Contenidos

- Derivadas
- Ecuaciones diferenciales
- Tipos de variables y tipos de ecuaciones
- Construcción de modelos diferenciales
- Sistemas dinámicos en física
  - Oscilador armónico
  - Oscilador armónico amortiguado
  - Isomorfismos entre modelos mecánicos y eléctricos

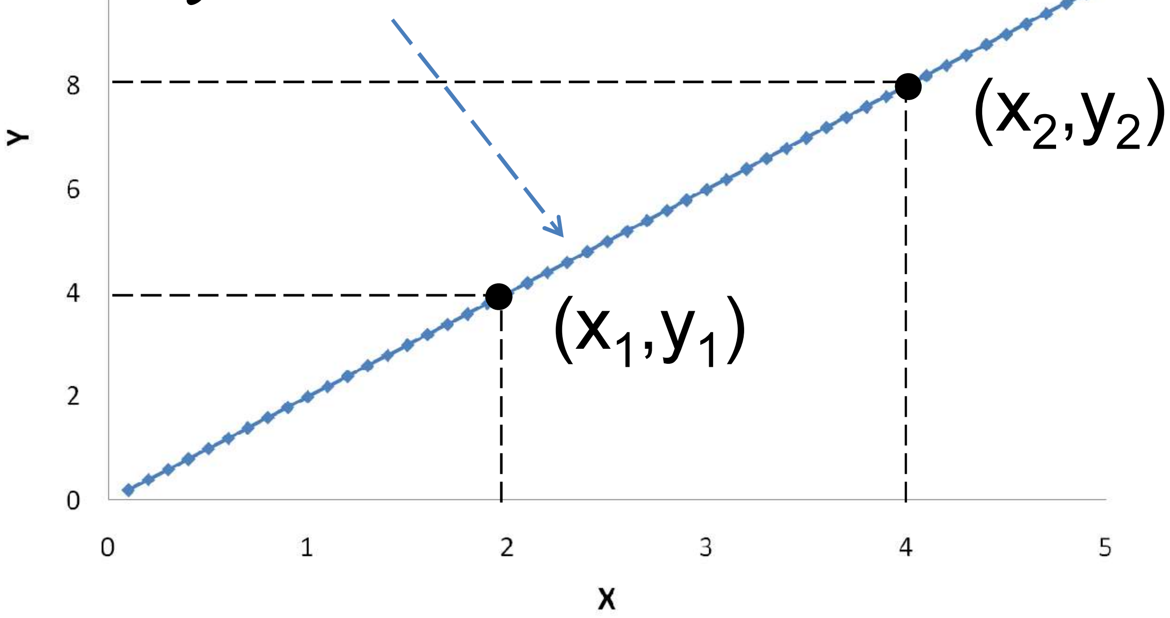
“Pendiente de una curva”

- Ecuación de la recta (ecuación lineal):

$$\boxed{y = mx + n}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = 2x$$



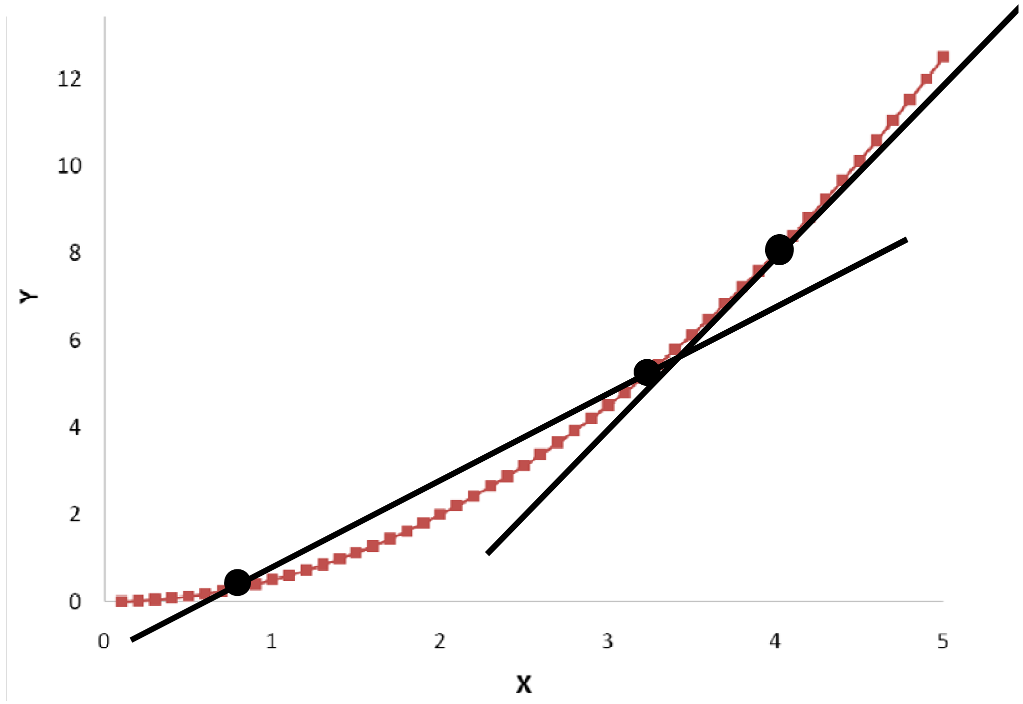
$$m = \frac{8 - 4}{4 - 2} = 2$$

“Pendiente de una curva”

- Ecuación de la parábola (ecuación cuadrática):

$$\boxed{y = a + bx + cx^2}$$

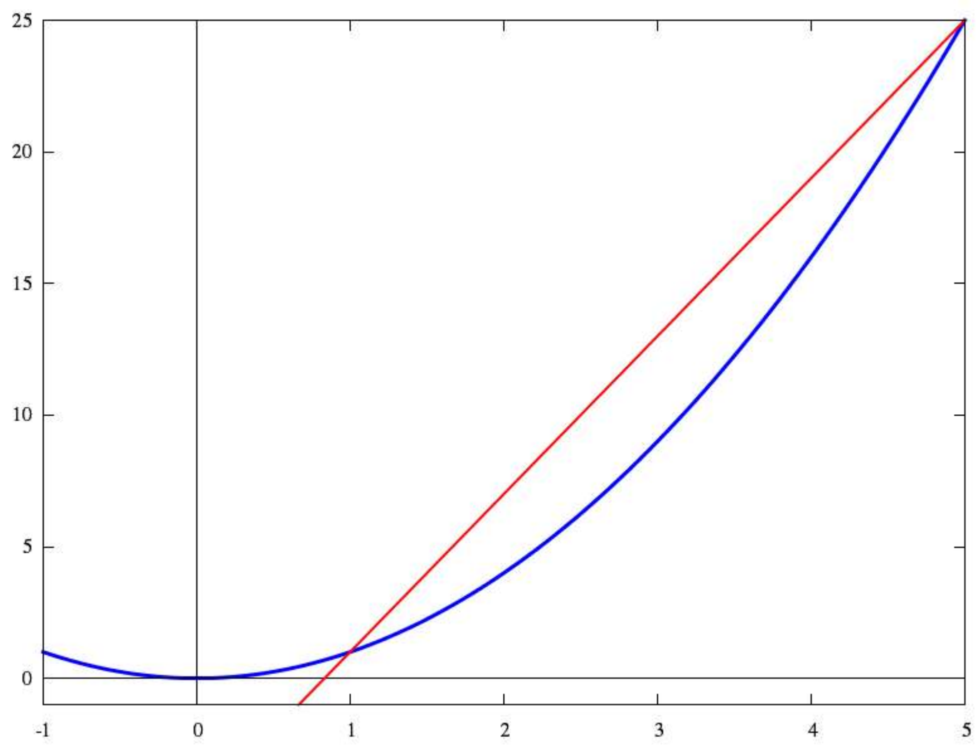
?



“Derivada” =
“Pendiente de una curva tangente”

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \xrightarrow{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{dy}{dx} = \dot{y} = y'$$

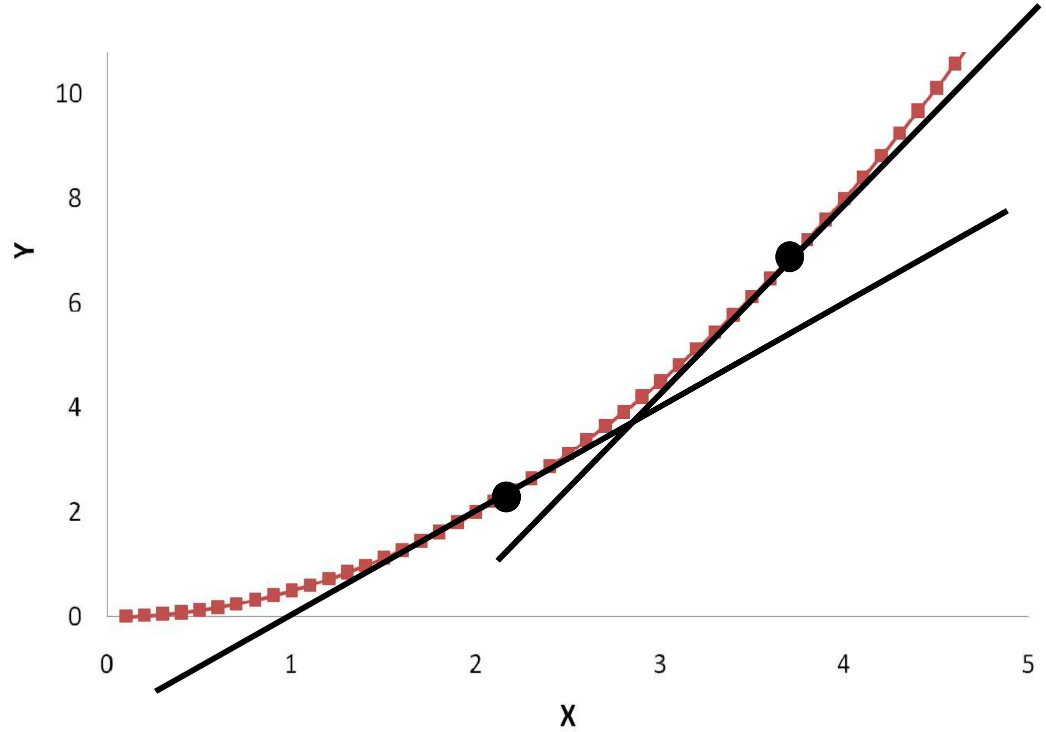
$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



“Derivada” = “Pendiente de una curva tangente”

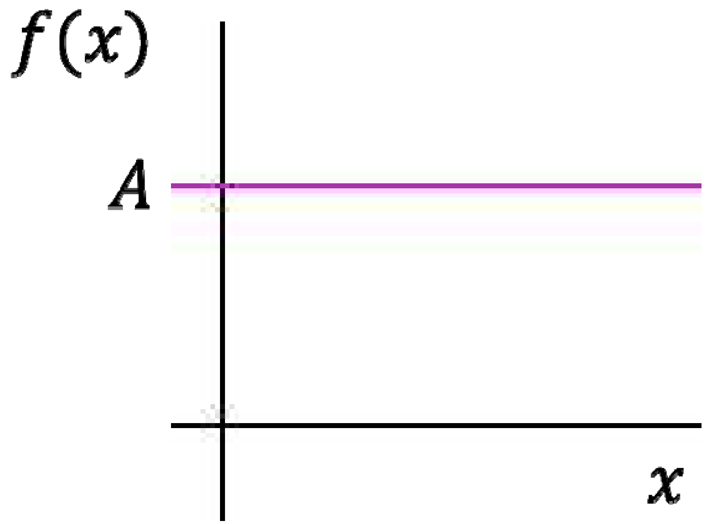
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \xrightarrow{(x_2 - x_1)\to 0} \frac{dy}{dx} = \dot{y} = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{lím} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



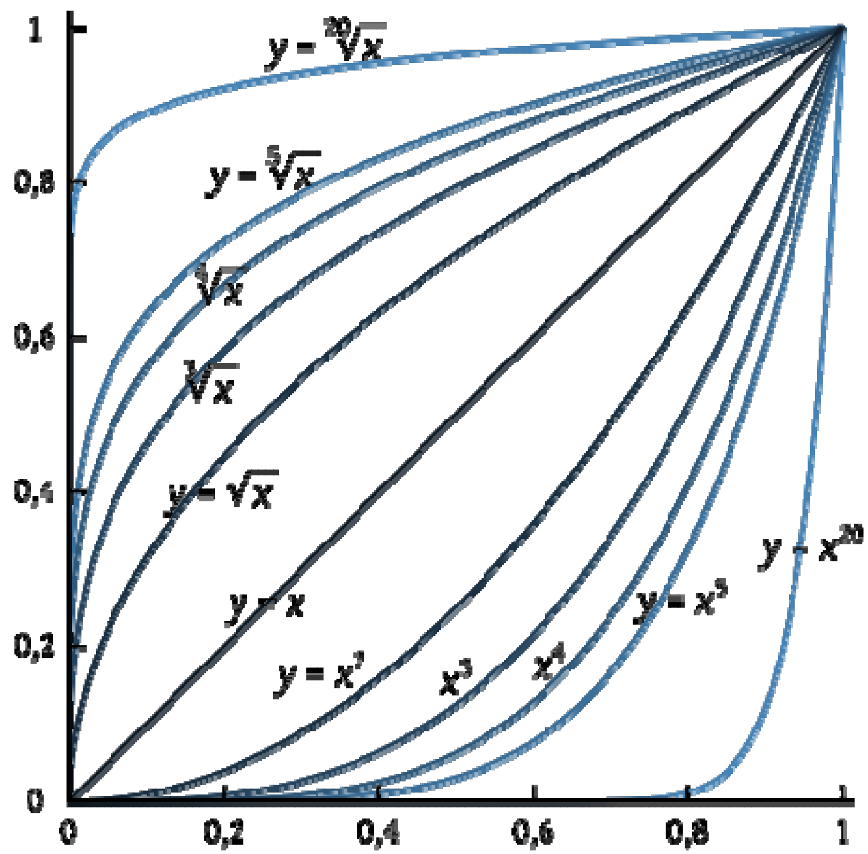
Derivada de una constante

$$f(x) = A \longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = 0$$



Derivada de un polinomio

$$f(x) = Ax^n$$



Derivada de un polinomio

$$f(x) = Ax^n \longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = Anx^{n-1}$$

$$f(x) = Ax \longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = Ax^0 = A$$

$$f(x) = Ax^2 \longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = A2x$$

$$f(x) = Ax^3 \longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = A3x^2$$

“Derivada de un polinomio”

$$\boxed{y = a + bx + cx^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = b + 2cx}$$

¿"Ecuación diferencial"?

$$\boxed{y = a + bx + cx^2}$$

¡La solución
es *cuadrática*!

¡Esta es la
solución de la
ecuación!

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = b + 2cx}$$

¡Esto es una
ecuación
diferencial!

¡La ecuación
es *lineal*!

Estudio de parámetros

- Ejemplo casero… (relación de pareja…)

Ecuaciones:

tiempo separados *tiempo juntos*

$$a + b = 16 \qquad (1)$$

comparten infor-mación interna *comparten infor-mación externa*

$$b = c + d \qquad (2)$$

parámetro de "conversión"

$$d = \alpha \cdot a \qquad (3)$$

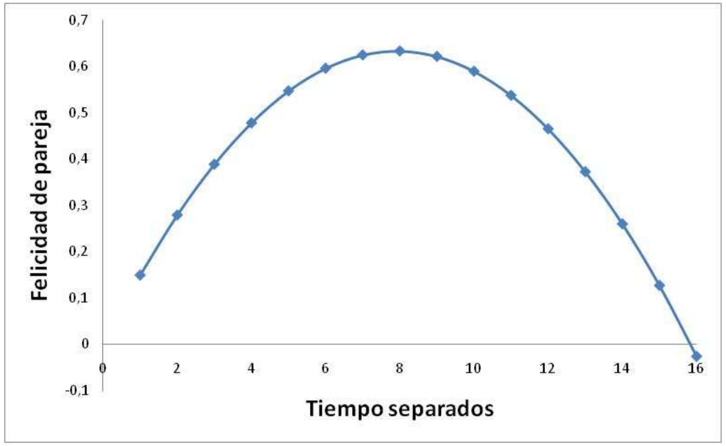
"Felicidad de pareja"

$$F = c \cdot d \qquad (4)$$

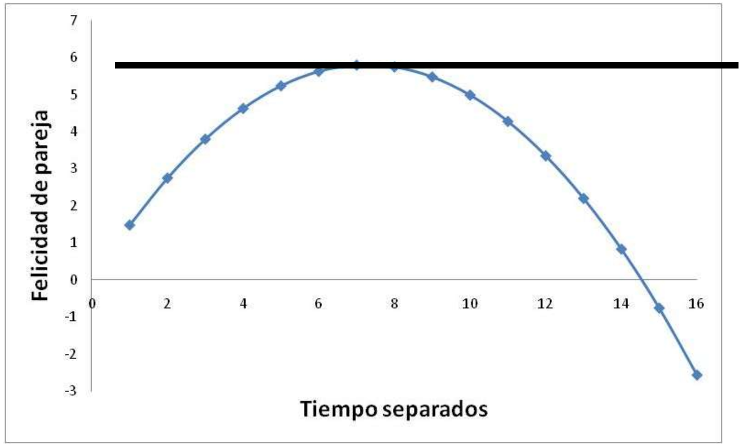
Solución:

$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

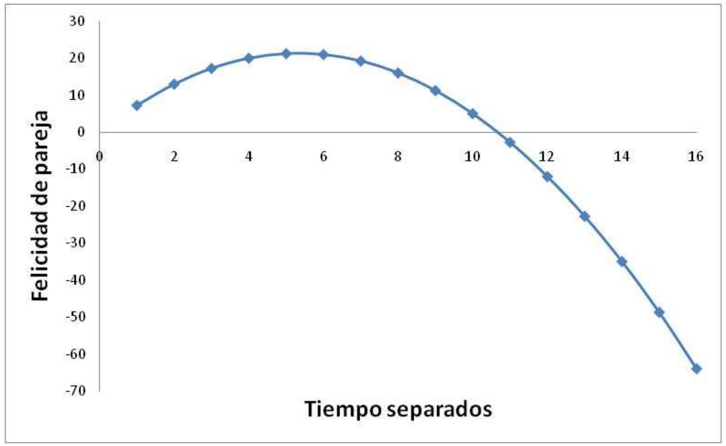
$$\alpha = 0,01$$



$$\alpha = 0,1$$



$$\alpha = 0,5$$



Estudio del óptimo (“máximo”):

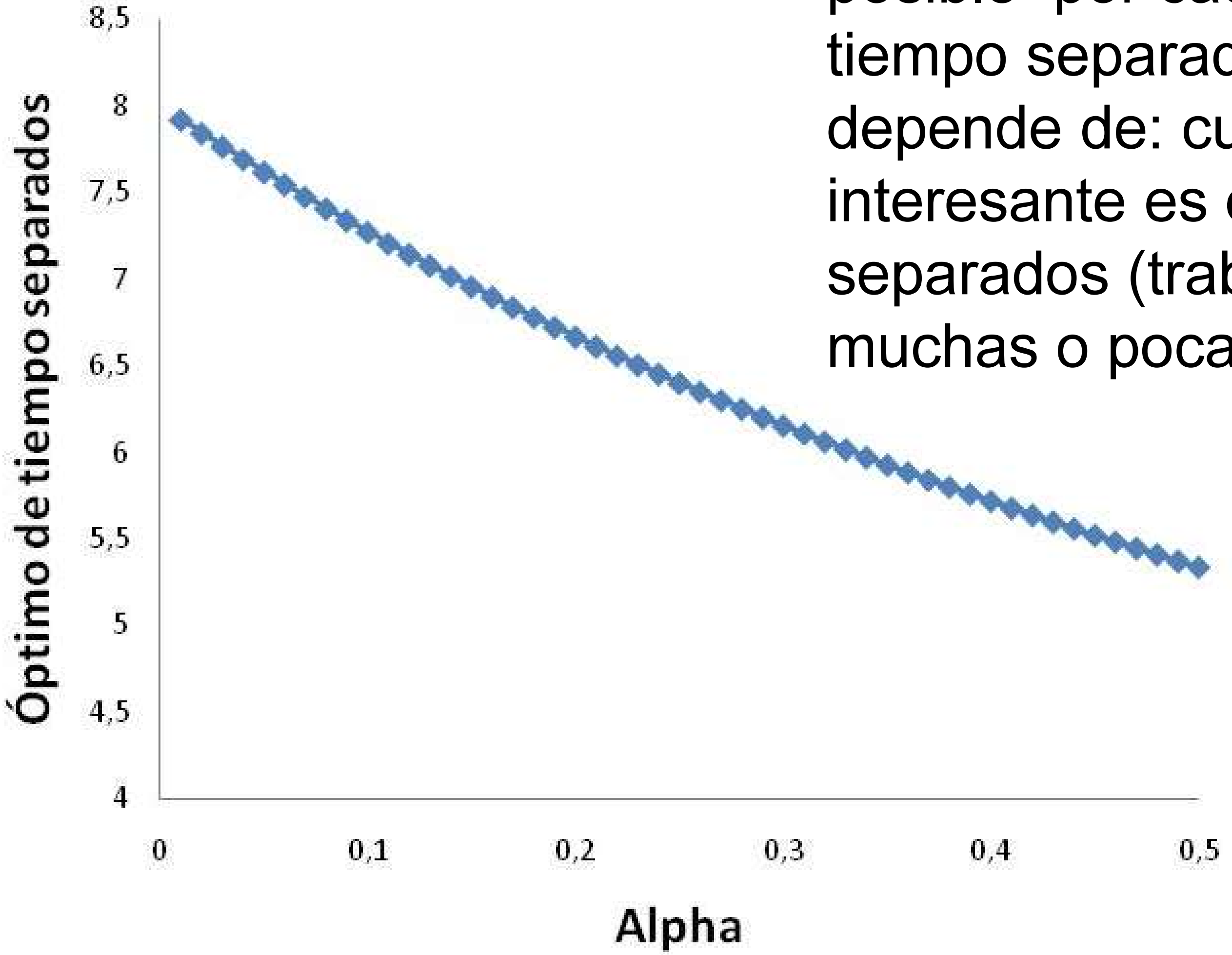
$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

$$\frac{dF}{da} = 16\alpha - 2\alpha(\alpha + 1)a_{MÁX} = 0$$

$$a_{MÁX} = \frac{8}{(\alpha + 1)}$$

$$a_{MÁX} = \frac{8}{(\alpha + 1)}$$

α: Horas de conversación “a propósito del tiempo separados” que se hacen posible por cada hora de tiempo separados. Eso depende de: cuán interesante es el tiempo separados (trabajo rutinario, muchas o pocas anécdotas).



Derivada de una exponencial

$$f(x) = e^x \longrightarrow \frac{df}{dx} = e^x = f$$

$$y = ae^{bx} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = ae^{bx} \cdot b = by$$

("regla de la cadena")

$$\boxed{y = ae^{bx} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = by}$$

¿"Ecuación diferencial"?

¡La solución es *exponencial*!

$$\boxed{y = ae^{bx}}$$

¡Esta es la solución de la ecuación!

¡Esto es una ecuación diferencial!

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = by}$$

¡La ecuación es *lineal*!

Derivada de seno y coseno

$$f(x) = \sin(x) \longrightarrow \frac{df}{dx} = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \longrightarrow \frac{df}{dx} = -\sin(x)$$

Segunda derivada

$$f(x) = \sin(x) \longrightarrow \frac{df}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x) = -f$$

$$\boxed{y = \sin(x) \longrightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -y}$$

Segunda derivada

$$f(x) = \mathrm{a}\sin(bx) \longrightarrow \frac{df}{dx} = \mathrm{a}\cos(bx)\cdot b$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d(\mathrm{a}\cos(bx)\ b)}{dx} = -\mathrm{a}\sin(bx)b^2 = -b^2 f$$

$$\boxed{y = \mathrm{a}\sin(bx) \longrightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -b^2 y}$$

”Ecuación diferencial de segundo orden”

¡La solución es *oscilatoria*!

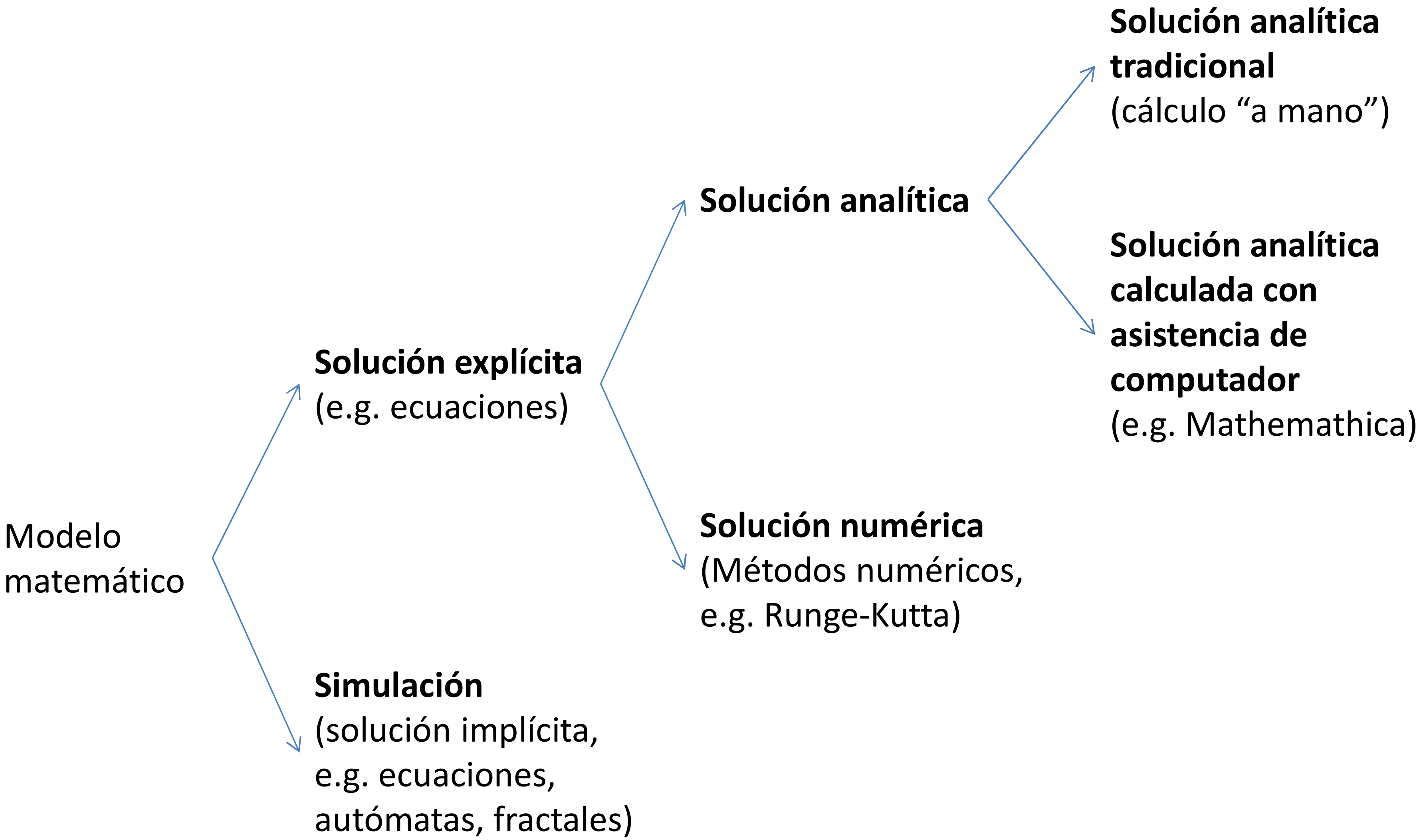
$$\boxed{y = \mathrm{a}\sin(\sqrt{b}x)}$$

¡Esta es la solución de la ecuación!

¡Esto es una ecuación diferencial de *segundo orden*!

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -b\,y}$$

¡La ecuación es *lineal*!


Modelo matemático
Solución explícita (e.g. ecuaciones)
Simulación (solución implícita, e.g. ecuaciones, autómatas, fractales)
Solución analítica
Solución numérica (Métodos numéricos, e.g. Runge-Kutta)
Solución analítica tradicional (cálculo “a mano”)
Solución analítica calculada con asistencia de computador (e.g. Mathemathica)

Solución de ecuaciones diferenciales… y muchísimo más!!

- https://www.wolframalpha.com/

Hay **dos formas de modelar con ecuaciones**
(de cualquier tipo, sean algebraicas, diferenciales, etc.):

1. Imponer una función a una **ecuación** y buscar la **solución** de la ecuación (modelamiento típico).

$$\begin{tikzcd} f_{ec}(x) \arrow[d] & \\ \textbf{Ecuación} \arrow[r, bend right, "f_{sol}(x)\ ?"'] & \textbf{Solución} \end{tikzcd}$$

Hay **dos formas de modelar con ecuaciones**
(de cualquier tipo, sean algebraicas, diferenciales, etc.):

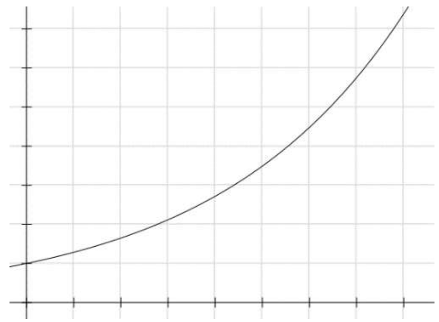
2. Imponer una función a una **solución** y buscar la **ecuación** cuya solución sea la impuesta.

$$
\begin{tikzcd}
 & f_{sol}(x) \arrow[d] \\
\textbf{Ecuación} & \textbf{Solución} \arrow[l, bend left, "f_{ec}(x)\ ?"]
\end{tikzcd}
$$

$f_{ec}(x)$ → **Ecuación** → **Solución** ← $f_{sol}(x)$

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$y = be^{ax}$$

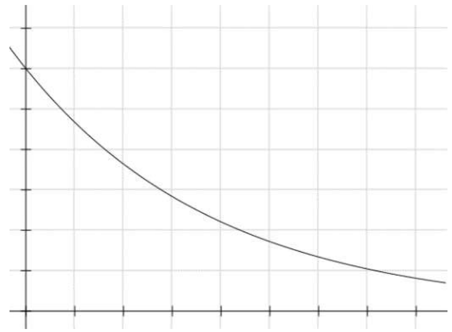


$$a \rightarrow -a$$

Cambio de tendencia…

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

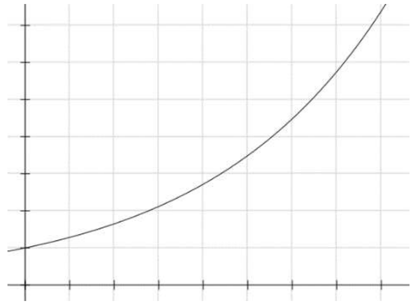
$$y = be^{-ax}$$



$f_{ec}(x)$ $\longrightarrow$ **Ecuación** $\longrightarrow$ **Solución** $\longleftarrow$ $f_{sol}(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay$$

$y = be^{\sqrt{a}x}$

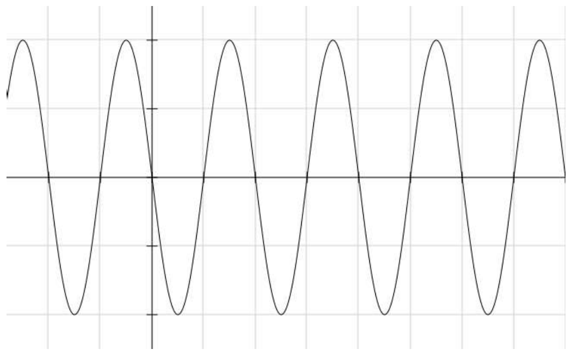


$a \rightarrow -a$

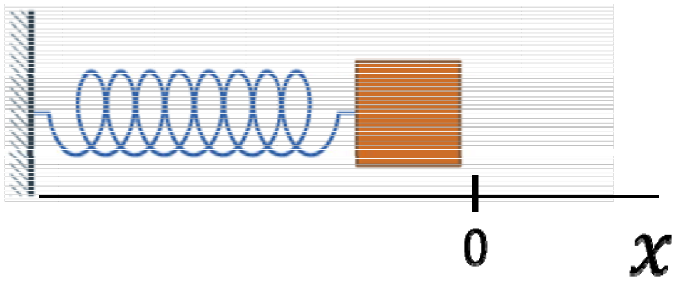
¡Cambio de comportamiento!

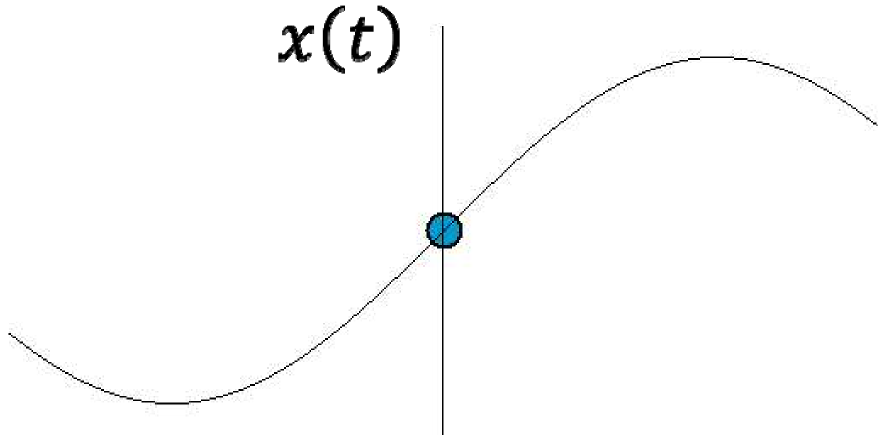
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -ay$$

$y = bsen(\sqrt{a}x)$



Modelamiento de sistemas dinámicos





Ecuación diferencial
del sistema dinámico:

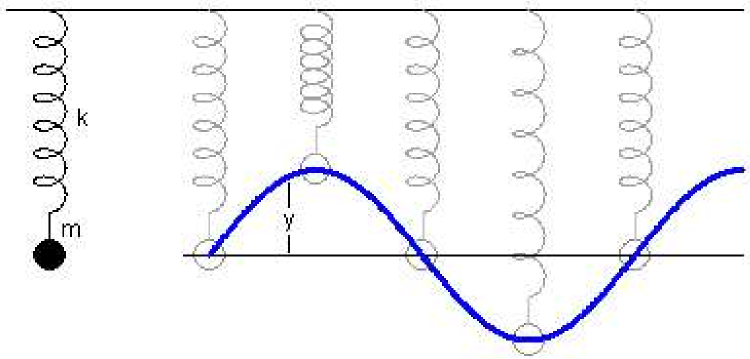
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

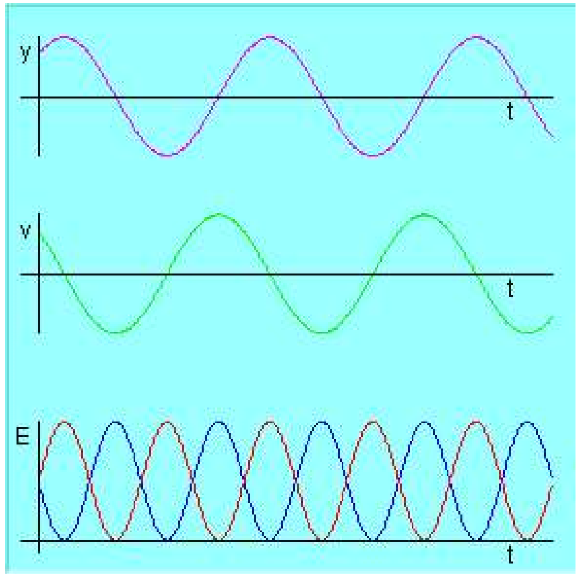
Solución de la ecuación
(dinámica del sistema):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Oscilador armónico simple:





Ecuación diferencial del sistema dinámico:

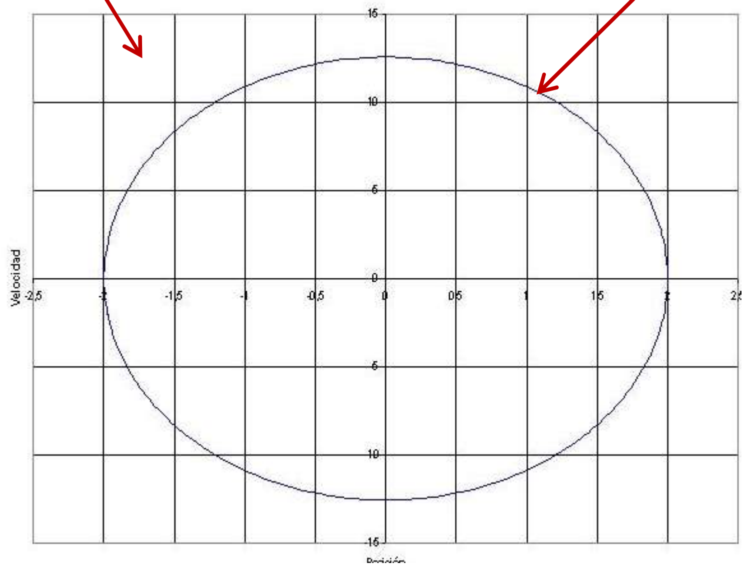
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

Solución de la ecuación (dinámica del sistema):

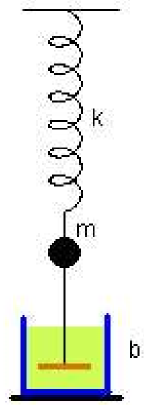
$$y = A\cos(\omega t + \phi)$$

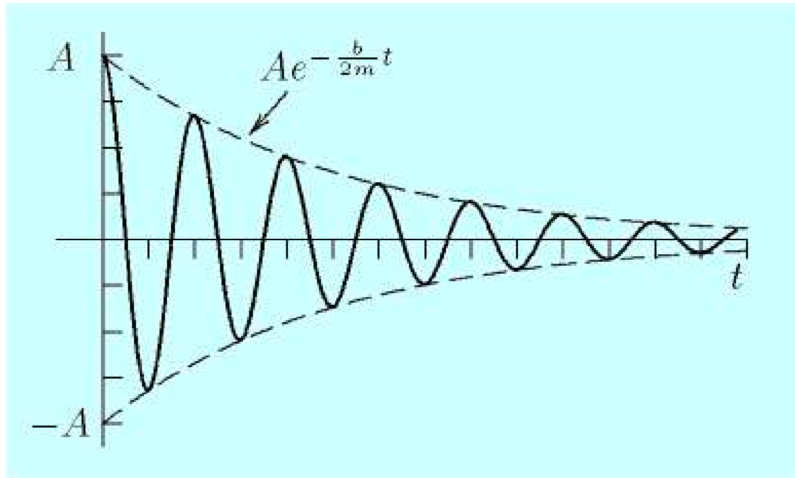
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Espacio de fase *Diagrama de fase*



Oscilador armónico amortiguado:



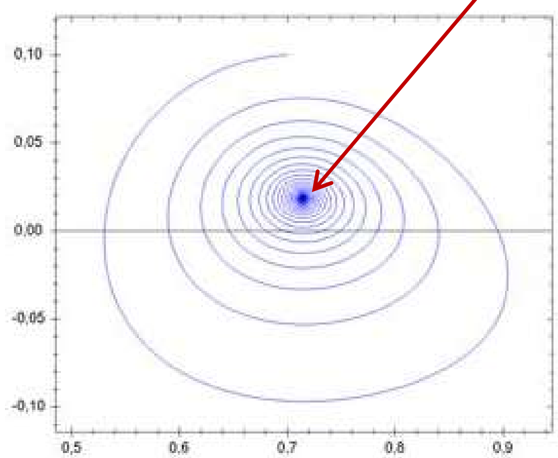


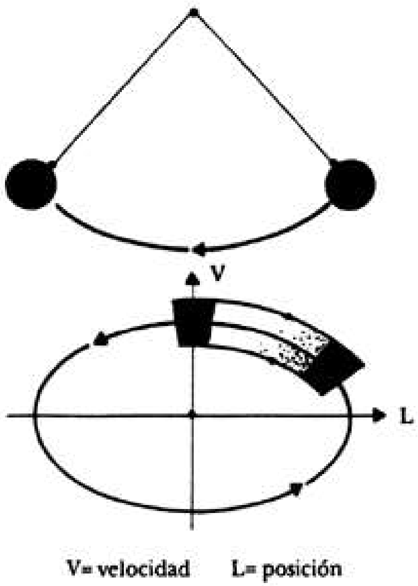
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt}$$

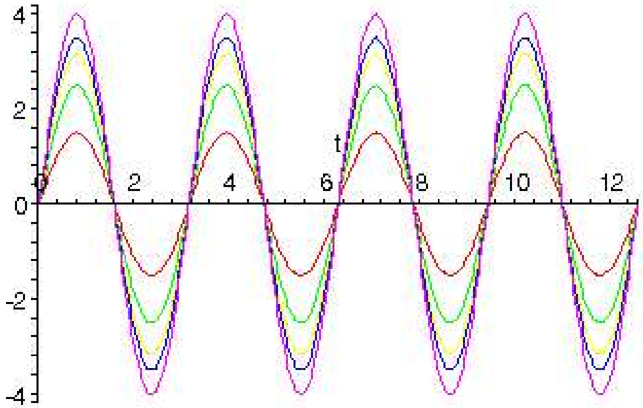
$$y = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

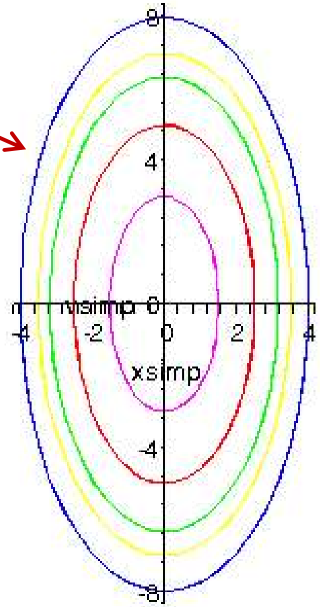
Atractor puntual

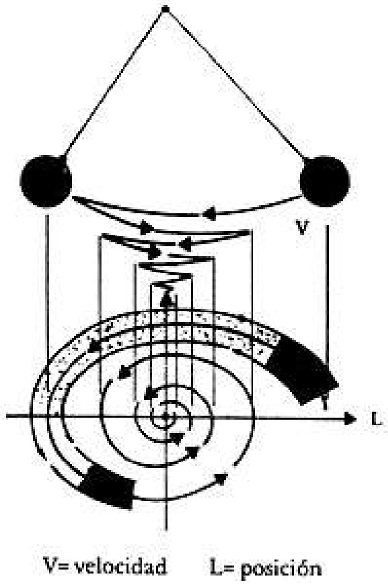


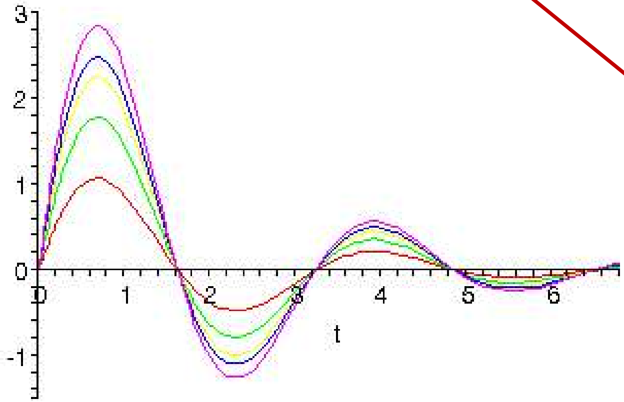




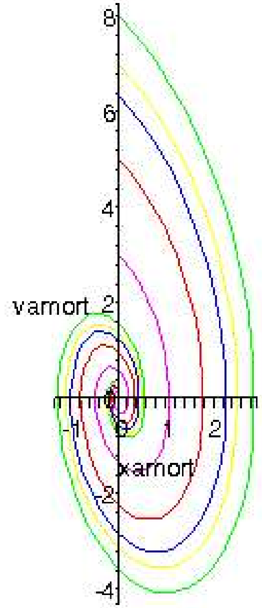
Oscilador periódico



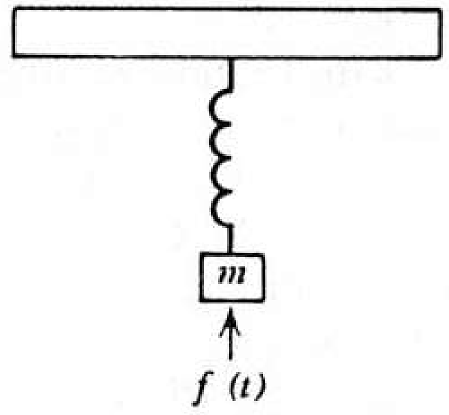


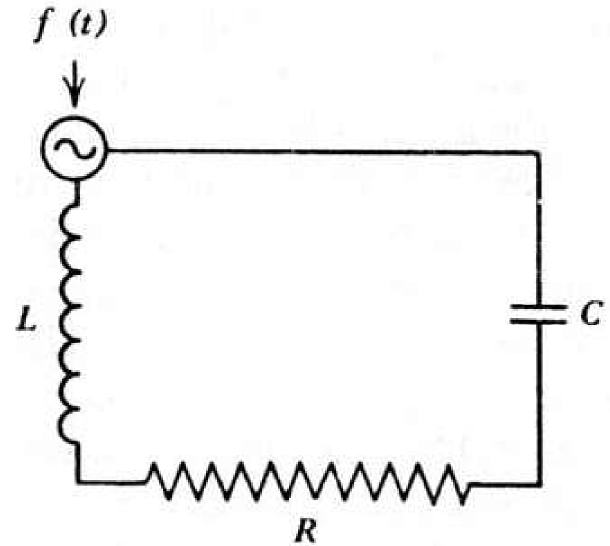


Atractor puntual



Isomorfismos en sistemas dinámicos…





$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+cx=f(t)$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+C^{-1}q=f(t)$$

Carga | Autoinductancia | Resistencia | Capacitancia

$x \leftrightarrow q$ | $m \leftrightarrow L$ | $r \leftrightarrow R$ | $c \leftrightarrow C^{-1}$

Posición | Masa | Fricción | Elasticidad

La estructura de la ecuación determina la dinámica…

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(wt)$$

con solución

$$x=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\theta)+\frac{F_0/m}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}sen(wt+\beta)$$

$$\beta=arctg\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}$$