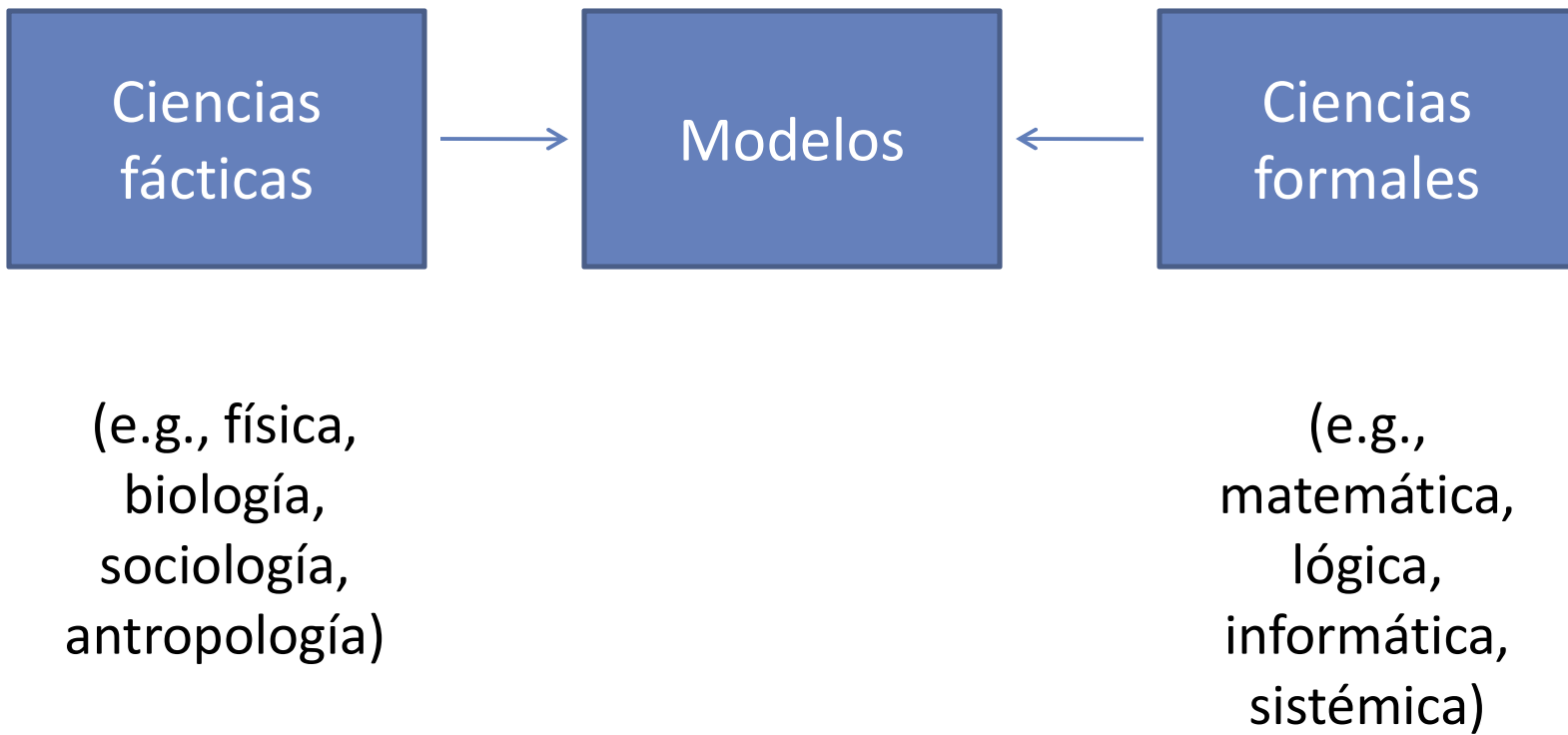


Contenidos

- Dos mitos del modelamiento.
- Modelos algebraicos.
- Gráfica de funciones (*software*).
- Pasos gruesos del modelamiento.
- Enfermedades del uso de modelos.
- Síntesis

“Modelo *matemático* (o *formal*)” = “Objeto *matemático* (o *formal*) que representa hechos, sistemas, procesos o fenómenos de la realidad.”



Mito 1: “Yo nunca he modelado”

- Escuela: 1º medio... (problemas en palabras, *word problems*, álgebra elemental)

“Javier tendrá tres veces su edad en cuatro años más. ¿Qué edad tiene Javier ahora?”

Ecuación:

$$3x = x + 4$$

Regla general para resolver ecuaciones:

“Cualquier solución de la ecuación es también solución de la ecuación obtenida al aplicar alguna operación a ambos lados”

Solución:

$$x = 2 \quad \text{“Javier ahora tiene dos años”}$$

“Javier tiene dos veces más edad que María y tiene la mitad que el cuadrado de la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno?”

Ecuaciones:

$$x = 2y$$

$$x = y^2 / 2$$

Soluciones:

$$y = 0$$

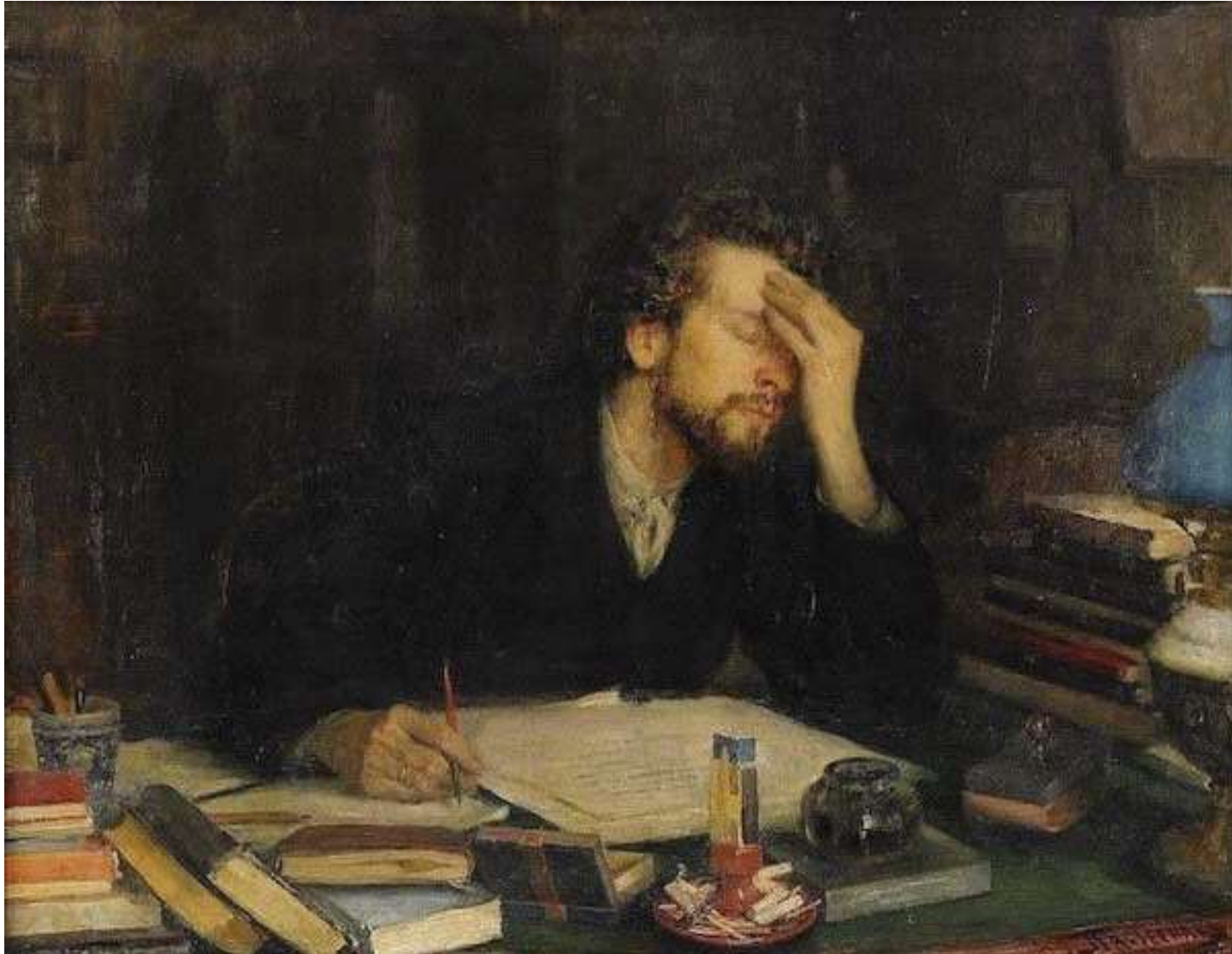
$$x = 0$$

ó

$$y = 4$$

$$x = 8$$

Mito 2: “Modelar es muy difícil”



Mito 2: “Modelar es muy difícil”

- Ejemplo casero... (relación de pareja...)

Ecuaciones:

Ecuaciones:

comparten información interna *comparten información externa*

tiempo separados *tiempo juntos*

$a + b = 16$ (1)

$$b = c + d \quad (2)$$

$$d = \overset{\text{parámetro de "conversión"}}{\alpha} \cdot a \quad (3)$$

“Felicidad de pareja”

$F = c \cdot d \quad (4)$

Solución:

$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

- Ejemplo casero... (relación de pareja...)

Solución:

$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

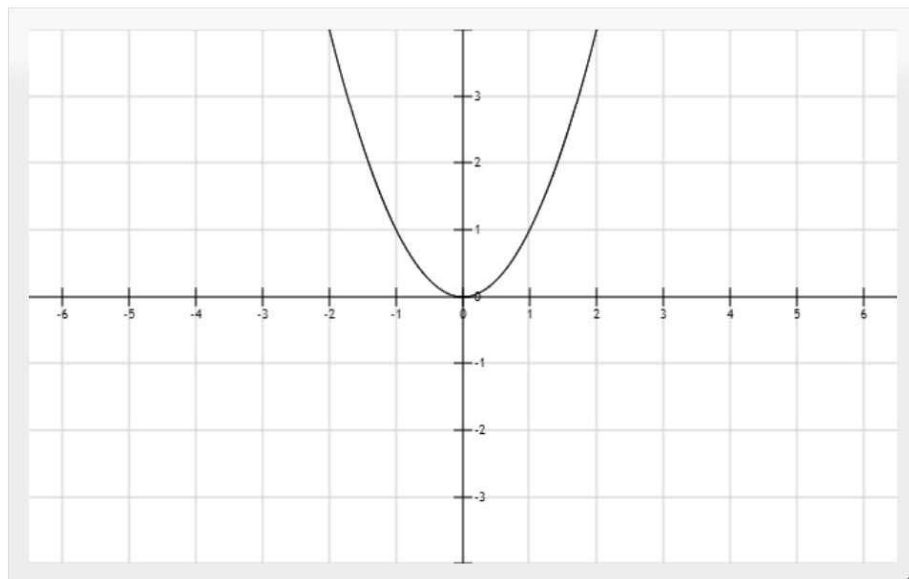
$$F = 16\alpha \cdot a - \alpha(\alpha + 1) \cdot a^2$$

$$F = k_1 \cdot a - k_2 \cdot a^2$$

$$k_1 = 16 \alpha$$

$$k_2 = \alpha(\alpha + 1)$$

α	k_1	k_2
0,01	0,16	0,0101
0,1	1,6	0,11
0,5	8	0,75



Función $y(x)$

x^2

Función

Añadir

Me gusta 10 786

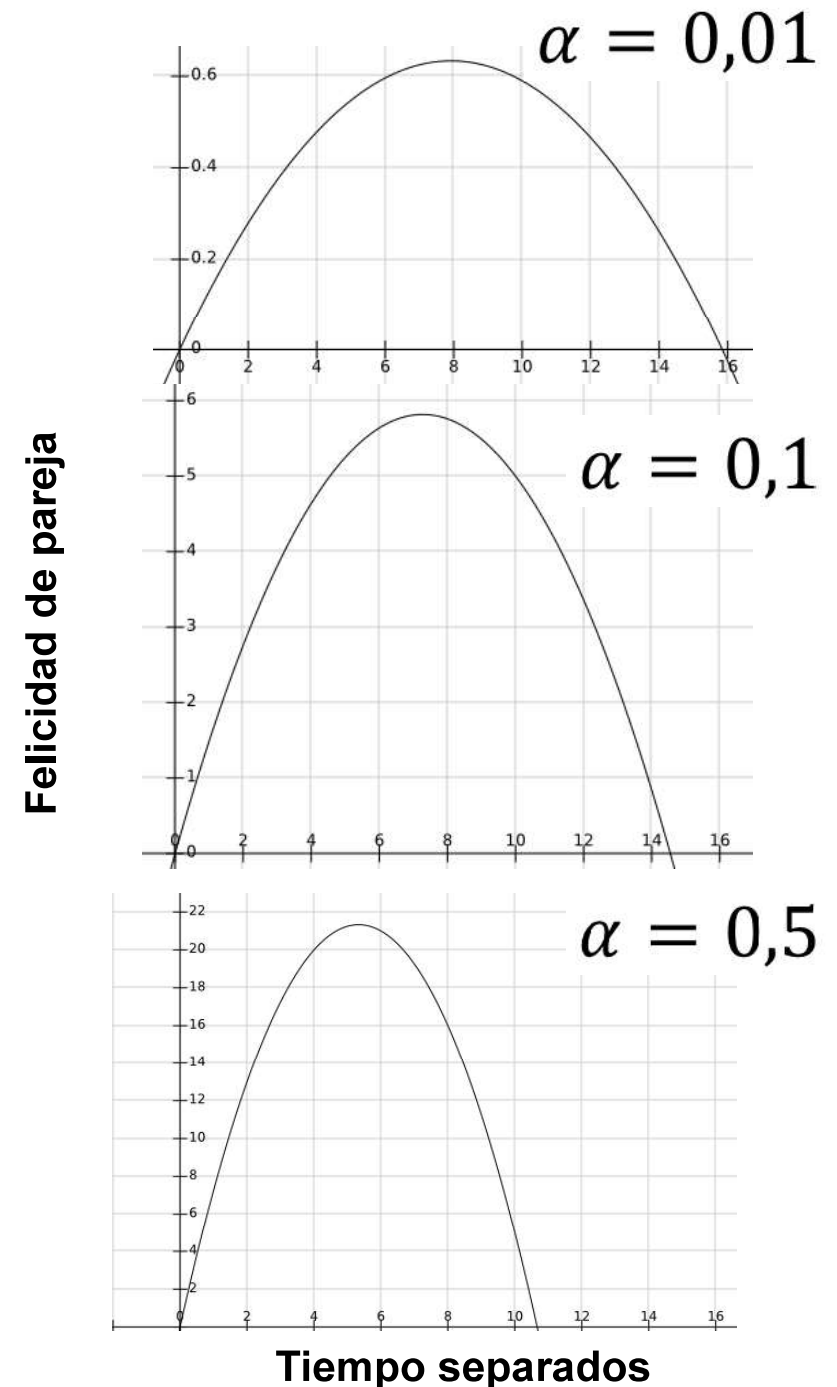
Twitter

available in the
chrome web store

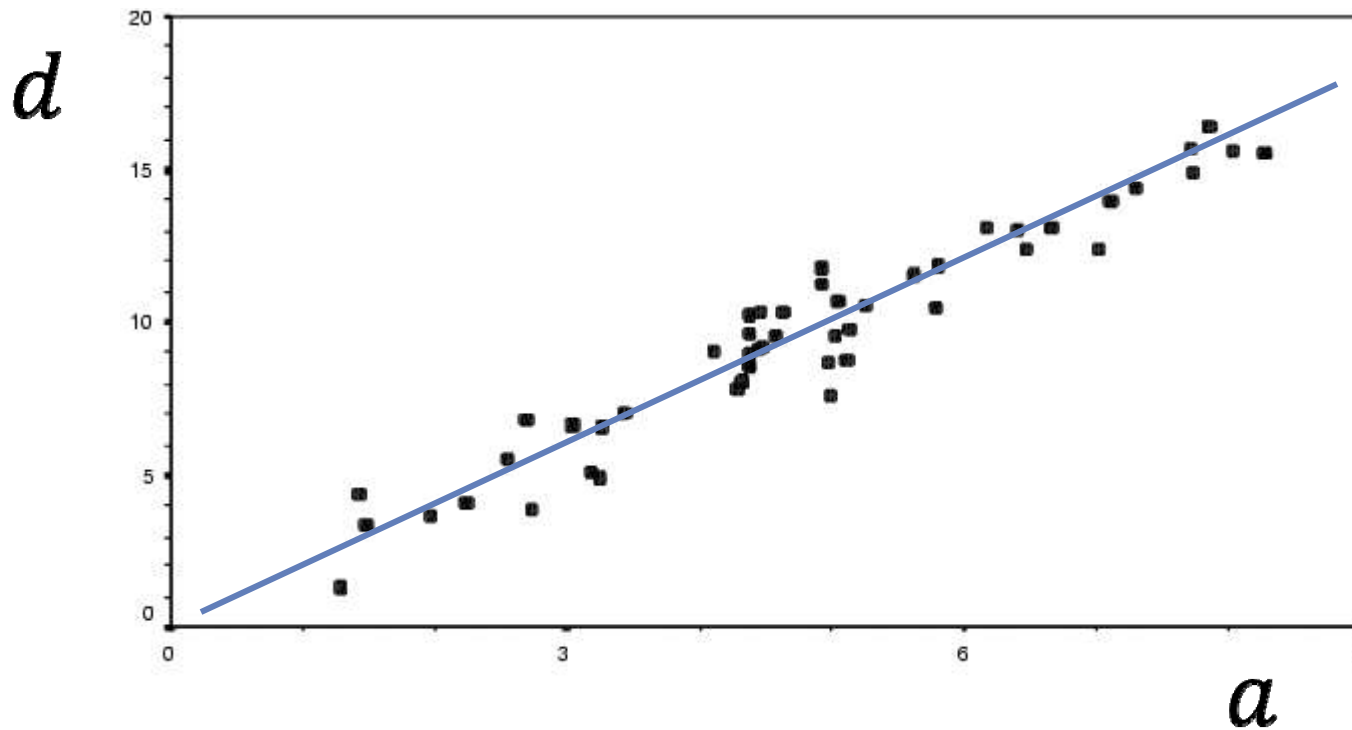
Dominio y recorrido	Mostrar	Intervalo de rejilla
<p>-6.5 < x < 6.5</p> <p>-4 < y < 4</p>	<p><input type="checkbox"/> Color de fondo</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Rejilla</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ejes</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Marcas de graduación</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Marcas de texto</p>	<p>x: <input type="text"/> y: <input type="text"/></p>
<p>Guardar su gráfico</p> <p>Exportar Scalable Vector Graphics (.svg)</p> <p>Otros ... Enlazar a esta página</p>		<p>Share</p> <p>Compartir en redes sociales:</p> <p>f t e</p>

Análisis de resultados:

- Existe un óptimo de tiempo pasando junto a la pareja.
- El tiempo óptimo depende de un parámetro de conversión (α) interpretable como qué tan “información acumulada en la vida sin la pareja” (“vida interesante”).
- A mayor parámetro de conversión (vida más interesante), disminuye la cantidad de tiempo óptima pasándolo separados
- ¿Cómo calcular un tiempo óptimo concreto? → necesitamos calcular α empíricamente.



comparten información externa $d = \alpha \cdot a$ *parámetro de “conversión”*
tiempo separados



Sistemas de ecuaciones algebraicas

- Cuando el número de ecuaciones independientes es **igual** al número de variables \rightarrow soluciones son **números**.
- Cuando el número de variables independientes es **mayor** al número de ecuaciones \rightarrow soluciones son **funciones**.

“Javier tiene dos veces más edad que María y tiene la mitad que el cuadrado de la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno?”

Ecuaciones:

$$x = 2y$$

$$x = y^2 / 2$$

Soluciones:

$$y = 0$$

$$x = 0$$

ó

$$y = 4$$

$$x = 8$$

- Ejemplo casero... (relación de pareja...)

Ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l} \text{comparten infor-} \\ \text{mación interna} \end{array} & \begin{array}{l} \text{comparten infor-} \\ \text{mación externa} \end{array} & \begin{array}{l} \text{tiempo separados} \quad \text{tiempo juntos} \\ a + b = 16 \end{array} \quad (1) \\
 b = c + d \quad (2) & & \begin{array}{l} \text{parámetro de "conversión"} \\ d = \alpha \cdot a \end{array} \quad (3) \\
 \begin{array}{l} \text{"Felicidad de pareja"} \\ F = c \cdot d \end{array} \quad (4) & &
 \end{array}$$

Solución:

$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

Estudio del óptimo:

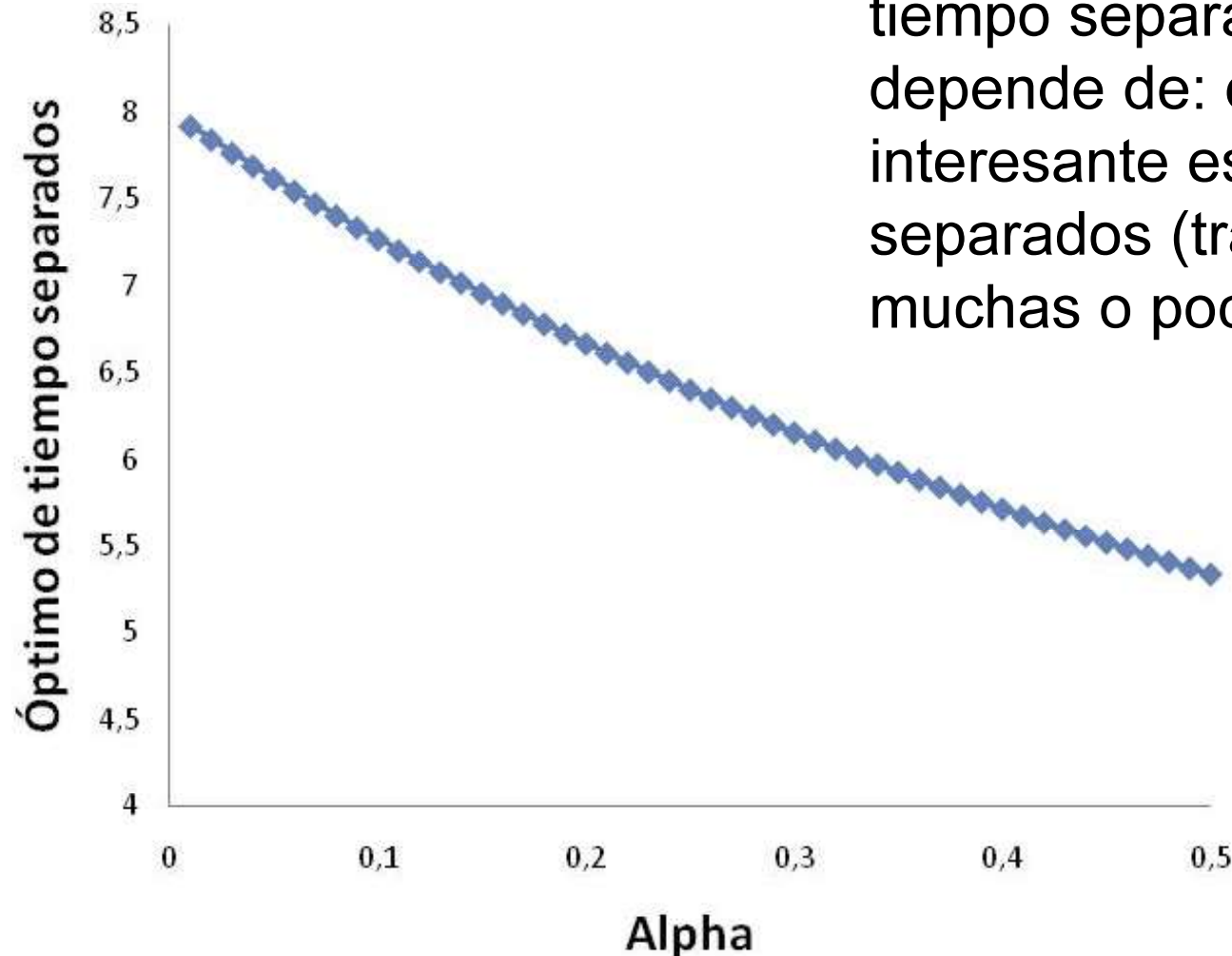
$$F = (16 - a(\alpha + 1)) \cdot \alpha a$$

$$\frac{dF}{da} = 16\alpha - 2\alpha(\alpha + 1)a_{MÁX} = 0$$

$$a_{MÁX} = \frac{8}{(\alpha + 1)}$$

$$a_{MÁX} = \frac{8}{(\alpha + 1)}$$

α : Horas de conversación “a propósito del tiempo separados” que se hacen posible por cada hora de tiempo separados. Eso depende de: cuán interesante es el tiempo separados (trabajo rutinario, muchas o pocas anécdotas).



Tarea...

- “Más vale el 10% de 100 que el 90% de 10”.
(Luis Razeto)



$$L = \alpha \cdot E$$

Y discutir...!
e.g. No lineal...?

$$F = \beta \cdot (E - L)$$

$$R = L - F$$

Resolver y explorar!!

Logro (L), expectativa (E), frustración (F), realización (R).

?

- “Más vale cabeza de ratón que cola de león”
- Dicho popular → principio tectológico → modelo algebraico!!

Thermoregulatory cost affects territorial behavior in hummingbirds: a model and its application

Paulina L. González-Gómez • Natalia Ricote-Martínez •
Pablo Razeto-Barry • Ivania S. Cotorás •
Francisco Bozinovic

Received: 28 January 2011 / Revised: 25 May 2011 / Accepted: 6 June 2011
© Springer-Verlag 2011

P. L. González-Gómez • P. Razeto-Barry
Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad (IFICC),
Los Alerces 3024, Santiago, Chile

109 METHODS

110 *Theoretical model*

111 Whether an aggression event corresponds to the conjunction of an attack of a non
112 territorial individual and a defense of a territorial individual, the probability of an
113 aggression $P(Ag)$ is

$$114 \quad P(Ag) = P(Ar) \cdot P(Df | Ar) \quad (1)$$

115

116 where $P(Ar)$ is the probability of an attack and $P(Df | Ar)$ is the conditional
117 probability of a defense given an attack.

118 We suppose that the probability of attack of one non territorial individual is
119 directly proportional to its energy availability E , then

120

$$121 \quad P(Ar) = K_1 \cdot E$$

122

123 where we define $E = FMR - MR$ as the difference between the field metabolic rate
124 (FMR) and the resting metabolic rate (MR). Thus, given that $MR = C(T_b - T)$
125 (McNab 2002), we obtain

126

$$127 \quad P(Ar) = K_1 C \cdot T + K_1 (FMR_A - CT_b) \quad (2)$$

132 In turn, it will be a temperature $T_{A_i}^*$ where the probability of attack will be the
 133 lowest ($P(A_i) = 0$) and a temperature $T_{A_i}^{**}$ where the probability of attack will be
 134 the highest ($P(A_i) = 1$), that according to (2) are, respectively

$$135 \quad T_{A_i}^* = \frac{(FMR_A - CT_b)}{C} \quad (3)$$

$$136 \quad T_{A_i}^{**} = \frac{1 - K_1(FMR_A - CT_b)}{K_1 C} \quad (4)$$

137
 138
 139 Therefore, we can describe the probability function of attack

$$140 \quad P(A_i) = \begin{cases} KC \cdot T + K_1(FMR_A - CT_b) & \text{when } T_{A_i}^* < T < T_{A_i}^{**} \\ 0 & \text{when } T < T_{A_i}^* \\ 1 & \text{when } T > T_{A_i}^{**} \end{cases} \quad (5)$$

168 Finally, combining the equations (1), (5) and (9), we obtain an expression for the
 169 relationship between the level of aggression and the ambient temperature:
 170

$$171 \quad P(\text{Agresión}) = \begin{cases} -\alpha T^2 + \beta T + \gamma & \text{when } T_{At}^* < T < T_D^{**} \\ 0 & \text{when } T < T_{At}^* \\ 0 & \text{when } T > T_D^{**} \end{cases}$$

172 where

173

$$\begin{aligned} \alpha &= K_1 K_3 C^2 \\ 174 \quad \beta &= K_3 [CK_1 (FMR_A - CT_b) + K_1 C (1 - K_2 \cdot FMR_D + CT_b)] \\ \gamma &= K_4 (1 - K_2 \cdot FMR_D + CT_b) (K_1 (FMR_A - CT_b)) \end{aligned}$$

$$T_D^{**} = \frac{(1 - K_2 \cdot FMR_D + CT_b)}{C}$$

$$T_{At}^* = \frac{(FMR_A - CT_b)}{C}$$

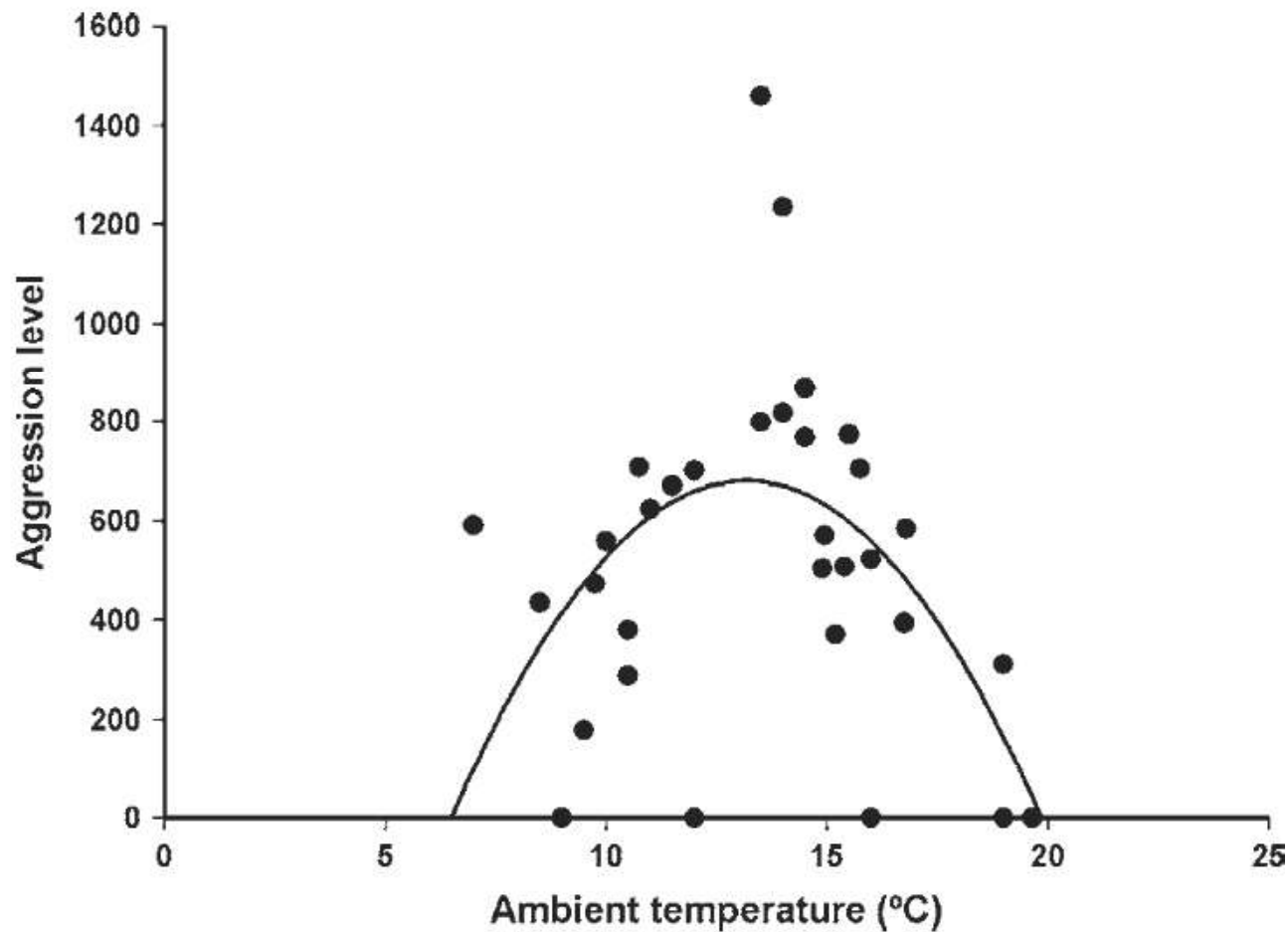


Fig. 1 Aggression levels displayed by males of *S. sephaniodes* at different ambient temperatures. The *line* represents the theoretical model while the *black dots* indicate field experimental data, represented by $y = -15.228x^2 + 401.224x - 1,962.52$. The lower limit of thermoneutral zone for this species is 28°C

Table 1 Parameter estimates (Bayesian posterior modes) for the three models of aggression in hummingbirds

Parameter	Linear model 1	Linear model 2	Quadratic model
Intercept	637.984	634.161	-1,962.52
Nectar quality	-4.937		
Ambient temperature		-8.137	401.22
Ambient temperature ^a		-15.533	-15.23
BIC	472.8405	473.0408	466.69
AIC	468.4433	468.6436	460.83
BIC weight	0.10	0.10	0.80

In the linear model 1, we incorporated the nectar quality as independent variable. In the second model (linear model 2), we included ambient temperature as independent variable. In the third model (quadratic model), we considered two ambient temperature terms, representing the second order polynomial

^aQuadratic temperature term

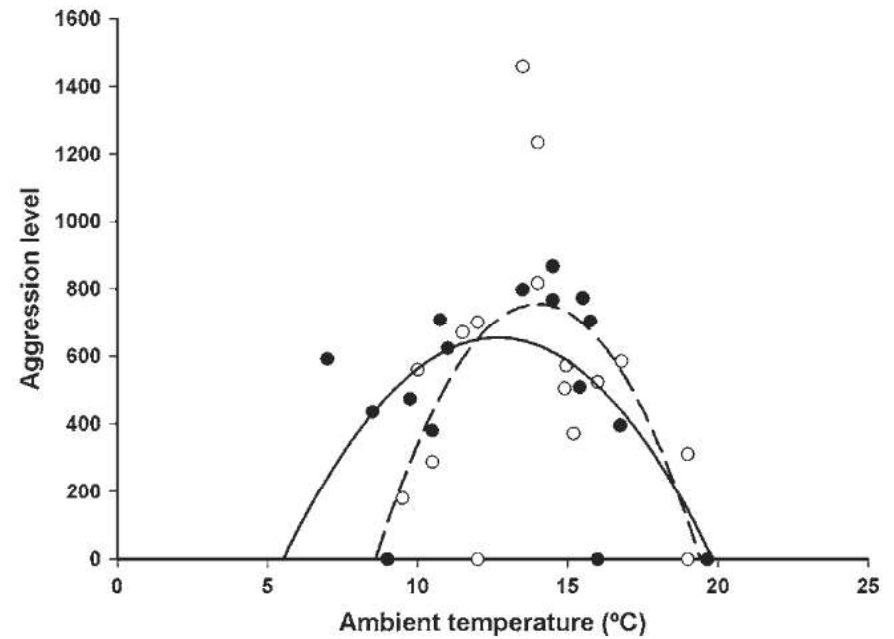


Fig. 2 Aggression levels of males of *S. sephaniodes* according to the resource quality at different ambient temperatures. The *solid line* and the *black dots* represent the high nectar quality territories (30%, w/w , $y = -11.594x^2 + 296.745x - 1,252.74$), while the *dashed line* and *white dots* represent the low nectar quality territories (15%, w/w , $y = -30.288x^2 + 836.62x - 5,009.2$)

Model predictions

We inferred ecological parameters through the theoretical model. First we estimated the critical temperatures for the cessation of aggression by the extrapolation of the curve fit to field data. Taking the overall data, we obtained a lower temperature $T_{\min}=6.5^{\circ}\text{C}$ and a higher temperature $T_{\max}=19.9^{\circ}\text{C}$. From Eq. 4 and assuming that $\text{FMR}_{\text{D}}=\text{FMR}_{\text{At}}$, we obtained $\text{FMR}=C(T_{\min}+T_{\text{b}})$; then using the values $C=0.397 \text{ mLO}_2\text{g}^{-1} \text{ h}^{-1}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ (López-Calleja and Bozinovic 1995) and $T_{\text{b}}=41^{\circ}\text{C}$ (Hainsworth and Wolf 1970; Wolf and Hainsworth 1972), we obtained $\text{FMR}=18.70 \text{ mLO}_2\text{g}^{-1} \text{ h}^{-1}$. Thus, the model predicts FMR as 5.9 times BMR (i.e., $3.17 \text{ mLO}_2\text{g}^{-1} \text{ h}^{-1}$, López-Calleja and Bozinovic 1995). Using the high- and low-quality nectar data separately, we obtained $T_{\min}=5.3^{\circ}\text{C}$ and $T_{\max}=20.3^{\circ}\text{C}$ for rich territories and $T_{\min}=8.8^{\circ}\text{C}$ and $T_{\max}=18.9^{\circ}\text{C}$ for poorer territories. Thus, the range of temperatures for high-quality territory defense was 1.5 times greater than for low-quality territory defense.

territorial behavior does not provide sufficient rewards to be energetically cost-effective.

As a subproduct of the theoretical model, we can predict that FMR in *S. sephaniodes* is 5.9 times higher than BMR. This prediction is very close to values already published for other hummingbird species, where the mean of FMR/BMR ratio is 5.92 ± 0.79 (Weathers and Stiles 1989 and references within, Powers and Conley 1994). From the equation reported by López-Calleja and Bozinovic (1995), under cold conditions (i.e., 5°C), the thermoregulatory cost represents 0.65 times FMR; in contrast, at the upper limit of the territorial behavior (i.e., 21°C), this cost represents roughly 0.3 times FMR, which explains the relevance of ambient temperature in the value of resources. Our results strongly suggest that ambient temperature—though its effect on physiological cost—could play an equivalent role to the food productivity by itself as proposed by Carpenter and MacMillen (1976).

Pasos (gruesos) del modelamiento:

- Clarificación
 - Análisis-depuración conceptual.
- Traducción (construcción del modelo)
 - Categorías formales (ecuaciones, diagramas UML)
- Implementación
 - Solución de ecuaciones / programación
 - *Calibración (parámetros empíricos)*
- Exploración
 - Estudio de parámetros, sensibilidad, etc.
 - *Contraste empírico (tendencias, datos observados, predicciones) y teórico (teorías u otros modelos).*
- Análisis/Interpretación de resultados

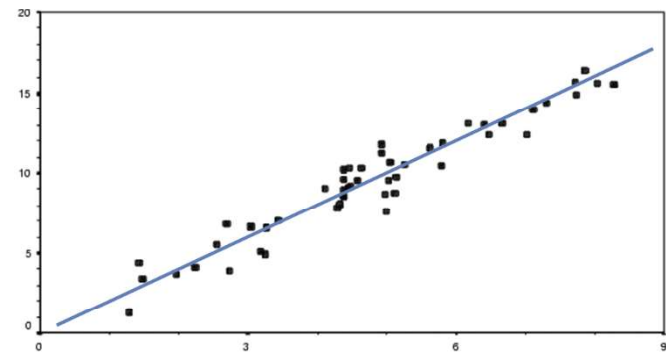
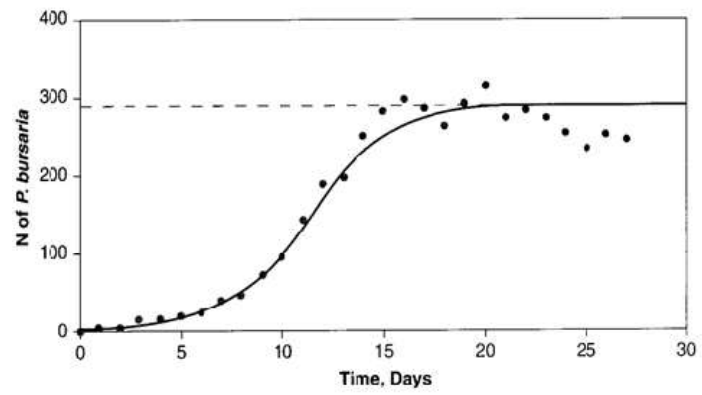
(“Ciclo de Polya”)

Modelamiento con funciones

- En esta sesión representamos fenómenos usando sólo **2** tipos de funciones:
 - Función línea recta (polinomio grado 1)
 - Función parábola (polinomio grado 2)
- Pero hay **muchas funciones** útiles:
 - Polinomios grado n
 - Seno, Coseno
 - Exponencial
 - Logaritmo
 - Logística
 - Gaussiana
 - Sinh, Cosh, etc.



www.fooplot.com!





“Enfermedades” del uso de modelos

1. “Libro de receta” (*cookbookery*). Tendencia a forzar todos los problemas a moldes de una o dos técnicas de rutina, insuficiente pensamiento es dado a los objetivos reales de la investigación o a la relevancia de los asuntos implicados por los métodos impuestos. (Box, 1976)

2. “Matematiquería” (*mathemategy*). Desarrollo de teorías para el bien de la teoría, la cual raramente aterriza a la práctica, tiene una tendencia a redefinir los problemas más que a resolverlos. (Box, 1976)

“Enfermedades” del uso de modelos

3. Inconsistencia fáctica: Los supuestos utilizados no son consistentes entre sí o sus implicancias no son consistentes con nociones fácticas usualmente aceptadas.

4. Sobrematematización: Los modelos y el aparataje matemático es de una complejidad innecesariamente alta, dado el problema estudiado. Dificulta la comprensión (y el desarrollo de intuición) del problema (Bunge).

Síntesis

- Contrario a lo que suele creerse, en la formación **escolar aprendimos a modelar** matemáticamente (con **álgebra elemental**).
- Además, la **construcción** de modelos **no** es **difícil**, pues (en general) **no** requiere **alto nivel técnico** en matemáticas o computación.
- Para el modelamiento con álgebra elemental es muy útil conocer diferentes **funciones**, que sirvan de **supuestos** para los modelos (una “caja de herramientas” fundamental para el modelamiento).

Síntesis

- Los **pasos** (gruesos) del modelamiento incluyen:
 - Clarificación
 - Traducción (construcción del modelo)
 - Implementación
 - Exploración
 - Análisis/Interpretación de resultados
- Entre las “**enfermedades**” del uso de modelos están:
 - Libro de receta
 - Matematiquería
 - Inconsistencia fáctica
 - Sobrematematización