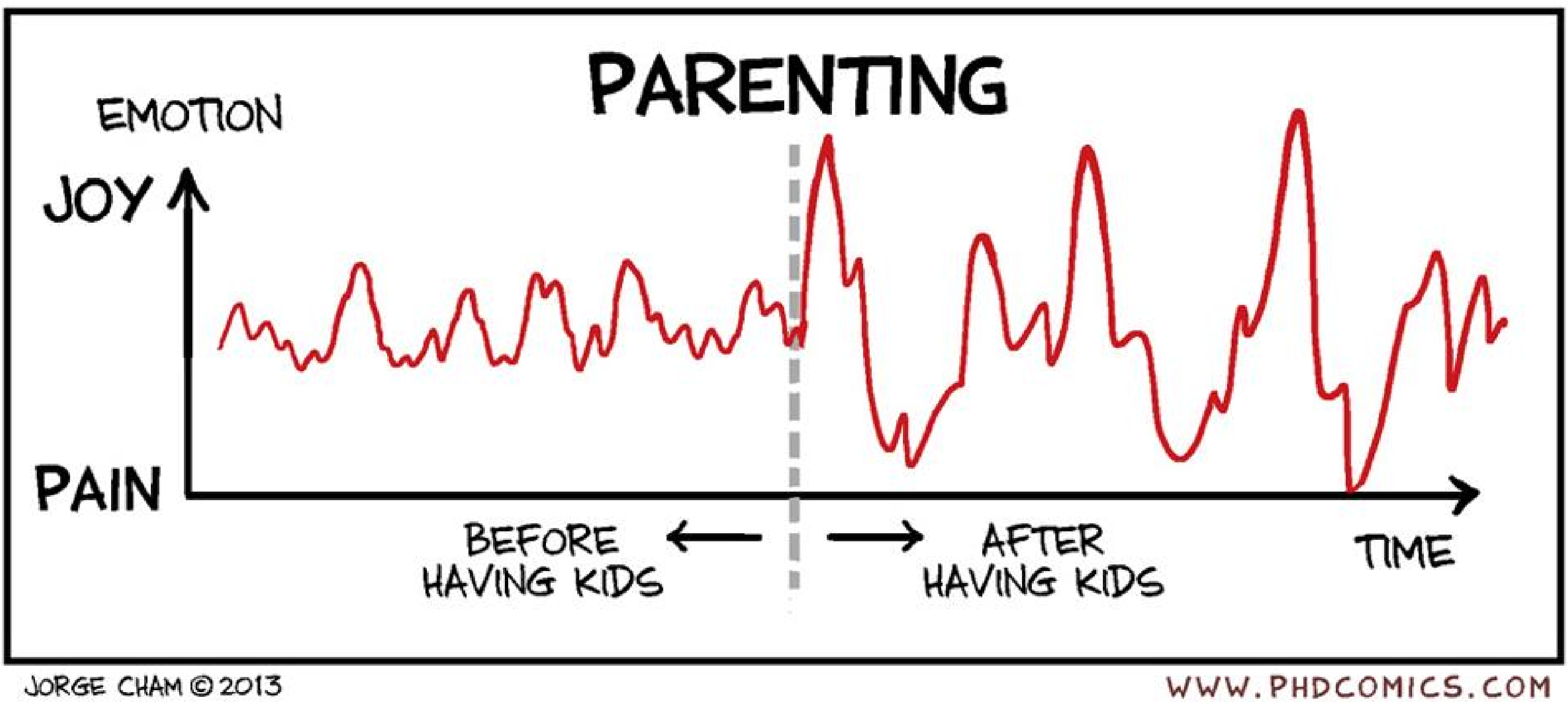
Modelos formales



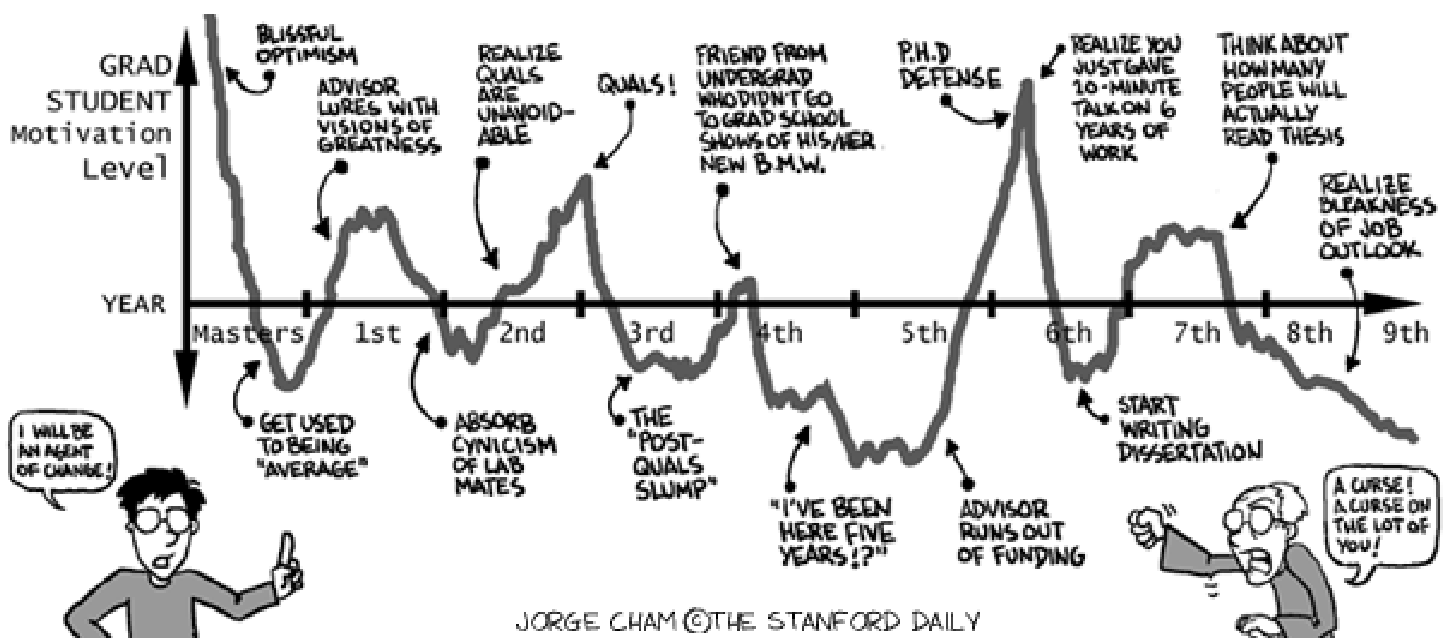


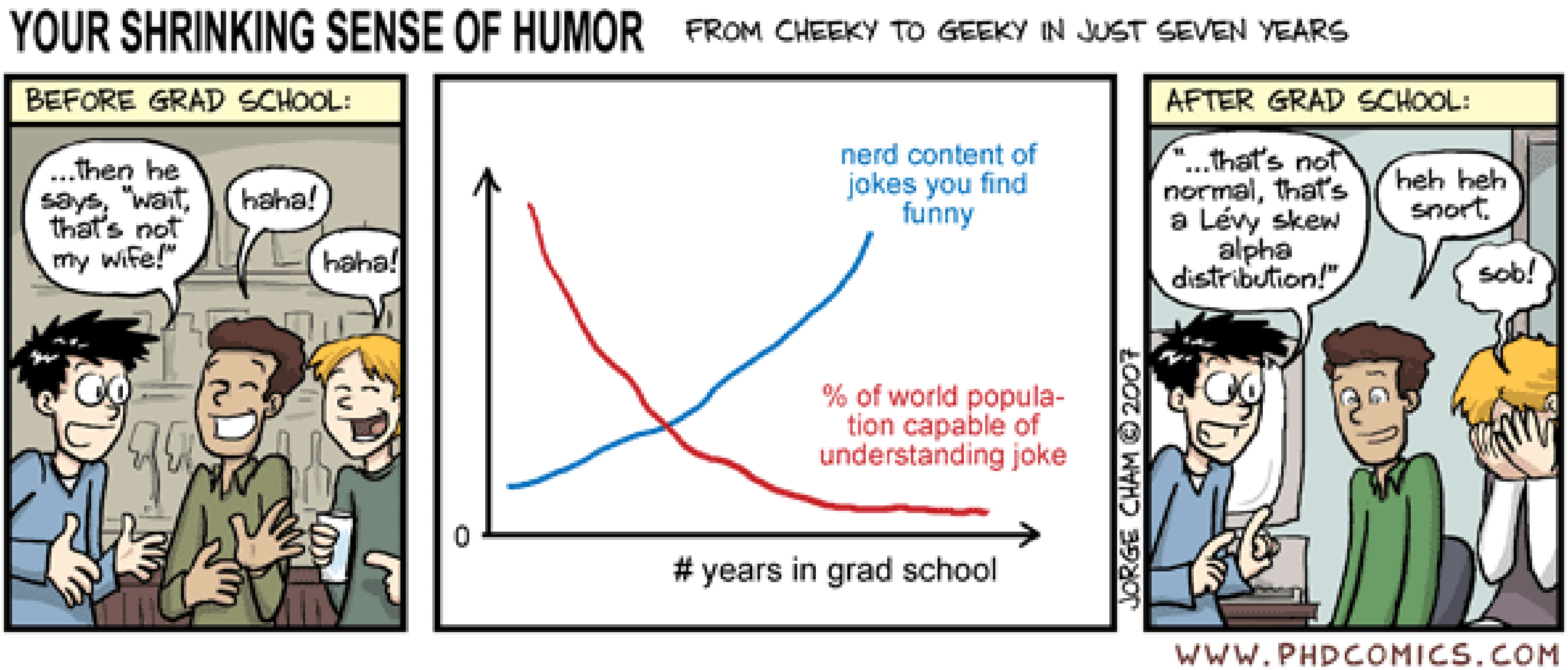

Modelamiento computacional
• Reglas, algoritmos.
Modelamiento matemático
• Ecuaciones
• Sistemas de ecuaciones
• Soluciones
FUNCIONES
Datos
Imaginación
Condiciones teóricas

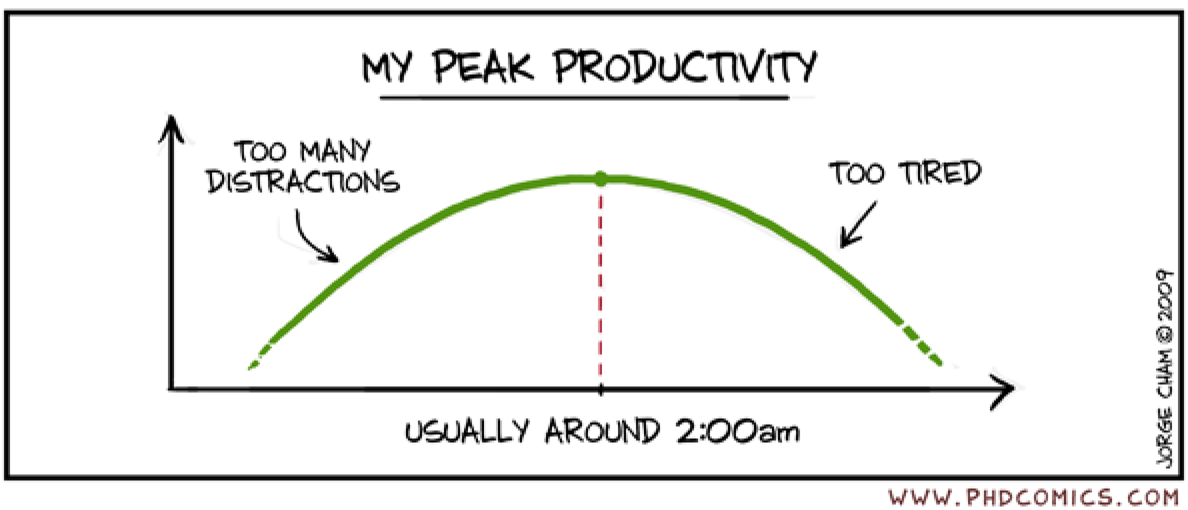
“Graficología”




YOUR LIFE AMBITION - What Happened??
WORLD, HERE I COME!
Ambition
Win Nobel Prize
Revolutionize your field
Get a job at a top University
Get a job
Attend that Conference in PoDunk, MN
Hope they have Pepperoni Pizza
1st Year
2nd Year
3rd Year
4th Year
5th Year
JORGE CHAM © 2008
HAPPY HOUR, HERE I COME!
WWW.PHDCOMICS.COM


GRAD STUDENT Motivation Level
YEAR
Masters
1st
2nd
3rd
4th
5th
6th
7th
8th
9th
BLISSFUL OPTIMISM
ADVISOR LURES WITH VISIONS OF GREATNESS
REALIZE QUALS ARE UNAVOIDABLE
QUALS!
FRIEND FROM UNDERGRAD WHO DIDN'T GO TO GRAD SCHOOL SHOWS OF HIS/HER NEW B.M.W.
P.H.D DEFENSE
REALIZE YOU JUST GAVE 10-MINUTE TALK ON 6 YEARS OF WORK
THINK ABOUT HOW MANY PEOPLE WILL ACTUALLY READ THESIS
REALIZE BLEAKNESS OF JOB OUTLOOK
GET USED TO BEING "AVERAGE"
ABSORB CYNICISM OF LAB MATES
THE "POST-QUALS SLUMP"
"I'VE BEEN HERE FIVE YEARS!?"
ADVISOR RUNS OUT OF FUNDING
START WRITING DISSERTATION
I WILL BE AN AGENT OF CHANGE!
A CURSE! A CURSE ON THE LOT OF YOU!
JORGE CHAM ©THE STANFORD DAILY


YOUR SHRINKING SENSE OF HUMOR
FROM CHEEKY TO GEEKY IN JUST SEVEN YEARS
BEFORE GRAD SCHOOL:
...then he says, "wait, that's not my wife!"
haha!
haha!
nerd content of jokes you find funny
% of world population capable of understanding joke
0
years in grad school
JORGE CHAM © 2007
AFTER GRAD SCHOOL:
"...that's not normal, that's a Lévy skew alpha distribution!"
heh heh snort.
sob!
WWW.PHDCOMICS.COM


MY PEAK PRODUCTIVITY
TOO MANY DISTRACTIONS
TOO TIRED
USUALLY AROUND 2:00am
JORGE CHAM © 2009
WWW.PHDCOMICS.COM

“Si lo puedes graficar, lo puedes modelar”

(Futura frase célebre de Pablo Razeto)

“El mayor aporte al modelamiento matemático en la historia lo hizo René Descartes, al fundar la geometría analítica”

(Futura frase célebre de Pablo Razeto)

Geometría analítica

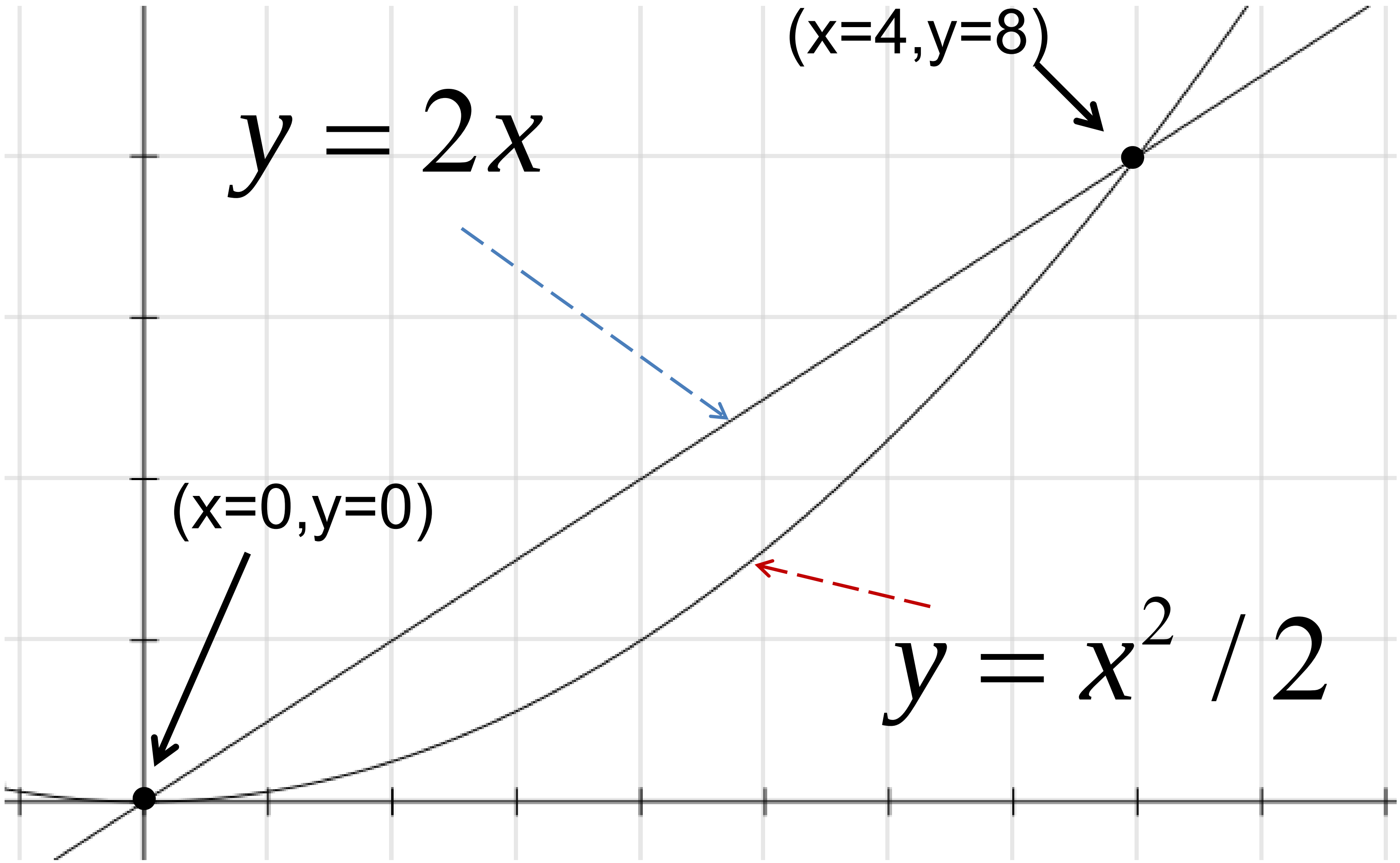
“Javier tiene dos veces más edad que María y tiene la mitad que el cuadrado de la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno?”

Ecuaciones:

$$y = 2x \qquad\qquad y = x^2 / 2$$

Soluciones:

$$\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 8 \end{matrix}$$



(x=4,y=8)
$y = 2x$
(x=0,y=0)
$y = x^2 / 2$

Ecuaciones:

$$y = 2x$$

$$\downarrow$$

- Ecuación de la recta (ecuación lineal):

$$y = a + bx$$

$$a = 0$$

$$b = 2$$

$$y = x^2 / 2$$

$$\downarrow$$

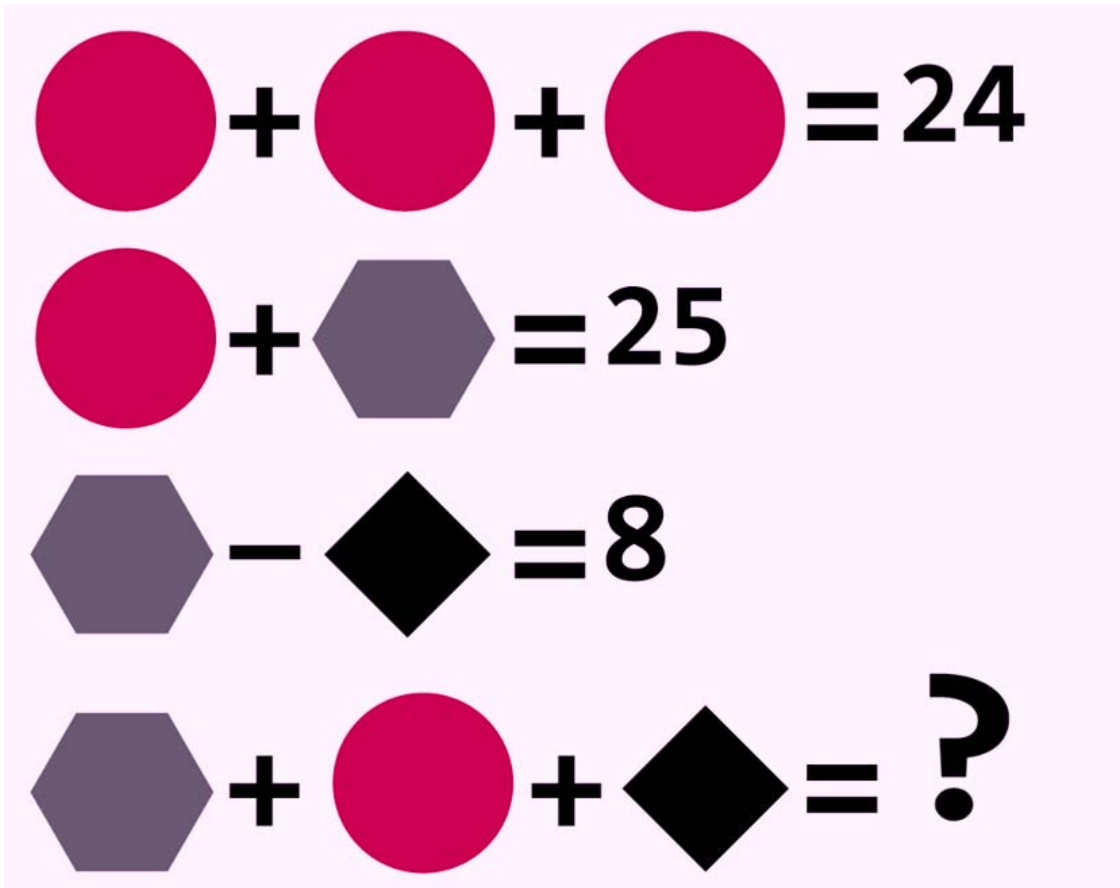
- Ecuación de la parábola (ecuación cuadrática):

$$y = a + bx + cx^2$$

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 1/2$$


+ + = 24
+ = 25
− = 8
+ + = ?

Las letras son mudas… Pero no tanto!

$f(x) = g(x) + h(x)$ $\quad 1, 2, \ldots, n$ $\quad \dfrac{\delta x}{\delta t}$ $\quad x^2 + y^2 = z^2$

$$\underbrace{a\ b\ c\ d\ e}_{\text{Parámetros de funciones}}\ \overbrace{f\ g\ h}^{\text{Funciones}}\ \underbrace{i\ j\ k\ l}_{\text{Subíndices}}\ \overbrace{m\ n}^{\text{Número de elementos}}\ o\ \underbrace{p\ q\ r\ s}_{\text{Proposiciones lógicas}}\ \overbrace{t}^{\text{Tiempo}}\ \underbrace{u\ v\ w}_{\text{Variables de integración}}\ \overbrace{x\ y\ z}^{\text{Variables}}$$

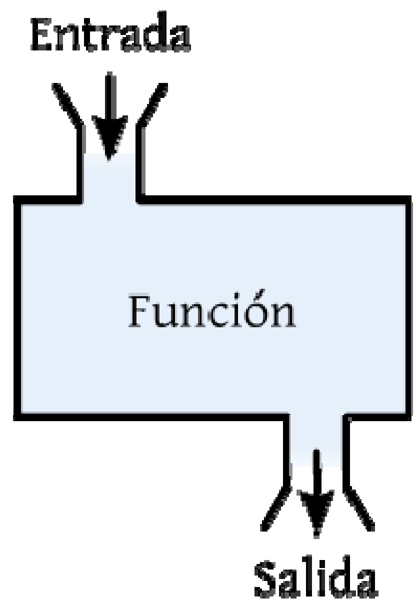
$ax + by$ $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}x_j$ $\quad p \rightarrow q \& \neg r$ $\quad \displaystyle\int udv$

“Funciones”

- Una función es una “máquina” que transforma objetos desde un conjunto (*dominio*) a otro (*recorrido*, *imagen*).

$$f\colon\ A \to B$$

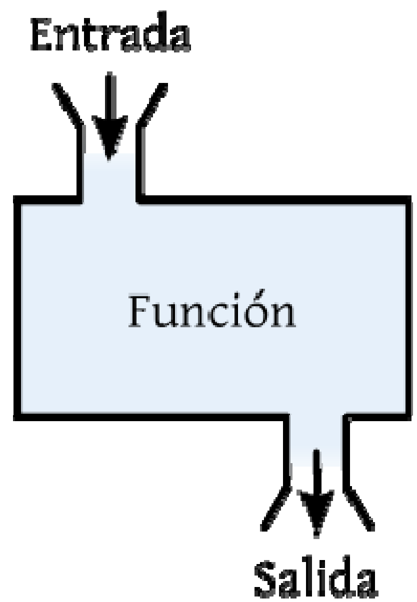
Pueden tener unidades diferentes



“Funciones”

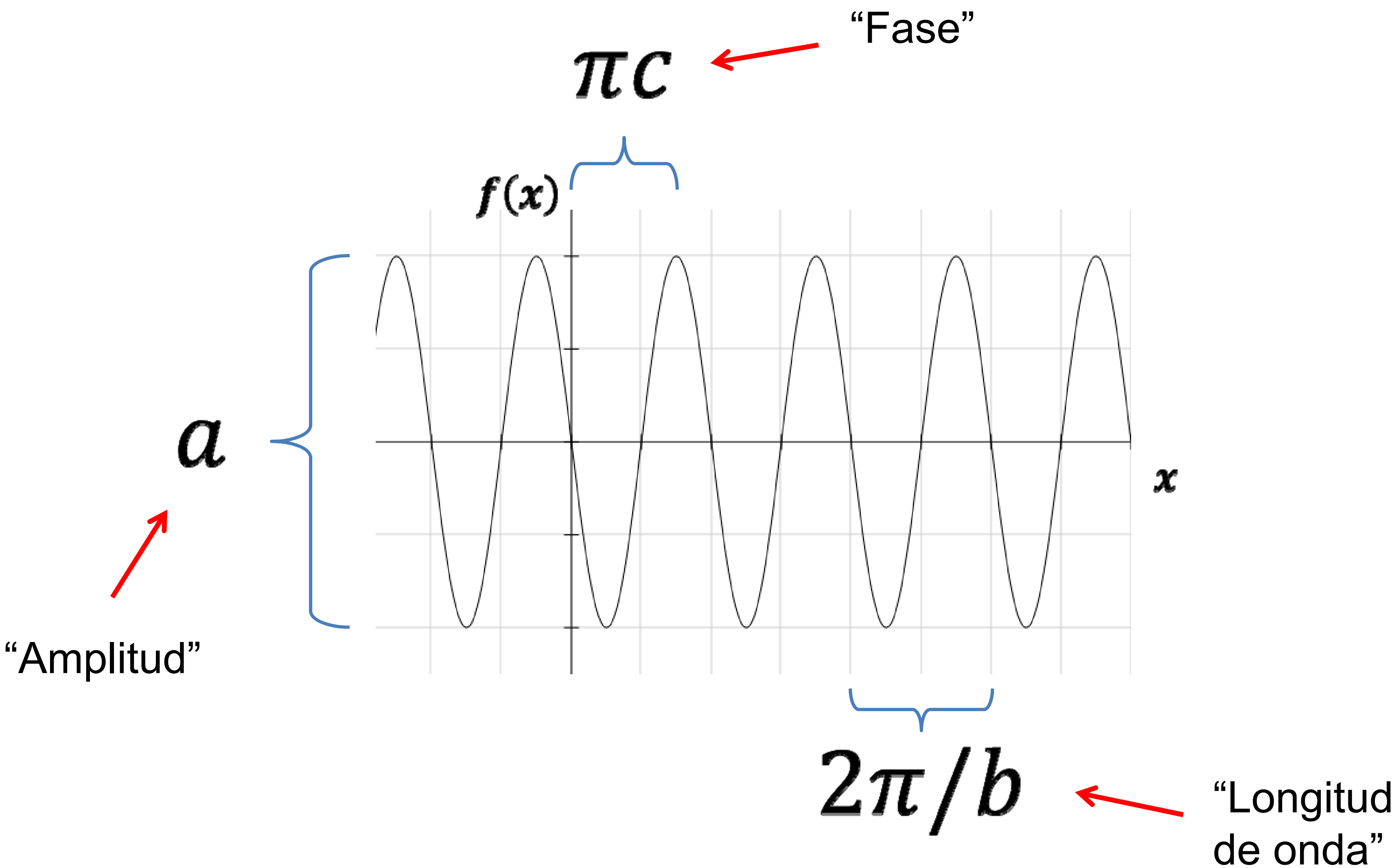
- El conjunto de partida y llegada generalmente es $\mathbb{R}^n$ o un intervalo de éste. El más sencillo es $\mathbb{R}$, entonces:

$$y = f(x)$$



Funciones útiles para modelar

Función seno (o coseno): $f(x) = a\,sen(bx + c)$



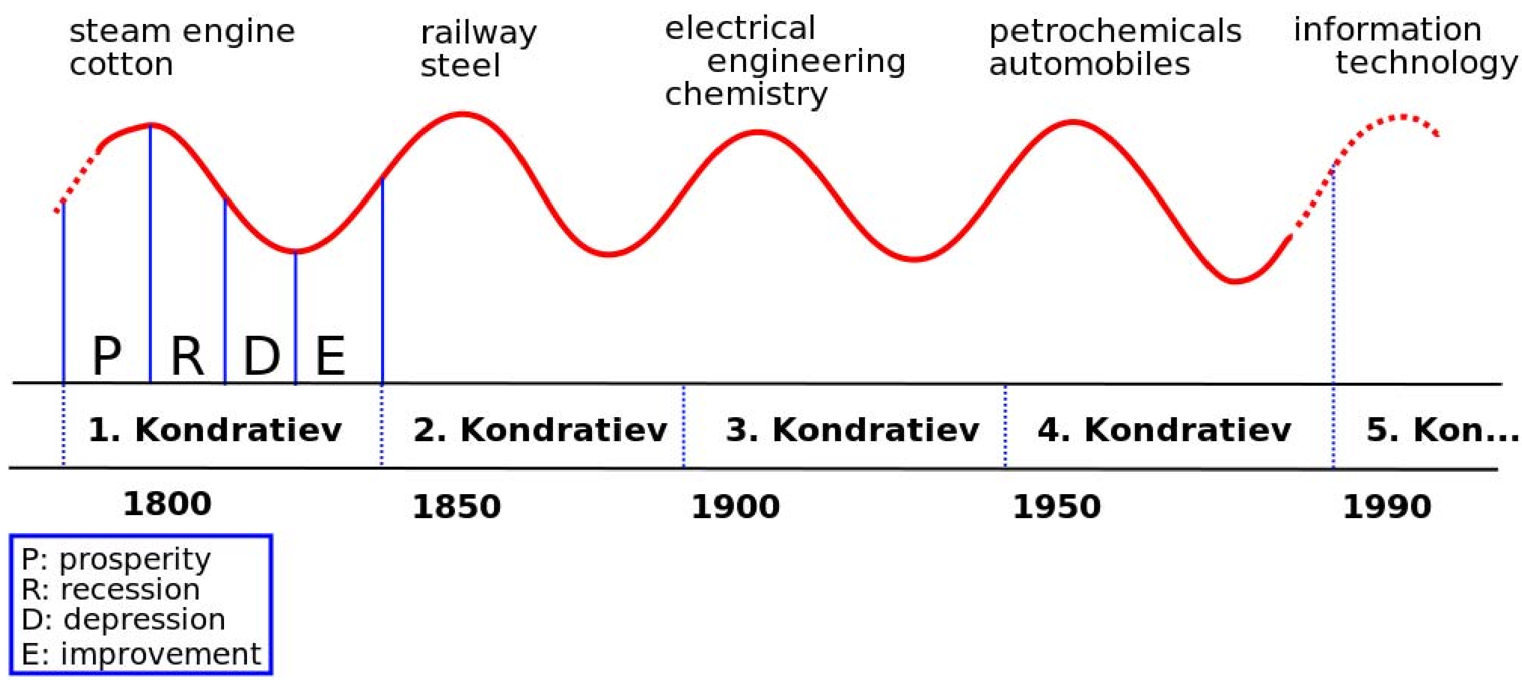
Modelos de oscilaciones

Alexander Bogdánov
(1873–1928)

- "Ondas de **agua**, vibraciones de **sonido** en el aire, vibraciones **térmicas** de cuerpos sólidos, ondas **eléctricas** tanto de luz como "invisibles". Pero este mecanismo es aplicable sin límite a la realidad **viva**: casi todos sus procesos tienen características periódicamente oscilatorias. Tales como el **pulso y la respiración**, el **trabajo y el reposo** en cada órgano, **vigilia y sueño** en el organismo. Los **cambios de generaciones** son una serie de ondas superpuestas – un genuino "pulso de vida" a lo largo de siglos, etc."

Ciclos económicos

- Onda de Kondratiev

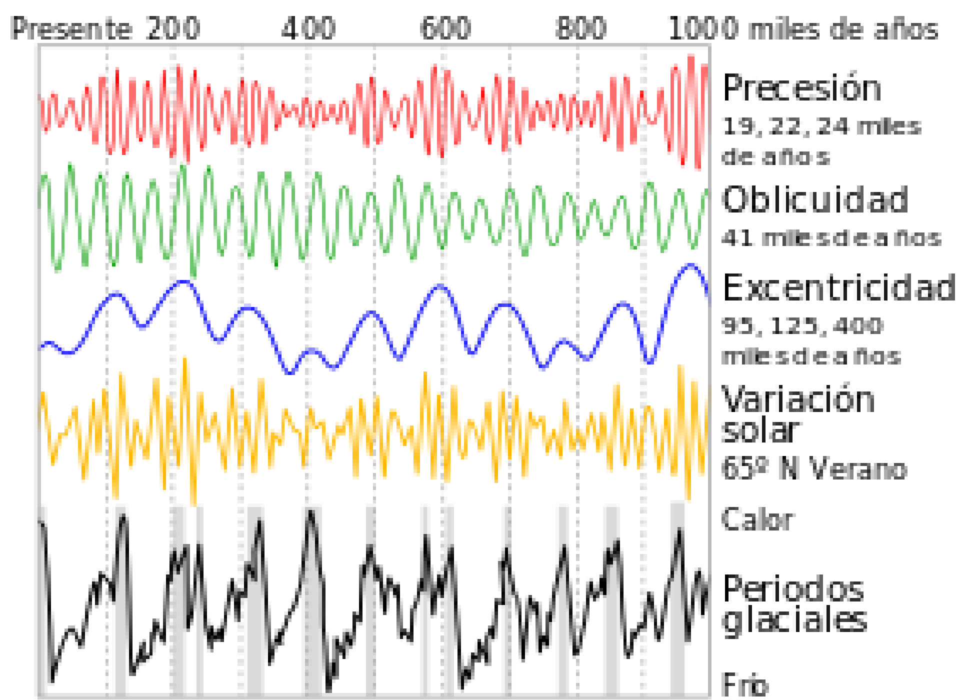


Ciclos económicos

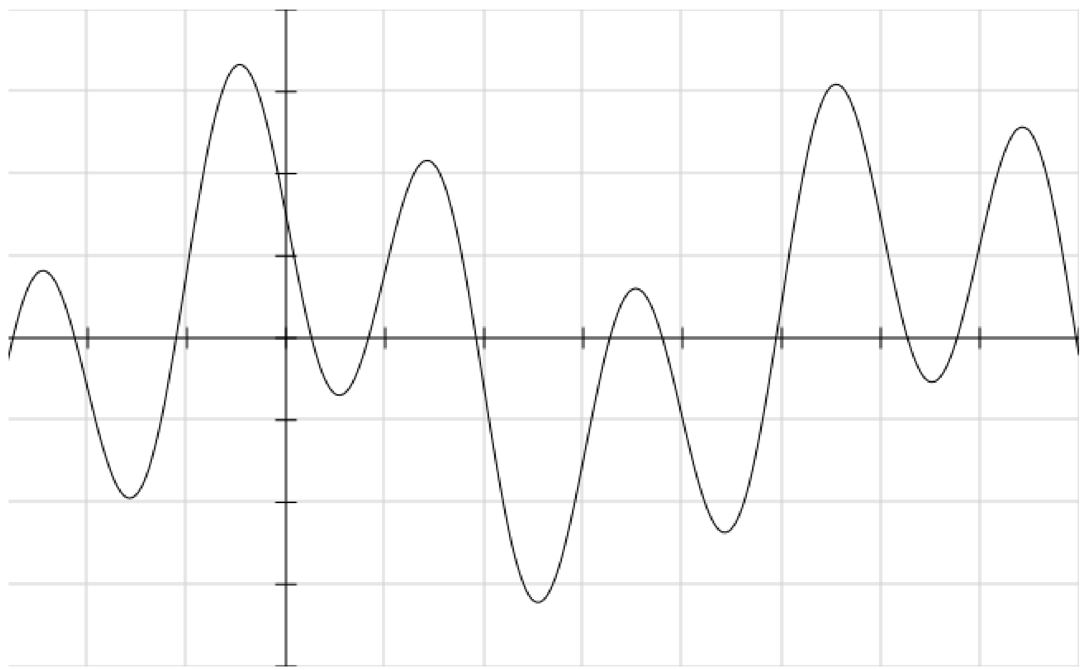
- **Ciclo de Kitchin** (ciclo de inventario) **3–5 años**
- **Ciclo de Juglar** (inversión fija) **7–11 años**
- **Oscilación de Kuznets** (inversión en infraestructura) **15–25 años**
- **Onda Kondratiev** (base tecnológica) **45–60 años**
- **Ciclo económico de Kaldor** -----
- **Crisis cíclicas** (teoría marxista) -----

Ciclos de Milankovitch

- Ciclos **climáticos** debidos a variaciones **astronómicas** (orbitales) de la Tierra.

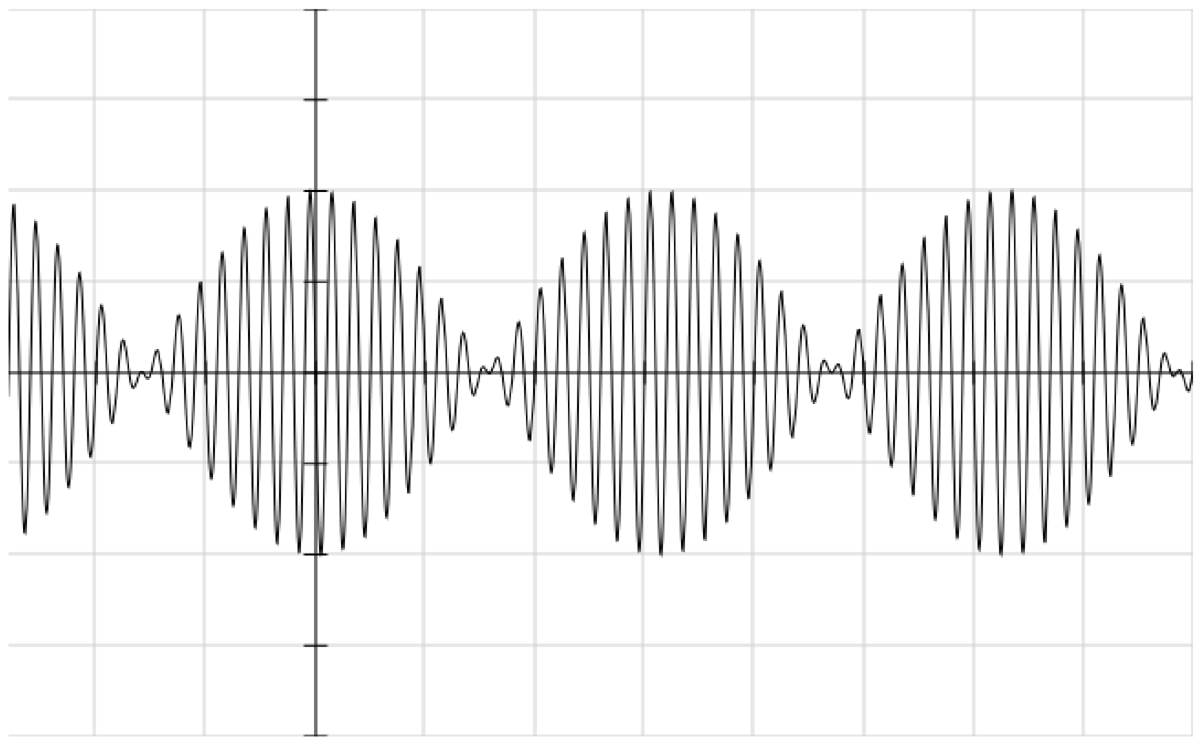


$$f(x) = a_1 sen(b_1 x + c_1) + a_2 cos(b_2 x + c_2)$$

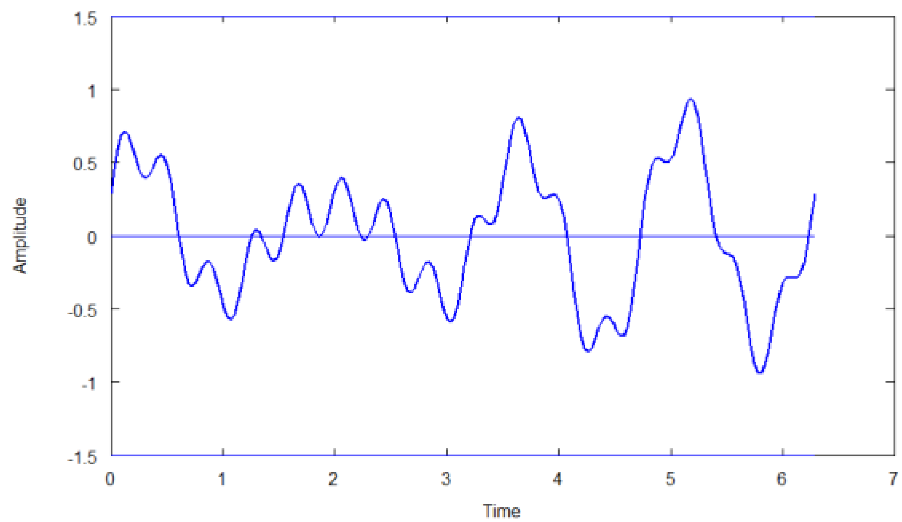


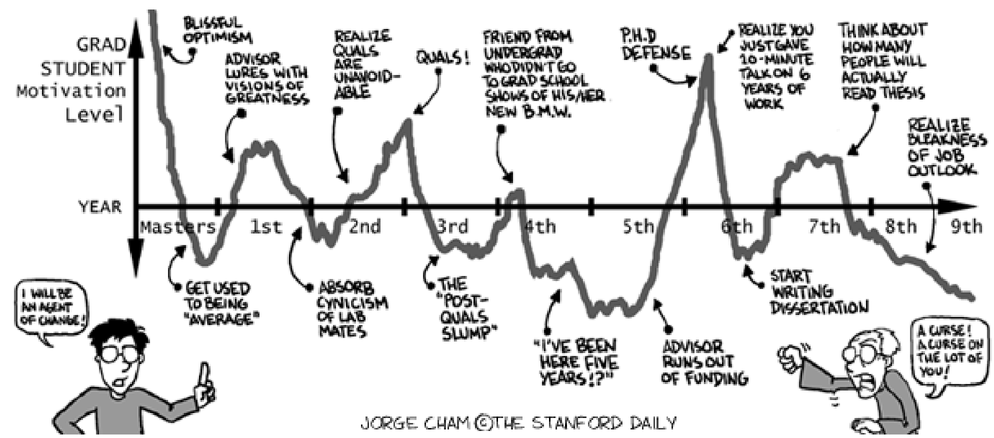
$$f(x) = A \cdot cos(b_1 x + c_1) \cdot sen(b_2 x + c_2)$$

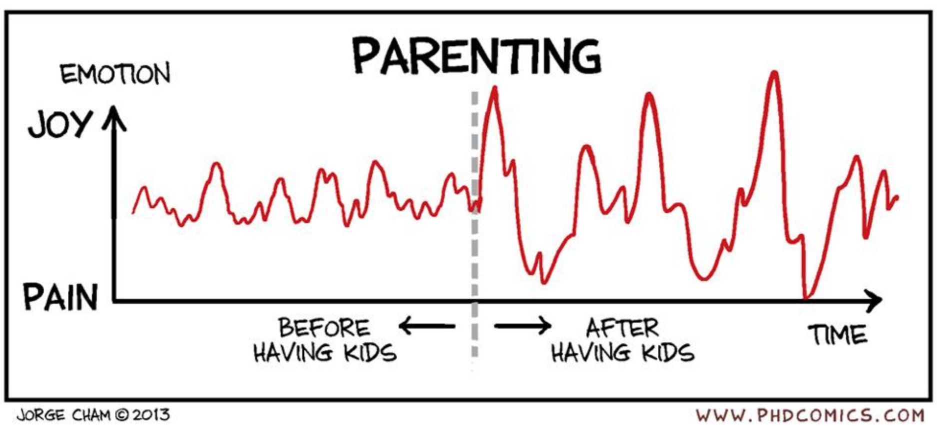
$$= A(x) \cdot sen(b_2 x + c_2)$$

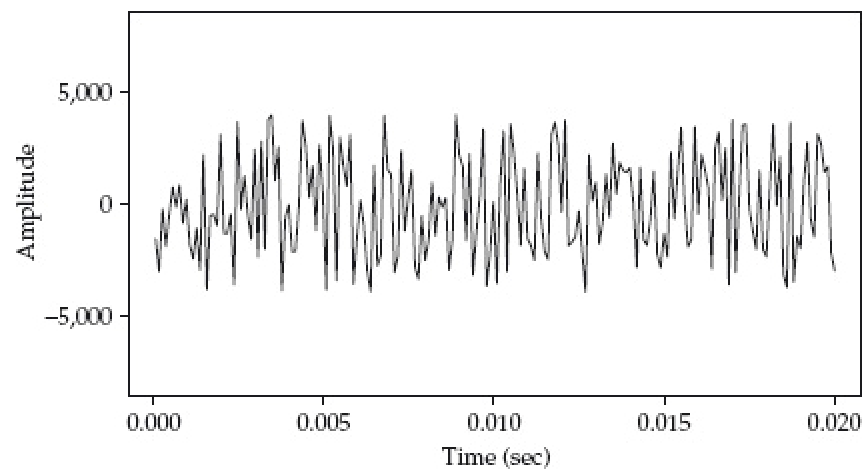


¿Y oscilaciones más complicadas?









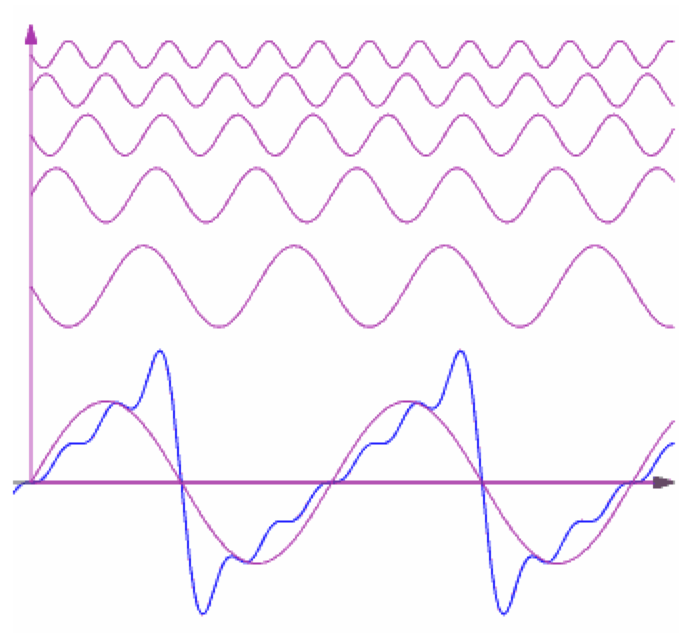
¡Series de Fourier!

- Se puede aproximar la función por una suma de senos y cosenos (cuando son infinitos, la aproximación es perfecta!).

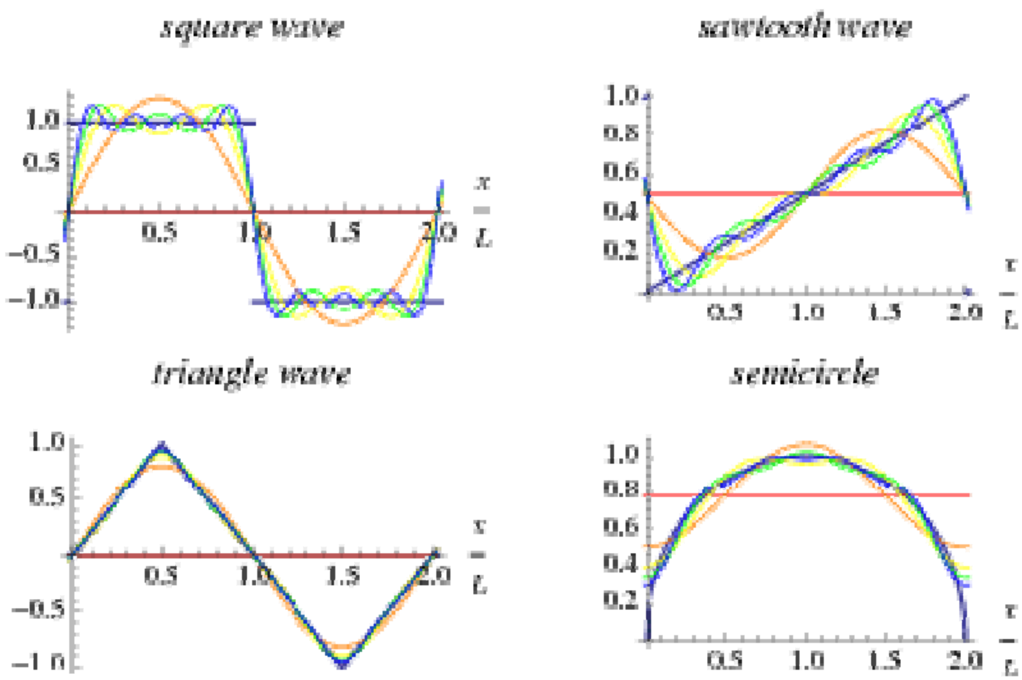
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i sen(b_i x)$$

$$= a_1 sen(b_1 x) + a_2 sen(b_2 x)$$

$$+ a_3 sen(b_3 x) + \ldots$$



$$f(x) = a_1 sen(b_1 x) + a_2 sen(b_2 x) + a_3 sen(b_3 x) + a_4 sen(b_4 x) +$$
$$+ a_5 sen(b_5 x) + \ldots$$



¡Con senos y cosenos nos basta para modelarlo todo!

Pero… ¡Nos llenamos de parámetros! $a_1, a_2, a_3, \ldots\ b_1, b_2, b_3, \ldots$

¡Poca parsimonia!

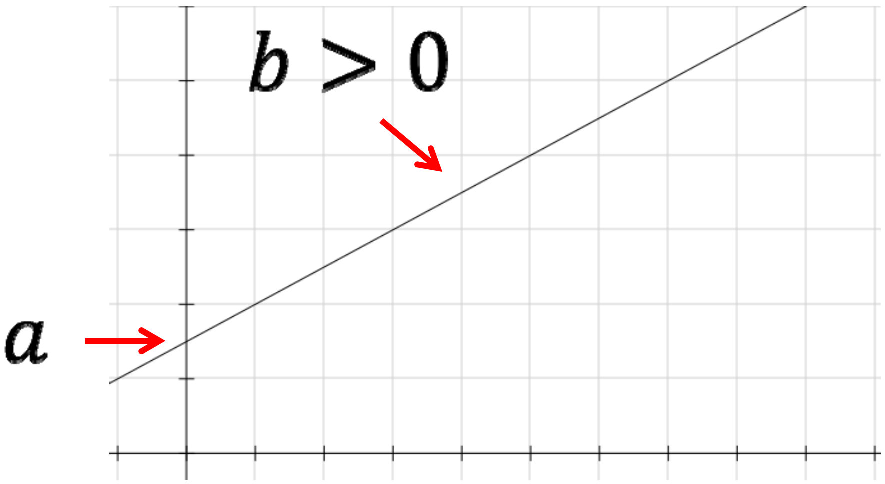
Función polinomial: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$

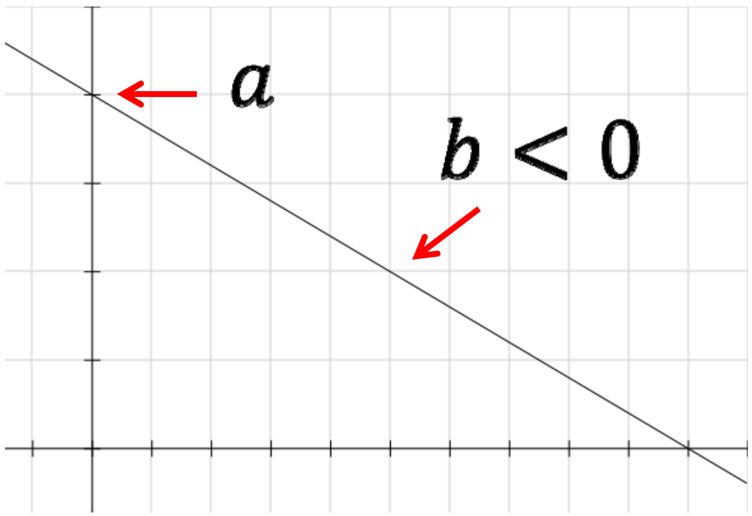
Primer grado (lineal): $f(x) = a + bx$

Segundo grado (cuadrática): $f(x) = a + bx + cx^2$

Tercer grado (cúbica): $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

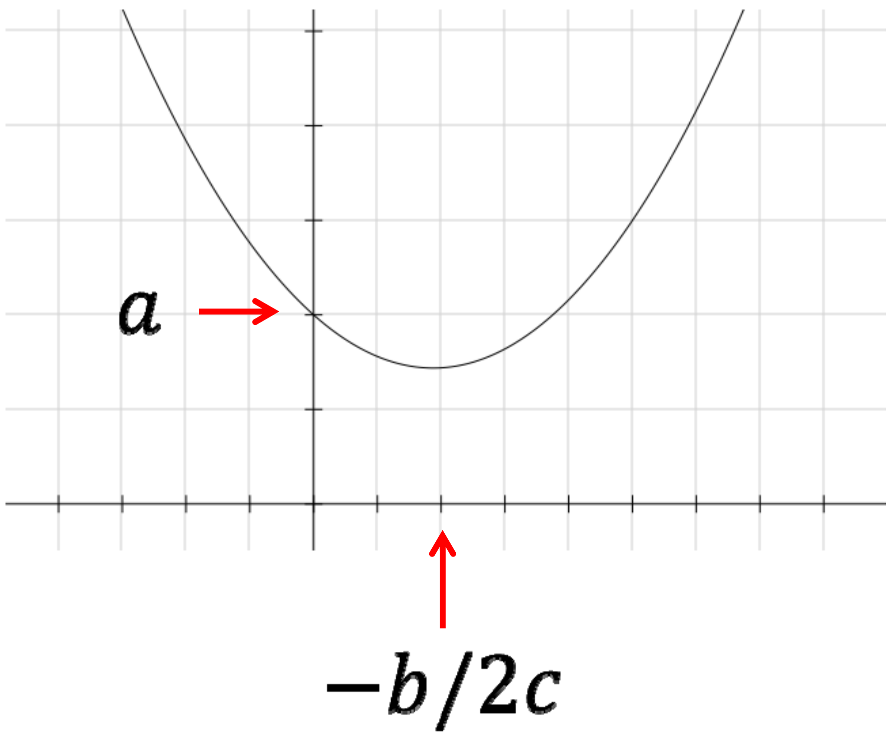
Primer grado (lineal): $f(x) = a + bx$



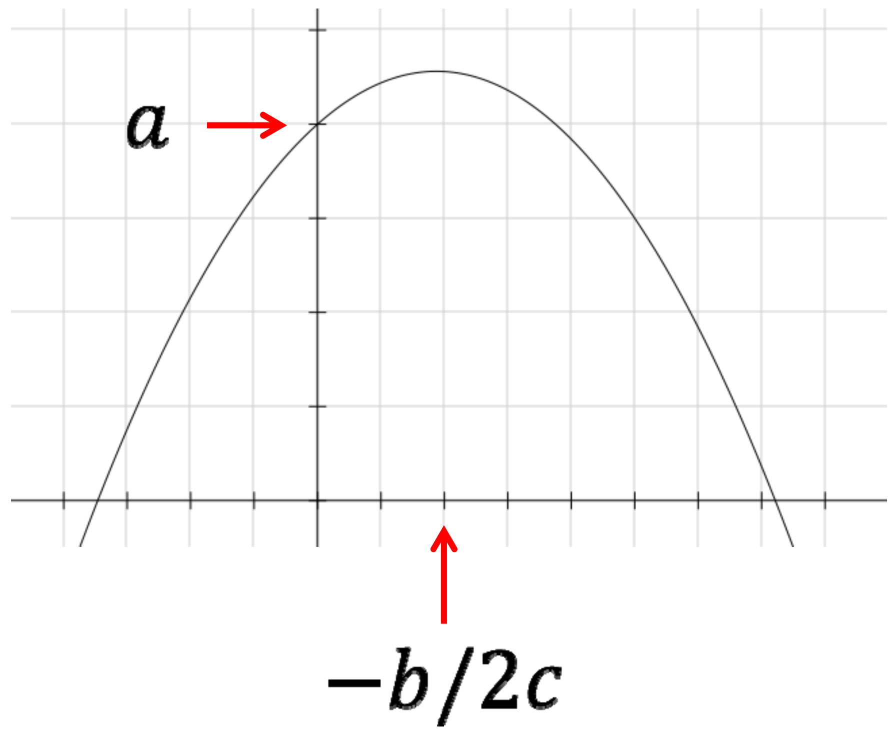


Segundo grado (cuadrática): $f(x) = a + bx + cx^2$

$c > 0$



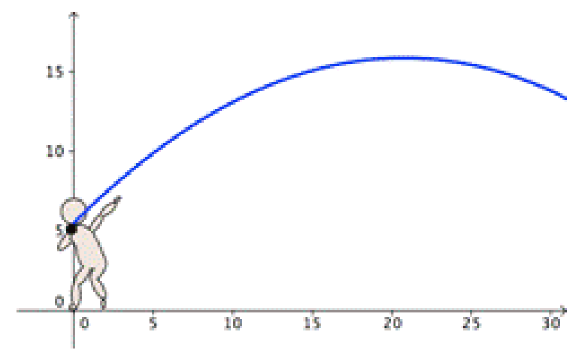
$c < 0$



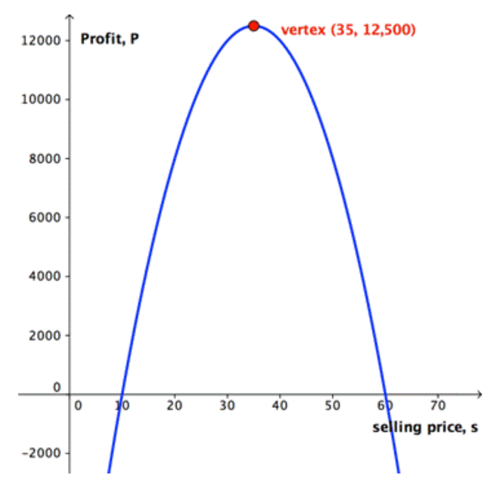
Modelos con funciones cuadráticas

(además de en las relaciones de pareja y picaflores)

- Movimiento de proyectiles.

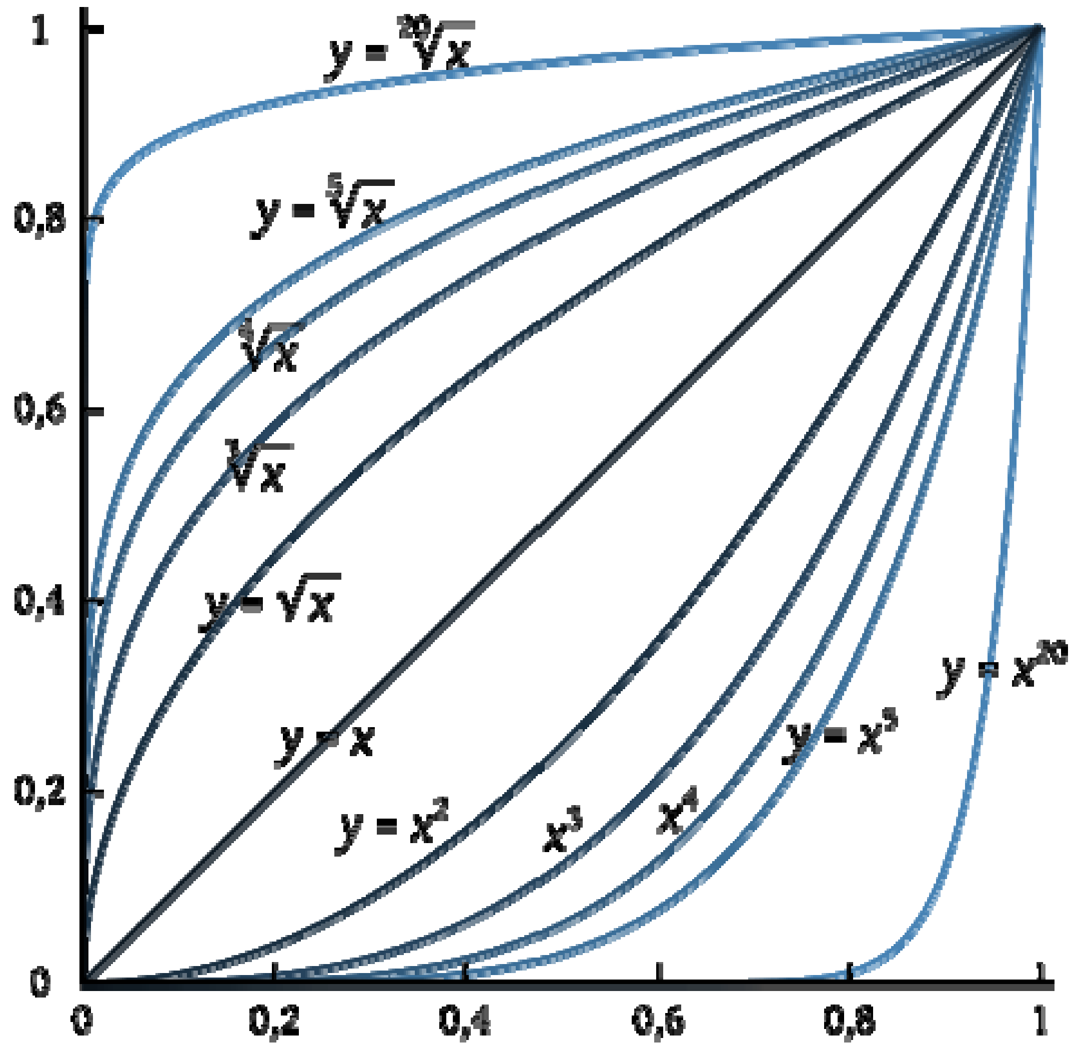


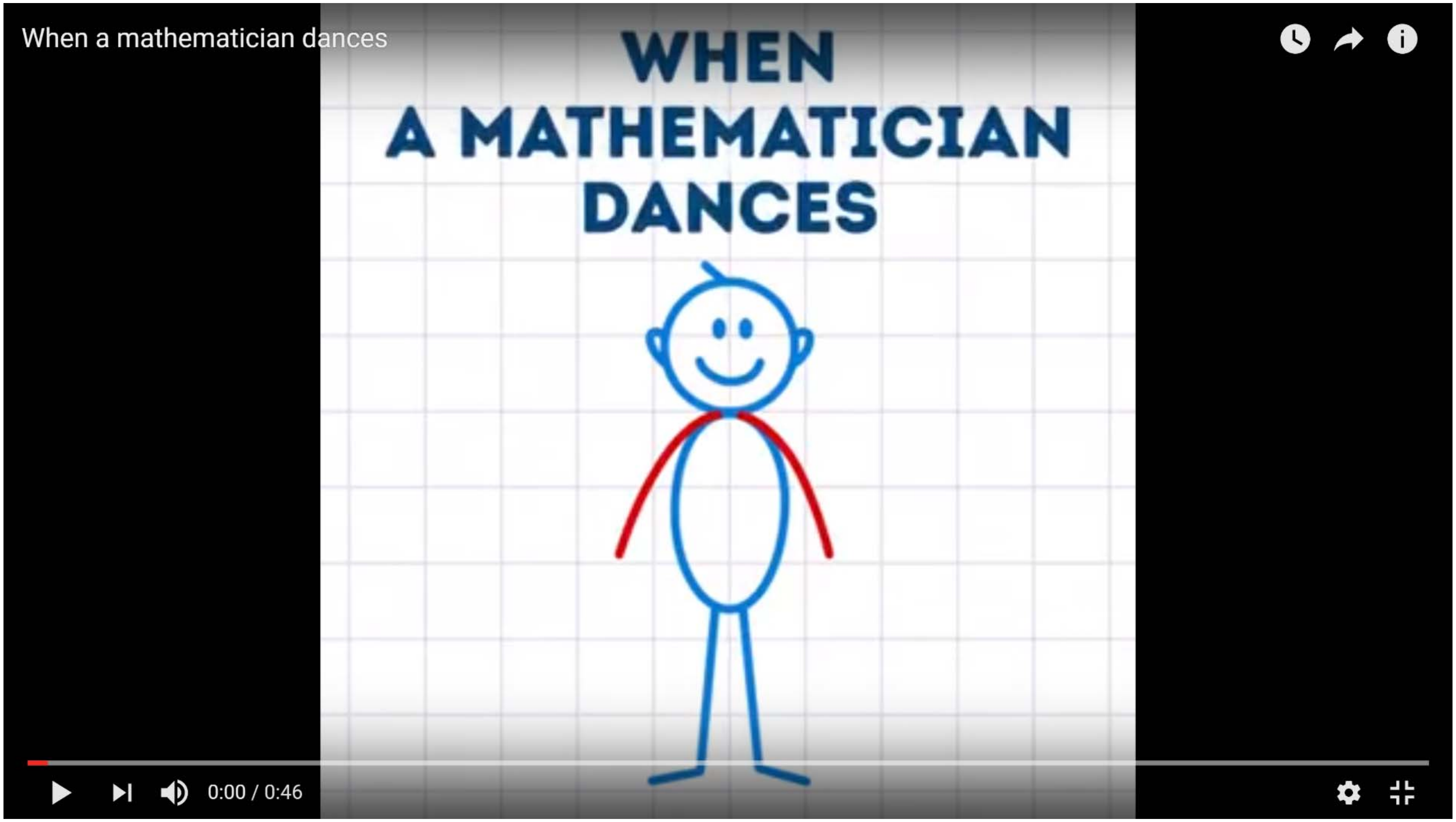
- Ganancias dependiendo del precio de venta. Etc.



- http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U10_L2_T1_text_final_es.html

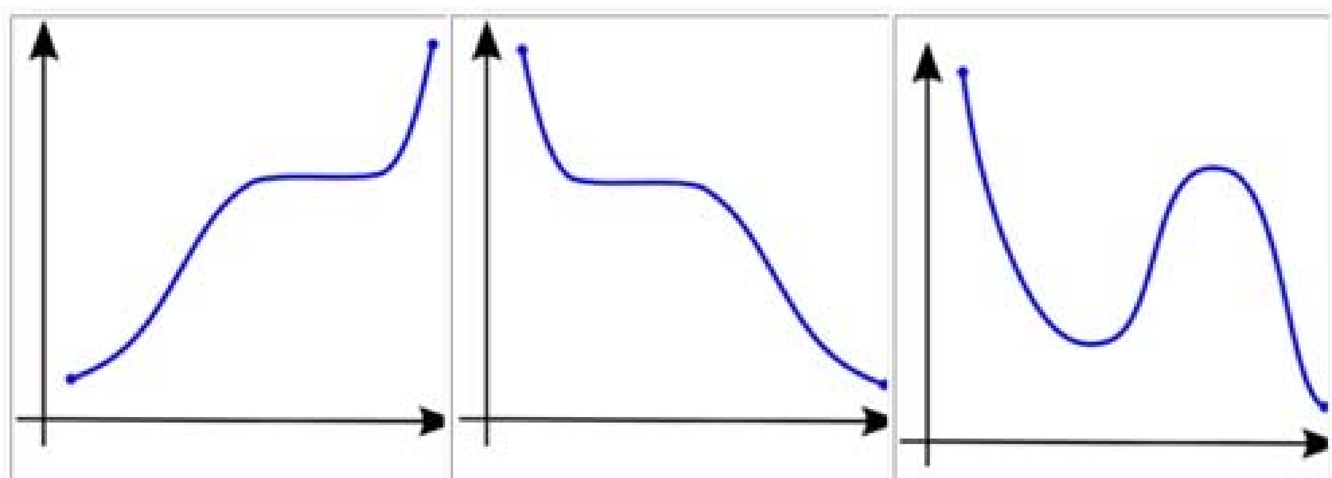
$$y = x^a$$





https://www.youtube.com/watch?v=9cVTUT74eDo

¿Y funciones más complicadas?



Función monótona creciente.

Función monótona decreciente.

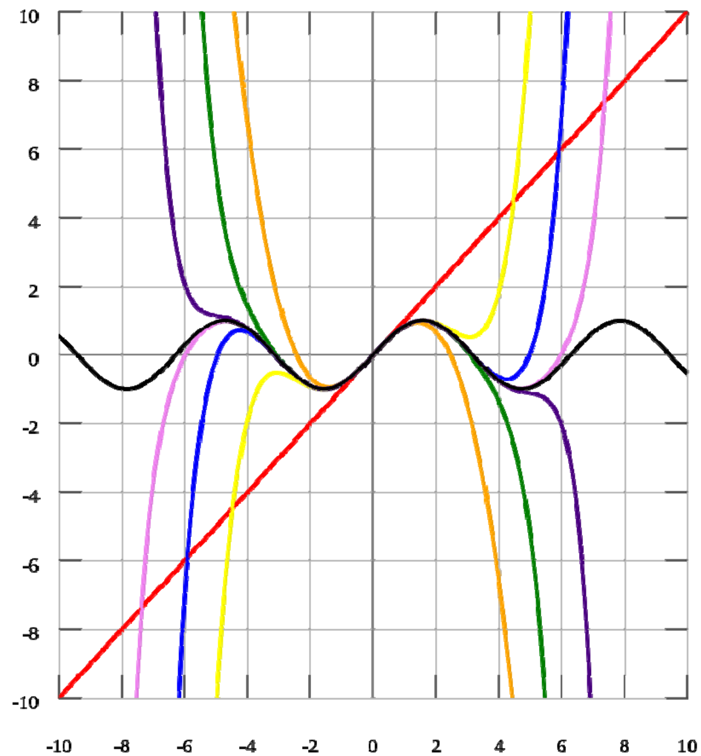
Función no monótona.

¡Series de Taylor!

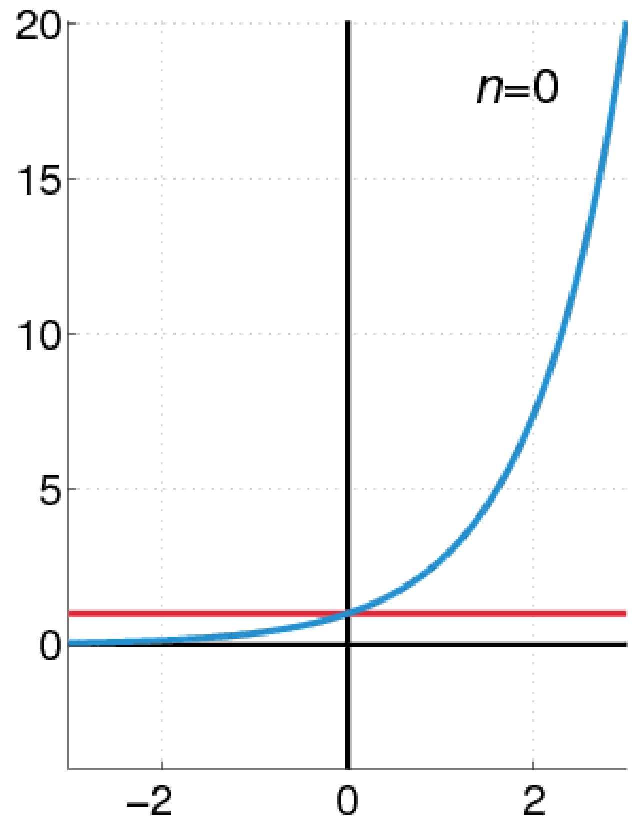
- Se puede aproximar cualquier función por un polinomio (cuando es de grado infinito, la aproximación es perfecta!).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$



$$f(x) = a_0 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + a_5\, x^5 + a_6\, x^6 + \ldots$$

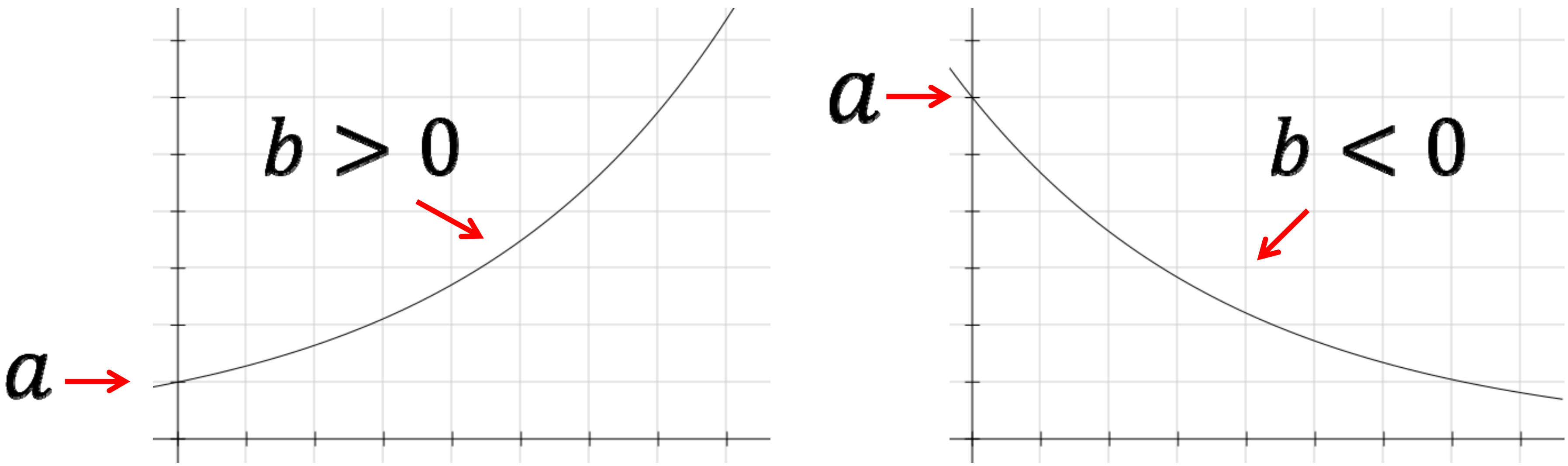


¡Con <u>polinomios</u> nos basta para modelarlo todo!

Pero… ¡Nos llenamos de parámetros! $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$

¡Poca parsimonia!

Función exponencial: $f(x) = a \cdot e^{bx}$



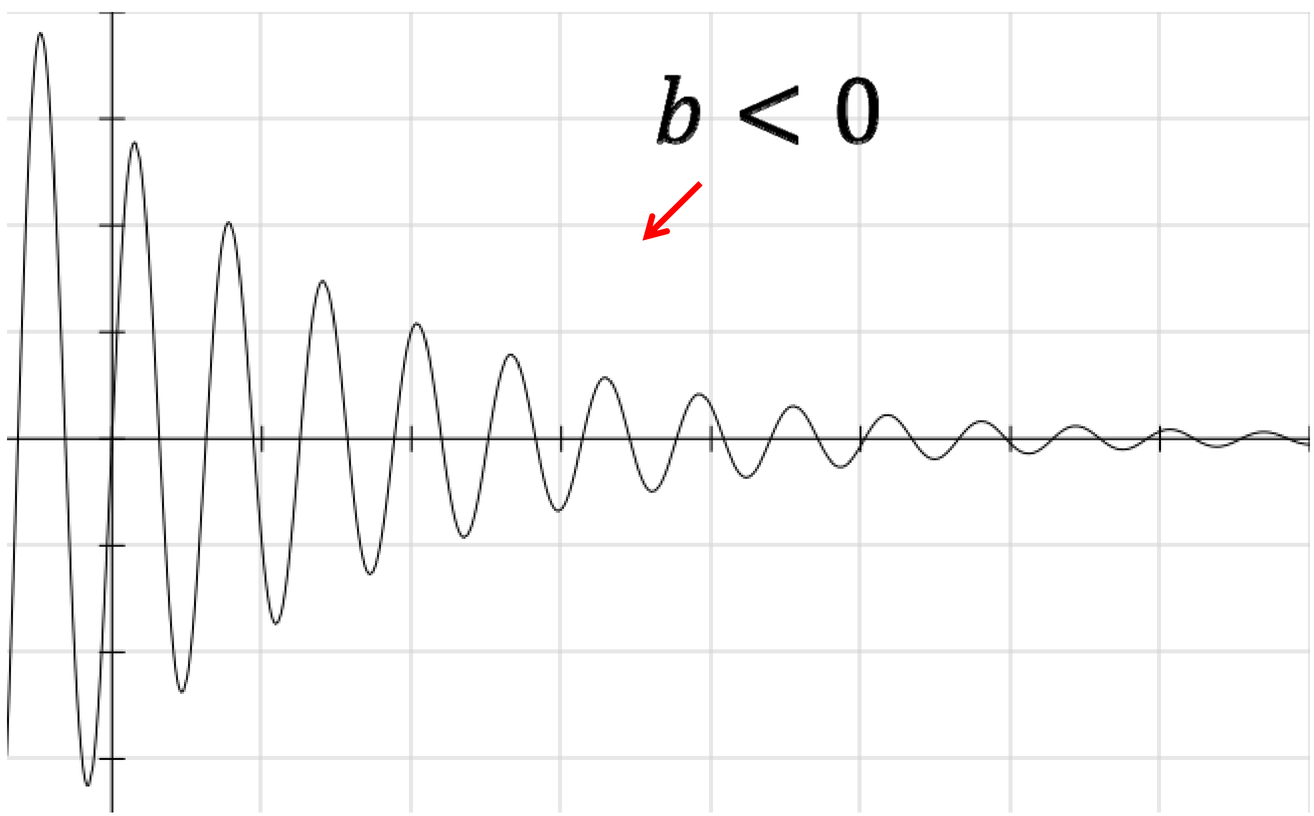
b : “tasa de crecimiento” (“decrecimiento”)

Modelos exponenciales

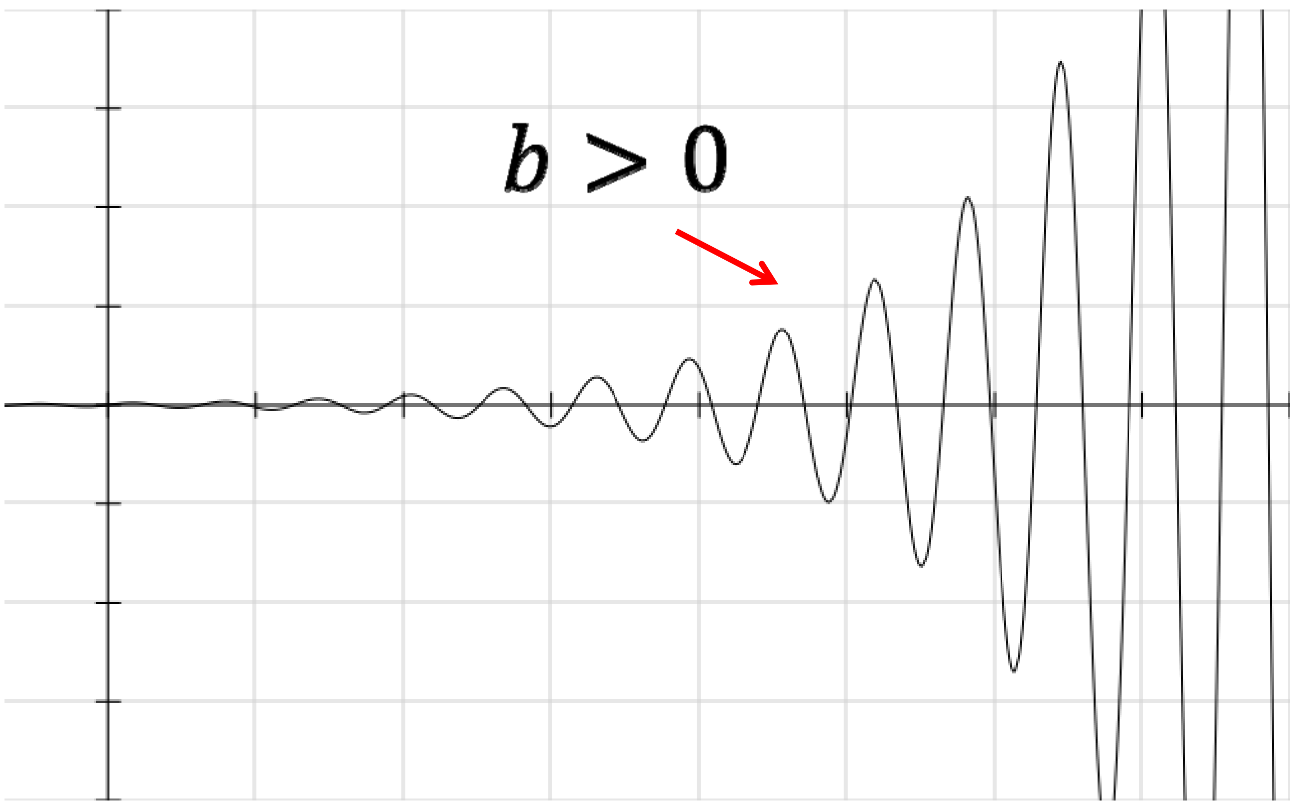
Ludwig von Bertalanffy
(1901–1972)

- "En matemáticas, la ley exponencial se denomina "ley de crecimiento natural", y con $b > 0$ es válida para el **aumento del capital por interés compuesto**. Biológicamente se aplica al **crecimiento individual de ciertas bacterias y animales**. Sociológicamente, es válida para la multiplicación sin restricciones de poblaciones vegetales o animales, en el caso más sencillo la multiplicación de bacterias al dividirse cada individuo en dos, que dan cuatro, etc. En la **ciencia social** se llama **ley de Malthus** y representa el crecimiento ilimitado de una población cuya tasa de natalidad es superior a la de mortalidad. Describe también el **aumento del conocimiento humano**, medido en **páginas de texto dedicadas a descubrimientos científicos**, o el **número de publicaciones** acerca de la Drosophila (Hersh, 1942). Con constante negativa ($b < 0$), la ley exponencial se aplica a la **desintegración radiactiva**, a la **descomposición de un compuesto químico por reacción monomolecular**, al **exterminio de bacterias por radiación o veneno**, a la **pérdida de sustancia corporal por hambre** en un organismo multicelular, al **ritmo de extinción de una población** en la cual la tasa de mortalidad es superior a la de natalidad, etc."

$$f(x) = a\,e^{bx} \cdot sen(cx + d)$$
$$= A(x) \cdot sen(cx + d)$$



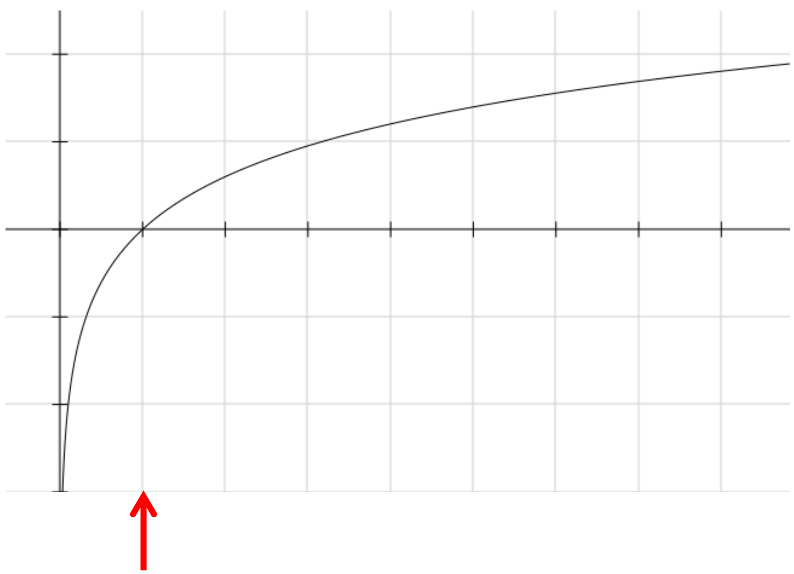
$$f(x) = a\, e^{bx} \cdot sen(cx + d)$$



Función logarítmica ("anti-exponencial"):

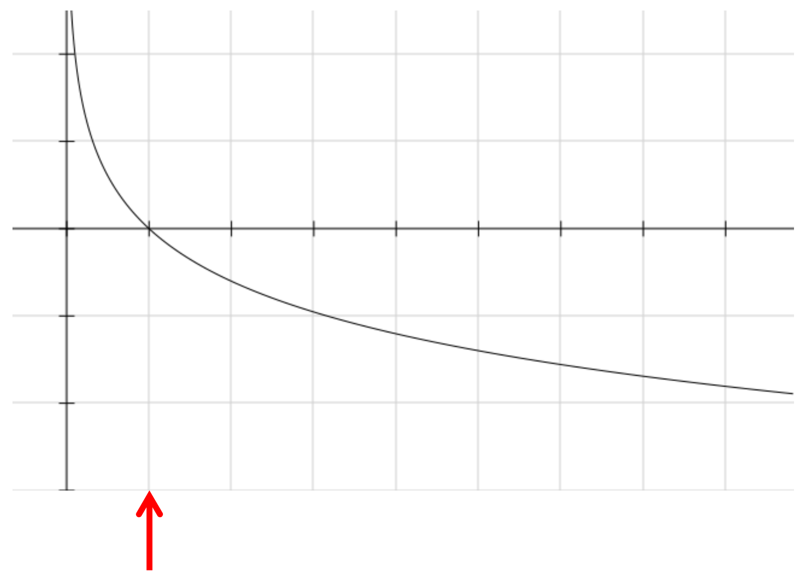
$$f(x) = a\, log(bx)$$

$a > 0$



$1/b$

$a < 0$



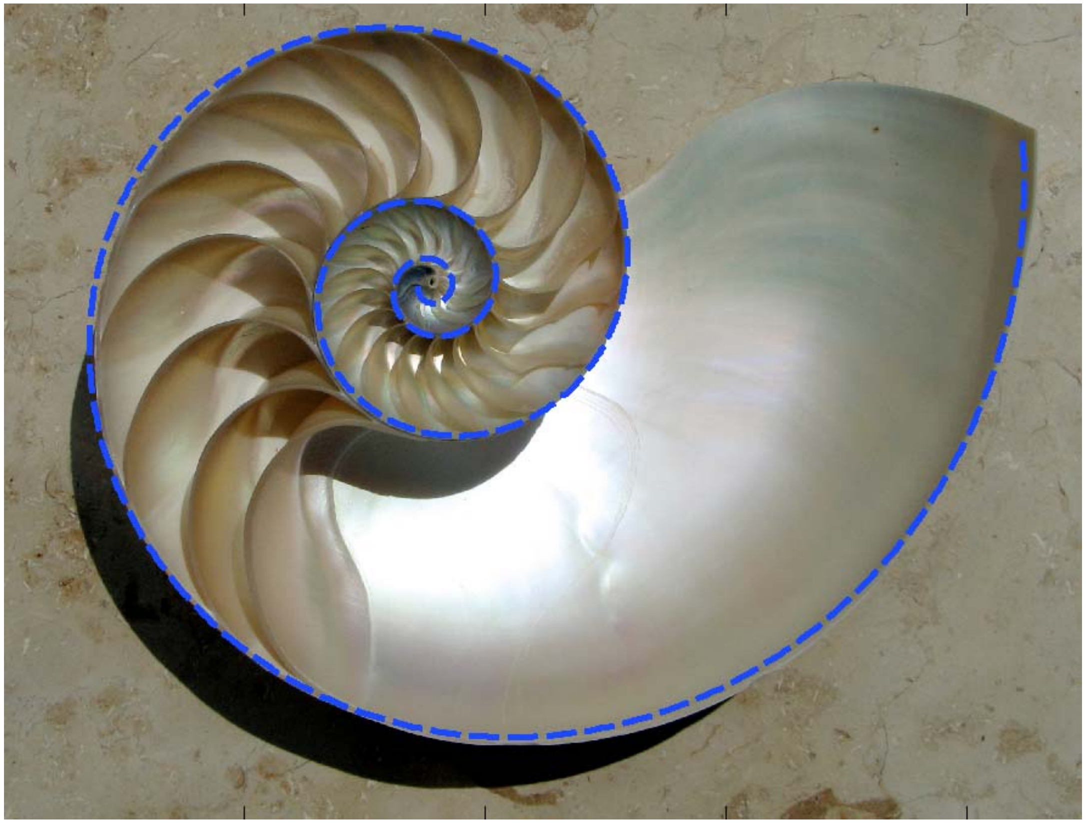
$1/b$

Modelos con funciones logarítmicas

- Espirales logarítmicas $\theta = \frac{1}{b}\log(\frac{r}{a})$

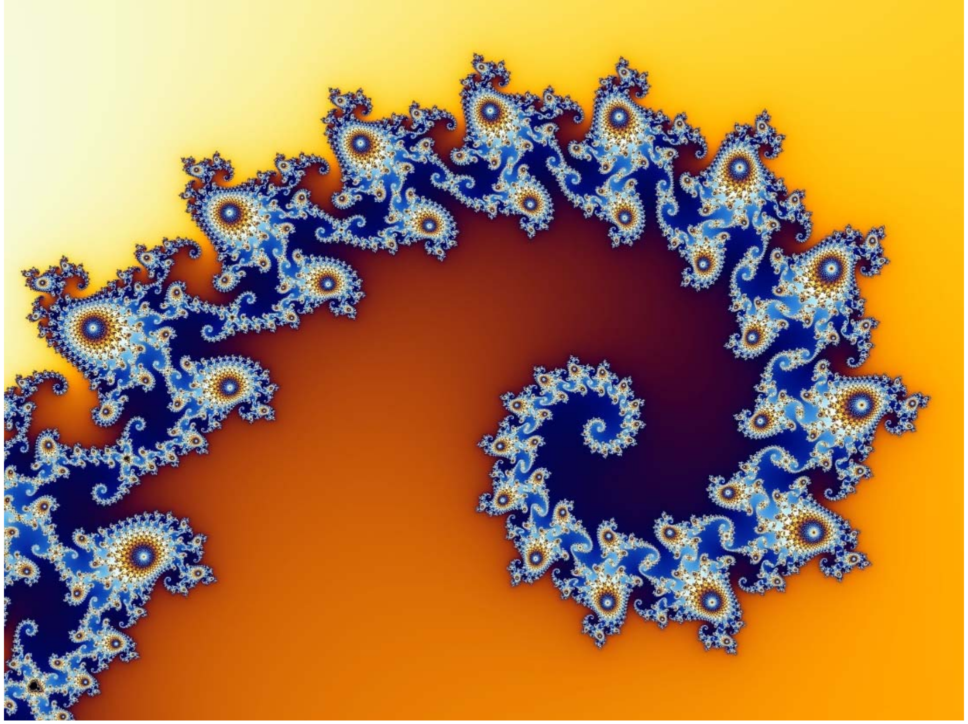
Nautilus
(Nautilidae)

b = 0.1759.

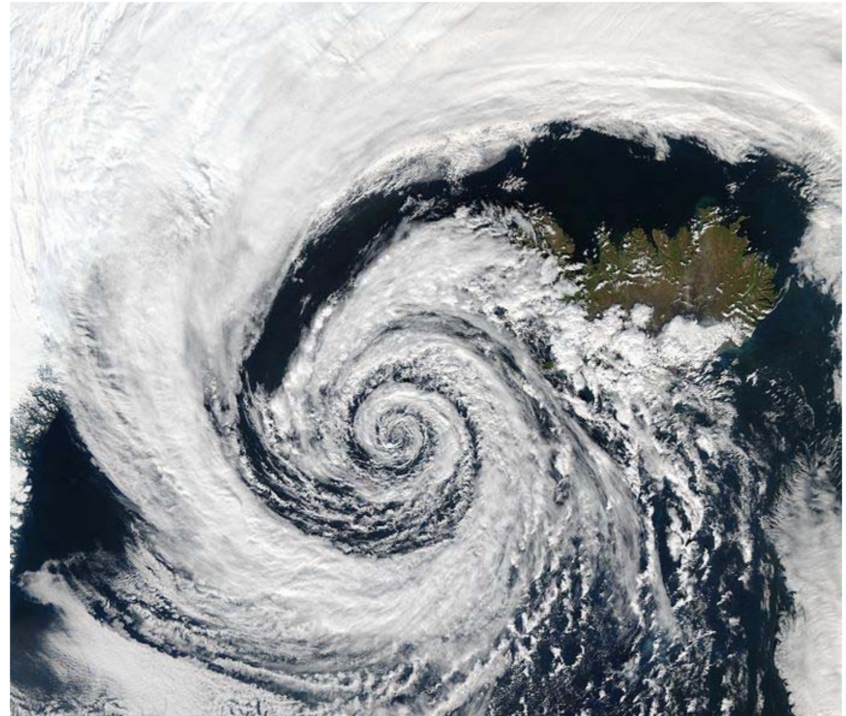


- Brócoli romano

- Fractal de Mendelbrot

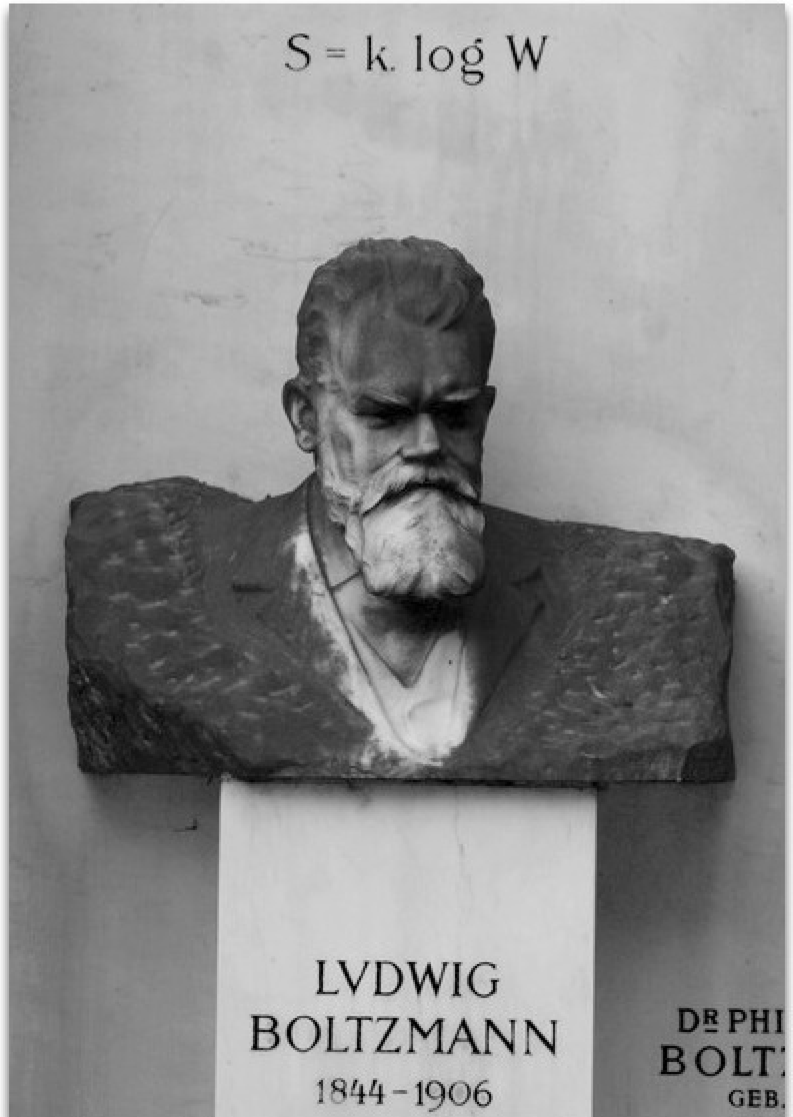


- Ciclón extratropical.



- Galaxias en espiral.

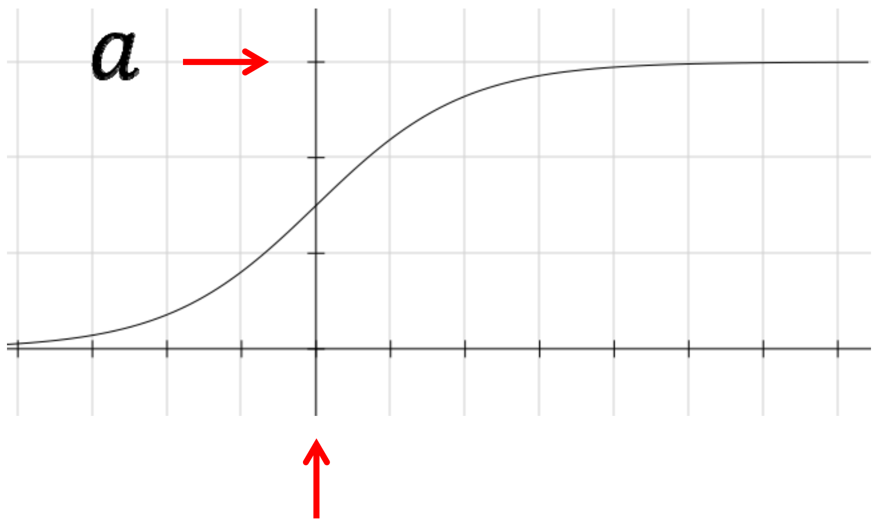
- La entropía.



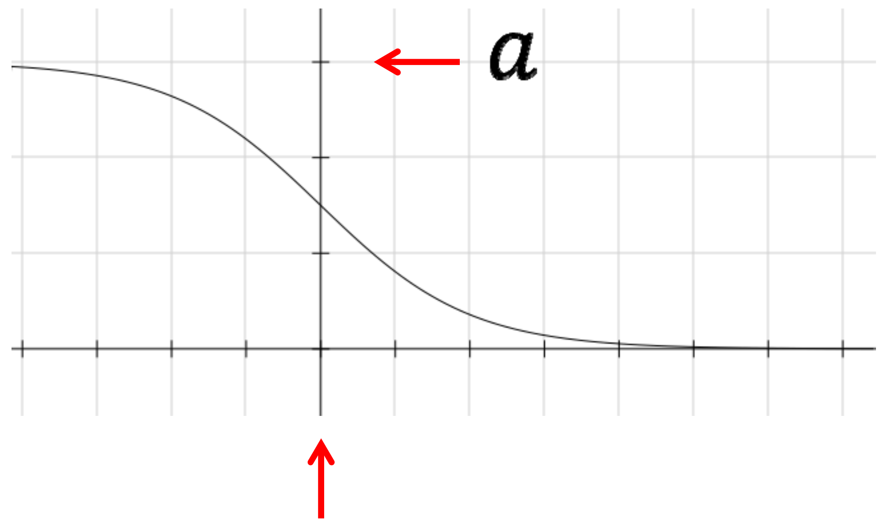
Función logística (sigmoide logística):

$$f(x) = \frac{a}{1 + b\, e^{-cx}}$$

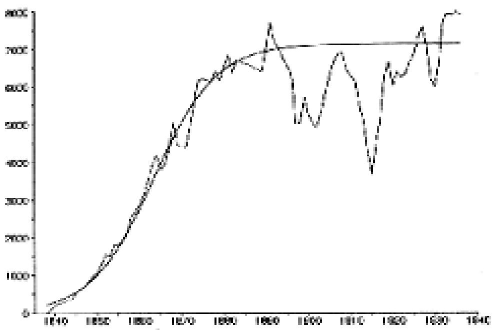
$c > 0$ $\qquad\qquad$ $c < 0$



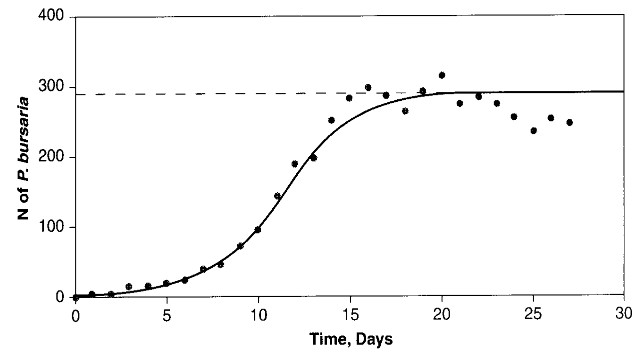
“Punto de inflexión”



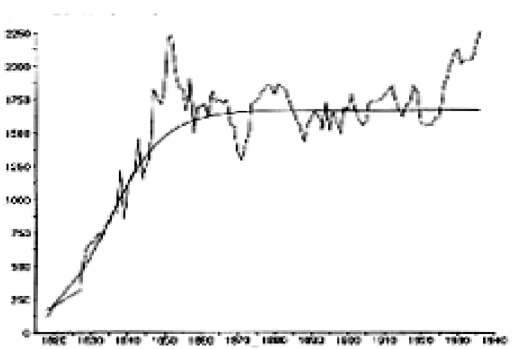
“Punto de inflexión”



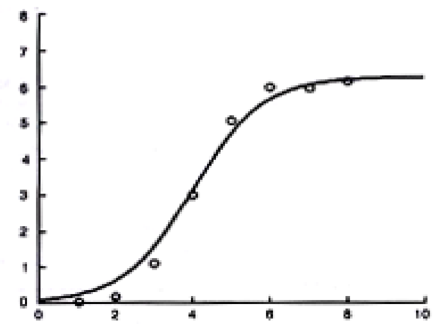
Cabras (Australia)



Paramecium (lab)

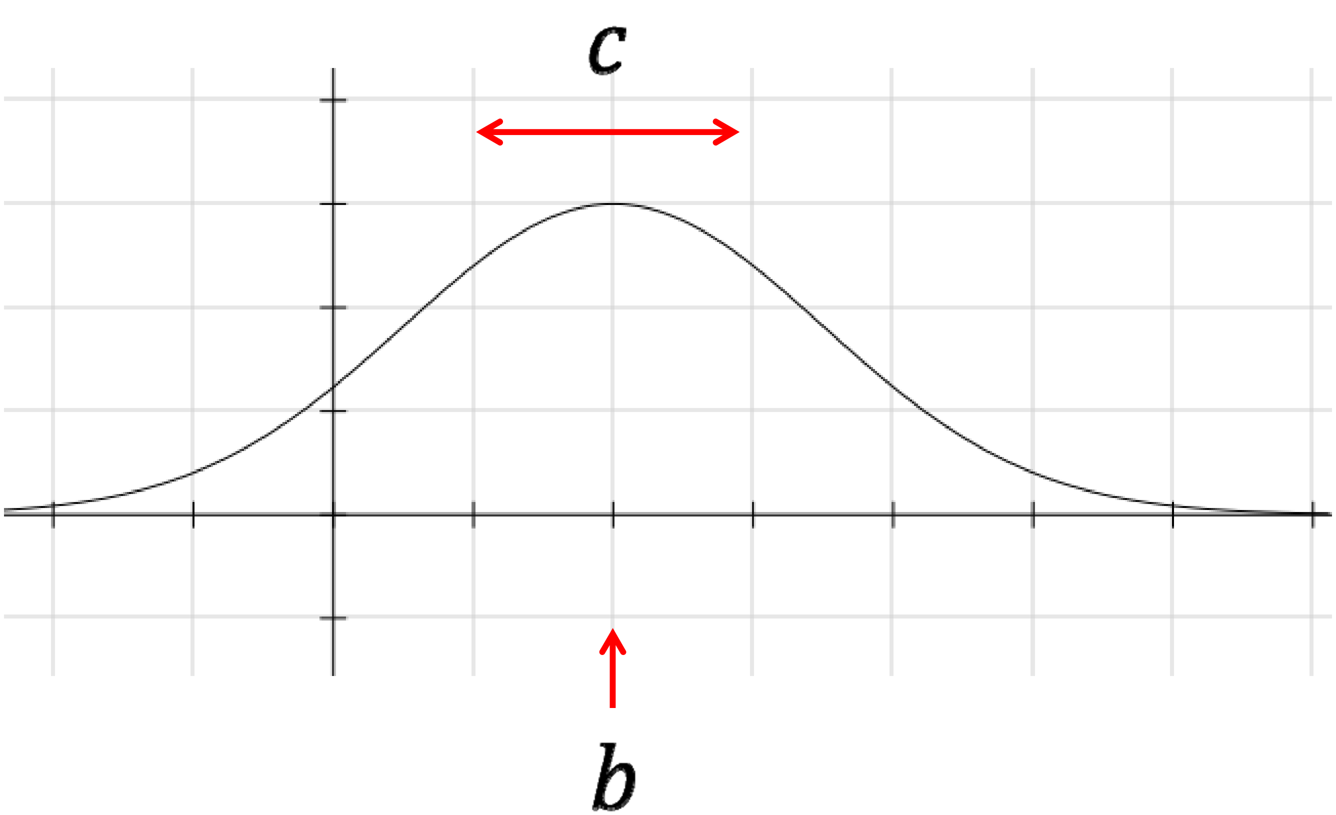


Cabras (Tasmania)



E. coli (lab)

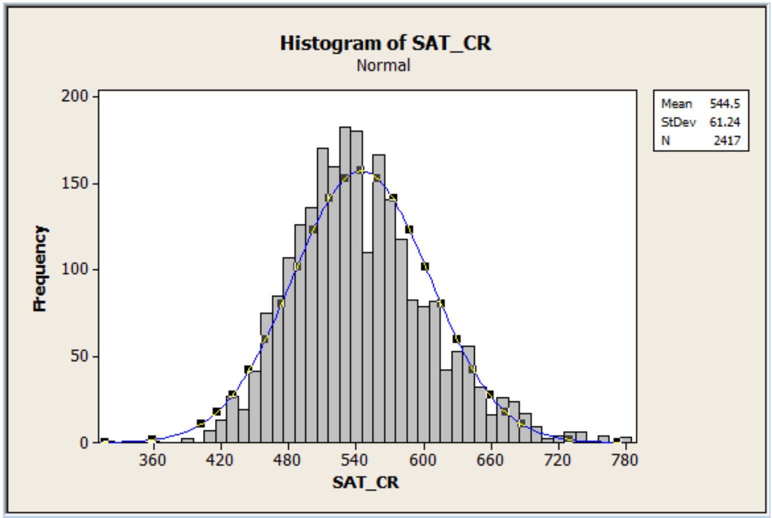
Función gaussiana (campana): $f(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$



c : "varianza", b : "promedio"

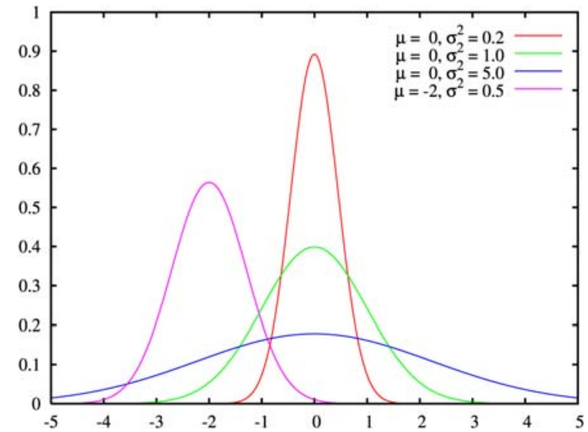
Modelos con funciones (distribuciones) gaussianas:

- Caracteres *morfológicos* de individuos como la **estatura**;
- Caracteres *fisiológicos* como el **efecto de un fármaco**;
- Caracteres *sociológicos* como el **consumo** de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- Caracteres *psicológicos* como el **cociente intelectual**;
- Nivel de **ruido** en *telecomunicaciones*;
- **Errores** cometidos al *medir* ciertas magnitudes.



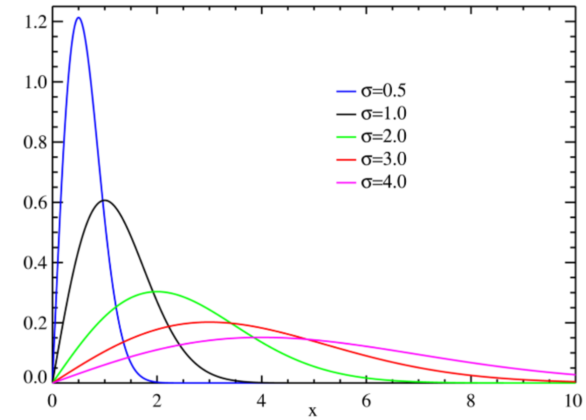
Distribución de Gauss:

$$f(x) = e^{-x^2}$$



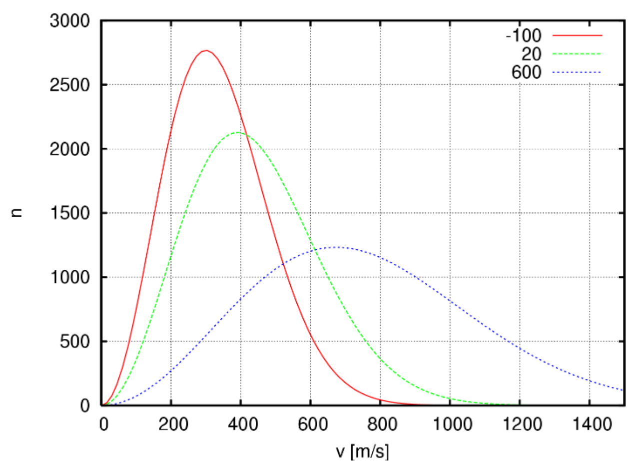
Distribución de Rayleigh:

$$f(x) = xe^{-x^2}$$



Distribución de Maxwell-Boltzmann:

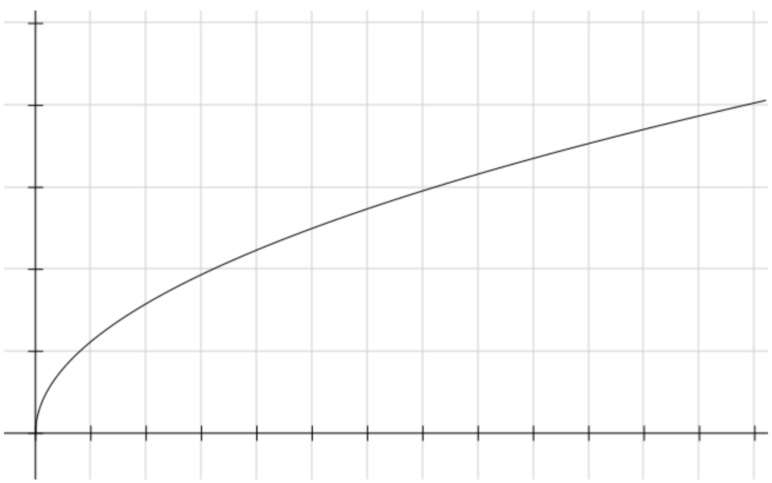
$$f(x) = x^2e^{-x^2}$$



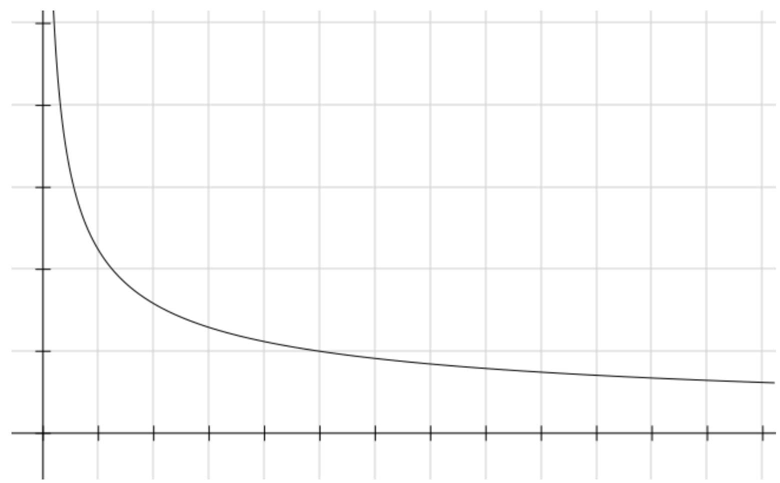
Función de potencia (de poder): $f(x) = a \cdot x^b$

donde $a. b \in$ números reales

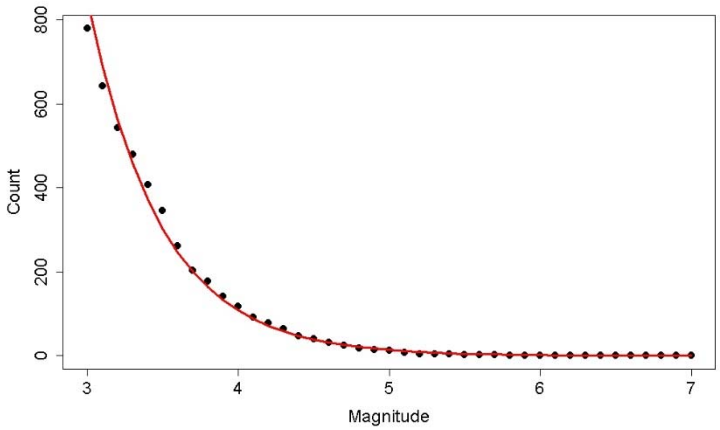
$b > 0$



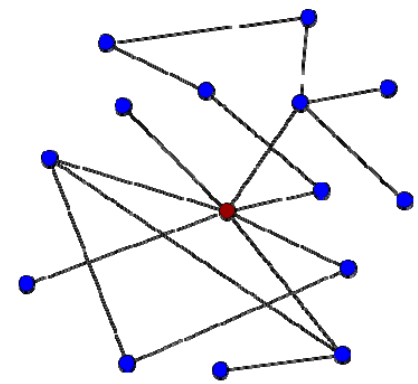
$b < 0$

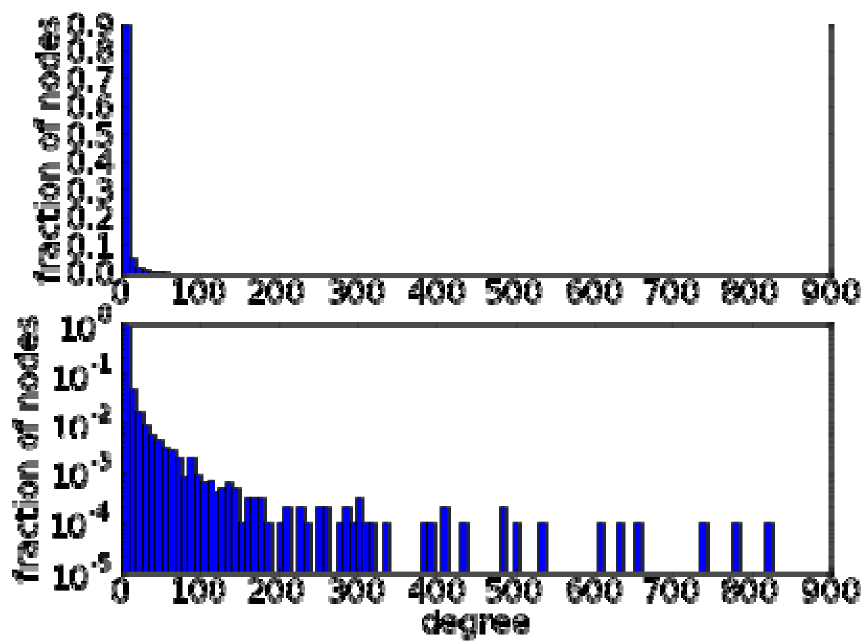


Ley de Gutenberg-Richter

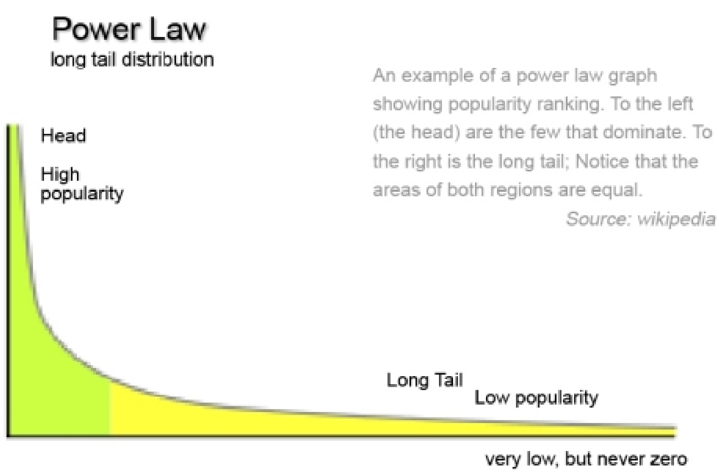


Redes sociales





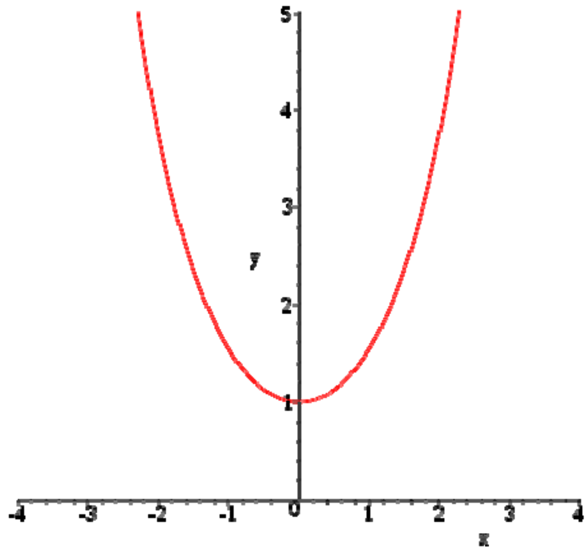
Rankings de popularidad



Seno y Coseno Hiperbólico

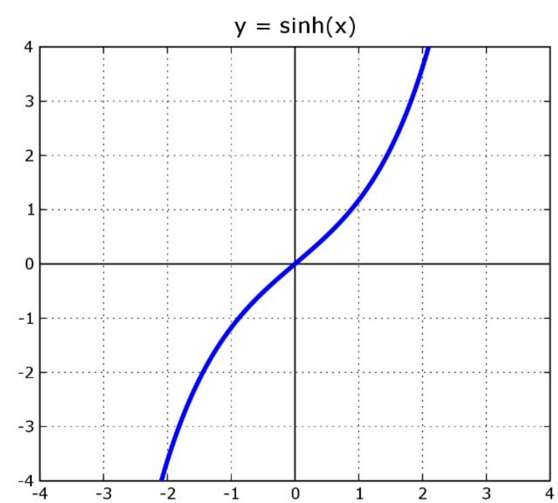
- Coseno hiperbólico:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



- Seno hiperbólico:

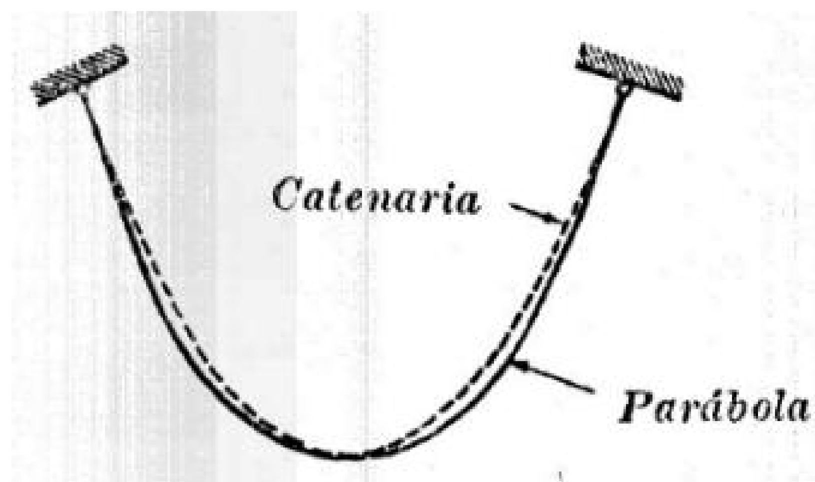
$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

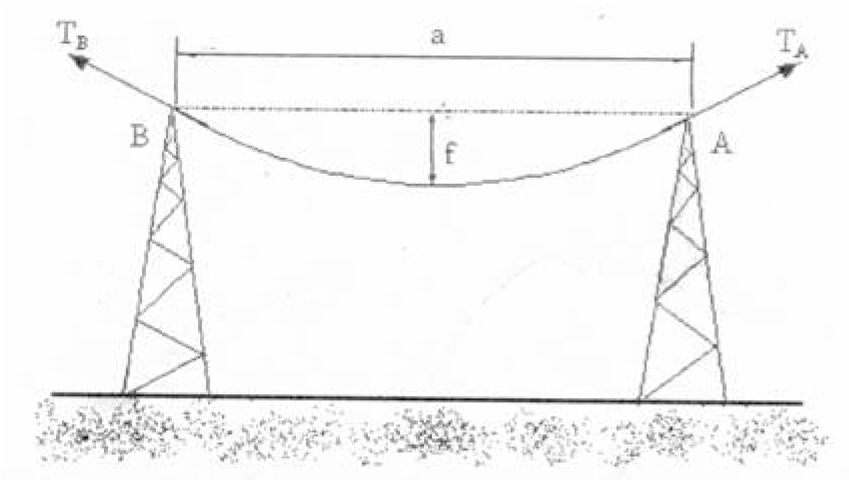


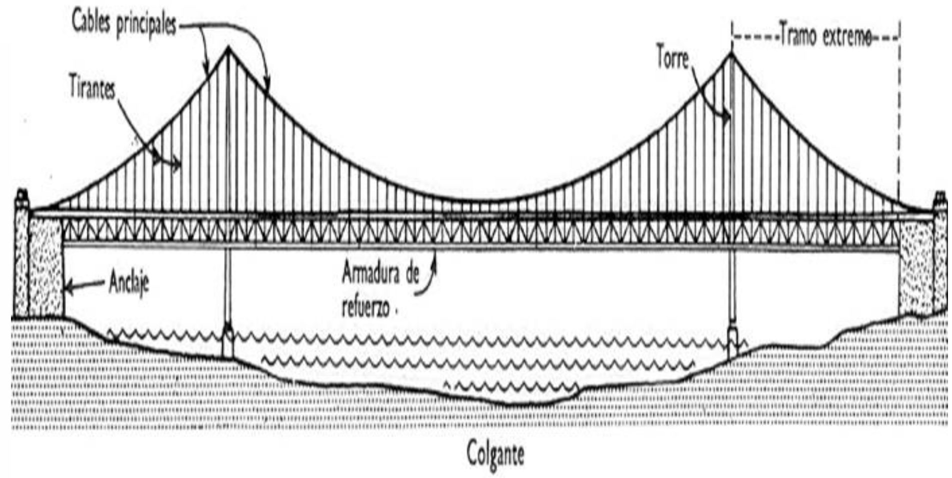
- “Catenaria”: curva que genera una cadena o hilo suspendido de sus dos extremos y sometido a gravedad.

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

$$a = \left(\frac{\textit{tensión horizontal}}{\textit{peso por unidad de longitud}}\right)$$





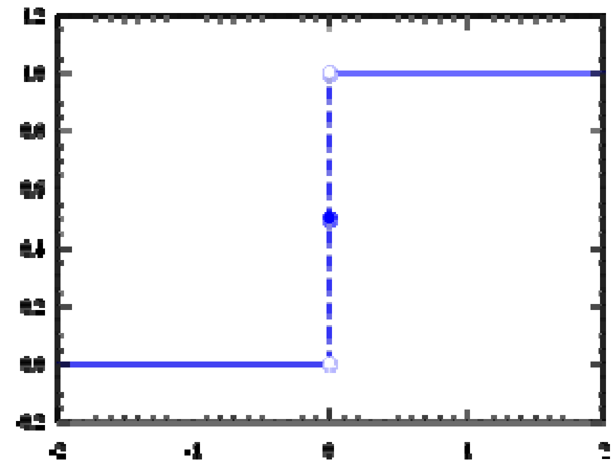


minimiza las tensiones…

Funciones por trozos (*piecewise*)

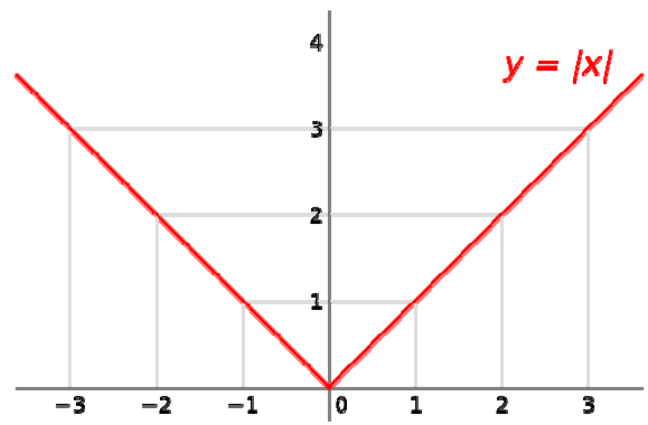
"Función escalón":

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



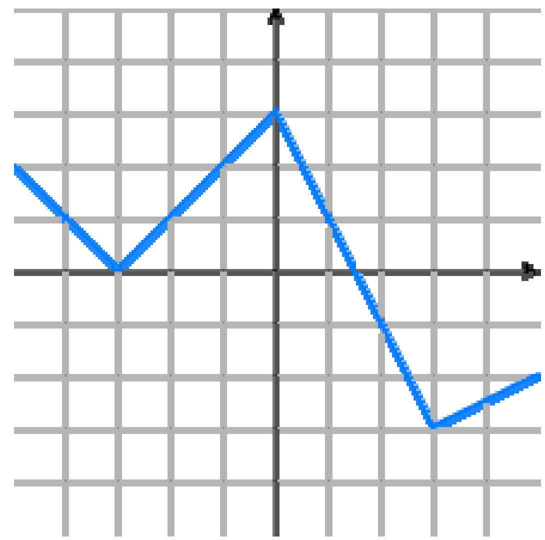
"Función módulo" (o "valor absoluto"):

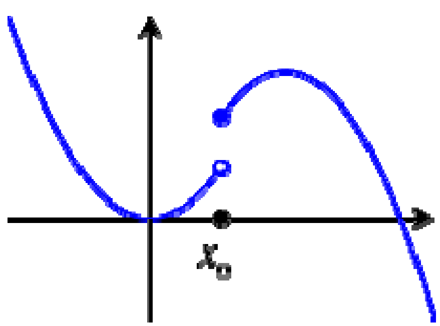
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

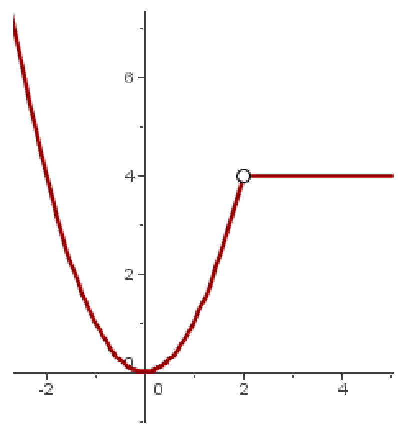


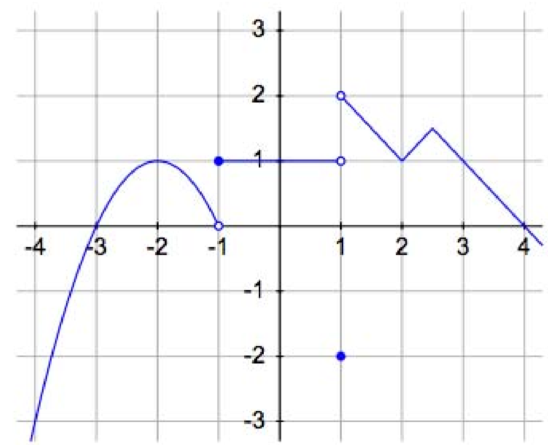
Funciones por trozos (*piecewise*)

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & si \quad x \le -3 \\ x+3, & si \quad -3 < x < 0 \\ -2x+3, & si \quad 0 \le x < 3 \\ 0.5x-4.5, & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$



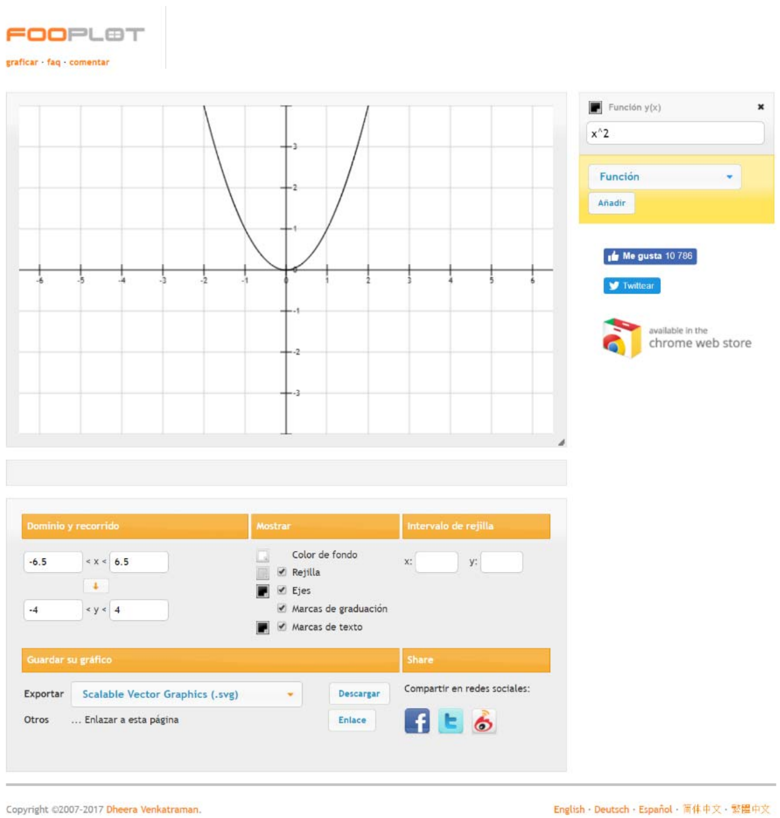






Manipulación de funciones

- La única forma de adquirir la comprensión e intuición exhaustiva del comportamiento de las funciones.
- www.fooplot.com



Operación escalable

Encontrar una función $f(g(x), h(y))$ tal que:

$$f\big(g(cx), h(cy)\big) = c \cdot f(g(x), h(y))$$

$$\boldsymbol{f\big(g(cx), h(cy)\big) = c \cdot f(g(x), h(y))}$$

Ejemplo 1 (función lineal):

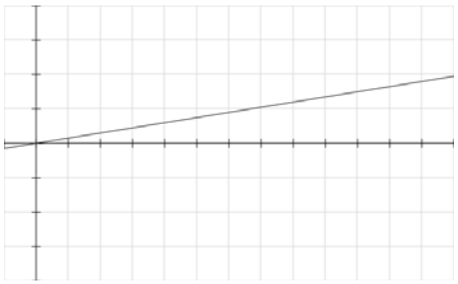
$$g(x) = Ax$$

$$h(y) = By$$

Operación escalable (suma): $f = g(x) + h(y)$

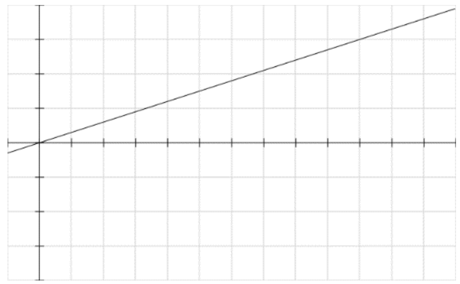
Comprobación: $\boldsymbol{f\big(g(cx), h(cy)\big)} = g(cx) + h(cy)$
$= Acx + Bcy = c(Ax + By)$
$= \boldsymbol{c \cdot f(g(x), h(y))}$

$$g(x) = Ax$$

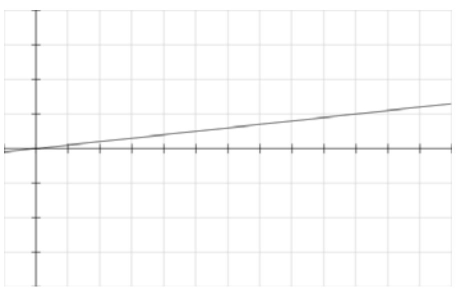


$$\longrightarrow$$

$$g(cx) = cAx$$

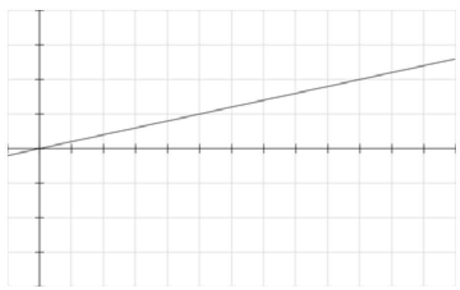


$$h(y) = By$$

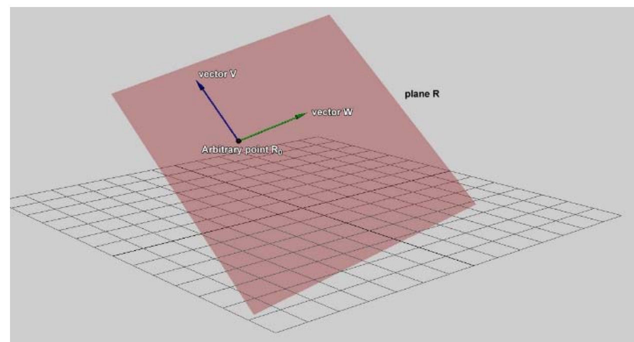


$$\longrightarrow$$

$$h(cy) = cBy$$



$$f(cx, cy) = c(Ax + By)$$



$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{cx}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{cy})\big) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))$$

Ejemplo 2 (función de poder):

$$g(x) = Ax^{\alpha}$$

$$h(y) = By^{\beta}$$

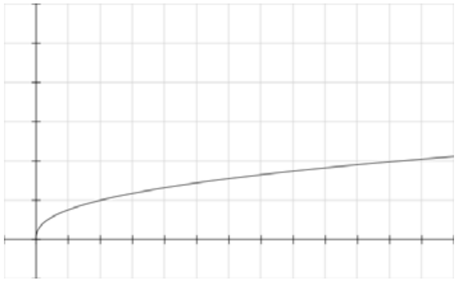
Operación escalable (producto): $f = g(x) \cdot h(y)$

con $\beta = 1 - \alpha$

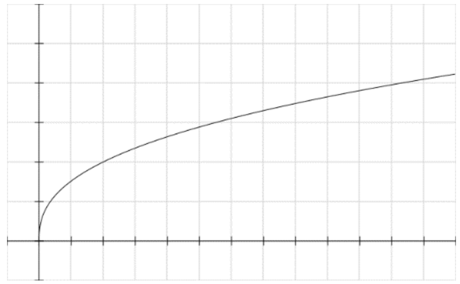
Comprobación:

$$\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{cx}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{cy})\big) = g(cx) \cdot h(cy)$$
$$= A(cx)^{\alpha} \cdot B(cy)^{\beta} = c^{\alpha+\beta}\left(Ax^{\alpha} \cdot By^{\beta}\right)$$
$$= \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))$$

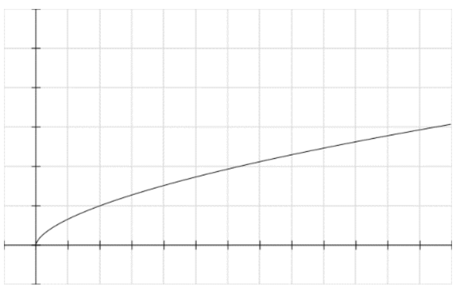
$g(x) = Ax^{\alpha}$



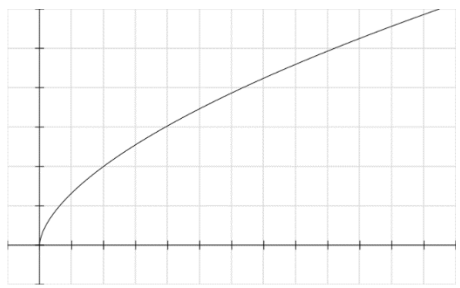
$g(cx) = A(cx)^{\alpha}$



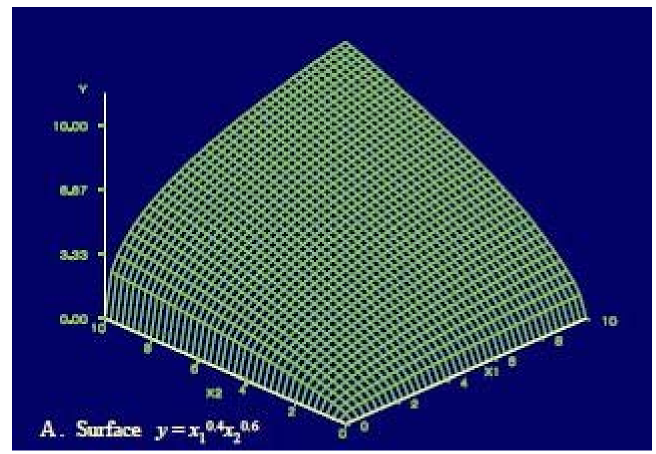
$h(y) = By^{\beta}$



$h(cy) = B(cy)^{\beta}$



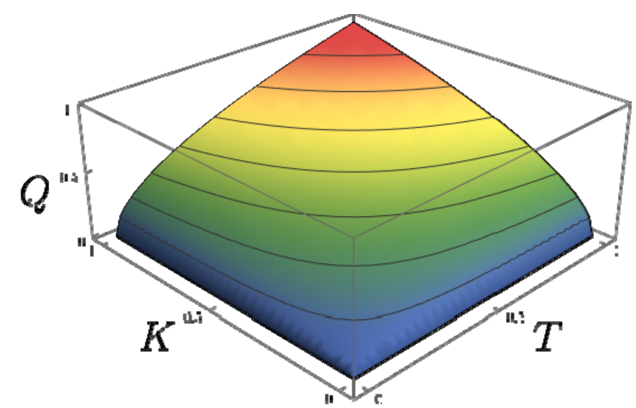
$$f(cx, cy) = c(Ax^{\alpha} \cdot By^{1-\alpha})$$



Modelo de Cobb–Douglas

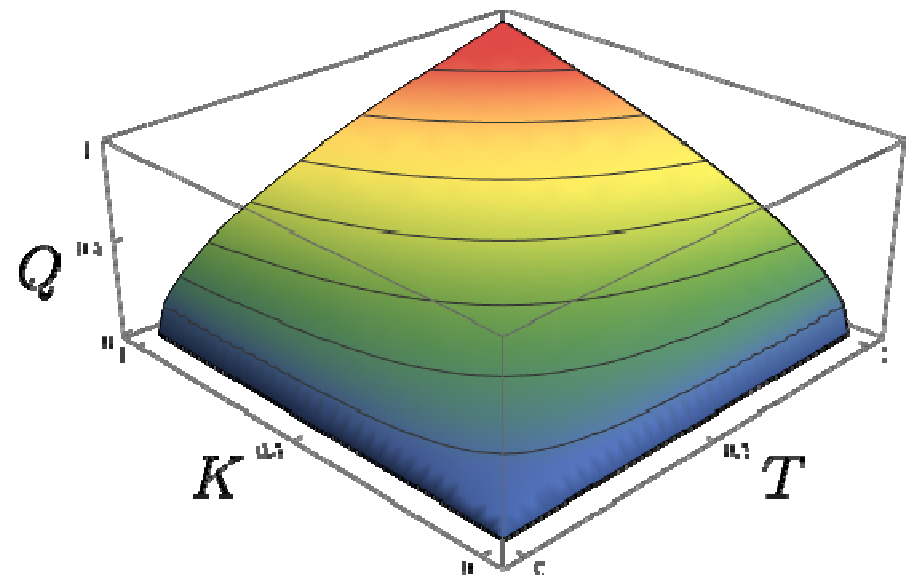
(modelo de crecimiento de Solow)

- Función de producción dependiendo de los factores tecnología, trabajo y capital.
- $Q = AT^{\alpha}K^{\beta}$
- Q : producción total (valor monetario de todos los bienes producidos durante un año.
- T : trabajo insumo.
- K : capital insumo.
- A : factor de productividad total.
- $\propto$ y β : elasticidades producto del trabajo y capital



Modelo de Cobb–Douglas

- $Q = AT^{\alpha}K^{\beta}$



- $\propto + \beta = 1$: Rendimientos de escala constantes (si T y K aumenta cada uno 20% entonces Q aumenta 20%).
- $\propto + \beta < 1$: Rendimientos de escala descendientes.
- $\propto + \beta > 1$: Rendimientos de escala crecientes.

$$\boldsymbol{f\big(g(cx),h(cy)\big) = c \cdot f(g(x),h(y))}$$

Ejemplo 3 (función exponencial):

$$g(x) = Ae^{ax}$$

$$h(y) = Be^{by}$$

Operación escalable (logaritmo): $f = \log(g(x) \cdot h(y))$

Comprobación: $$\boldsymbol{f\big(g(cx),h(cy)\big)} = \log(g(cx) \cdot h(cy))$$
$$= \log(Ae^{acx} \cdot Be^{bcy})$$
$$= c \cdot \log(Ae^{ax} \cdot Be^{by})$$
$$= \boldsymbol{c \cdot f(g(x),h(y))}$$

Hay **dos formas de modelar con ecuaciones**
(de cualquier tipo, sean algebraicas, diferenciales, etc.):

1. Imponer una función a una **ecuación** y buscar la **solución** de la ecuación (modelamiento típico).

$$\begin{tikzcd} f_{ec}(x) \arrow[d] & \\ \textbf{Ecuación} \arrow[r, bend right, "f_{sol}(x)\ ?"'] & \textbf{Solución} \end{tikzcd}$$

Hay **dos formas de modelar con ecuaciones**
(de cualquier tipo, sean algebraicas, diferenciales, etc.):

2. Imponer una función a una **solución** y buscar la **ecuación** cuya solución sea la impuesta.