Alianza Universidad

Sixto Ríos

Modelización

Alianza
Editorial

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el art. 534-bis del Código Penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización.

© Sixto Ríos García
© Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1995
Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 393 88 88
ISBN: 84-206-2822-0
Depósito legal: M. 31.154-1995
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Parque Industrial «Las Monjas»
28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L. Polígono Igarsa
Paracuellos de Jarama (Madrid)
Printed in Spain

A Álvarez Ude, Plans,
Terradas, Rey Pastor,
Bachiller y Puig Adam.

ÍNDICE

BIBLIOTECA
DONACIÓN
MANUEL VIVANCO

Prólogo 17

1. MODELOS Y MODELIZACIÓN

1.1. Introducción 23
1.2. Modelos analógicos: el movimiento diurno 24
1.3. Modelos cualitativos: la opinión pública y el péndulo 26
1.4. Modelos matemáticos: un viaje en bicicleta 27
1.5. Investigación operativa: la guerra antisubmarina (1942) 32
1.6. Los puentes de Königsberg y los grafos 34
1.7. La modelización matemática, la simulación y el método Montecarlo 37
1.8. Objetivos y clasificaciones: idealistas, pragmatistas y realistas 41
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 43
E.1.1. *Programación de un viaje de fin de semana* .. 43
E.1.2. *Óptimo emplazamiento de una estación de F.C.* 43

E.1.3 - E.1.8: *Ejercicios* 44
E.1.9. *Crecimiento de la población mundial* 44
E.1.10. *Modelos verbalistas de la Historia* 44
E.1.11. *Sistemas empíricos e Investigación Operativa* 46

2. CRECIMIENTO Y EQUILIBRIO

2.1. De Malthus al carbono 14 49
2.2. El proceso de modelización matemática a través de un problema biológico 50
2.3. Crecimiento de un cultivo bacteriano 50
2.4. Resumen 59
2.5. Modelo de crecimiento y muerte: crecimiento malthusiano 61
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 64
E.2.1. *Crecimiento con variable tiempo continua* ... 64
E.2.2. *Crecimiento logístico. Nivel de equilibrio* 65
E.2.3. *Desintegración radiactiva* 67
E.2.4. *Datación de muestras arqueológicas: la mesa redonda del rey Arturo* 69
E.2.5. *Momias egipcias* 71
E.2.6. *Edad de la Tierra* 71
E.2.7. *Población futura de España* 71
E.2.8. *Dosificación de medicinas* 72
E.2.9. *Calentamiento del agua de una piscina* 73
E.2.10. *Alcoholemia y accidentes de automóvil* 73
E.2.11. *Riñón artificial* 73
E.2.12. *Crecimiento económico e interés continuo* 75
E.2.13. *Pensiones y planes de jubilación* 76
E.2.14. *Contaminación y purificación de la laguna de Peñalara* 76

3. CIRCUITOS, LENGUAJES, CONJUNTOS

3.1. Circuitos eléctricos con conmutadores 81
3.2. Lenguaje natural y lenguaje matemático o científico. 88

3.3. Proposiciones simples 89
3.4. Operaciones con proposiciones. Conectivos. Tablas de verdad 90
3.5. Proposiciones lógicamente verdaderas, lógicamente falsas y factuales 93
3.6. Condicional y biocondicional 94
3.7. Implicación y equivalencia 96
3.8. Inferencia lógica 97
3.9. Argumentos válidos y no válidos 98
3.10. Cadenas de argumentos 101
3.11. Formalización de las teorías y modelos 102
3.12. Predicados o funciones proposicionales 102
3.13. Matemática, Lógica y Heurística 104
3.14. La noción de conjunto 105
3.15. Operaciones con conjuntos 108
3.16. Algebra de Boole abstracta 108
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 114
E.3.1. *Ejercicio* 114
E.3.2. *Circuito de luz de sotano* 115
E.3.3 - E.3.5: *Ejercicios* 115
E.3.6. *Proposiciones consistentes e independientes*... 116
E.3.7 - E.3.9: *Ejercicios* 117
E.3.10. *Indulto del prisionero* 118
E.3.11. *Para que la gente sea feliz* 118
E.3.12. *Álgebra de propiedades de objetos* 118
E.3.13. *Paradoja de Russell. ¿Está bien definido el catálogo de todos los catálogos de libros españoles?* 119
E.3.14. E.3.15: *Ejercicios* 119
E.3.16. *Partición en regiones* 119
E.3.17. - E.3.18: *Ejercicios* 120
E.3.19. *Álgebra binaria* 120
E.3.20. *Numeración binaria y ordenadores* 121

4. ORGANIZACIÓN, COMUNICACIÓN, GRAFOS, ALGORITMOS

4.1. El problema del cartero chino y los servicios públicos 125

4.2. Grafos y digrafos. Sociogramas 127
4.3. Organización jerárquica 129
4.4. Relación entre grafos, digrafos y matrices 130
4.5. El problema del *lider* 131
4.6. Sistemas relacionales 133
4.7. Algoritmos 133
4.8. Organigramas 134
4.9. Ciclos 139
4.10. Estructura del ordenador 141
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 143
E.4.1. *Multigrafos* 143
E.4.2. *Modelo de comportamiento en grupo: grafo signado* 143
E.4.3. *Ejercicio* 144
E.4.4. *Redes de distribución (Networks)* 144
E.4.5. *Relaciones entre neuronas* 146
E.4.6. *Método PERT* 147
E.4.7. - E.4.8: *Ejercicio* 147

5. MODELOS PROBABILÍSTICOS. AZAR, INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

5.1. Problema del caballero de Meré a Pascal en 1654 151
5.2. Fenómenos aleatorios 152
5.3. Experimentos aleatorios. Números aleatorios 154
5.4. Regularidad estadística 157
5.5. Modelo matemático de los sucesos orbservables y de las probabilidades 159
5.6. Aplicación del cálculo de probabilidades a la práctica 164
5.7. Lo que es y lo que no es una modelización: solución de Pascal al problema de De Meré 166
5.8. La ley genética de Mendel 167
5.9. Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes 169
5.10. Modelos probabilísticos de crecimiento. Desintegración radiactiva 170
5.11. La distribución de Poisson 171
5.12. Experimento de Rutherford 174
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 175

E.5.1. *Análisis estadístico de datos de operaciones militares* 175
E.5.2 *Accidentes de tráfico* 177
E.5.3. *Paro laboral* 177
E.5.4 - E.5.8: *Ejercicios* 178
E.5.9. *Mortalidad por cáncer* 178
E.5.10. *Seguridad del tráfico aéreo* 179
E.5.11. *Ejercicio* 179
E.5.12. *Problema de d'Alembert* 179
E.5.13. *Problema de Galileo* 179
E.5.14. *Ejercicio* 179
E.5.15. *Herencia del albinismo* 180
E.5.16. *Ejercicio* 180
E.5.17. *Política de Sultán* 180
E.5.18. *Problema del reparto* 180
E.5.19. *Ejercicio* 180
E.5.20. *Fiabilidad funcional de un satélite artificial* .. 181
E.5.21 - E.5.22: *Ejercicios* 181
E.5.23. *Dosificación de vacunas* 183

6. MODELOS DE SIMULACIÓN Y MÉTODO DE MONTECARLO

6.1. Cálculo de integrales por Montecarlo 187
6.2. Algunos problemas de aplicaciones industriales 189
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 197
E.6.1. *Reemplazamiento de equipos* 197
E.6.2. *Carga y descarga de calderas* 197
E.6.3. *Problema de artillería y bombardeo* 198
E.6.4. *Cálculo del número* π 200
E.6.5. *Juegos simulados* 200
E.6.6. *Colas en las clínicas* 201

7. INFERENCIA ESTADÍSTICA

7.1. Comparación de dos tratamientos curativos 205
7.2. Teorema de Bayes 209
7.3. La inferencia estadística en pruebas y exámenes 211

7.4. Campañas sanitarias 212
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 213
E.7.1 - E.7.11: *Ejercicios* 213-15
E.7.12. *Control de calidad* 215

8. PROGRAMACIÓN. OPTIMIZACIÓN

8.1. Introducción 219
8.2. Problema del viajante 220
8.3. Etapas de la modelización 221
8.4. Un problema de transporte con coste mínimo 221
8.5. Modelo matemático 224
8.6. Ejemplos de programación lineal 225
8.7. Solución geométrica 230
8.8. Programación en enteros 232
8.9. Optimización con multicriterios 233
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 237
E.8.1. - E.8.7: *Ejercicios* 237-38
E.8.8. *Principio de optimización de Bellman o de la programación dinámica* 239
E.8.9. *Coste mínimo de una autopista* 241
E.8.10. *Optimización en Economía, Biología, etc.* 243
E.8.11. *Ejercicio* 244

9. PROCESOS DE DECISIÓN

9.1. Decisiones individuales y función de valor 247
9.2. Decisiones individuales y función de utilidad 250
9.3. La utilidad de Von Neumann 254
9.4. Decisión con información o experimento asociado 257
9.5. Decisiones colectivas 261
9.6. Votaciones. El teorema de Arrow 261
9.7. Problema del sindicato (riesgo compartido) 264
9.8. Decisiones de grupo bayesianas y paretianas 265
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 267
E.9.1 - E.9.7: *Ejercicios* 267-68
E.9.8. *Escalas de medidas* 268

E.9.9. *Evolución de las escalas de medida* 269
E.9.10. *Relaciones significativas* 269
E.9.11 - E.9.15: *Ejercicios* 269-70
E.9.16. *Programación dinámica estocástica* 270

10. JUEGOS DE ESTRATEGIA

10.1. Introducción 275
10.2. Algunos ejemplos 275
10.3. Conceptos fundamentales 279
10.4. Otros ejemplos 281
10.5. Estrategias simples. Valor del juego 283
10.6. Caracterización de los juegos con estrategia simple. Matriz con puerto 285
10.7. Juegos sin puerto. Estrategias mixtas. Teorema minimax 285
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 289
E.10.1. *Método gráfico de solución* 289
E.10.2. *Problemas de la propaganda* 291
E.10.3. *Problemas de una refinería* 292
E.10.4. *Juegos de suma no nula* 292
E.10.5. *Problema del desarme (modelo de Nash)* 293
E.10.6. *Ejemplo de formalización de un juego dado en forma extensiva* 294

11. DE LA ASTROLOGÍA AL SPUTNIK

11.1. Sistemas de la ciencia natural y de las ciencias del comportamiento 299
11.2. La caída de los cuerpos. Modelo de Galileo 300
11.3. Trayectorias de proyectiles 302
11.4. Modelo de Newton de la gravitación universal 305
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 308
E.11.1. *Kepler astrólogo* 308
E.11.2. *La batalla de las Malvinas* 309
E.11.3. *Modificación del modelo de Galileo* 309
E.11.4. *Gotas de lluvia* 309
E.11.5. *El Sputnik y la balística de cohetes* 309

E.11.6. *Los modelos de la Astronomía griega y el error de Cristóbal Colón* 310
E.11.7. *Kepler, Newton, Einstein* 312
E.11.8. *A la busca de un planeta perdido: la ley de Bode* 312

12. SISTEMAS DINÁMICOS

12.1. Introducción 317
12.2. Modelización por diagramas de bloques 318
12.3. Realimentación 321
12.4. Sistemas abiertos y sistemas con realimentación 323
12.5. Acoplamiento y operador de transferencia 324
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios 327
E.12.1. *Cibernética* 327
E.12.2. *Importancia de los sistemas con control de realimentación* 328
E.12.3. *Homeostasia* 328
E.12.4. *Negociaciones laborales* 329
E.12.5. *Crecimiento de una población* 329
E.12.6. *Modelos mundiales* 329
E.12.7. *Ejercicio* 330

BIBLIOGRAFÍA 331

PRÓLOGO

Un rasgo característico de la cultura actual es la amplia aplicación de los métodos matemáticos a las más diversas actividades humanas, que van de la ciencia y la tecnología a los aspectos organizativos y productivos de la vida moderna. Este proceso se refuerza de modo progresivo hacia los años cincuenta coincidiendo, no por casualidad, con la aparición de los primeros ordenadores, y el matemático, que hasta entonces era una planta rara de la sociedad, pasa a jugar un papel importante, al convertirse en la mente rectora de los procesos de modelización matemática, que constituyen el núcleo fundamental de dichas aplicaciones. Frases corrientes en la prensa como «gracias al ordenador...», «el ordenador predice», etc., olvidan a los matemáticos aplicados con su actividad creadora de modelos y algoritmos indispensables para que sus «ayudantes» los ordenadores trabajen y enriquezcan la potencia intelectual del hombre de ciencia, el gobernante, el técnico, el médico,...

Concretamente, la modelización matemática es un proceso mental que conduce a convertir un problema opaco de la realidad en un problema clarificado matemático, de modo que resolviendo éste se consiga una solución o, al menos, un buen conocimiento del primero.

Sentado esto, no hay duda de que la modelización matemática

debe ser una fase obligada de la enseñanza de las matemáticas. Se considera actualmente que la forma tradicional de enseñar las matemáticas como un edificio acabado en que se parte de unos axiomas y se demuestran lemas, teoremas y corolarios en una sucesión interminablemente aburrida (para el 95% de los alumnos), finalizando con unos ejercicios que oscilan entre lo trivial y lo ingenioso; pero que están siempre tan lejos de las aplicaciones reales como la teoría descarnadamente expuesta, es totalmente inadecuada y deformante para el que aspira a aplicar la Matemática, llámese físico, economista, biólogo o matemático aplicado. Los problemas de la realidad no se presentan nunca como los ejercicios de fin de capítulo de un libro tradicional de Matemáticas, que comienzan con frases como las siguientes: «Demostrar que en todo triángulo isósceles...», «Probar que la suma...»,... Son contrariamente del tipo: «Cómo evolucionará una población de 1.000 truchas, que se colocan en un vivero con una cierta cantidad de alimentos...», «Cómo podemos encontrar la relación...»

Si se ha de preparar a economistas, ingenieros, matemáticos, biólogos,... para la modelización de este tipo de problemas complejos en que una masa de información irrelevante oscurece el objetivo central y en que precisamente la habilidad consiste en destacar dicho objetivo y seleccionar la información necesaria, la formación debe diferir claramente de la tradicional en las clases de matemáticas dirigida a comprender conceptos abstractos, demostrar teoremas, resolver ecuaciones, muy convenientes para la formación de matemáticos puros (que deben ser siempre una bajísima proporción de la población estudiantil); pero insuficientes para el que va a aplicar la matemática o para la formación matemática del hombre medio. Pena da recordar el caso del niño de ocho años, conocedor superficial de unas cuantas definiciones de la teoría de conjuntos, que al presentarle un problema real de los que su madre debe resolver a diario, pregunta si es de sumar o de multiplicar. Justamente porque no le han enseñado la manera de modelizar el problemita real. Se admite hoy generalmente que si desde la enseñanza elemental se llegara al conocimiento matemático resolviendo problemas *en íntima* conexión con la vida diaria, las ciencias humanas, la Física..., y se educara al alumno en la modelización de tales problemas, el hombre medio tendría un concepto sobre la necesidad, el interés y el poder de las Matemáticas muy superior al que tiene en la actualidad y, por ejemplo, los directores de empresas y administraciones, si hubieran recibido tal formación, comprenderían más fácilmente qué tipo de ayuda le pueden prestar los matemáticos, colaborando en la resolución de sus problemas y logrando un avance importante en las relaciones entre la universidad, la industria y la sociedad de gran valor para nuestro progreso.

Cuanto beneficio recibirían nuestras enseñanzas matemáticas si, como en otros países, adoptaran las consecuencias de la revolución informática plasmándolas a través de la modelización y el ordenador.

Despertar en nuestro país un mayor interés por los puntos de vista expuestos es el objetivo de este libro. Nos dirigimos con él fundamentalmente al hombre educado de nuestro tiempo y, también, a los alumnos que inician sus estudios en aquellas Facultades con alguna relación con las Matemáticas, que puede decirse que hoy son casi todas.

De los varios enfoques posibles en un libro de este tipo, hemos elegido poner especial énfasis en la comprensión de las diferentes fases del proceso de modelización, mediante ejemplos reales clasificados por sus objetivos generales: crecimiento, equilibrio, organización, sistema, incertidumbre, azar, caos, inferencia, decisión, optimización, juego,..., considerando como puntos de vista secundarios las técnicas matemáticas (Álgebra, Probabilidades,...) y las ciencias o técnicas (Sociología, Economía, Biología,...) a que pertenecen los diversos casos prácticos considerados.

Con un bagaje matemático que no va más allá del bachillerato, creemos que con este libro es posible comprender las líneas generales e ideas básicas de la modelización matemática, que deben contribuir a una formación actual del hombre culto de nuestro tiempo.

Antes de terminar, debo agradecer a mis hijos David, Sixto y M.ª Jesús, una gran parte de los aciertos que contenga este libro, como consecuencia de la revisión crítica que han realizado. La labor mecanográfica, que cobra especial importancia con la utilización del ordenador, ha sido realizada por Estrella y Asunción García, a las que agradezco su excelente trabajo. A mi nieto Sixto se deben algunas figuras y dibujos que le agradezco cariñosamente.

ARQUÍMEDES (287-212 a.J.C.)

El más importante matemático de la Antigüedad, con geniales contribuciones en Matemáticas, Física,...

1. MODELOS Y MODELIZACIÓN

«No se había dedicado a ellas Arquímedes ex profeso, sino que le entretenían, y eran como juegos de la geometría a que era dado. En el principio fue el tirano Hierón quien estimuló hacia ellos su ambición, persuadiéndole de que convirtiese alguna parte de aquella ciencia de las cosas intelectuales a las sensibles y que aplicando sus conocimientos a los usos de la vida, hiciese que le entrasen por los ojos a la muchedumbre.»

«Arquímedes, pues, pariente y amigo de Hierón, le escribió que, con una potencia dada, se puede mover un peso igualmente dado; y jugando, como suele decirse, con la fuerza de la demostración, le aseguró que si le dieran otra tierra, movería ésta después de pasar a aquélla.»

PLUTARCO. *Vidas paralelas*

1.1. Introducción

Nos proponemos en este primer capítulo iniciar, mediante ejemplos sencillos, la introducción de los primeros conceptos y técnicas de la modelización o construcción de modelos.

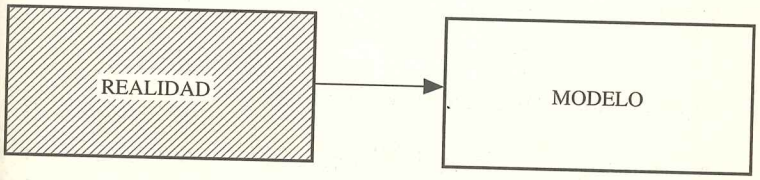


FIGURA 1

El término modelo tiene numerosos significados en el lenguaje común; el que nosotros empleamos puede definirse así: un *modelo* es

un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica. Al representar un objeto o una idea por una palabra o frase, o por un símbolo, estamos ya utilizando modelos. Y en Astronomía cuando decimos que los planetas se mueven de acuerdo con las leyes de Kepler, estamos definiendo un modelo del sistema solar. Una maqueta de avión es un modelo del avión y el movimiento pendular se puede considerar como un modelo de los cambios de la opinión pública: derechas, izquierdas, derechas,...

En el lenguaje corriente se usa la palabra modelo con el significado de un conjunto de normas o reglas coherentes a las que se debe ajustar un conjunto de actividades de un sistema de la realidad (económica, política, social,...). Así, se habla de que una sociedad se ajusta al modelo liberal o al socialdemócrata, o que tal país es una dictadura o una democracia,...

En lo sucesivo utilizaremos como sinónimas las palabras objeto, prototipo, fenómeno o *sistema empírico* para indicar genéricamente nuestro motivo de estudio mediante la metodología de la modelización para llegar a una representación del mismo por un *modelo*. La nomenclatura más corriente será considerar un sistema empírico como un conjunto de elementos empíricos que se relacionan entre sí y tienen una entidad y actividad global, en cuyo conocimiento estamos interesados. Se habla hoy corrientemente de sistemas de comunicaciones de un país, de sistema de armamento de un ejército, de sistema nervioso de un hombre, de sistemas filosóficos, lingüísticos,... Veremos a continuación algunos ejemplos muy sencillos de modelización de estos tipos de sistemas que nos permitan vislumbrar toda la amplitud y generalidad de estos conceptos que desarrollaremos a través de capítulos posteriores.

1.2. Modelos analógicos: el movimiento diurno

Si consideramos la Tierra que llamaremos T y nos fijamos en el movimiento diurno consistente en una vuelta cada veinticuatro horas alrededor de su eje, un reloj M puede considerarse como un modelo del movimiento de rotación del sistema empírico T. La manecilla de M da en veinticuatro horas dos vueltas. *Se trata de un modelo analógico en que se representa un fenómeno por otro más sencillo producido por un mecanismo distinto.*

Otros modelos analógicos de T podrían ser un reloj de arena, de sol, de cuarzo, un girasol,...

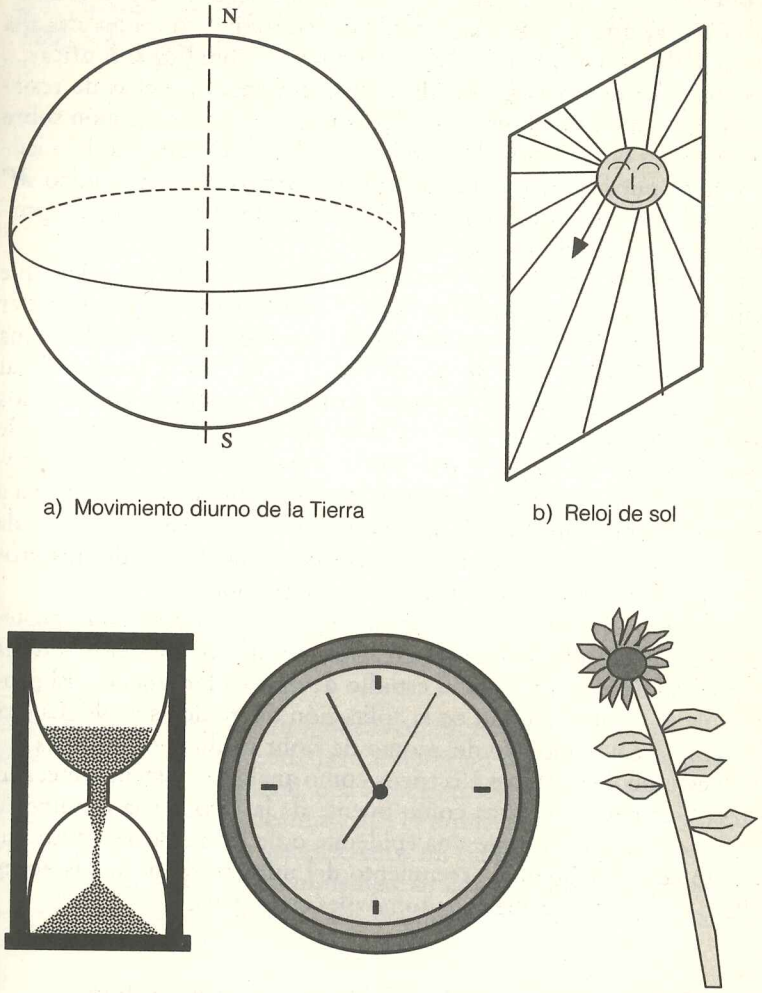


FIGURA 2. *(a, b, c, d, e)*

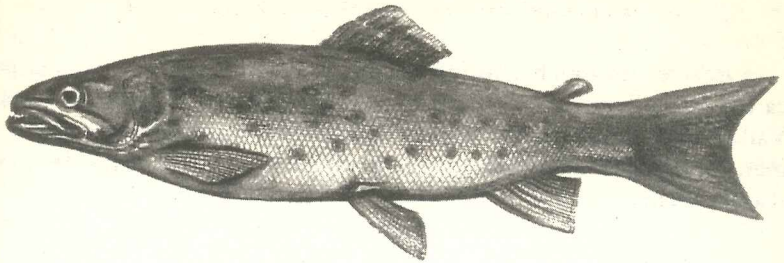
Tipos especialmente interesantes de modelos analógicos son los *modelos icónicos*. Con ellos se trata de tener una representación a escala de objetos o sistemas empíricos, que nos den mediante su observación una idea del sistema real y de sus propiedades. Así una fotografía aérea, un mapa, etc., se utilizan para tener una idea de una región o de un país, con sus características topográficas, hídricas,... Una maqueta de un avión puede servir para hacer pruebas de resistencia, etc., en un túnel aerodinámico, que nos den información sobre lo que puede ocurrir con el avión en la realidad. De este modelo icónico M se puede pasar a una maqueta o programa informático M^* que, mediante un ordenador, nos permite estudiar mejor el comportamiento real del avión.

Un ejemplo curioso de modelo icónico es el debido a Cayley, que estaba buscando a comienzos del siglo XIX (recordemos que el primer vuelo sostenido de los hermanos Wright tuvo lugar en 1903) la forma de la sección transversal de un ala que minimizara la resistencia al aire. Cayley carecía de las técnicas actuales y no podía efectuar los experimentos necesarios, pero, pensando que la resistencia al agua de una trucha sería análoga a la resistencia al aire de un ala y que la naturaleza por medio de los mecanismos de evolución habría llegado ya a un buen diseño, concibió un modelo de sección transversal de un ala (fig. 3b) con la forma de una trucha (fig. 3a). Cálculos modernos probaron la eficiencia de este sencillo e ingenioso modelo.

Vemos así que la intuición de analogías y su confirmación posterior es una fecunda técnica de creación de nuevos modelos o de la adaptación de los existentes al estudio de nuevos fenómenos. El progreso de la Ciencia basado en la aplicación de modelos analógicos es bien conocido: el modelo del átomo de Bohr mediante el sistema solar, el estudio de circuitos eléctricos como análogo a sistemas mecánicos, la Geometría analítica como puente de la Geometría intuitiva al Álgebra, el crecimiento de una epidemia o de los rumores en un ministerio como análogo al crecimiento del número de bacterias en un cultivo o al de un parque de automóviles en un país, etc.

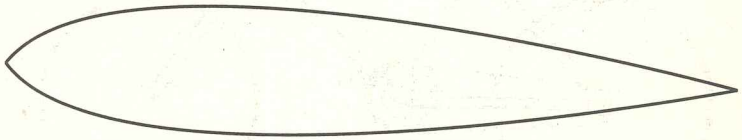
1.3. Modelos cualitativos: la opinión pública y el péndulo

Si consideramos como sistema S la opinión pública de un país, que va pasando en épocas sucesivas de posiciones radicales a conservadoras y viceversa, un modelo M de S puede ser el movimiento de



Trucha

FIGURA 3a



Sección de ala de avión

FIGURA 3b

un péndulo (se trata de un modelo *cualitativo* o *verbalista*). En estos modelos las relaciones entre las variables no se expresan cuantitativamente, lo que es, en general, una imperfección del modelo.

Asimismo, cuando decimos que el número de células en un cultivo crece con el tiempo establecemos un modelo cualitativo. Muchas veces estos modelos se complementan con esquemas, gráficos, etc., que representan aclaraciones del enunciado verbal y se utilizan frecuentemente en la prensa, radio, TV,...

1.4. Modelos matemáticos: un viaje en bicicleta

Vamos, a partir de un problema real y sencillo, a indicar las etapas de la modelización y resolución del problema.

A) Descripción del problema, sistema o fenómeno real

Oscar es un muchacho inteligente, con la formación matemática del Bachillerato y un manejo aceptable de la bicicleta. Vive en Valladolid y quiere hacer una excursión el sábado, después de comer, para llegar a Cuéllar, que está a 50 km y volver antes de que sea de noche.

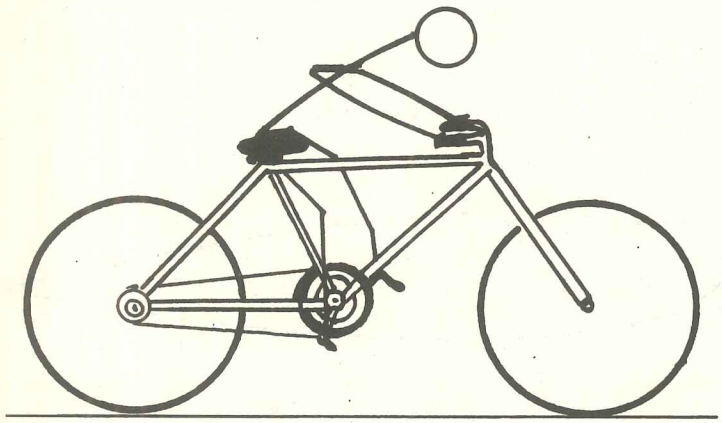


FIGURA 4

B) Obtención de información

Comienza por *obtener información o conocimiento* sobre las variables que entran en la situación, que se resume así:

B_1) Su velocidad en carretera horizontal y bien acondicionada sin viento es 30 km/hora.
B_2) Hace un poco de viento en la dirección y sentido de la marcha.
B_3) Puede mantenerse en forma normal sin fatiga durante unos 100 km.
B_4) La temperatura en la tarde va a ser 22° y, probablemente, no lloverá.
B_5) La carretera está en buen estado y es prácticamente horizontal en todo el trayecto.

Trata ahora de *establecer qué variables debe relacionar* con estas informaciones. Es bastante consciente de que la B_4 apenas tiene interés o influencia (sólo si hubiera una temperatura extremadamente alta o baja o fuerte lluvia, etc.).

Por sus múltiples experiencias o conocimientos científicos y ciclistas tiene el conocimiento de que lo que más influye en la duración del viaje, supuestas verificadas las condiciones B_3 y B_5, es la velocidad del viento. Ha llegado a la consecuencia tras algunas pruebas de que con un viento de velocidad similar a la esperada en el día de la excursión, su velocidad cara al viento es 27 km/h y con el viento a la espalda 33 km/h.

C) Modelo empírico de relaciones

Trata ahora de explicar mediante un «esquema empírico» o primer proceso de abstracción matemática esta realidad. Admite la simplificación que él es un punto sobre el que actúan dos fuerzas: el impulso que él da a la bicicleta mediante el mecanismo de la misma (que en este problema no hace al caso) y el empuje del viento sobre su cuerpo. Según que vaya en el sentido Valladolid-Cuéllar o en el contrario ambas fuerzas se suman o se restan. Ello da lugar a que se tenga una velocidad suma $30 + 3 = 33$ o diferencia $30 - 3 = 27$, según resulta de sus anteriores experiencias. Admitiendo este esquema empírico del problema, la solución ya es fácil, pues si la velocidad es aproximadamente uniforme de 33 km/h, esto quiere decir que la longitud recorrida es proporcional al tiempo empleado y, por tanto, habrá tardado en el viaje de ida 50/33 horas y al volver 50/27 horas, y en total (50/33 + 50/27) horas.

Conviene señalar que Oscar es consciente de que ha simplificado un poco el problema al admitir la constancia de la velocidad que en realidad es algo variable, como ha podido comprobar al repetir un mismo trayecto un cierto número de veces en condiciones aproximadamente invariables de uno a otro experimento. Otras simplificaciones que ha hecho son suponer que la velocidad del viento es constante, que la temperatura no influye nada, etc.

Al hacer estas indicaciones queremos observar que las aplicaciones de las matemáticas que hacen economistas, ingenieros, biólogos, van siempre precedidas de una serie de simplificaciones de la realidad sin las cuales es imposible llegar a un «modelo matemático» maneja-

ble, es decir, que nos permita resolver los problemas reales siquiera sea en forma aproximada.

D) Conceptualización y E) Modelo matemático

Oscar pretende llegar algo más lejos y trata de que un *modelo matemático* le permita resolver otras situaciones similares, pero con datos distintos relativos a su impulso y a la fuerza del viento, y calcular el tiempo de duración del viaje, a partir del dato fundamental de la distancia recorrida.

Pasando a representar por símbolos, sea c la velocidad del ciclista (sin viento) y v la componente debida al viento. Si d es la distancia recorrida en uno y otro sentido, el tiempo empleado será, análogamente:

$$t(d) = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} \quad [1]$$

F) Proceso lógico deductivo y G) Consecuencias matemáticas del modelo

Es claro que si otro viaje se realizara en las mismas condiciones y la distancia fuera d', el tiempo resultante sería:

$$t(d') = d'\left[\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}\right]$$

y podemos calcular el cociente

$$\frac{t(d')}{t(d)} = \frac{d'}{d}$$

lo que nos permite obtener

$$t(d') = t(d)\frac{d'}{d}$$

que ya es una consecuencia no trivial obtenida a través del modelo: la duración de un viaje es proporcional a la distancia (obsérvese que el viaje tiene trayectos con distintas velocidades).

H) Es natural **desconceptualizar**, es decir, pasar del modelo y sus consecuencias a las aplicaciones obteniendo

I) Relaciones empíricas

Por ejemplo, por un breve experimento de un viaje de 10 km de ida y vuelta podemos calcular

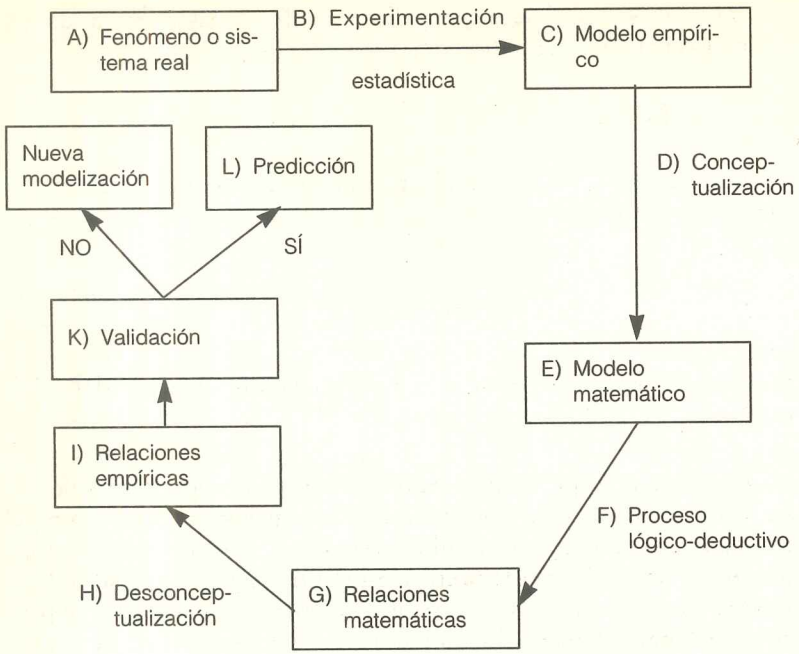
$$t(d') = t(10)\frac{d'}{10}$$

y comprobaremos si el resultado experimental no discrepa del teórico.

K) Este es el punto de partida para la **validación** del modelo o su rechazo viendo si la repetición del viaje análogo confirma o no el resultado obtenido por el cálculo. Aceptado el modelo [1] tras la validación, se utilizará para la **predicción (L)** de nuevos resultados. Si el modelo no se considera válido se ha de comenzar nuevamente el proceso, teniendo en cuenta lo aprendido, para llegar a un nuevo modelo.

Es interesante observar las diferencias entre situaciones del tipo anterior en que se ha de modelizar o buscar un modelo matemático de la misma y los problemas tradicionales en los libros de matemáticas en que la implantación de los datos en el esquema de solución ya conocido es inmediata.

En cambio, al tratar de formular el modelo matemático, simplificamos la realidad quedándonos con aquellas variables que consideramos que son realmente importantes. No es conveniente dejar en el modelo más variables de las realmente necesarias para reflejar bien la parte de la realidad que nos interesa, porque justamente lo que nos proponemos es comprender mejor dicha realidad a través de un esquema sencillo o apropiado. En el esquema adjunto se resumen las etapas principales, vistas en el ejemplo y que permitirán en forma análoga, con más dificultades en unas etapas o en otras, llegar a profundizar en el proceso de planteamiento y modelización de problemas de la realidad, que es previo a su tratamiento matemático convencional y requiere actividades intelectuales diferentes.



Observemos que las matemáticas que tradicionalmente se enseñan intervienen casi exclusivamente en F) proceso lógico-deductivo.

1.5. Investigación operativa: la guerra antisubmarina (1942)

He aquí algún ejemplo sencillo de cómo un análisis estadístico completamente elemental condujo a una importante modificación en el empleo de un arma y en la eficacia de resultados. Estos datos se refieren a situaciones de la II Guerra Mundial en que se aplicaron modelizaciones a resolver problemas que se llamaron de Investigación Operativa o de Investigación de Operaciones.

En 1942 se inició un análisis estadístico de los resultados de los ataques a convoyes aliados por las llamadas «manadas de lobos» de submarinos alemanes. Múltiples datos recogidos permitieron, tras laboriosos trabajos, descartar los factores secundarios y considerar los siguientes factores en cada combate:

m = número de mercantes del convoy,
n = número de submarinos atacantes,
c = número de buques de guerra de la escolta.

El resultado del combate dependía de dos números:

k = número de mercantes hundidos,
l = número de submarinos hundidos.

En la primera tabla de resultados se ve que el número k, media de mercantes hundidos en un ataque, es independiente del número m, de mercantes del convoy.

TABLA I

m (media)	20	30	39	48
Número de ataques	8	11	13	7
k (media)	8	6	6	5
c (media)	7	7	6	7
n (media)	7	5	6	5

Se observa que en la tabla I se incluyen los valores medios de c y n para que se vea que sus medias son sensiblemente constantes y que, por consiguiente, los resultados no son debidos a una composición entre estas cantidades. Como consecuencia de estos datos estadísticos pudo decirse que el promedio de barcos hundidos para un convoy grande es el mismo que para un convoy pequeño; luego el porcentaje de barcos hundidos de un convoy grande es menor que para un convoy pequeño.

Más precisamente, se llegó a que el tanto por ciento r de mercantes hundidos podía considerarse dado por la relación

$$r = \frac{\lambda}{mc}.$$

en que λ es una constante experimental. Está claro que r disminuye si aumentan m ó c. Supongamos $m = 50$, $c = 10$ y $\lambda = 10$

$$r = \frac{10}{50 \times 10} = \frac{2}{100} = 2\%$$

Supongamos que el número $m = 100$ y c queda fijo, resulta $r = 1\%$. Pero el número de barcos perdidos es el mismo, ya que es lo mismo 2% de 500 que 1% de 1.000. Esta fórmula conduce a una importante conclusión, cuya aplicación salvó muchos barcos y vidas. Si los convoyes se enviasen con una frecuencia igual a la mitad que anteriormente, se dispondría de doble número de barcos de escolta. Pero de acuerdo con la relación

$$r = \frac{\lambda}{mc}$$

si se duplica el número de barcos y al mismo tiempo se duplica el número de buques de escolta, se reduce a la cuarta parte el número de pérdidas.

Es muy interesante notar que con anterioridad a este análisis estadístico, se tenía la idea errónea de que los convoyes pequeños eran preferibles a los grandes.

Consecuencia de este estudio operacional, del que aquí sólo hacemos unas indicaciones, el Alto Mando aliado decidió aumentar la extensión de los convoyes en el Atlántico Norte, con lo que se incrementó de tal modo la tasa de cambio, que los alemanes juzgaron poco conveniente continuar atacando los nuevos convoyes del Atlántico Norte, siendo éste uno de los grandes éxitos de los aliados en la llamada «batalla del Atlántico».

Es este un ejemplo en que propiamente el modelo empírico ha resultado suficiente para un conocimiento aceptable del problema.

Como se ve en estos ejemplos, el modelo consiste en encontrar una relación aproximada y sencilla entre las variables que interesan, sin que tenga mucho sentido buscar un perfeccionamiento de tal relación, dadas las variabilidades de los datos.

1.6. Los puentes de Königsberg y los grafos

Dos son los caminos principales para llegar a un modelo: 1) conceptualmente por un proceso mental creativo o intuición natural, y 2) empíricamente a partir de un conjunto de datos de experimentación y observación. En realidad ambas avenidas se presentan en cada modelo y de una forma u otra ambas se emplean. En los ejemplos anteriores hemos utilizado fundamentalmente el segundo camino. Vamos a continuación a dar un ejemplo históricamente importante del primer camino.

La modelización de un problema no implica necesariamente el empleo de números, ecuaciones, figuras geométricas tradicionales,... A veces un modelo sencillo, creado a partir de la solución de un problemita curioso, es el punto de partida de importantes generalizaciones que conducen a nuevas e insospechadas aplicaciones. Esto es lo que ocurrió en 1735 cuando el gran matemático Euler se preocupó del llamado problema de los puentes de Königsberg, que fue el punto de partida de la teoría de grafos.

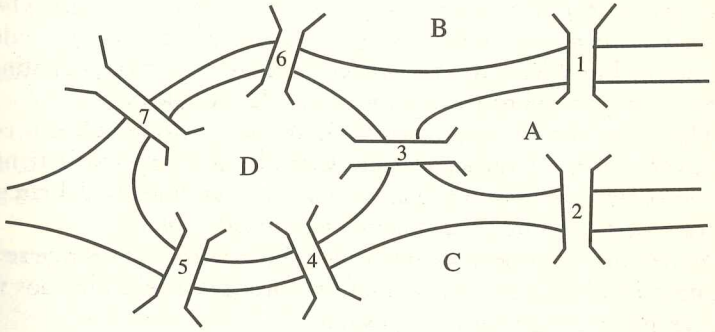


FIGURA 5

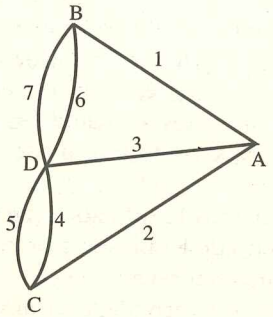


FIGURA 6

El problema, que preocupaba en aquella época a los habitantes de Königsberg (y aún figura en los libros de curiosidades matemáticas) es encontrar un camino que partiendo de una de las cuatro zonas *A*, *B*, *C*, *D*, que estaban intercomunicadas por los siete puentes sobre el río Pregel, permitiera volver a la misma zona, después de recorrer todos los puentes una sola vez. La idea simplificadora de Euler, que es lo *esencial de esta modelización*, fue considerar que, como el andar por una zona no significaba nada para el problema, cada zona se podía representar por un punto y cada puente que comunica dos zonas por un segmento o arista que une los puntos correspondientes a las zonas. De este modo, se sustituye el mapa geográfico a) de la ciudad (fig. 5), por el grafo (fig. 6) y este concepto matemático de *grafo, como conjunto finito de puntos, llamados vértices, con segmentos o aristas que unen algunos pares de vértices*, es el punto de partida de la solución del problema de la teoría cuyo resumen se verá a continuación y se tratará con más extensión en una lección posterior.

Una *trayectoria* es una sucesión de aristas tales que cada dos consecutivas tienen un vértice común. Cuando una trayectoria tiene el mismo origen y extremo se llama *circuito*. Si cada arista del circuito figura una, y sólo una, vez, se llama *circuito euleriano*.

Se denomina *valencia* de un vértice el número de arcos que se encuentran en dicho vértice y un grafo se dice *conexo* si dados dos vértices existe una trayectoria que los une.

Con estas definiciones el problema es saber si en el grafo de Königsberg existe un circuito euleriano. Su no existencia resulta de la siguiente propiedad: *Un grafo sin puntos aislados tiene un circuito euleriano si, y sólo si, es conexo y cada valencia es par.*

Nos limitaremos a ver sobre el ejemplo de la figura 6 que estas condiciones son necesarias. En efecto, si existe un circuito euleriano el grafo es conexo, pues se pueden unir cada dos vértices por la trayectoria euleriana. Por otra parte, si en un vértice concurren $2k + 1$ aristas, se observa que si vamos apareando aristas unas para llegar y otras para salir del vértice, cuando nos quede el último saldremos del punto sin poder volver.

En consecuencia tenemos la solución negativa al problema de los puentes ya que en el grafo de Königsberg hay vértices de valencia impar como el *D*, que tiene valencia 5.

Como siempre, una vez formulado el modelo y establecidas sus propiedades, es posible resolver problemas no sólo en los campos de origen sino en otros muchos. Por ejemplo, a) ordenar y programar

las tareas relativas a la construcción de un edificio, máquina, etc., en el mínimo tiempo o con el mínimo coste; b) diseñar un cohete u otro artefacto que continúe funcionando a pesar de que fallen algunas piezas; c) determinar la ruta más corta o más económica o más breve entre dos puntos, y d) problema del viajante de comercio, etc.

1.7. La modelización matemática, la simulación y el método Montecarlo

En un primer proceso de precisión científica introduciremos la siguiente definición descriptiva: Dado un *objeto, prototipo o sistema natural S*, decimos que un objeto *M* es un *modelo* de *S*, si 1) hemos establecido una cierta descomposición de *M* en partes; 2) una o más relaciones entre componentes de *S* son análogas a las que se establecen entre sus imágenes en *M*; 3) *M* nos permite engendrar datos, que son una buena aproximación de los que se engendran en *S*. Esta tercera característica se exige para que *M* sea una representación válida para conocer propiedades de *S*.

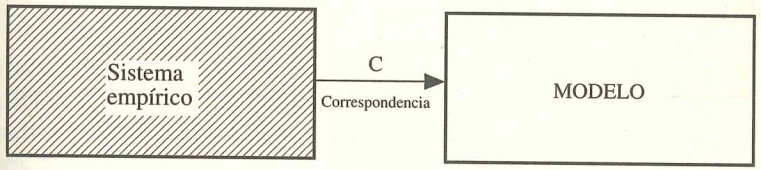


FIGURA 7

Vemos así que la terna (*S*, *M*, *C*) constituye la esencia de la modelización o proceso para obtener a partir de *S* un modelo *M* apropiado a nuestra situación. Si *M* es un conjunto de conceptos y relaciones matemáticas se dice que *M* es un *modelo matemático*. A veces se considera también que tanto *S* como *M* son sistemas matemáticos (como ocurre en Lógica y en Matemáticas) y otras veces tanto *S* como *M* son sistemas empíricos (como sucede en aplicaciones diversas).

Las condiciones señaladas en la definición no implican que *M* sea un duplicado de *S*, ya que no se trata de dar una definición matemática, como por ejemplo, la de isomorfismo entre dos conjuntos abstractos.

A veces no se llega a la formulación explícita de un conjunto de axiomas que caracterizan *M*, ya que el modelo queda global o parcialmente dentro de un marco matemático bien conocido al que se hace referencia.

Ha sido, sin duda, la capacidad creciente de los ordenadores para efectuar la llamada simulación de modelos, lo que ha impulsado decisivamente la modelización como metodología científica dirigida a los más diversos problemas. La condición 3) de nuestra definición de modelo de sistema empírico nos permite considerar a éste como un conjunto de instrucciones o programa de ordenador para obtener datos de comportamiento del sistema. Tales instrucciones pueden ser ejecutadas por el científico, por ejemplo, resolviendo una ecuación,..., pero frecuentemente es más sencillo unas veces, o sólo posible otras, su ejecución mediante un ordenador, previa traducción a un lenguaje de programación, obteniéndose lo que se denomina *un modelo de simulación digital*, como se indica en el siguiente esquema:

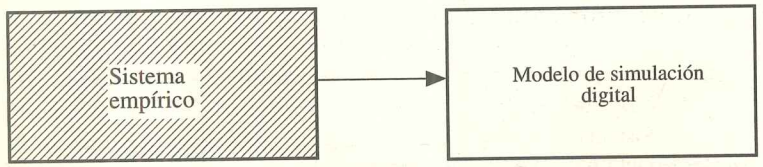


FIGURA 8

A él se puede llegar directamente o bien comenzando por el modelo matemático y, pasando después al modelo de simulación como se indica en el siguiente esquema:

FIGURA 9

Aunque en forma más o menos consciente, el llamado método de Montecarlo se ha empleado de antiguo en el cálculo aproximado de probabilidades mediante frecuencias. El veterano jugador de póker ha aprendido a valorar por este método experimental la probabilidad de cada una de las jugadas que recibe de entrada, cuyo cálculo teórico constituye un entretenido ejercicio para los estudiantes, y también puede decirse que el método de Montecarlo era el que empleaba el caballero de Meré (famoso jugador de dados y mediocre probabilista) al presentar a Pascal frecuencias que él no sabía calcular por método directo.

Tal fue el problema que propuso en una de sus cartas a Pascal, expresando su extrañeza porque, al lanzar dos dados veinticuatro veces, la probabilidad (mal calculada por él) de obtener un seis doble discrepaba claramente de las frecuencias obtenidas en sus largas series de partidas. El cálculo directo, hecho por Pascal desvanecía la duda y confirmaba la bondad del método experimental en esta ocasión.

Pero de una manera consciente y con un estudio matemático apropiado, tal método de Montecarlo parece haber sido introducido y estudiado en relación con problemas derivados del estudio de la pila atómica, especialmente por Ulam y von Neumann, por el estímulo de E. Fermi.

Comenzamos por un ejemplo sencillo para indicar las ideas directrices. Si a una persona se le propone que mida con un reglón de dos metros el ancho de una puerta y que esta medida la exprese en centímetros, suponiendo que el reglón carece en absoluto de subdivisiones, probablemente dirá que le piden un imposible. Pues bien, vamos a ver a continuación que esto lo puede hacer incluso un ciego, con tal que sepa un poco de cálculo de probabilidades.

Como en todo problema práctico lo primero para aplicar las matemáticas es buscar el modelo teórico apropiado, simplificando un poco e idealizando la situación real.

Supondremos que la puerta (figura 10) es de ancho inferior a dos metros (longitud de la regla) y sustituiremos el hueco de la puerta por una banda limitada por dos rectas paralelas, cuya distancia es igual al ancho de la puerta, y la regla por un segmento rectilíneo de igual longitud que ella. Supondremos que aplicamos el segmento al azar sobre el plano en que está situada la banda de rectas paralelas y que el centro del segmento coincide siempre con un punto fijo *O* en la mediatriz de la banda. Es claro que si el ángulo es el que corresponde a la posición en que los bordes de la regla tocan precisamente en

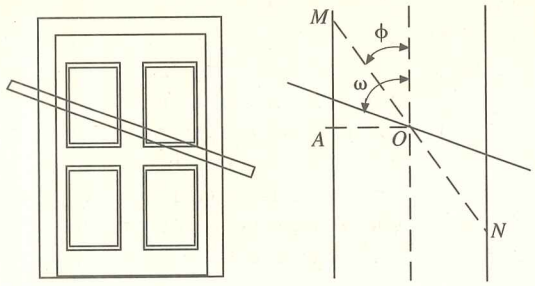


FIGURA 10

los bordes de la banda, tendremos que el suceso «el segmento que pasa por la banda», equivale a que $\omega \leq \phi$. Considerando sólo posiciones tales que $0 < \omega < \pi/2$ tendremos que la probabilidad del suceso $0 < \omega < \phi$ será $\frac{med\ \phi}{\pi/2}$ y esta misma será la probabilidad de que la regla pase por la banda.

Vemos, pues, que si supiéramos determinar esta probabilidad tendríamos inmediatamente el ancho de la banda, ya que

$$2 \cdot \overline{OA} = 2 \cdot \overline{OM} \cdot sen\phi$$

Llegamos así a la segunda fase de la solución del problema: determinación experimental de una probabilidad. Naturalmente, se podría, mediante una ruleta, determinar la probabilidad indicada haciendo un gran número de experiencias y midiendo la probabilidad por la correspondiente frecuencia y de este modo obtener, con cuanta aproximación quisiéramos, la medida de ϕ.

El método de Montecarlo va más allá y permite hacer las experiencias sin un dispositivo especial como una ruleta, que está expuesto a tendencias. Como el ángulo w medido en minutos está comprendido entre 0' y 90*60' = 5400', tomaremos números aleatorios de cuatro cifras ≤ 5400.

Tales números son los que se obtendrían al sacar al azar bolas de una urna que contuviera 5401 bolas numeradas en orden consecutivo a partir de 0000 hasta 5400. Cada vez que se saca una bola se anota el número en ella marcado y se devuelve a la urna. En la práctica se ob-

tienen tales números muy fácilmente con un ordenador. Cada número aleatorio nos determina un ángulo de la regla con la mediatriz; si la regla pasa consideramos la experiencia favorable y si no adversa. Si el número de las primeras es n y el de las segundas n' sabemos que la probabilidad es aproximadamente $n/(n+n')$, luego

$$\frac{med\phi}{\pi/2} \simeq \frac{n}{n+n'}$$

y así

$$med\phi \simeq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n+n'}$$

Obtenida así ϕ, se calcula, como hemos visto, el ancho de la puerta.

Se suele denominar *simulación por Montecarlo* el caso en que, como en el ejemplo, se parte de un problema determinístico (como la medida del ancho de una puerta), se pasa a un modelo probabilístico que da el mismo resultado y se calcula dicha probabilidad mediante una frecuencia utilizando números aleatorios. Se habla simplemente de simulación si el punto de partida es un problema ya probabilístico, en que se utilizan los números aleatorios para directamente calcular frecuencias.

Cuando es grande la dificultad de obtener un modelo matemático se pasa directamente del sistema empírico a un modelo de simulación digital. La idea es crear un programa de ordenador que nos traduzca una «historia típica» del funcionamiento del sistema bajo unas ciertas condiciones. Por ejemplo, si se trata de consumidores que solicitan un servicio, se debe reproducir paso a paso lo que ocurre a cada consumidor que llega, espera hasta recibir el servicio y se va.

Con estas muestras se trata de obtener con métodos apropiados un comportamiento típico que nos describa el fenómeno y nos permita intentar modificaciones en el mismo.

1.8. Objetivos y clasificaciones: idealistas, pragmatistas y realistas

Para hacer una exposición de la metodología de la modelización que estimule el aprendizaje y la creatividad del estudioso, queremos

fijarnos especialmente en los *objetivos y aspectos esenciales* de los procesos de modelización, dejando a un lado secundario la clasificación que resulta de fijarnos especialmente en las técnicas matemáticas que se utilizan (ecuaciones algebraicas, diferenciales, espacios métricos), las ciencias a que se aplican (Biología, Economía, Física, etc...).

Nos fijaremos en algunos de los siguientes: *crecimiento, equilibrio, medida, organización, planificación, ordenación, preferencia, elección, movimiento, realimentación, optimización, azar, riesgo, incertidumbre, simulación, competitividad, inducción, utilidad, decisión, sistema, juego,...* Todos ellos corresponden a ideas fundamentales que aparecen en las más diversas situaciones reales.

Tres posturas diferentes que suelen adoptar los científicos al enfocar la idea de modelización son: la *idealista*, la *pragmática* y la *realista*.

El enfoque *idealista* considera la modelización como un proceso mental, cuya índole inductiva no precisan, y que les conduce a la estructura matemática que representa la realidad, llegando algunos a decir: «si los hechos no se ajustan a la teoría, tanto peor para aquéllos».

Para los *prágmaticos* todo es cuestión de ajustar curvas a los datos de la realidad y no hay propiamente explicación de la realidad, mediante la teoría.

Parece que la más razonable es la llamada postura *realista* intermedia entre ambas en el sentido de utilizar los ajustes a los datos como metodología inicial, no terminando aquí sino tratando de llegar a un modelo explicativo de la realidad, modelo que siempre se considera provisional, pues nuevos datos pueden inducir a modificaciones posteriormente. En los ejemplos vistos y a lo largo de este libro se confirman estas ideas.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.1.1. Programación de un viaje de fin de semana

Una de las dificultades al enfrentarse con un problema real es darse cuenta de la información necesaria y la superflua en relación con el planteo del modelo matemático del problema. He aquí un ejemplo orientador del tipo de consideraciones que hay que hacer antes de poner un problema real en forma matemática: Pepe piensa navegar esta tarde por el río y dispone de 5 horas antes de anochecer para el viaje. Sabe que hay 12 km del punto A donde tiene la barca hasta la casa (B) de su amigo Juan. Trata de saber si podrá hacer el viaje de día.

He aquí algunos datos de que dispone Pepe: a) ha visto que su velocidad en un lago es de 9 km/h; b) la temperatura es 20° y hay una ligera brisa de poniente; c) nunca ha navegado más de 20 km seguidos. Sabe Pepe que navegar por el lago es distinto que por el río y que, por alguna experiencia, puede llegar a calcular que un objeto, sin ser impulsado artificialmente, recorre 6 km/h.

Este dato, junto con el dato de su velocidad en el lago, son los realmente importantes, pues de ellos puede obtener por un modelo de composición de velocidades (suma si va a favor de corriente y resta si va contra corriente) que su velocidad al ir será de 15 km y la de regreso será 3 km. En cambio los datos de b) son irrelevantes.

Ya es fácil el resto del ejercicio y dejamos al lector su terminación, insistiendo en que casi siempre en matemática aplicada lo difícil es separar la información relevante de la irrelevante para la construcción del modelo aplicado.

E.1.2. Óptimo emplazamiento de una estación de F.C.

Se considera un línea de ferrocarril que pasa cerca de dos pueblos A y B y se trata de emplazar un apeadero C y los caminos AC y BC con un criterio de optimización aproximado.

Este tipo de problema requiere fijar primeramente un criterio de optimización que sea plausible. He aquí algunos posibles y el lector buscará las correspondientes soluciones.

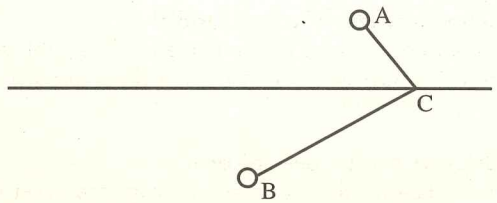


FIGURA 11

a) C debe equidistar de A y B.
b) Se debe hacer

$$AC + BC = min$$

c) Si $n = 10^6$ es el número de habitantes de A y $n' = 10^5$ el de B se debe hacer mínimo $n \cdot AC + n' \cdot BC$.
d) ¿Qué otros criterios podrían tomarse? ¿Hay razones para preferir unos a otros?
Problemas como éste pueden dar origen a discusiones interesantes sobre los criterios a elegir.

E.1.3. El mismo problema si los pueblos están al mismo lado del ferrocarril. O si se trata de un río y de construir un puente.

E.1.4. Reflexión y refracción de la luz.
¿Cabría relacionar estos problemas con los de refracción y reflexión de la luz?

E.1.5. La población de un cultivo se duplica en 40 minutos. ¿En cuántos minutos se triplicará la población? ¿Bastan estos datos para resolver la cuestión?

E.1.6. Recordar ejemplos matemáticos de la Física, Química, etc. (ley del péndulo, ley de Ohm, etc.) y ver si son o no lineales.

E.1.7. Analizar el alcance de la frase de Bertrand Russell: «En Matemática no se sabe de lo que se habla ni si lo que se dice es exacto».

E.1.8. Analizar el siguiente párrafo de Einstein: «En nuestros esfuerzos para comprender la realidad, somos semejantes a un hombre que trata de comprender el mecanismo de un reloj cerrado. Ve la esfera, las agujas que se mueven, oye el tic-tac; pero no tiene medios para abrir la caja. Si es ingenioso, puede imaginar un mecanismo susceptible de explicar todos los hechos observados pero le es imposible estar seguro de que la idea que él ha concebido es la única que puede explicar todo lo que él ha observado».

E.1.9. Crecimiento de la población mundial
La tabla adjunta da una idea del crecimiento de la población mundial. Véase la variación de la tasa de crecimiento con el tiempo. Estimar cuándo la población será de 6.000 millones.

E.1.10. Modelos verbalistas de la historia
Los modelos verbalistas de la historia se proponen hacer comprender o explicar hechos pasados relacionándolos con causas, y aspirando a predecir sucesos futuros.

Años	Población (en millones)
1650	545
1750	728
1800	906
1850	1.171
1900	1.608
1950	2.509
1960	3.010
1970	3.672
1975	4.054
1980	4.825
1988	5.076

No se puede considerar como un modelo el tipo tradicional de relato de la historia como una sucesión de hechos cronológicamente ordenados: dinastías, guerras, repúblicas, líderes,... He aquí algunos ejemplos de modelos verbalistas bien conocidos.
a) *El modelo marxista*
En este modelo juega un papel importante y fundamental el sistema de producción y distribución de los bienes, el cual conforma esencialmente las características culturales, morales, éticas, religiosas..., de las colectividades. Las analogías actuales de comportamientos sociales políticos en países capitalistas y comunistas a pesar de las diferencias fundamentales en los correspondientes sistemas de producción y distribución de los bienes hacen considerar como no satisfactorio tal modelo explicativo para la historia actual. Lástima que algunos países han tardado 70 años en hacer una experiencia negativa, que quizá podría haberse evitado mediante una simulación. Se considera superado en muchos países el factor bienestar social, como dominante de la transformación social; para ser reemplazado por otros (ecología, cultura, ocio, investigación,...).
b) *El modelo cíclico de Spengler*
Admite que el desarrollo de una civilización es análogo al de una planta que florece en primavera, madura en verano, crece en otoño y muere y decae en invierno. La analogía le condujo a comprobar en varias civilizaciones un ciclo similar con una primavera caracterizada por una economía rural elemental y actitud receptiva a la religión, el verano caracterizado por el desarrollo urbano y actitud crítica racional respecto a la filosofía y religión, el otoño por el florecimiento de la ciencia y el arte y al invierno corresponde la fase de las estructuras urbanas gigantes, las guerras de gran escala, énfasis sobre lo práctico y descenso de la producción. Finalmente, colapso de la civilización bajo ataques internos y externos con intentos de volver a la religión inicial.

A este modelo se ajustan bien las civilizaciones egipcia, babilonia, china y árabe profundamente estudiadas por Spengler. No se ajusta tan bien el desarrollo de la civilización occidental cuya realizaciones científicas a partir de 1914 no corresponden a las predicciones del modelo de Spengler.

c) *El modelo lineal de Toynbee* según el cual una civilización progresa mediante evolución de formas primitivas a otras más sofisticadas; d) *El modelo psicoanalítico de Freud,* en el que el curso de la historia viene determinado por la clase de impulsos inconscientes que son reprimidos o controlados y por la forma en que se consigue ese control; e) *El modelo geográfico,* f) *El modelo de las grandes personalidades...* Todos ellos representan esfuerzos plausibles para comprender extensos conjuntos de observaciones con un pequeño número de parámetros a fin de explicar hechos pasados y predecir hechos futuros, aunque ninguno sea totalmente válido.

E.1.11. Sistemas empíricos e Investigación Operativa

En el estudio posterior encontraremos muy diversos tipos de *sistemas empíricos* entre los que veremos *sistemas naturales* (físicos, biológicos, ecológicos,...), *sistemas tecnológicos* (máquinas, sistemas de ingeniería, etc.), *sistemas organizativos* (empresas, ministerios, etc.).

Los *sistemas naturales* se presentan en el mundo físico, biológico, etc., y tratamos con su estudio de comprender mejor su funcionamiento y predecir su comportamiento. Con los *sistemas tecnológicos* se trata de lograr ciertos objetivos y mediante el conocimiento de las leyes de los sistemas naturales construir los sistemas más adecuados para tales propósitos u objetivos.

Los *sistemas organizativos* se consideran constituidos por hombres y máquinas colocadas en ciertos ambientes de operación para lograr algunos objetivos y su complejo estudio debe conducir a conseguir su funcionamiento óptimo dentro de conocidas restricciones impuestas por el ambiente o por otros sistemas organizativos concurrentes. Su estudio es la faceta actual de la llamada *Investigación operativa* o *Análisis de sistemas aplicados.*

MALTHUS (1766-1834)

Autor de importantes modelos relativos al crecimiento demográfico y económico.

2. CRECIMIENTO Y EQUILIBRIO

«To get land's fruit in quantity takes jolts of labor
ever more. Hence food will grow like one, two,
three, while numbers grow like one, two, four,...»

(SONG OF MALTHUS:
A ballad diminishing return. Anonymous).

2.1. De Malthus al carbono 14

Una de las ventajas de estudiar los fenómenos mediante modelos matemáticos reside en la sorprendente versatilidad de éstos, que nos permite adaptarlos a muy distintas situaciones reales o sistemas empíricos.

Vamos a comenzar con algunos modelos que permiten estudiar el cambio (crecimiento, decrecimiento y equilibrio) de las poblaciones (hombres, animales, células, automóviles, dinero,...), originados en los trabajos del economista inglés, Thomas Malthus (1766-1834), y, especialmente, en su trabajo «An Essay on the Principle of Population» (1798).

Estos mismos modelos permiten resolver también problemas tan distintos como los que se presentan en la absorción y dosificación de medicinas, la datación o fijación de fechas de origen de muestras arqueológicas mediante el carbono 14, la diálisis de sangre mediante un riñón artificial, la planificación de una mutualidad, de una familia, de necesidades humanas (alimentos, escuelas, hospitales, etc.).

¿Qué población tendrá España en el año 2000?, ¿qué residuo de emisión radiactiva quedará en Chernobil dentro de 100 años?, ¿cuál será el parque de automóviles de la C.E. dentro de 5 años?, son problemas que se resuelven a través de los mismos modelos de crecimiento.

2.2. El proceso de modelización matemática a través de un problema biológico

En este capítulo, vamos a profundizar en las etapas del proceso de modelización que se han descrito en (1.5).

Inicialmente estudiaremos con algún detalle un modelo de crecimiento de una masa celular, que puede considerarse como un sistema dinámico, es decir, que sus características varían con el tiempo. Este ejemplo nos servirá para hacer referencia a él en otros posteriores, al considerar las diferentes etapas de la metodología de la modelización.

En su forma más perfecta, este proceso desemboca en la *formalización* o *axiomatización* del modelo. En ella hay: a) *términos no definidos*; b) *axiomas*, que los relacionan y definen implícitamente, lo que se llama una *estructura* o un *modelo* matemático, y c) *teoremas* o propiedades que son consecuencias interesantes y *verdaderas* de los objetos definidos por los axiomas.

Unas conocidas reglas del razonamiento lógico permiten deducir de las proposiciones iniciales o axiomas otras más complicadas que serán verdaderas si se admite la verdad de los axiomas. Tal proceso lógico deductivo conduce al desarrollo de teoremas, corolarios, etc., que, en conjunto, constituyen la teoría matemática que se trata de construir.

Para la aplicación a la práctica de la teoría construida, hay un tercer proceso llamado de *desconceptualización*, que consiste en traducir los resultados logrados a la realidad concreta de partida en forma aproximada.

¿En qué medida se puede decir que un modelo representa apropiadamente la realidad y, además, da resultados suficientemente aproximados a los que da el sistema empírico (validación)? Son cuestiones de carácter empírico y para las que no se pueden dar reglas rígidas para aceptarlo.

2.3. Crecimiento de un cultivo bacteriano

Vamos a desarrollar con algún detalle esta metodología de la modelización sobre un problema de crecimiento de una población de células. En otros ejemplos de éste y posteriores capítulos, no llegaremos a una explicación tan detallada que podría resultar excesiva para la mayoría de los lectores. Pero sí conviene subrayar que justamente

la diferencia entre describir modelos matemáticos, realizados en el pasado y enseñar a modelizar, reside en el énfasis que se ha de poner, en este caso, en los aspectos metodológicos de las diversas etapas de dicho proceso.

El problema

Supongamos que a un estudiante de Biología le encargan estudiar la evolución de un cultivo de células de un cierto tipo ($\propto$).

Etapa A.—Descripción del fenómeno real y objetivos del modelo.

Para conocer la evolución del cultivo celular, el estudiante hace algunos experimentos iniciales y observa un rápido crecimiento de la cantidad de células, y estas observaciones, que en este fenómeno son de laboratorio y en otros serán de la realidad no experimental, conducen a una primera visión de algún problema interesante. ¿Cómo varía con el tiempo el número de células?, ¿cuál es la duración de la vida de una célula?, ¿qué variables influyen en el desarrollo?

Etapa B.—Enumeración y estructuración de variables.

El estudiante trata de comprender mejor que por la simple observación y descripción iniciales, el comportamiento del fenómeno real en términos de estructura, relaciones causa-efecto, cuantificación, etc.

Parece natural que empiece por observar con la técnica apropiada cómo evoluciona una célula del tipo considerado en un cultivo de composición estable tipificada (fig. 1). Así, ha encontrado que, du-

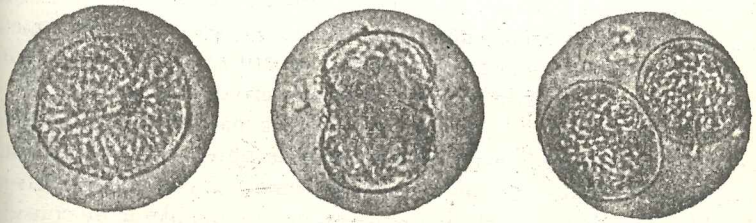


FIGURA 1

rante un cierto número de minutos, la célula crece, después se escinde en dos y cada una de éstas inicia nuevamente su proceso de crecimiento, etc. Los tiempos en minutos que observa entre la aparición de una célula y su duplicación son del tipo siguiente:

22|27|21|19|18|...

Observa que estas medidas reiteradas dan una media de 20 minutos y piensa que «podría proceder como si éste fuera exactamente el tiempo de vida de una célula», lo que supone una evidente simplificación del fenómeno real.

Parece, pues, que la duración de vida de una célula sería una variable interesante para estudiar el fenómeno; pero debe detenerse un poco y considerar que al no producirse simultáneamente la escisión de todas las células presentes, convendrá considerar otras variables, como el número de células en instantes sucesivos, con varios intervalos de tiempo posibles entre ellos.

Otras ideas pueden surgir y, para proceder de una manera organizada, se comenzará por establecer una lista lo más completa posible de las variables que debemos tener en cuenta en el problema con que nos enfrentamos que puede resumirse así: relacionar el crecimiento de la masa de células con el tiempo.

A fin de proceder sistemáticamente, considera dos tipos de variables: aquellas que pueden influir en los resultados y otras que representan los resultados. Las primeras se suelen denominar variables exógenas, independientes, ingresos *(inputs)*, y las segundas endógenas, dependientes, respuestas *(outputs)*,...

Después será conveniente dibujar un diagrama de interacciones (fig. 2) en que aparezcan la posibles relaciones de dependencia, de independencia y de interdependencia entre dichas variables. Por ejemplo, en la figura 2 hemos indicado mediante flechas las relaciones, p.e., el número de células depende del tiempo, de la temperatura, etc. Cuando la dependencia no parece clara se utiliza una flecha de puntos (p.e., la influencia de la luz sobre el número de células).

Es importante la *selección* de las variables más influyentes y características, ya que con el modelo se trata de obtener una representación *simplificada* de la situación real, tomando en cuenta no todas las variables de la lista inicial, sino aquellas que razonablemente consideramos como más relevantes y significativas para explicar el fenómeno.

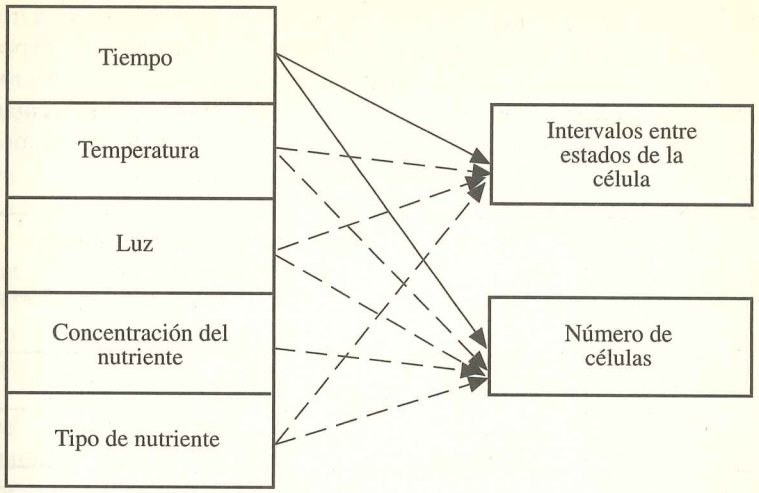


FIGURA 2

Así, pues, el biólogo, teniendo en cuenta estudios anteriores, tras una cierta meditación, selecciona como variable respuesta a considerar el *número de células* en el instante t, es decir, que la variable independiente será el tiempo *t* transcurrido desde el instante cero hasta la primera observación.

Etapa C_1.—Relaciones cualitativas entre variables.

Como consecuencia de las observaciones realizadas en los experimentos, se obtiene un primer *modelo cualitativo* del fenómeno que consiste en la afirmación de que al mantener estables en el tiempo las condiciones del cultivo (concentración, temperatura,...) *hay un crecimiento del número de células con el tiempo.*

Etapa C_2.—Colección de datos, conteos, medidas.

Continuando las experiencias y reiterando los conteos de la variable número de células, mediante una serie de experimentos que confirman los anteriores, se obtiene una serie de resultados, recogidos en la tercera columna de la tabla adjunta y cuya representación gráfica se encuentra en la figura 3. Ellas inducen al modelizador a observar que

los datos son muy similares a los números que figuran en la cuarta columna de la tabla, que representan un crecimiento de tipo exponencial bien estudiado en matemáticas. Justamente en este *paso inductivo* de los datos empíricos a otros muy parecidos, que presentan una estructura matemática conocida, está la clave del proceso de modelización, que es, ante todo, una cuestión de creatividad.

Instante	Tiempo	Nº observado células	Nº ajustado
0	0	100	100
1	20	209	$2 \cdot 100$
2	$2 \cdot 20$	415	$2^2 \cdot 100$
3	$3 \cdot 20$	790	$2^3 \cdot 100$
4	$4 \cdot 20$	1.610	$2^4 \cdot 100$.
. . .	. . .	. . .	. . .

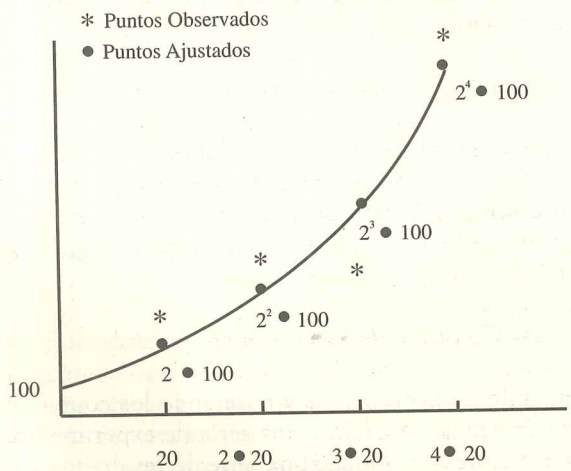


FIGURA 3

Etapa D_3.—Modelo empírico del crecimiento biológico.

En consecuencia, tras el ajuste y consideraciones precedentes, se sugiere una descripción del fenómeno como «una multiplicación por 2 del número de células de la población cada 20 minutos». Ha llegado, así, con esta serie de etapas, a lo que podríamos llamar un *modelo empírico del crecimiento biológico.*

Como se ve, esta etapa trata de que los conocimientos de etapas anteriores conduzcan, tras un proceso de creatividad, a la formulación de algunas relaciones y leyes funcionales empíricas del fenómeno, que suponen ya un conocimiento con cierta profundidad del comportamiento del mismo.

Está claro que en esta fase y en las precedentes deben jugar un papel importante los métodos estadísticos e informáticos de colección, tratamiento y presentación y ajuste de datos de observación y experimentación.

Esta metodología estadística adopta diversos niveles en las fases citadas y en otras posteriores del problema de la modelización, pero aquí no entraremos en su estudio detallado[1].

Asimismo, en todas estas etapas y en las siguientes tiene gran valor el conocimiento de las técnicas de trabajo especiales del campo propio del fenómeno considerado. De aquí el interés de que sean equipos de especialistas coordinados por un matemático aplicado los que estudien estos problemas, cuando presentan serias dificultades que exijan ingenio y creatividad por parte del equipo.

Etapa E.—Construcción del modelo matemático.

Pensando en progresar hacia el modelo matemático, considera el modelizador que, de un modo más general, podía llamar N al número de células en el instante O, y teniendo en cuenta que la población se multiplica por q en T minutos, tendrá en los instantes $1 \cdot T$, $2 \cdot T$, $3 \cdot T$, ..., las poblaciones $q \cdot N$, $q \cdot q \cdot N = q^2 \cdot N$, $q \cdot q^2 \cdot N = q^3 \cdot N$,...

Éste podría considerarse como «modelo matemático» del fenómeno, salvo que parece conveniente dar un paso más para llegar a la fórmula, a partir de algunos enunciados sencillos o axiomas que constituyen el punto de partida del *modelo matemático.*

[1] Ver S. Ríos, *Análisis estadístico aplicado* (Madrid, Paraninfo, 1987) y S. Ríos, *Iniciación Estadística* (Madrid, Paraninfo, 1994).

El siguiente esquema resume el paralelismo entre modelo empírico y modelo matemático.

Modelo empírico	*Modelo matemático*
Células de un cierto tipo (μ) que hemos visto verifican el siguiente curso de desarrollo:	Elementos no definidos cuyo número en el instante t, designamos por y(t); t = 0, 1, 2, 3,..., n; q = número natural.
Propiedad 1ª: El número de células en el instante 0 es 100. Propiedad 2ª: El número de células en instantes sucesivos es:	Admitimos los axiomas siguientes: Axioma 1 $y(0) = N$ Axioma 2 $y(t) = q \cdot y(t-1)$.

t = 0	1	2	3	4
t · T = 0	20	40	60	80
y = 100	2 · 100	$2^2 \cdot 100$	$2^3 \cdot 100$	$2^4 \cdot 100$

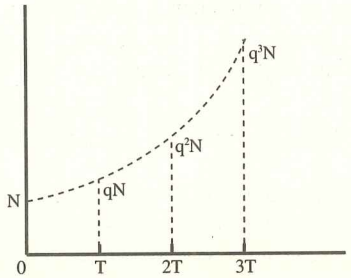


FIGURA 4

Tomando la columna de la derecha como única base para razonamientos matemáticos, en que se prescinde completamente del origen empírico de los axiomas que definen la situación, se pretende ahora obtener *nuevas propiedades* del «fenómeno matemático» para traducirlas después al «fenómeno empírico», que es *cuando realmente tendrá interés el estudio. Justamente propiedades deducidas de este modo, que no es posible (por su carácter más sofisticado) obtener por la experimentación directa; son las que dan interés a la modelización.* Muchas veces se obtienen en estos procesos incluso «novedades y teoría matemáticas» de interés para la matemática pura, pero el objetivo primordial del estudio aplicado es *conocer mejor el fenómeno considerado.*

Etapa F.—Consecuencias del modelo matemático.

Así podríamos obtener en este modelo matemático algunos teoremas.

Teorema 1 (de Malthus)

La función y tiene como expresión

$$y(t) = N\,q^t \qquad [1]$$

Del axioma 1 resulta: $y(0) = N$

y del axioma 2 se obtiene: $y(1) = q\,y(0),\ y(2) = q\,y(1) \ldots y(t) = q\,y(t\text{-}1)$

luego multiplicando y simplificando obtenemos

$$y(t) = q^t\,y(0)$$

o bien

$$y(t) = N\,q^t$$

Conviene no olvidar que los valores que consideramos para t son sólo múltiplos de un período T.

Teorema 2

El número de períodos T de tiempo necesarios para pasar de N a N' células es:

$$t \cong \frac{\log N' - \log N}{\log q} \qquad [2]$$

Si tomamos T como unidad queda

$$N' = N\,q^t$$

y tomando logaritmos

$$\log N' = \log N + t \log q$$

y de aquí se pasa a la fórmula [2], ya que es natural que t se considere como un número entero de períodos de tiempo tal como se ha planteado el modelo. La idea sencilla para mejorar el modelo y adaptarlo más a la realidad será (como luego veremos) considerar que t y q puedan ser números reales en vez de enteros.

Etapa I.—Aplicación práctica.

Mediante el teorema 2, el modelo permite resolver problemas prácticos de predicción en un experimento antes de su realización.

Por ejemplo, ¿cuál es el número de períodos de tiempo necesarios para pasar de 400 células a 3210.

La fórmula [2] nos da:

$$t \cong \left[\frac{\log 3210 - \log 400}{\log 2} \right] = 3$$

y si el período es $T = 20$ minutos serán $3 \cdot 20 = 60$ minutos.

Etapa K.—Validación del modelo.

Validar el modelo es contrastar las predicciones con los resultados experimentales.

Es natural admitir que si entre las predicciones y los nuevos resultados observacionales (etapa I) hay grandes discrepancias, habría que rechazar el modelo, que se consideraría *no válido*.

En muchos casos habrán de aplicarse técnicas de diseño de experimentos estadísticos y tests que permitan aceptar o rechazar el modelo, basándose fundamentalmente en la «idea probabilístico-estadística» que la aparición de un suceso de probabilidad muy pequeña debe conducir al rechazo de las hipótesis en que se basa el modelo.

Conviene observar que bajo la denominación de validación se comprenden otros aspectos, como, p.e., desde el punto de vista matemático, la *coherencia* de axiomas, teoremas y propiedades contenidos

en el modelo; la *aproximación* de los datos, en relación con la aproximación de los resultados, ya que sería absurdo, por ejemplo, pretender soluciones con error del orden del 1% con datos con error del orden del 5%. También hay que indicar que muchos modelos (grafos, juegos, etc.) son válidos para profundizar en aspectos cualitativos importantes de un fenómeno, mientras su cuantificación suele resultar difícil o inadecuada.

Como resultado de la validación tendremos las dos posibilidades de aceptar y rechazar el modelo. En el primer caso pasamos a utilizar el modelo para la predicción (etapa L) y en el segundo a iniciar un nuevo ciclo (etapa M) que nos conduzca a un modelo más adaptado a la realidad.

Etapa L.—Predicción

Sólo después de la validación, se puede proceder a utilizar el modelo como adecuado a la situación real y apto para la predicción.

Muchas veces el objetivo final de la modelización es llegar, a través del control o gobierno de ciertos *parámetros* (variables a nuestra disposición), a poder lograr la aparición de ciertos sucesos o resultados, etc.

Así, en el ejemplo tenemos calculado que si queremos obtener $32 \cdot 100$ células a partir de $4 \cdot 100$, necesitamos un tiempo $t = 3$ períodos, es decir, $3 \cdot 20 = 60$ minutos.

Etapa M.—Nuevo proceso de modelización.

Si llegáramos a la conclusión de no validez del modelo propuesto, bien por mal ajuste a los resultados experimentales, bien por considerar conveniente un modelo más sofisticado, se deberá reiniciar la consideración de los datos experimentales y proseguir nuevamente etapas análogas a las realizadas hasta llegar a un nuevo modelo que sea aceptable o válido.

2.4. Resumen

Hemos visto, en forma descriptiva, sin detenernos en las correspondientes técnicas a emplear en las mismas, las etapas del proceso de modelización que se resumen en el siguiente cuadro:

Etapa A. Descripción del fenómeno real y objetivos del modelo.
Etapa B. Enumeración y estructuración de variables.
Etapa C_1. Relaciones cualitativas entre variables.
Etapa C_2. Colección de datos, conteos, medidas.
Etapa D. Modelo empírico.
Etapa E. Modelo matemático.
Etapa F. Consecuencias del modelo matemático.
Etapa I. Aplicación práctica.
Etapa K. Validación del modelo.
Etapa L. Predicción.
Etapa M. Nuevo proceso de modelización.

Las etapas de la modelización aquí señaladas presentan distinta importancia y dificultad según los problemas y situaciones. Aunque en el libro muchos modelos se tratarán con menos detalle, procuraremos hacer alguna referencia a las etapas citadas y a sus dificultades, pues lo que nos proponemos realizar no es un catálogo de modelos, sino una iniciación a la metodología de la modelización.

Otro aspecto interesante es ver que se obtiene el mismo modelo para el crecimiento celular si, como indicábamos al comenzar, consideramos como variable principal el tiempo que dura la escisión de una célula en dos. En principio habíamos dejado de lado esta idea por la consideración real de que en un cultivo no todas las células se duplican en el mismo instante. Pero veamos ahora su desarrollo.

Podemos hacer la siguiente consideración:

Supongamos que nuestras observaciones conducen a que el 40% de las células se duplican en 10 minutos y que tomamos como unidad de tiempo 20 minutos. Tendremos:

$$y\left(t+\frac{10}{20}\right)=(1+0{,}4)\,y(t)$$

o bien

$$y\left(t+\frac{1}{2}\right)=1{,}4\,y(t)$$

Luego

$$y(t+1)=1{,}4\,y\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Es decir

$$y(t+1)=1{,}4^2\,y(t)$$

O bien, aproximadamente:

$$y(t+1)=2\,y(t)\quad (t=1,2,3)$$

que nos da el mismo modelo.

Obsérvese que a primera vista parecería que el modelo equivalente al dado sería que el 50% de las células se duplicaran en 10 minutos.

También conviene tener en cuenta que esta manera de obtener el modelo de apariencia tan sencilla requiere una serie de pasos similares a los indicados para el caso de tomar la variable tiempo en forma directa.

2.5. Modelo de crecimiento y muerte: crecimiento malthusiano

Un modelo más adaptado a la realidad que los considerados hasta aquí, es el que corresponde a la evolución de una población como consecuencia, no sólo de los nacimientos, sino también de las muertes que se producen.

Supongamos que $P(t)$ representa el número de individuos de la población en el instante t y que $B(t)$ representa el número de nacimientos en un intervalo de tiempo de un año, entre t y $t+1$, y $M(t)$ el número de muertes entre t y $t+1$.

Supondremos, además

1) que las razones

$$b=\frac{B(t)}{P(t)}\qquad\qquad m=\frac{M(t)}{P(t)}$$

llamadas *tasas de natalidad y mortalidad* en un cierto intervalo de tiempo permanecen constantes;

2) que no hay migración (ni de la población al exterior, ni del exterior a la población).

Tendremos:

$$P(t+1) = P(t) + B(t) - M(t) = P(t) + b\,P(t) - m\,P(t) = (1 + b - m)\,P(t)$$

Si ponemos $r = 1 + b - m$, que es la llamada *tasa de crecimiento* o *parámetro malthusiano*, se obtiene:

$$P(t+1) = r\,P(t)$$

Este modelo contiene como caso particular para $m = 0$ al anteriormente estudiado:

$$y(t+1) = q\,y(t)$$

Ejemplo 1

Supongamos que la población actual de un país es 40.000.000 y la tasa de natalidad $b = 0{,}02$ y de mortalidad $d = 0{,}01$. ¿Cuál será la población dentro de 10 años?

$$P(10) = (1{,}01)^{10} \cdot 40.000.000 = 1{,}104222125 \cdot 40.000.000 = 44.168.885$$

Como ejercicio, el lector puede calcular, ¿cuántos nacimientos y defunciones ocurrirán en el período de tiempo considerado?

Según que $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$ se tiene una evolución decreciente, estacionaria o creciente, como se ve en las figuras.

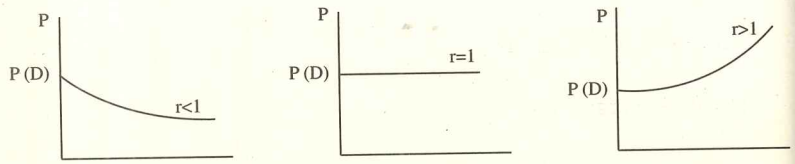


FIGURA 5

El caso $r > 1$ de crecimiento exponencial fue considerado especialmente por Malthus, quien enunció la siguiente ley: «todos los animales de acuerdo con leyes conocidas de reproducción deben tener una capacidad de crecer geométricamente».

Este *crecimiento geométrico* de Malthus, que ahora se llama *exponencial*, fue discutido por sociólogos y economistas durante muchos años y se debía presentar en toda población que tuviera suficientes medios de subsistencia alimenticia.

Un ejemplo que consideró Malthus fue el de la población blanca de Estados Unidos, cuyos datos durante 1790-1820 fueron:

t	Año	Población ($x10^6$)	Razones $P(t) : P(t-1)$
0	1790	3,9	—
1	1800	5,3	1,36
2	1810	7,2	1,36
3	1820	9,6	1,33

que, como se ve, dieron una buena aproximación al crecimiento malthusiano: $P(t) = P(0) \cdot 1{,}36^t$, pero pronto surgieron fuertes discrepancias. Como se ve en la siguiente tabla que contiene la población observada y la estimada por la fórmula de Malthus:

Años	Población	Valores estimados ($x10^6$)
1820	9,6	10,0
1830	12,9	13,7
1840	17,1	18,7
1850	23,2	25,6
1860	31,4	35,0
1870	38,6	47,8
1880	50,2	65,5
1890	62,9	89,6
1900	76,0	122,5
1910	92,0	167,6
1920	106,5	229,3
1930	123,2	313,7

Se observa que en 1870 tenemos un error del 30%, que en 1900 se eleva al 60%. Esto ha llevado a invalidar el modelo de Malthus que

predice crecimiento infinito (para $r > 1$), y que no tiene en cuenta limitaciones de alimentos, energía y otros factores ambientales. Como veremos luego, el modelo logístico permite hacer predicciones correctas en estos problemas.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.2.1. Crecimiento con variable tiempo continua

Antes de obtener modelos que perfeccionan las hipótesis del modelo malthusiano, vamos a modificar éste para considerar t como variable continua, lo que facilita el tratamiento matemático de los problemas.

La relación $y(t + 1) = q\ y(t)$, se puede escribir poniendo $q = 1 + r$ en la forma

$$y(t + 1) = (1 + r)\, y(t) \qquad [1]$$

Con esto, la solución toma la forma $y(t) = y(0)\ (1 + r)^t$

Podemos poner la ecuación [1] en la forma:

$$\frac{y(t+1) - y(t)}{1} = ry(t)$$

Si en vez de un incremento de una unidad de tiempo consideramos un incremento h, tendremos:

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

y el límite de este cociente de incrementos, nos da la derivada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

Se ve que asignándole el mismo valor $r\ y(t)$ que cuando se tomaba $h = 1$, que es el caso antes considerado, tendremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = ry(t)$$

que podemos poner en la forma:

$$\frac{dy}{y} = rdt$$

cuya integración da:	$\log y = rt + c$
luego	$y = e^{rt+c}$
Para $t = 0$	$y = e^c$
luego	$y(t) = y\ (0)\ e^{rt}$

que coincide con la fórmula anterior

$$y(t) = y(0)\ q^t, \text{ si ponemos } q = e^r$$

Se ve que para $h = 1$, se obtiene $y(t + 1) - y(t) \cong y(0)\ e^{rt}\ (e^r - 1)$, es decir, que para $h = 1$, el incremento de $y(t)$ es el mismo que con el modelo continuo si ponemos $q = e^r$

Conviene no olvidar, sin embargo, que el primer modelo sólo da valores de $y(t)$ para $t = 1, 2, 3, \ldots$, y no para valores intermedios, mientras el segundo da valores de $y(t)$ para $t \geq 0$, coincidiendo con los anteriores para t entero.

E.2.2. Crecimiento logístico. Nivel de equilibrio

Los dos modelos considerados tienen una propiedad de crecimiento infinito de $y(t)$, cuando t crece, lo que no se ajusta a la realidad. Tanto en los experimentos con poblaciones de células como en las observaciones de poblaciones humanas, el crecimiento es acotado.

El crecimiento logístico introducido por Verhulst en 1837, modifica el modelo, sustituyendo la idea de crecimiento proporcional a $y(t)$, por crecimiento dependiente también de la densidad de población alcanzada, para tener en cuenta que si los recursos alimenticios son limitados, el crecimiento se restringe.

Así tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = \left\{ r \left[1 - \frac{y(t)}{k} \right] \right\} y(t)$$

Se supone que k es un máximo de población alcanzable, con lo que el término entre paréntesis es próximo a 1; pero se aproxima a 0, cuando $y(t) \to k$.

Es interesante observar el concepto de *equilibrio* en relación con el crecimiento logístico y en general.

Si tenemos una función de crecimiento $y(t)$ definida por la ecuación:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\,[y(t)]$$

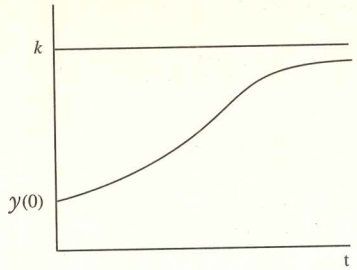


FIGURA 6

(de la que es un caso particular la [1] de la logística), se dice que y_0 es un *nivel de equilibrio* si $f(y_0) = 0$. Como consecuencia se verifica:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0, \textit{para } y = y_0$$

En el caso de la logística, cuando $t \to \infty$, $y(t) \to k$, es decir, la recta $y = k$ representa una asíntota para el crecimiento de $y(t)$, como se ve en la fig. 6.

El proceso de integración es sencillo. Se pone:

$$\frac{y'(t)}{y(t)\,[1 - y(t)\,/\,k]} = r$$

O bien, descomponiendo en fracciones:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{k - y(t)} = r$$

e integrando:

$$\log y(t) - \log [k - y(t)] = rt + c$$

o bien

$$\frac{y(t)}{k - y(t)} = e^{rt + c}$$

o bien

$$y(t) = \frac{ke^c}{e + e^{-rt}}$$

En la tabla adjunta se ven los valores efectivos y los que predice la función de Verhulst, y se observa un buen ajuste, que valida el modelo. Las posibilidades de utilizar este modelo para predicciones de la población de un país en años futuros han de tener en cuenta las dificultades que surgen de si se quiere tomar en consideración sucesos imprevisibles, como una guerra nuclear, una nueva revolución industrial, social, etc.

Años	Población ($\times 10^6$)	Población estimada
1820	9,6	9,7
1830	12,9	13,0
1840	17,1	17,4
1850	23,2	23,0
1860	31,4	30,2
1870	38,6	38,1
1880	50,2	49,9
1890	62,9	62,4
1900	76,0	76,5
1910	92,0	91,6
1920	106,5	107,0
1930	123,2	122,0

E.2.3. Desintegración radiactiva

Las substancias radiactivas (carbono 14, estroncio, plutonio, etc.) tienen la propiedad descubierta por Rutherford a principios del siglo XX, de que algunos átomos son inestables y se transforman en otros (desprendiendo energía, siguiendo una serie de etapas análogas a las vistas en el problema del crecimiento celular). Rutherford (1910) observó el número de partículas α que desprendía una substancia radiactiva durante $N = 2.608$ períodos de 7,5 segundos. Como se ve en los datos siguientes, el número de partículas que llegaron al contador en un período fue muy variable, pero el promedio en un período de 7,5 segundos resultó ser

$$\frac{10.094}{2,608} = 3.870$$

Reiteró los experimentos con cantidades doble, triple, etc., de substancia radiactiva y observó que los números medios de desintegraciones eran proporcionales a los anteriores.

k = número de partículas	k = número de períodos con k partículas
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273
7	139
8	45
9	27
$k \geq 10$	16
	2.608

En consecuencia, si llamamos $y(t)$ al número de átomos radiactivos de una muestra de substancia en el instante t, los experimentos indicaron que el número de desintegraciones en un intervalo de tiempo fijado era proporcional al número de átomos presentes, de modo que podemos escribir como *modelo dinámico* del fenómeno la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -hy(t)$$

que expresa que la derivada es proporcional a $y(t)$ y en que $h > 0$, se llama *tasa de desintegración*. Como ya vimos, este modelo es el mismo del crecimiento biológico y conduce por integración a:

$$y(t) = y(0)\, e^{-ht}$$

Esta constante h (llamada de desintegración), varía de unas substancias radiactivas a otras y la manera de medirla parte de la búsqueda del tiempo T, necesario para que la cantidad inicial de átomos se reduzca a la mitad, es decir:

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-hT}$$

lo que nos da

$$T = \frac{\ln 2}{h}$$

Se llama a T *semivida* de la substancia radiactiva y se tiene:

$$h = \frac{\ln 2}{T}$$

Se han calculado para varias substancias las semividas que figuran en la tabla

Substancia	Semivida
Bario 140	13 días
Plomo 210	22 años
Estroncio 90	25 años
Carbono 14	5.568 años
Uranio 238	4.5×10^9 años

E.2.4. Datación de muestras arqueológicas: la mesa redonda del rey Arturo

La técnica, debida al Premio Nóbel americano W.F. Libby (1960) que utiliza el carbono 14 para fijar la edad de una muestra de sustancia orgánica se basa en las siguientes observaciones: los rayos cósmicos que continuamente bombardean nuestra atmósfera, producen neutrones que combinan con nitrógeno para formar C^{14}. En los seres vivos la tasa de absorción del C^{14} se compensa con la tasa natural de desintegración y se establece un equilibrio. La hipótesis básica es que la intensidad de bombardeo por rayos cósmicos de nuestra superficie terrestre no ha variado a lo largo del tiempo.

Como consecuencia tendremos, p.e., que la tasa de desintegraciones de C^{14} en una muestra de madera en cualquier época es la misma que la de la madera viva actual. Cuando la madera se cortó para hacer una mesa redonda, que se encuentra en el castillo de Winchester, y se dice que utilizaron, el rey Arturo y sus caballeros, los átomos de C^{14} empezaron a desintegrarse sin ninguna otra absorción.

Supongamos que la mesa se construyó en el tiempo $t = 0$ y que $R(0)$ es la tasa original de desintegración, es decir:

$$R(0) = -\frac{dy}{dt}\Big/_{t=0} = hy(0)$$

La tasa actual de desintegraciones es:

$$R(t) = -\frac{dy}{dt} = hy(t) = he^{-ht}\,y(0)$$

Tenemos:

$$R(0)/R(t) = e^{ht}$$

O sea

$$t = \frac{1}{2}\ln\,[R(0)\,/\,R(t)]\ años$$

Se ha visto que la tasa de desintegración de la madera viva es $R(0) = 6{,}68$ por minuto y por gramo de madera y, por otra parte, se ha calculado para el C^{14}.

$$h = ln2/t = 1{,}245 \cdot 10^{-4} \text{ por año}$$

y para medidas realizadas en 1977, la tasa presente es:

$$R(t) = 6.08$$

luego

$$t = \frac{1}{1.245 \cdot 10^{-4}}\ln\left[\frac{6.68}{6.08}\right] \simeq 700\ años$$

Esto daría para la mesa como fecha de su construcción aproximada 1275, lo cual indicaría que es muy posterior al rey Arturo, que vivió en el siglo V.

Observemos que los modelos de crecimiento que hemos considerado en este capítulo 2 son ejemplos de *sistemas dinámicos*, es decir, conjuntos de elementos interrelacionados que, sumergidos en un ambiente exterior, evolucionan en el tiempo. Lo fundamental es que el *estado* del sistema en un cierto instante se considera consecuencia de lo sucedido en el tiempo precedente [ver **Cap. 12**].

Así vimos cómo la evolución de una población o sistema de células, de hombres, ..., se podría representar por una función del tiempo, que bajo ciertas condiciones, nos da el estado del sistema.

En varios ejemplos, hemos visto que los modelos deterministas utilizados no dan una previsión exacta del estado del sistema. Hay factores de azar que no hemos considerado aquí y que permitirán un perfeccionamiento de estos modelos estudiándolos mediante modelos probabilísticos.

E.2.5. Momias egipcias

Un gramo de carbono extraído de un cadáver reciente dio una tasa de desintegración de 18.700 átomos por día y un gramo de carbono extraído de una momia egipcia fue de 8.500 átomos por día. Calcular la edad de la momia.

E.2.6. Edad de la Tierra

Utilizar los conocimientos sobre desintegración para el cálculo aproximado de la edad de la Tierra. Suponer un cataclismo que ha dado origen a un gran bloque de uranio, que aparece actualmente contaminado con plomo en una proporción 0,9.

E.2.7. Población futura de España

Utilizar los siguientes datos para hacer estimaciones de la población de España en años posteriores.

AÑO	Número de habitantes Población de hecho
1789	10.268.150
1797	10.541.221
1833	12.286.941
1846	12.162.872
1850	10.942.280
1857	15.495.212
1860	15.655.467
1877	16.631.869
1887	17.560.352
1897	18.065.635
1900	18.594.405
1910	19.927.150
1920	21.303.162
1930	23.563.867
1940	25.877.971
1970	34.041.531
1981	37.682.355
1991	38.872.279

(Datos del Anuario Estadístico)

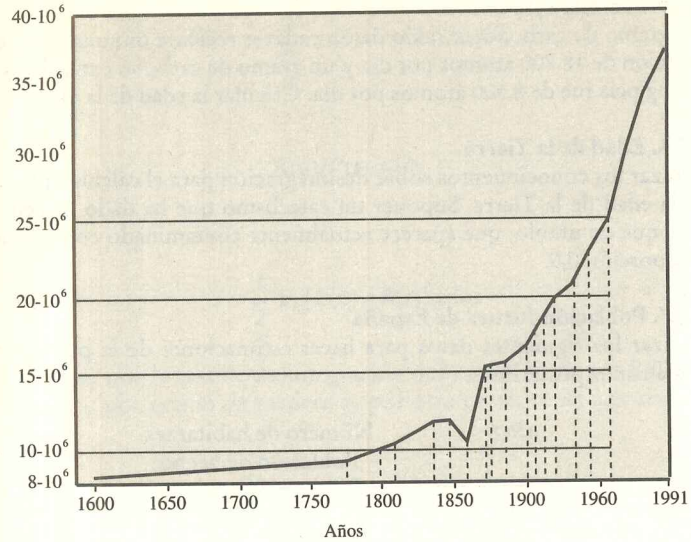


FIGURA 7

E.2.8. Dosificación de medicinas

Es importante conocer cómo evoluciona la concentración que se mantiene en la sangre de un paciente tras administrarle una medicina. Su estudio es la base para establecer las dosis y los intervalos de tiempo con que se deben administrar.

Si es $y(t)$ la cantidad de medicina en el instante t, es bastante realista, para muchas medicinas (p.e., la penicilina), el mismo modelo, ya aplicado en que

$$\frac{dy}{dt} = -ky \qquad [1]$$

El parámetro varía de unas medicinas a otras y su determinación ha de hacerse experimentalmente.

Hemos visto que de la ecuación [1] resulta:

$$y = y_0\, e^{-kt} \qquad [2]$$

que expresa que la concentración de droga tiene un decrecimiento exponencial. Si pasa un tiempo t y la concentración $y(t) = y_0\, e^{-kt}$ resulta baja, se debe

administrar una nueva dosis y_0 con lo que la concentración sube, etc., y siguiendo de este modo se obtiene mediante un cálculo sencillo como nivel de saturación

$$y_s = y_0/(1 - e^{-kt})$$

que permite determinar el intervalo T entre dosis, para que, partiendo de una dosis inicial y_0, se llegue con aplicaciones sucesivas a un nivel y_s. Asimismo, permite determinar la dosis y_0, cuando se fija T. Estas dos propiedades son la base para la dosificación práctica de gran número de medicinas.

E.2.9. Calentamiento del agua de una piscina

La llamada ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta$$

que es también análoga a las vistas en modelos precedentes, establece la relación entre la velocidad de enfriamiento de un cuerpo y la diferencia de temperatura respecto al ambiente. Esto permite comparar diversos programas para utilizar la energía de un calentador durante la noche a fin de tener una cierta temperatura en la piscina, p.e., a mediodía.

E.2.10. Alcoholemia y accidentes de automóvil

Si designamos por b, la concentración de alcohol en la sangre de un conductor, la relación entre el riesgo relativo de tener un accidente se mide también por el modelo

$$\frac{dR}{db} = kR \ (k > 0)$$

que expresa que el riesgo crece exponencialmente con el nivel de alcohol. El parámetro se ha calculado que es $k \sim 21.4$, y tenemos $R(b) = e^{21,4 \cdot b}$, y la curva que representa esta función es la figura 8.

E.2.11. Riñón artificial

Un modelo algo más complicado, pero similar a los anteriores, es válido para establecer el funcionamiento de la diálisis de la sangre mediante el «riñón artificial».

El punto, de partida, es la llamada ley de Fick, que afirma que la cantidad de material de desecho que pasa por una membrana es proporcional a la diferencia de concentración a un lado y otro de la misma.

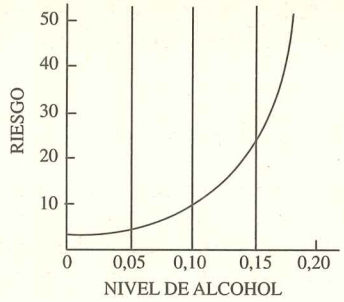


FIGURA 8

Así, en el esquema (fig. 9) se ve que la sangre que tiene una concentración de desechos (creatinina, urea, ...) $u(x)$ al circular elimina por la membrana RS que la separa del dializador una parte de impurezas que pasan al dializador cuya concentración es $v(x)$.

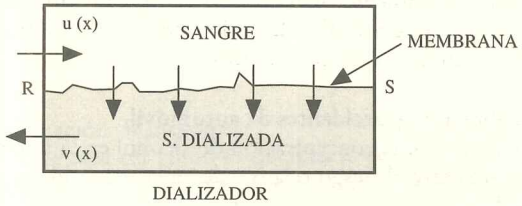


FIGURA 9

Por consideraciones análogas a ejemplos anteriores (aunque más complejas) se llega a la relación diferencial:

$$\frac{d(u-v)}{dx} = -k\,(u-v)$$

cuya integración permite calcular la cantidad de material de desecho removido de la sangre por unidad de tiempo (que se llama aclaramiento)[2].

[2] Burley, D., *Mathematical Model for a Kidney Machine* (Mathematical Spectrum, vol. 8, 1969).

E.2.12. Crecimiento económico e interés continuo

En nuestro tiempo es un hecho generalmente reconocido que la cantidad de bienes producidos por una sociedad (comarca, país, ...) crece con el tiempo o, dicho en palabras corrientes, la sociedad experimenta un *crecimiento económico*. Esto se explica porque las empresas adquieren cada día más maquinaria para producir más bienes y, en consecuencia, necesitan (con la misma tecnología) más mano de obra, que al disponer de más bienes de consumo, quizá tendrá mayor bienestar, etc.

Comencemos por el ejemplo sencillo del capital monetario situado en los bancos. Si una peseta se deposita en un banco y la tasa de interés anual es r, al cabo de un año tendremos $(1 + r)$ pts. Si consideramos que la tasa de interés es $r/2$, pero acumulamos los intereses al final de los semestres, tendremos en un año:

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$$

y análogamente para la tasa r/n y acumulación al final de cada $1/n$ del año será

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Si $n \to \infty$, se sabe que

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r \to e^r$$

que es el resultado de un *crecimiento continuo*.

En consecuencia, se suelen aceptar las siguientes definiciones que están de acuerdo con los modelos de crecimiento estudiados:

El *valor futuro* en t años de una peseta a la tasa de interés continuo r es e^{rt} *pesetas*.

El *valor actualizado* de una peseta utilizable dentro de t años es e^{-rt} pesetas.

Como aplicación, consideramos el valor actualizado de los beneficios futuros de un negocio, cantidad que permitirá hacer comparaciones y establecer preferencias.

Supongamos que el beneficio del negocio en el tiempo t sea $b(t)$; entonces, si consideramos la suma de beneficios en un intervalo $(0, T)$ es:

$$\int_0^T b(t)\,dt$$

Pero si queremos los beneficios actualizados, se obtienen considerando que los de cada intervalo (t_j, t_{j+1}) en que dividamos el intervalo $(0, T) = (0, t_1, t_2, ..., t_{j+1}, ..., T)$, tendrá un valor aproximado $b(t_{j+1})\, e^{-rt}\, (t_{j+1} - t_j)$ y el límite de esta suma se expresa por la integral:

$$\int_0^T b(t)\, e^{-rt} dt$$

Es interesante ver que la fórmula $k_t = k_0\, q^t$ que da el capital k_t en que se transforma el capital k_0 en t años, verifica dos propiedades que resultan más claras si ponemos $k_t = f\,(k_o, t)$.

Tendremos fácilmente:

$$f(k_o + k'_0, t) = f\,(k_0, t) + f\,(k'_0, t)$$

$$f(k_0, t+t') = f(f(k_0, t), t')$$

Se llaman propiedades de *invariancia respecto a la partición*, la primera indica que si se pone a interés un capital suma de otros dos, se obtiene lo mismo que si se pone separadamente cada capital, y la segunda que si el capital se pone a interés durante el tiempo t y después el capital acumulado durante el tiempo t', se obtiene lo mismo que si el capital inicial se pone a interés el tiempo $t + t'$.

Una interpretación de este razonamiento en el contexto social podría ser la siguiente: el propósito fundamental de disponer de grandes capitales por largos períodos de tiempo en economía es precisamente lograr una mayor productividad que la que darían la suma de las producciones de los individuos aisladamente considerados. La fórmula del interés compuesto no tiene esto en cuenta, por lo que no resulta adecuada al tratamiento del problema del crecimiento económico.

E.2.13. Pensiones y planes de jubilación

Supongamos un funcionario que inicia su vida laboral a los $N_1 = 21$ años con un sueldo $S_1 = 200.000$ pts, y se retira a los $N_2 = 65$ años, siendo $\propto = 0{,}02$ la tasa anual de crecimiento de dicho salario. Contribuye a la Seguridad Social con una cantidad $\beta = 0{,}0705$ de su salario para formar un fondo de pensión cuyo interés anual es $\varphi = 0{,}05$. Se supone que si vive hasta los 65 años, su vida probable como pensionista será hasta los $N_3 = 75$ años.

Se trata de conocer la pensión que le corresponderá a partir de los 65 años.

E.2.14. Contaminación y purificación de la laguna de Peñalara

Consideremos un lago cuyo volumen constante es Vm^3, que suponemos contaminado de una manera uniforme por partículas. Consideramos una medida adecuada de la contaminación en el tiempo t el número $x(t)$ de gramos de contaminante por m^3 del lago. Se supone que el nivel del lago es constante y que es r la tasa en m^3 por día, a que se renueva el agua. Se trata de determinar en cuanto tiempo (suponiendo que no reciba el lago nuevos contaminantes) se reducirá la contaminación al 10% de la inicial.

Tendremos, una vez más, la relación:

$$\frac{d(Vx(t))}{dt} = -\,rx(t)$$

que nos da

$$x(t) = x(0)\, e^{-rt/V}$$

luego

$$0{,}10\, x(0) = x(0)\, e^{\frac{-rt_{0,10}}{V}}$$

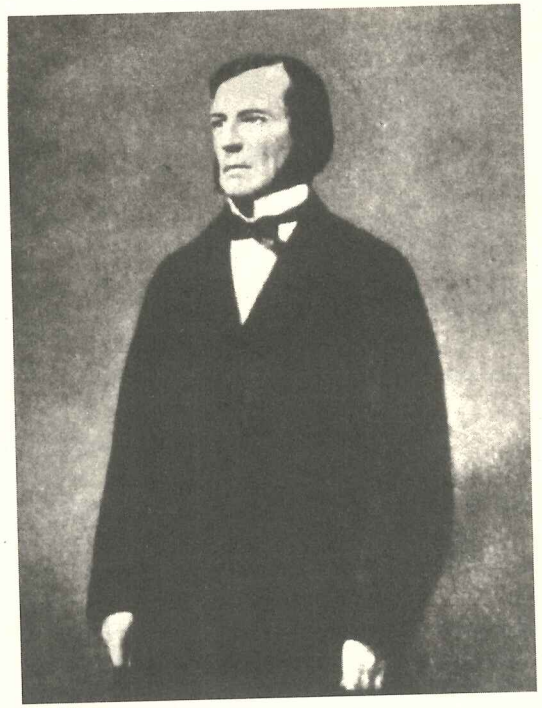
es decir

$$\ln 0{,}10 = -\,rt_{0,10}\,\frac{1}{V}$$

$$t_{0,10} = -\ln 0{,}10\; V\,\frac{1}{r}$$

Este modelo es aplicable, p.e., a la laguna de Peñalara, que en época reciente, ha dejado de ser recontaminada por desechos de excursionistas.

BOOLE (1815-1864)



Según Bertrand Russell la matemática pura fue descubierta por Boole en su obra «Las leyes del pensamiento».

3. CIRCUITOS, LENGUAJES, CONJUNTOS

«Y el hombre dio nombres a todos los ganados,
las aves del aire, y bestias del campo.»

GÉNESIS 2.2.

3.1. Circuitos eléctricos con conmutadores

Comenzamos por introducir modelos básicos que han sido formalizados en época reciente, a pesar de que en ellos se puede decir que se encuentran las raíces más profundas de las matemáticas y la lógica, el lenguaje común y el científico.

El físico Ehrenfest (1910) inició un modelo matemático de los acoplamientos de circuitos eléctricos con conmutadores, que se utilizan en la construcción de redes de distribución de energía eléctrica, centrales telefónicas, ordenadores y en el estudio de las neuronas en el cerebro, etc. Más tarde Shannon (1938) profundizó este modelo. Supongamos que se nos presenta el *problema del circuito de escalera*: *construir un circuito mediante el que se pueda encender una luz al principio de una escalera y apagar al final, o viceversa.*

Comenzamos por algunas nociones sencillas.

Los dos estados posibles de un conmutador (u otros dispositivos similares, como tubos electrónicos, transistores, etc.), son *cerrado* y *abierto* (y análogamente conductor y no conductor, potencial alto y débil, etc.).

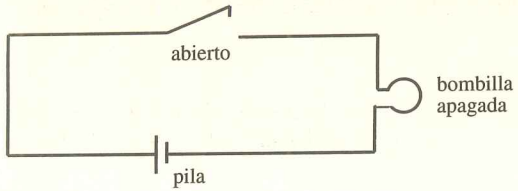


FIGURA 1

Un conmutador «cerrado» permite el paso de corriente y «abierto» no permite.

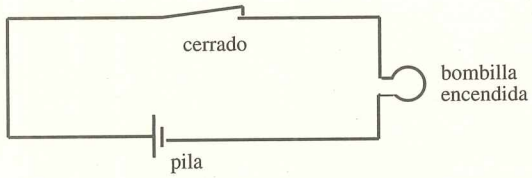


FIGURA 2

El circuito más simple consiste en una pila o generador, un hilo y un conmutador, que cuando está abierto (fig. 1) no deja pasar la corriente y la bombilla está apagada y cuando está cerrado (fig. 2) la deja pasar y se enciende la bombilla.

Con dos conmutadores los dos circuitos más simples consisten en ponerlos en *paralelo* (fig. 3) o en *serie* (fig. 4).

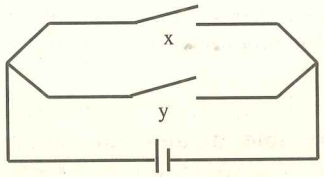


FIGURA 3

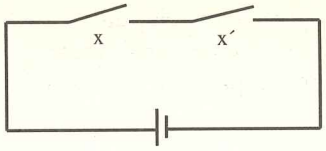


FIGURA 4

Se observa que en el circuito en paralelo si uno está cerrado pasa la corriente y si ambos están abiertos no pasa. En el circuito en serie para que pase la corriente han de estar ambos cerrados y para que no pase uno al menos ha de estar abierto.

Es natural representar el primer circuito por X + Y y el segundo por X · Y. Pues si representamos por 1 cerrado y por 0 abierto tendremos la llamada *tabla de respuestas*:

X	Y	X + Y	X · Y
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

que indica el estado de un circuito, según los estados de las componentes, si convenimos en asignar el signo + a los conmutadores en paralelo y el signo · a los circuitos en serie.

Es interesante considerar la posibilidad de una dependencia en el estado de dos conmutadores, de modo que estén siempre en el mismo estado o bien en estado opuesto. En el primer caso se designarán con la misma letra y en el segundo si un conmutador se designa por X el otro se designará por X'.

La tabla de respuesta es:

X	X'
1	0
0	1

P.e., la figura 5 representa el circuito X · X' y está claro que por tal circuito *nunca* pasa corriente. Análogamente, la figura 6 representa el circuito X + X' por el que siempre *pasa* corriente.

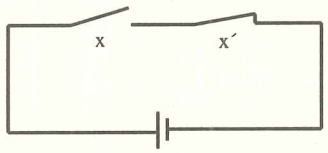


FIGURA 5

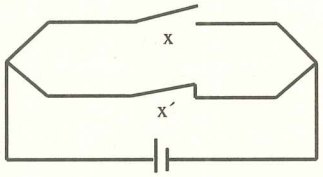


FIGURA 6

Dos circuitos que tienen conmutadores, que designaremos en uno y otro por las letras X, Y,..., se dicen *equivalentes* si las tablas de respuesta de ambos coinciden.

Se comprueban fácilmente mediante las tablas de respuesta las siguientes propiedades fundamentales de las operaciones:

1.° *Propiedades conmutativas*
a) X + Y = Y + X
b) X · Y = Y · X

2.° *Propiedades distributivas*
a) X · (Y + Z) = X · Y + X · Z
b) X + (Y · Z) = (X + Y) · (X + Z)

3.° *Propiedades de complementariedad*
a) X + X' = 1
b) X · X' = 0
c) (X')' = X

4.° *Propiedades de identidad*
a) X + 0 = X
b) X · 1 = X

P.e., en las fig. 7 y 8 se representan los dos miembros de 2° b), y se ve que estos circuitos son equivalentes, pero el segundo lleva más hilo y más interruptores que el primero.

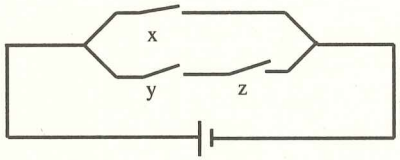


FIGURA 7

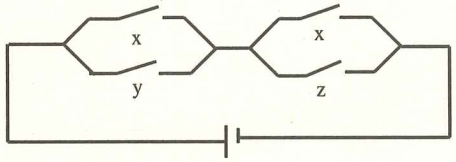


FIGURA 8

Con estas nociones es fácil llegar a la solución del problema del *circuito de la escalera*, que planteamos al principio: formular un circuito mediante el que se pueda encender y apagar una luz al principio y al final de una escalera.

Designemos por X, Y los conmutadores al principio y al final de la escalera, con lo que se tienen cuatro posiciones posibles y los resultados que se desean son los indicados en la tabla siguiente:

Posición	X	Y	Respuesta
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	0	0

La justificación de estas respuestas es la siguiente: si partimos de la posición 4 con X = 0, Y = 0, es natural que la luz esté apagada y por esto ponemos R = 0. Se pasa a la posición 3 cerrando Y, con lo que se desea obtener luz, es decir R = 1. Análogamente se pasa de la 4 a la 2, cerrando X y se desea que R = 1. De cualquiera de éstos se pasa a la 1 cerrando el conmutador abierto y deseamos obtener R = 0 que es la posición 1.

Se obtiene inmediatamente el esquema del circuito indicado en la figura 9, cuya fórmula es:

$$(X \cdot Y') + (X' \cdot Y)$$

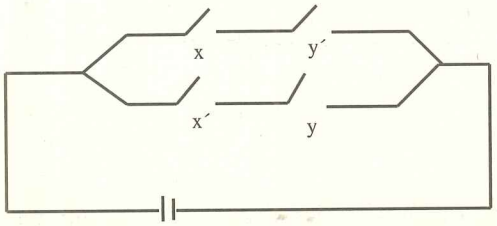


FIGURA 9

y se comprueba que su tabla de respuestas es precisamente la deseada.

X	Y	$(X \cdot Y') + (X' \cdot Y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Se ve que el circuito permite que, cualquiera que sea la posición de X, accionando Y logremos tener la luz encendida o apagada y análogamente para Y.

Este es un ejemplo de problema de *síntesis* o *diseño* en que, dadas las condiciones de operación de un circuito, se ha de establecer su fórmula estructural y la construcción del esquema correspondiente. Otro problema es el *análisis*: dada la fórmula estructural del circuito, conocer su funcionamiento. Finalmente la *simplificación* de un circuito dado se reduce a la simplificación de su fórmula.

He aquí un ejemplo de *síntesis y simplificación*: dado el circuito de la figura 10, determinar su fórmula, simplificarla y representarla por un nuevo circuito.

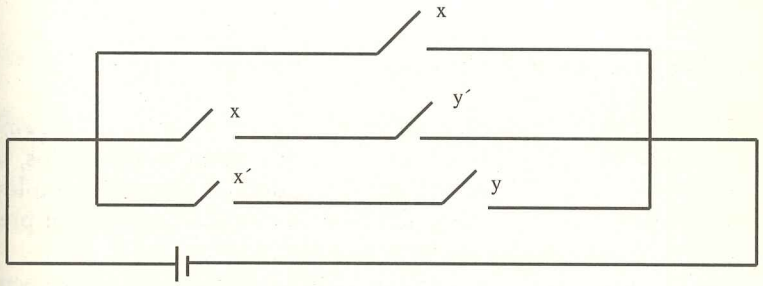


FIGURA 10

Se trata de tres subcircuitos X, $X \cdot Y'$, $X' \cdot Y$; conectados en paralelo, luego la fórmula es:

$$X + X \cdot Y' + X' \cdot Y$$

Se obtiene fácilmente el circuito equivalente formando la tabla de respuesta, que coincide con la de X + Y.

Con esto tenemos reducido un circuito con 5 conmutadores a otro equivalente (fig. 11) con 2.

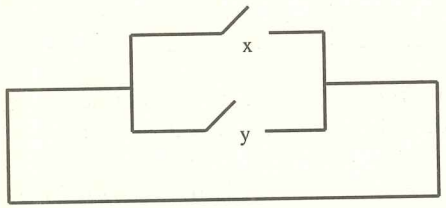


FIGURA 11

En casos sencillos, un electricista práctico puede simplificar circuitos, pero en casos complicados, como en los grandes ordenadores, el procedimiento es obtener la expresión simbólica del circuito y simplificarla mediante las reglas de cálculo y representar y construir el circuito con la nueva expresión obtenida.

3.2. Lenguaje natural y lenguaje matemático o científico

Hemos visto en ejemplos anteriores como, mediante el *lenguaje natural* asociado a algunas intuiciones y razonamientos sencillos, se puede llegar a modelos verbalistas de algunos fenómenos simples. Después viene la formalización del modelo que logra una mayor precisión y profundización con el *lenguaje matemático*.

Resulta, pues, que el conocimiento de las estructuras más elementales del lenguaje se hace necesario para comprender los aspectos básicos del proceso de modelización.

Se remonta a Aristóteles la iniciación del estudio sistemático de tales cuestiones, que progresó en el siglo XVIII con el gran proyecto de la «característica universal» de Leibniz: tomar el álgebra como modelo del lenguaje adecuado para expresar las relaciones lógicas, y culminó hace poco más de un siglo con los trabajos del matemático y lógico inglés G. Boole (1815-1864).

Hay que destacar la importancia de este estudio por su carácter de cultura general, ya que podría considerarse como un aspecto científico de la gramática y también porque es la base de nuestra formación de conceptos, generación y comunicación de ideas, resolución de problemas, toma de decisiones,...

Es fácil ver con un ejemplo como el lenguaje usual, hábilmente utilizado, puede permitir afirmaciones que sea difícil justificar sin utilizar nociones de lógica simbólica.

Consideremos las siguientes proposiciones:

Un estudiante dice que:

a) si el curso de Lógica es importante, vale la pena seguirlo.
b) o el curso de Lógica es fácil o no vale la pena seguirlo.
c) el curso de Lógica no es fácil de seguir.

¿Cuál es la conclusión de estas proposiciones parciales?

Antes de abordar este problema vamos a introducir algunas nociones previas.

3.3. Proposiciones simples

Una *proposición simple* o *proposición* es una frase declarativa de la cual podemos decir que es verdadera o falsa, pero no ambas cosas.

Con esta descripción de lo que es una proposición tratamos de excluir de nuestra consideración sentencias o proposiciones interrogativas, exclamativas o imperativas, como p. ej., «¿le gusta el tenis?», «arriba las manos», «conduzca despacio». Se consideran, en cambio, como sentencias (declarativas) las del tipo siguiente:

1) Todos los triángulos son isósceles.
2) El número 2 es par.
3) Está lloviendo en Madrid.

A cada una de estas proposiciones se le puede asignar el valor «*verdadero*» o «*falso*» y sólo uno de éstos. Así la 1) es falsa, la 2) verdadera, la 3) sería una cosa u otra según qué día se lea.

Se llama *valor de verdad* de una proposición a su veracidad o falsedad. Se denota por V ó F, respectivamente.

Desde el punto de vista de la lógica, las *proposiciones* son elementos abstractos que representaremos por letras p, q, ... que son susceptibles de *tener uno de los dos valores «verdadero» o «falso»; pero sólo uno.*

Solamente al dar ejemplos de proposiciones concretas es cuando podremos tener un solo valor de verdad determinado. En caso de no especificar estamos refiriéndonos propiamente a *variables proposicionales*, es decir, símbolos que representan proposiciones no especificadas.

3.4. Operaciones con proposiciones. Conectivos. Tablas de verdad

En el lenguaje corriente y en el matemático *conectamos de distintos modos proposiciones simples para formar proposiciones compuestas.* Así, conectando las proposiciones simples:

p = «está lloviendo en Madrid»;
q = «llevo mi impermeable».

mediante la conjunción «y», tenemos la proposición compuesta «está lloviendo en Madrid y llevo mi impermeable». Esta manera de conectar dos proposiciones se llama *conjunción* o *copulación*, es decir: *conjunción de dos sentencias p, q,* es la proposición «p y q» que se designa por el símbolo $p \wedge q$. Resulta que esta proposición será verdadera si ambas son verdaderas y sólo en este caso, por lo que su *tabla de verdad*, o cuadro que da los valores de verdad de la proposición compuesta para los valores de los datos será:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La palabra (y el símbolo) que usamos para conectar dos proposiciones se llama *conectivo*.

Es interesante observar que en lenguaje natural la operación de conjunción entre dos sentencias sea realizada a veces con una coma, o con palabras como «pero», «ahora bien», etc. Así es una operación de conjunción la que lleva a formar las frases: «no llueve pero llevo impermeable» o «no llueve, no llevo impermeable».

Una segunda operación fundamental se tiene al formar frases como «regalaré la ropa vieja o regalaré la ropa pequeña», es decir, en que unimos dos proposiciones por la conjunción disyuntiva «o». Esta frase tiene el sentido de que «regalaré la ropa que sea pequeña, la que sea vieja, o la que sea a la vez pequeña y vieja». Es lo que se llama simplemente *disjunción*, o *disjunción inclusiva* (para distinguirla de *disjunción excluyente* que se refiere a proposiciones como «mañana iré a Barcelona o a Sevilla», que se entiende que voy a una sola de dichas ciudades).

Tenemos así:

La *disjunción* de dos proposiciones p, q es la proposición «o p, o q, o *ambos*», que se escribe simbólicamente: $p \vee q$.

La *disjunción* tendrá el valor V si una al menos de las componentes es V, y si no será F. Es decir, la tabla de verdad será:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La formación de una proposición mediante una frase negativa de otra, como p. ej., «no está lloviendo», es una operación que llamaremos *negación*.

Negación de la proposición p es la proposición «no p», que escribiremos simbólicamente p'.

Su tabla de verdad es:

p	p'
V	F
F	V

Ej. Hay una correspondencia entre las operaciones con proposiciones y las definidas para los circuitos con conmutadores, que se expresa así:

y	$\wedge$	·
o	v	+
no	'	'

En lo anterior hemos considerado además de *proposiciones* concretas, *variables proposicionales simples* que son símbolos como *p*, *q*, *r*, ... que representan proposiciones no especificadas y que, por tanto, no se sabe cuál de los dos valores de verdad tendrán. En cuanto a las *variables proposicionales compuestas* son fórmulas obtenidas a partir de un número finito de variables proposicionales simples, ligándolas por las operaciones definidas.

Para simplificar el lenguaje llamaremos *proposicionales* a las variables proposicionales siempre que no haya riesgo de error en la interpretación.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

En la tabla de verdad adjunta se observa como coincidencia notable que las dos proposicionales, $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$, tienen los mismos valores de verdad para cualquier sistema de valores de verdad de las componentes. Tales proposicionales se llaman *equivalentes*.

Dos proposicionales se dicen *equivalentes* si sus tablas de verdad son idénticas; es decir, que ambas proposiciones son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas.

3.5. Proposiciones lógicamente verdaderas, lógicamente falsas y factuales

Sea la proposicional $p \vee p'$.
Su tabla de verdad es:

p	p'	$p \vee p'$
V	F	V
F	V	V

No se han incluido en la tabla de verdad los valores V, V para p, p' porque no tiene sentido ni los F, F por lo mismo. Se observa que en la tabla de verdad *sólo aparecen* V, lo cual, por otra parte, es inmediata consecuencia de las definiciones. Tal proposicional $p \vee p'$ es un ejemplo de lo que llamaremos proposicional *lógicamente verdadera* o una *tautología*.

Una proposicional se dice *lógicamente verdadera* si su tabla de verdad contiene solamente V. Si solamente contiene F, la proposicional se llama *lógicamente falsa* o *contradicción*. P. ej., se puede ver formando la tabla de verdad:

p	p'	$p \vee p'$
V	F	F
F	V	F

que $p \vee p'$ es una contradicción.

Las tautologías, también llamadas *teoremas* o *leyes del cálculo proposicional clásico*, juegan, como veremos, un importante papel en la construcción de los razonamiento matemáticos.

Cuando una proposición no es lógicamente verdadera ni lógicamente falsa se llama *factual*.

Observemos brevemente que el valor de verdad de una proposición factual depende de los posibles valores de verdad de las proposiciones componentes, mientras en los otros casos no depende.

3.6. Condicional y bicondicional

El conectivo llamado *condicional* corresponde a lo que en el lenguaje corriente se indica con «si... entonces...», en frases como «si llueve entonces llevaré paraguas», «si respiro aire puro, trabajo mejor», etc.; Denotamos la condicional por «$p \to q$».

Se acepta, en general, que esta proposicional compuesta sólo es falsa si p es verdadera y q es falsa y, en consecuencia, se define por la siguiente tabla de verdad:

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A primera vista extraña lo que aparece en las filas 3.ª y 4.ª de la tabla. Podemos justificarlo diciendo que al no ser p verdadera, q lo mismo puede ser verdadera que falsa y es aceptable como verdadera la condicional en ambos casos. Se observa que, al pasar del lenguaje coloquial a su rigorismo lógico, hay que precisar mediante ciertos convenios que pueden parecer a algunos no muy justificados.

Ejemplos

Sea p = «a es múltiplo de 4» y q = «a^2 es múltiplo de 4», la condicional es «si a es $\dot{4}$, entonces $a^2 = \dot{4}$».

He aquí cuatro ejemplos que ilustran las filas 1.ª, 3.ª y 4.ª de la tabla de verdad:

Si 8 = 4, entonces	$64 = \dot{4}$	V
Si 2 = 4, entonces	$4 = \dot{4}$	V
Si 3 = 4, entonces	$9 = \dot{4}$	V

Se observa que al no ser a = 4, lo mismo puede ser verdadera que falsa $a^2 = \dot{4}$. Está justificado considerar la condicional verdadera en uno y otro caso.

Otros ejemplos de condicional verdadera son: «Si $3 \times 5 = 7$, es Madrid la capital de España».

«Si $3 \times 5 = 7$, es Madrid la capital de Francia».

En ambas la p es falsa y en la primera la q es verdadera y en la segunda falsa.

Se observa que la tabla de verdad de la condicional coincide con la proposición «$p' \vee q$», como es fácil comprobar. Con esto la condicional se reduce a la disjunción y la negación.

La *bicondicional* se define por la doble condicional «si p entonces q y si q entonces p» y se denota por $p \leftrightarrow q$. También se dice «p si y sólo si q».

Para formar la tabla de verdad de la doble condicional tenemos, teniendo en cuenta que se han de verificar $p \to q$ y $q \to p$:

p	q	p → q	q → p	p ↔ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Se observa que la bicondicional es verdadera si ambas partes son simultáneamente verdaderas o ambas falsas.

3.7. Implicación y equivalencia

Si consideramos la proposición: «si dos triángulos son iguales, entonces son semejantes», tenemos un ejemplo de condicional ($\rightarrow$) en Matemáticas, para la cual el valor de verdad nunca es falso.

Diremos que una condicional que nunca tiene el valor falso (es decir, que es una tautología) es una *implicación*. La denotaremos por «$p \Rightarrow q$» (en vez de $p \rightarrow q$) y leeremos «*p implica q*».

Análogamente una bicondicional, que siempre tiene el valor verdadero se llama una *equivalencia*. Escribiremos $p \Leftrightarrow q$ (en vez de $p \leftrightarrow q$) y leeremos «*p es equivalente a q*».

Para demostrar que una proposición condicional es una implicación, basta probar que cuando el antecedente p es verdadero, el consecuente q es verdadero. O bien probar que cuando q es falso p es falso.

En efecto, la tabla de verdad de la condicional prueba que es verdadera excepto cuando p es verdadero y q es falso; luego bastará probar que no es posible que sean p verdadero y q falso o, lo que es lo mismo, que si p es verdadero q ha de ser verdadero o que si q es falso tiene que ser p falso.

Como consecuencia resulta que *para que la doble condicional $p \leftrightarrow q$ sea una equivalencia, o sea $p \Leftrightarrow q$, basta ver que cuando p es falso q es falso y cuando q es falso p es falso. O bien cuando p es verdadero q es verdadero y cuando q es verdadero p es verdadero.*

Es corriente en Matemáticas traducir $p \wedge q$ por *p es una condición suficiente para q*, o bien, *q es una condición necesaria para p*. Análogamente la relación de equivalencia $p \Leftrightarrow q$ se traduce «*p es una condición necesaria y suficiente para q*».

También se dice que si «$p \Rightarrow q$ *es el teorema directo*», es «$q \Rightarrow p$ *el teorema recíproco*», es «$p' \Rightarrow q'$ *el teorema contrario*» y «$q' \Rightarrow p'$ *el teorema contrarrecíproco*».

Ejemplo

Si p = «Los triángulos T_1 y T_2 son semejantes» y q = «los ángulos homólogos de los triángulos T_1 y T_2 son iguales», tenemos: $p \Rightarrow q$. «Si los triángulos T_1 y T_2 son semejantes, entonces los ángulos homólogos son iguales.»

$q \Rightarrow p$. «Si los ángulos homólogos de los triángulos T_1 y T_2 son iguales, son T_1 y T_2 semejantes».

$p' \Rightarrow q'$. «Si los triángulos T_1 y T_2 no son semejantes, los ángulos homólogos no son iguales».

$q' \Rightarrow p'$. «Si los ángulos homólogos de dos triángulos T_1 y T_2 no son iguales, T_1 y T_2 no son semejantes».

Lo que sucede en este ejemplo, en que son verdaderos los cuatro teoremas, se explica porque $p \Leftrightarrow q$; pero esto no es general, como se ve en el siguiente

Ejemplo

Si p = «n es múltiplo de 6»;
q = «n es múltiplo de 3»;

son ciertos $p \Rightarrow q$ y $q' \Rightarrow p'$; pero no son ciertos $q \Rightarrow p$ ni $p' \Rightarrow q'$.

Este hecho se generaliza y se demuestra: *Si «$p \Rightarrow q$» es cierto, también lo es $q' \Rightarrow p'$; pero pueden no ser ciertos $q \Rightarrow p$, ni $p' \Rightarrow q'$.*

Se ve fácilmente que *para demostrar la equivalencia, es decir, los cuatro teoremas, basta demostrar el directo $p \Rightarrow q$, y el recíproco $q \Rightarrow p$, o bien, el directo y el contrario $p' \Rightarrow q'$.*

Hemos visto la *equivalencia* del directo $p \Rightarrow q$ y el contrarrecíproco $q' \Rightarrow p'$. Esto permite ver que, si tras una serie de argumentos válidos se llega a partir de p, que suponemos es una verdad admitida tras un experimento a q, y esta q nos parece falsa tras un experimento de observación, podemos utilizar $q' \Rightarrow p'$ y rechazar p. Este tipo de rechazo de una hipótesis p se ha llamado por Popper *falsación* de la hipótesis.

3.8. Inferencia lógica

Una de las más importantes aplicaciones de la lógica simbólica es el análisis crítico de los procesos de razonamiento en Matemáticas y, en general, en las ciencias deductivas. Como ya se ha indicado, los teoremas que se demuestran en Matemáticas no son verdades absolutas, sino simplemente consecuencias lógicas obtenidas a partir de los axiomas iniciales y definiciones introducidas y términos no definidos (como conjunto, elemento,. etc.). Por ejemplo, cuando demostramos el teorema de Pitágoras, lo que hacemos es deducirlo por razonamientos lógicos de los axiomas de la Geometría euclídea; pero tal teorema no vale para los triángulos esféricos o para triángulos definidos sobre la superficie de un elipsoide, superficies en que no son aceptables los axiomas de la geometría del plano euclídeo.

Vamos, pues, a iniciar el análisis del contenido lógico de los razonamientos que corrientemente utilizamos al pasar de unas ciertas proposiciones iniciales a otras proposiciones finales. Tales procesos se llaman de *inferencia lógica*.

3.9. Argumentos válidos y no válidos

Consideramos el siguiente conjunto de dos proposiciones:

p = «está lloviendo»; q = «llevo impermeable»

Formemos este nuevo conjunto de dos proposiciones:

$(p \to q, q)$ = («si está lloviendo entonces llevo impermeable», «llevo impermeable».)

Es claro, intuitivamente, que la verdad de una y otra no implica la verdad de p = «está lloviendo»; pues puede ser que lleve impermeable y no esté lloviendo.

Se observa en la tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

que las propiedades $p \to q$ y q son simultáneamente verdaderas en la línea 3; pero p es en ella falsa. Vemos así que el que sea cada uno de los elementos del conjunto de proposiciones $(p \to q, q)$ verdadero no implica que p sea verdadera. Esto es lo que se llama un *argumento falaz* o una *falacia*.

En general, diremos que un *argumento* es una afirmación de que un conjunto de proposiciones (simples o no)

$$P_1, P_2, \ldots P_n$$

llamadas *premisas* o *hipótesis*, dan como consecuencia otra proposición, llamada *conclusión*. Si la implicación tiene lugar, el argumento se llama válido, sino se llama *no válido o falaz*.

Ejemplo 1

La ley del silogismo: es una especie de transitividad de la implicación:

«Si $p \to q$ y $q \to r$, entonces $p \to r$»

Se puede poner en forma de argumento:

$$(p \to q, q \to r), (p \to r)$$

Como hemos visto, esto equivale a probar que la proposición:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

es una tautología.

Resulta como consecuencia inmediata de la tabla de verdad

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to r)]$	$\to$	$(p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V
			1	3	2	↑	4
						5	

El esquema numérico indica el orden en que se van obteniendo las columnas de la tabla de verdad.

Por ejemplo. Si está lloviendo, entonces llevo paraguas, si llevo paraguas, entonces me pongo impermeable. Por consiguiente, si está lloviendo, entonces me pongo impermeable.

Es corriente disponer el argumento en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

en que aparecen en la parte superior las premisas y debajo de una raya la conclusión.

El argumento del ejemplo se escribirá:
Si está lloviendo, entonces llevo paraguas.
Si llevo paraguas, entonces me pongo impermeable.
Si está lloviendo, entonces me pongo impermeable.

Ejemplo 2

Consideremos nuevamente el ejemplo del principio **[3.2]** en que aparecen las siguientes proposiciones simples:

p = El curso de Lógica es importante.
q = El curso de Lógica es fácil.
r = El curso de Lógica es conveniente hacerlo.

que traducido al lenguaje corriente es, a partir de las premisas:

a) Si el curso de Lógica es importante, vale la pena seguirlo.
b) El curso de Lógica es fácil o no vale la pena seguirlo.
c) El curso de Lógica no es fácil.

Intentar probar verbalmente qué consecuencia de estas tres premisas es que el curso de Lógica no es importante.

Técnicamente el problema se plantea en forma de *argumento*, así:

$$\begin{array}{ll} \text{Premisas} & \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & p \to r \\ \text{b)} & q \vee r' \\ \text{c)} & q' \end{array}\right. \\ \hline \text{Conclusión} & \qquad p' \end{array}$$

O bien: $[(p \to r) \wedge (q \vee r') \wedge q'] \to p'$

Y para comprobar que es un argumento válido se forma la tabla de verdad:

q	p	r	r'	$p \to r$	$q \vee r'$	q'	$a \wedge b \wedge c$	p'	$(a \wedge b \wedge c) \to p'$
V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V

3.10. Cadenas de argumentos

El silogismo es un caso particular de lo que vamos a llamar *cadena de argumentos*, es decir, un argumento cuyas premisas o hipótesis son condicionales y la conclusión es también una condicional, de modo que:

a) El consecuente de cada hipótesis coincide con el antecedente de la siguiente; b) el antecedente de la conclusión es el antecedente de la primera hipótesis y el consecuente de la conclusión coincide con el de la última hipótesis.

Brevemente,

$$[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \ldots \wedge (s \to t)] \Rightarrow [p \to t]$$

Se puede demostrar que un argumento en cadena es un argumento válido. Basta reiterar la demostración de la regla del silogismo.

Otro procedimiento para demostrar que una condicional es una tautología es simplemente hacer operaciones de acuerdo con las indicaciones de **[3.6]** hasta llegar a que el valor $\vee$ es el que tiene en todo caso la proposición compuesta considerada.

El método de las tablas de verdad permite demostrar también que, *dada una proposición compuesta de un número finito de proposiciones simples y un número finito de conectivos se puede decidir mediante un número finito de pasos si es o no una tautología.*

Es una consecuencia fácil de que si el número de proposiciones simples que entran en *n*, el número de valores distintos a ensayar en la tabla de verdad será 2^n.

3.11. Formalización de las teorías y modelos

La exposición de una teoría o modelo de modo que cada teorema de la misma aparezca como un axioma o como consecuencia de una sucesión finita de las reglas de inferencia lógica (que aquí no se han expuesto completamente), se llama una *formalización de la teoría* (también se dice sistema formalizado, modelo formalizado, etc.).

En tiempos recientes esta tendencia no se limita a las Matemáticas sino a ciencias (o capítulos de las mismas) como la Biología, Física, Economía, Sociología, etc., como comprobaremos a través de la lectura de este libro.

3.12. Predicados o funciones proposicionales

El cálculo de proposiciones resulta insuficiente para muchas teorías matemáticas, al no tener en cuenta la estructura de las proposiciones simples.

P.e., si consideramos el razonamiento «cada rombo es un paralelogramo, MNPQ es un rombo, luego MNPQ es un paralelogramo», se observa que podemos dar dos interpretaciones:

1.ª que el rombo posee la propiedad de ser un paralelogramo;
2.ª que el conjunto de los rombos está contenido en el conjunto de los paralelogramos.

Dentro de la lógica tradicional el «sujeto» de la proposición es «rombo» y el predicado es «paralelogramo» y esta proposición expresa una propiedad de un objeto; pero hay proposiciones que expresan una relación entre objetos. P.e., la proposición elemental «el número 4 es menor que el número 5», ya no se puede poner en la forma «S es P».

Veamos algo del *cálculo de predicados*, que resuelve estas dificultades.

Si consideramos la frase declarativa:

«El entero x es mayor que 5»

vemos que tiene la novedad de contener un símbolo x y que mientras

no se dé un valor a dicho símbolo no se convierte en una *proposición*. P.e., si damos a x el valor 7 se convierte en una proposición que es verdadera y si le damos el valor 5 se convierte en una proposición que es falsa.

Una *función proposicional* o *proposición abierta* o *predicado* es una frase declarativa en que entran uno o más símbolos que al sustituirlos por elementos específicos de un cierto conjunto se convierte en una proposición.

El *universo* del discurso es el conjunto en que pueden tomar valores los símbolos que entran en la función proposicional.

Se suele denotar por $P(x)$ una función proposicional que depende de una variable x. En el caso de varias variables, se escribe $P(x, y,..., t)$. Puesto que al fijar los valores de (x, y,..., t) obtenemos una proposición, el cálculo de proposiciones se generaliza a predicados.

En Matemáticas muchas funciones proposicionales contienen palabras como «todo», «alguno», «ninguno».

Los símbolos que se utilizan para representarlas se llaman «*cuantificadores*».

Una función proposicional de una variable $P(x)$ se puede verificar para *todos* los valores de x, lo que se indica poniendo:

$$(\forall x) : P(x)$$

y se lee: «para todo x, $P(x)$ es verdadera»; o bien puede verificarse para *algún* x, lo que se indica poniendo:

$$(\exists x) : P(x)$$

y se lee «existe algún x, para el que $P(x)$ es verdadera».

El primero se llama *cuantificador universal* y el segundo *existencial*.

Una función proposicional que *no se verifica para ningún valor de* x se puede escribir:

$$no\ [(\exists x) : P(x)]$$

P.e.: 1.º) Si escribimos

$$(\forall x \in R) : (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

queremos decir que la igualdad se verifica para todo x real y es, por tanto, una *identidad*.

2.º) Si escribimos

$$(\exists x \in R) : x - 3 = 0$$

queremos decir que existe un número real (que es $x = 3$), que verifica la *ecuación*.

La justificación del cálculo con cuantificadores, que es fundamental en Matemáticas, es una parte de la Lógica, más difícil que la hasta aquí expuesta.

3.13. Matemática, Lógica y Heurística

Lo dicho en este capítulo tiende a convencernos de que muchos razonamientos matemáticos se reducen en su esencia a formas extremadamente sencillas y que el cálculo con proposiciones, aquí solamente iniciado, puede permitir establecer las cadenas de razonamientos en una forma que evita al máximo la presentación de errores de razonamiento.

Esto pone de manifiesto la importancia del razonamiento lógico en la exposición de la Matemática. Pero no hay que olvidar que tanto en la Matemática, como en las Ciencias y en la vida diaria, el razonamiento lógico no es la única actividad intelectual importante. En efecto, sin observación, experimentación, intuición y creatividad, de poco serviría la lógica.

Cuando se plantea un problema hay que comenzar por intuir lo que se quiere probar y formar un esquema de la manera de demostrar el resultado intuido o creado. Se utiliza, a veces, la palabra «Heurística» para designar estos procesos mentales complejos, que preceden al establecimiento de teorías matemáticas en forma de cadenas deductivas.

3.14. La noción de conjunto

La *idea intuitiva de conjunto*, patrimonio de las más antiguas civilizaciones, viene de la consideración de tribus o familias humanas, rebaños de animales o colecciones de objetos. La novedad de esta noción está en considerar la reunión de objetos como una *nueva entidad en sí*, independientemente de los objetos o elementos que la forman.

El matemático alemán Cantor (1845-1918) es el creador de la teoría de conjuntos, que hoy constituye una base preliminar a cualquier otra teoría matemática y que ha influido de modo decisivo en el desarrollo de toda la matemática actual. Definía Cantor un conjunto como «la reunión en un todo de objetos reales o pensados, bien determinados y diferenciables los unos de los otros».

Aparte de su interés por estar en la raíz y punto de partida de toda la Matemática, la teoría de conjuntos presenta un interés para el hombre culto por su íntima relación con la teoría de proposiciones de la lógica, que, como hemos visto, es la base de nuestros razonamientos y de las frases más corrientes y sencillas de nuestro lenguaje de seres racionales. También se encuentra en una relación análoga con el punto de partida del Cálculo de Probabilidades, que, como se sabe, es la base de la Estadística y Teoría de la decisión, de aplicación constante en todas las situaciones en que se han de tomar decisiones con información incompleta como ocurre continuamente en la vida real, en el ámbito de los negocios, en las ciencias de experimentación (Biología, Física, etc.) o de observación (ciencias económicas, sociales, etc.).

Partamos del siguiente problema:

En un aula de 500 alumnos, se dijo que 400 eran aficionados al fútbol, 200 a los toros y 75 a ambos espectáculos.

A primera vista, esto no es imposible, pero veremos cómo es necesario introducir nociones precisas para llegar a una solución correcta.

He aquí varios ejemplos de conjuntos:

1) Los vocales del abecedario.
2) (a, b, c, d, e).
3) Los dígitos pares.
4) $(2, 4, 6, 8, \ldots)$
5) El conjunto de números impares.

Como se ve en estos ejemplos, hay dos maneras de *definir* un conjunto particular:

1.° *Por extensión, enumeración* o *lista* de cada uno de los elementos que lo forman. Así se ha hecho en los ejemplos 2 y 4.
2.° *Por comprensión, descripción* o *regla*, dando una propiedad que sea verificada por todos los elementos del conjunto y sólo por ellos. Así se ha hecho en los ejemplos 1, 3 y 5.

Para nosotros, *conjunto* es un concepto primitivo, que no definimos y que representamos por un símbolo (generalmente por una letra mayúscula).

Asimismo, *elemento de un conjunto* será otro concepto primitivo.

Si A es un conjunto y a es uno de sus elementos escribiremos $a \in A$, que se leerá «*a pertenece a A*» y se llama *relación de pertenencia*. La relación de *no pertenencia* se escribe $a \notin A$.

Si P es la *propiedad característica* que hemos utilizado para definir un conjunto particular, escribiremos el conjunto con la notación:

$$A = \{x/x \text{ es } P\}$$

que se lee: A es el conjunto de los elementos x, tales que x tiene la propiedad P. Se puede escribir también en forma de proposición: $P = (x \in A)$. Así vemos la relación evidente entre *proposiciones* y *conjuntos*.

P.e., si consideramos el conjunto A de las vocales, que podemos escribir: $A = \{a, e, i, o, u\}$, tendremos la proposición $P = x$ es vocal, o bien $A = \{x/x \text{ es } P\}$.

Frecuentemente utilizaremos para representar un conjunto, un recinto del plano limitado por una curva y todos los puntos del mismo representarán elementos del conjunto (fig. 12a).

Otras veces sólo algunos puntos especialmente dibujados e interiores al recinto representan los elementos del conjunto (fig. 12b). Tales representaciones, que ayudan a seguir intuitivamente los razonamientos, se llaman *diagramas de Venn* o *de Euler*.

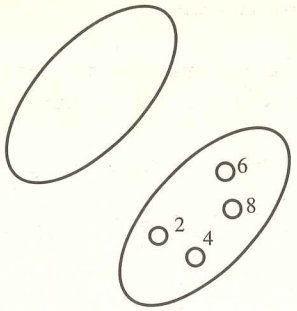


FIGURA 12 a, b

Es corriente decir, p.e., que el conjunto de los números pares es una parte o subconjunto del de los enteros.

Se dice que *A está contenido en B* o que *A es parte o subconjunto de B* y se escribe $A \subset B$, si para todo elemento $a \in A$, se verifica que $a \in B$.

También se escribe $B \supset A$ (*B contiene a A*).

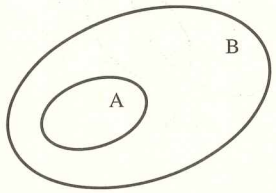


FIGURA 13

Si se verifica simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$, se dice que «*A es igual o coincide con B*» y se escribe $A = B$. La negación de esta relación se enuncia: «existe en uno de los dos conjuntos un elemento no perteneciente al otro» y se dice entonces que A no es igual a B y se escribe $A \neq B$.

3.15. Operaciones con conjuntos

Las reglas de operación expuestas para proposiciones se relacionan fácilmente con las de la teoría de conjuntos, que se explica actualmente desde la E.G.B.

Podemos definir la *unión de conjuntos* (fig. 14a):

$$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

la *intersección* (fig. 14b):

$$A \cap B = x; (x \in A) \wedge (x \in b)\}$$

y el *complementario* (fig. 14c):

$$\bar{A} = \{x; x \notin A\}$$

Para dar una representación intuitiva de las relaciones indicadas utilizamos el diagrama de Venn, en que los conjuntos resultados de las operaciones se representan por recintos rayados.

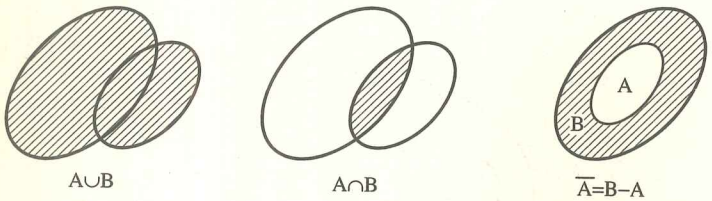


FIGURA 14, a, b, c

3.16. Álgebra de Boole abstracta

Una serie de propiedades de las operaciones de unión, intersección y complementario se demuestran fácilmente:

Destaquemos las siguientes:

1. *Propiedades conmutativas.*
   a) $A \cup B = B \cup A$
   b) $A \cap B = B \cap A$
2. *Propiedades distributivas.*
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. *Propiedad de complementariedad.*
   a) $A \cup \bar{A} = V$
   b) $A \cap \bar{A} = \phi$
4. *Propiedades de identidad.*
   a) $\bar{A} \cup \phi = A$
   b) $A \cap V = A$

Podemos dar ahora la siguiente definición: *Un sistema de entes abstractos cualquiera A, B, C,..., V, ϕ en que se han definido las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ y la operación unitaria $\bar{A}$, respecto de las cuales es cerrado, es decir, se pueden realizar obteniéndose siempre elementos del sistema, y que tienen las propiedades 1, 2, 3 y 4 se llama un álgebra de Boole.*

Su teoría es el conjunto de teoremas y propiedades que se pueden obtener por razonamientos lógicos a partir de estos axiomas, sin que se utilice para nada la naturaleza de los elementos *A, B,...*, que pueden no ser conjuntos. De este modo se tiene una teoría axiomática del álgebra de Boole.

Teniendo en cuenta las relaciones que ya vimos entre circuitos con conmutadores y proposiciones, podemos resumir las relaciones entre operaciones en estos campos en el siguiente cuadro:

Lenguaje común	Circuitos	Proposiciones	Conjuntos
ó	+	$\vee$	$\cup$
y	·	$\wedge$	$\cap$
no	'	'	–
	Tabla de respuesta	Tabla de verdad	Tabla de pertenencia
	Leyes de Boole	Leyes de Boole	Leyes de Boole

Ejemplos

Volvamos al ejemplo planteado al comienzo de esta parte de conjuntos [14]:

1) En un aula de 500 alumnos, se dijo que 400 eran aficionados al fútbol, 200 a los toros y 75 a ambas diversiones.

Si llamamos A al conjunto de los aficionados al fútbol y B al conjunto de los aficionados a los toros, el conjunto de los que tienen ambas aficiones es $A \cap B$. Los conjuntos finales son:

$$A \cap \bar{B} = A \cap (V - B) = A - A \cap B$$
$$\bar{A} \cap B = (V - A) \cap B = B - A \cap B$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = (V - A) \cap (V - B) = V - A - B + A \cap B$$

Si se calculan los cardinales de estos conjuntos se obtiene respectivamente 325, 125 y – 25. Este último número indica la inconsistencia de los datos, que aún en un ejemplo tan sencillo no es trivial.

2) *Grupos sanguíneos. Partición en regiones*

Los individuos de una cierta población son examinados para ver si su sangre presenta uno o más de los antígenos A, B y Rh. Designemos la población como conjunto universal por V y los subconjuntos de individuos que poseen los antígenos A, B y Rh por X, Y y Z.

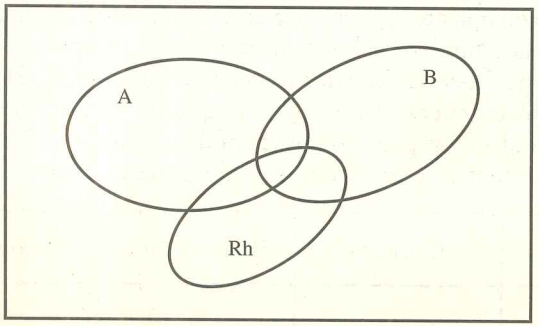


FIGURA 15

Más precisamente:

$X = \{x \in V / x$ tiene el antígeno A$\}$
$Y = \{x \in V / x$ tiene el antígeno B$\}$
$Z = \{x \in V / x$ tiene el antígeno Rh$\}$

Tenemos así los siguientes 8 subconjuntos posibles (con la nomenclatura biomédica usual al lado):

1) $X \cap Y \cap Z$ = tipo (AB, Rh^+).
2) $X \cap Y \cap \bar{Z}$ = tipo (AB, Rh^-).
3) $X \cap \bar{Y} \cap Z$ = tipo (A, Rh^+).
4) $X \cap \bar{Y} \cap \bar{Z}$ = tipo (A, Rh^-).
5) $\bar{X} \cap Y \cap Z$ = tipo (B, Rh^+).
6) $\bar{X} \cap Y \cap \bar{Z}$ = tipo (B, Rh^-).
7) $\bar{X} \cap \bar{Y} \cap Z$ = tipo (0, Rh^+).
8) $\bar{X} \cap \bar{Y} \cap \bar{Z}$ = tipo (0, Rh^-).

Como se ve, la notación biomédica corresponde a que AB es la intersección, 0 la ausencia de ambos, A la ausencia de B, B la de A, Rh^+ la presencia de Rh y Rh^- la ausencia de Rh.

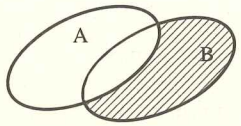
3) *Tablas de pertenencia*

Se trata de formar tablas en que se ve, según que un elemento pertenezca a no a los conjuntos que componen una operación, que se puede decir de la pertenencia al conjunto-resultado de la operación. Como consecuencia de la descomposición anterior en regiones o bien como consecuencia directa de la definición, tenemos las siguientes tablas:

A	B	$\bar{A}$	$A \cup B$	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

es decir, p.e., si $x \in A$, $x \in B$, $x \in A \cup B$, etc.

La tabla de otro conjunto cualquiera formado mediante las operaciones anteriores se forma fácilmente a partir de las tablas precedentes.



$\bar{A} \cap B$

FIGURA 16

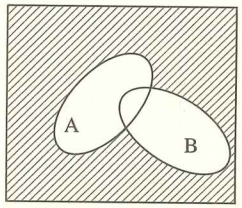
A	B	$\bar{A}$	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$

Para probar que dos conjuntos son iguales basta formar sus respectivas tablas de pertenencia y ver si coinciden; pues en definitiva esto quiere decir que las mismas regiones de partición pertenecen a uno y otro conjunto.

Como ejemplo demostremos la ley de Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

A	B	$\bar{A} \cup B$	$\overline{(A \cup B)}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$



$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

FIGURA 17

4) *Número de elementos de la unión*

Si suponemos que los conjuntos que consideramos son finitos y $n\ (A)$ representa el *cardinal o número de elementos de A*, se tiene $n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B)$ ya que al contar los puntos de $A \cup B$ contamos una sola vez los que pertenecen a $A \cap B$.

En la figura 18 se comprueba:

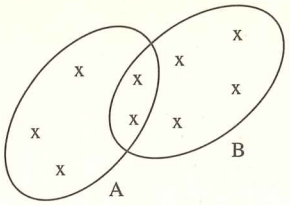


FIGURA 18

Ejemplo

$$n\ (A) = 5,\ n\ (B) = 6$$
$$n\ (A \cap B) = 2,$$
$$n\ (A \cup B) = 9 = 5 + 6 - 2$$

En el caso particular de que los conjuntos sean disjuntos $A \cap B = \phi$, queda la fórmula más sencilla

$$n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B)$$

Por dos aplicaciones se obtiene la fórmula

$$n\ (A \cup B \cup C) = n\ (A) + n(B) + n\ (C) - n\ (A \cap B) - n\ (A \cap C) - n\ (B \cap C) + \\ + n\ (A \cap B \cap C)$$

y análogamente para h conjuntos.

5) *Problema de palabras*

Una encuesta realizada entre 100 individuos para conocer las preferencias por los helados dio el siguiente resultado: Sea F el conjunto de los individuos que les gusta el sabor a fresa, B el de los que les gusta la vainilla, L el de los que les gusta el limón, y sea

$$n\ (F) = 42,\ n\ (B) = 48,\ n(L) = 41$$
$$n\ (F \cap B) = 15,\ n\ (F \cap L) = 17,\ n\ (B \cap L) = 18,\ n\ (F \cap B \cap M) = 10$$

Determinar el número de individuos a los que no les gusta ninguno de los tres sabores.

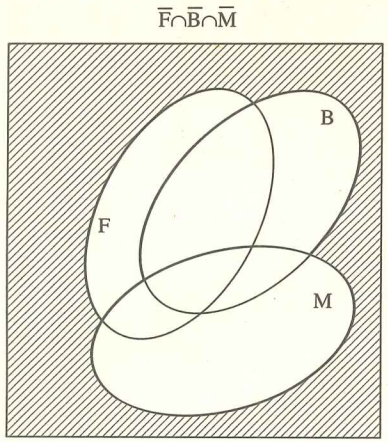


FIGURA 19

Se tiene $\overline{(F \cap B \cap M)} = F \cup B \cup M$, o bien

$$(\bar{F} \cap \bar{B} \cap \bar{M}) = \overline{F \cup B \cup M}$$

luego

$$N(\bar{F} \cap B \cap \bar{M}) = 100 - N(F \cup B \cup M) =$$
$$= 100 - [N(F) + N(B) + N(M) - N(F \cap B) - N(F \cap M) -$$
$$- N(B \cap M) + N(F \cap B \cap M)] =$$
$$= 100 - (42 + 48 + 41 - 15 - 17 - 18 + 10) = 9$$

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.3.1. Probar que la fórmula del circuito de la figura 20 es $(X + Y) \cdot (X + Z)$ Simplificarlo, previa la simplificación de la fórmula.

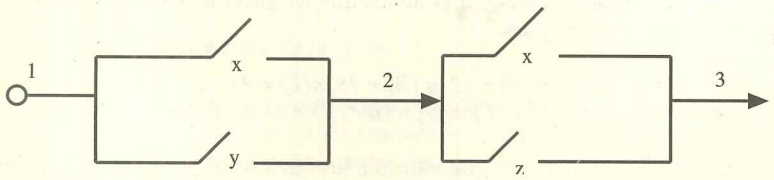


FIGURA 20

E.3.2. Circuito de luz de sótano

Diseñar un circuito que dé luz en el sótano de una casa, de modo que pueda ser encendida mediante cada uno de tres conmutadores: uno en lo alto de la escalera, otro a la entrada del sótano y otro en el piso bajo.

E.3.3. Diseñar un circuito para encender las luces de un gran salón mediante una cualquiera de las cuatro llaves situadas cada una en una pared.

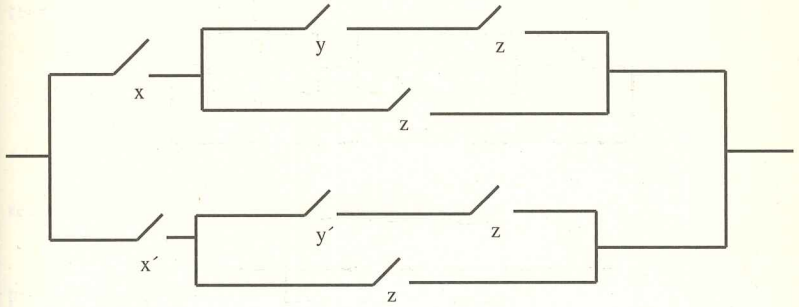


FIGURA 21

E.3.4. Construir la fórmula y simplificar el circuito de la figura 21. Indicación: la fórmula simplificada es

$X \cdot Y + X' \cdot Y' + Z$, y su circuito es figura 22

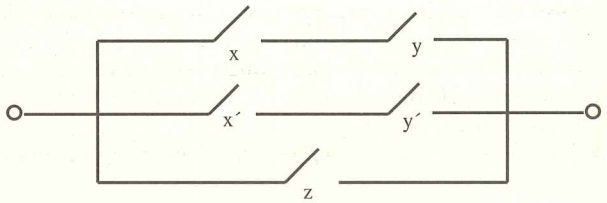


FIGURA 22

E.3.5. Obtener la fórmula de cada uno de los tres circuitos siguientes (fig. 23). Simplificar estas fórmulas mediante tablas de respuesta, representar los nuevos circuitos y observar la economía de conmutadores.

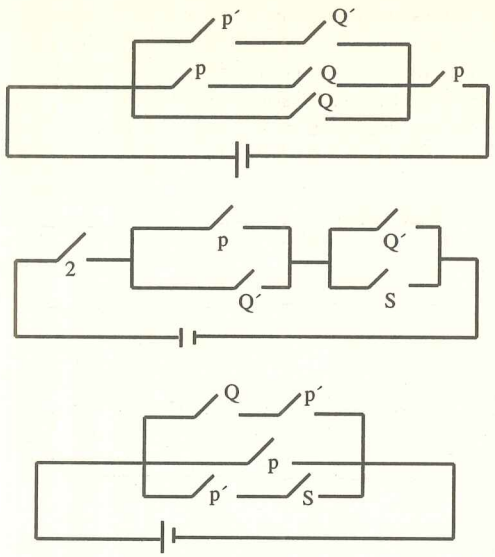


FIGURA 23 a, b, c

E.3.6. Proposiciones consistentes e independientes

Conceptos útiles para simplificar algunos problemas son los de *proposiciones consistentes* y *proposiciones independientes*.

Dos proposiciones se dicen *consistentes* si, al formar sus tablas de verdad, se obtiene algún caso en que ambas sean simultáneamente verdaderas.

P.e., si consideramos las dos proposiciones: «está lloviendo y no es verdad que lleve impermeable o paraguas» y «aunque está lloviendo, yo no llevo impermeable o paraguas».

Estas proposiciones se pueden expresar mediante proposiciones elementales así:

$$p \wedge (q \vee s)' \,;\, p \wedge (q' \vee s')$$

Es fácil formar la tabla de verdad de ambas y comprobar que:

p	q	s	$p \wedge (q \vee s)'$	$p \wedge (q' \vee s')$
V	F	F	V	V

y para los restantes no se verifica. Esto basta para decir que son consistentes.

Dos proposiciones se dicen *independientes* si es posible que ambas sean verdaderas simultáneamente, que para algún valor cada una sea verdadera y la otra falsa, y que para algún valor ambas sean falsas.

Es consecuencia de las definiciones anteriores que la relación de independencia implica la consistencia y la inconsistencia implica la dependencia.

Determinar si cada uno de los siguientes pares de proposiciones es consistente o no:

a) $p \wedge q$ y $p \vee q$
b) $p' \wedge q$ y $p \vee q'$
c) $p \vee (q' \wedge s)$ y $p' \wedge (q \vee s')$.

E.3.7. Determinar si cada uno de los pares anteriores son independientes o dependientes.

E.3.8. Dada una tabla de verdad, formar una proposición que corresponda a tal tabla de verdad es un problema análogo al de: dada una tabla de respuestas formar el circuito correspondiente y también al problema de: dada una tabla de pertenencia obtener el correspondiente conjunto. Con lenguaje de conjuntos: la idea es formar la unión de aquellas regiones que tienen $\in$ en la correspondiente fila de la tabla de pertenencia, y cada región es la intersección de los subconjuntos básicos y/o sus complementos y, correlativamente, en proposiciones y circuitos.

E.3.9. Determinar una proposición compuesta de p y q cuya tabla de verdad sea:

Posib.	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Propos.
V
F
F
V

Conjunción
$p \wedge q$
$p \wedge q'$
$p' \wedge q$
$p' \wedge q'$

Al lado de la tabla de verdad se han puesto las conjunciones que corresponden a los valores de verdad fijados: así $p \wedge q$ es verdadera sólo en la «posibilidad 1», etc...

Además, como la tabla de verdad de la proposición que se busca sólo tiene V en la primera y cuarta filas, la fórmula buscada será la disjunción de éstas, es decir:

$$(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')$$

Conviene observar que si hay menos F que V (lo que no ocurre en este caso) se puede buscar una solución alternativa por la disjunción de las que son F. En este caso sería:

$$[(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)]'$$

E.3.10. Indulto del prisionero

Se sitúa a un prisionero en una celda con dos puertas. Sabe que si trata de salir por una puerta quedará libre y por la otra será fusilado. En cada puerta hay un guardián, uno de los cuales siempre miente, mientras el otro siempre dice la verdad. Tampoco conoce el prisionero cuál es el mentiroso. Se le permite al prisionero hacer a un solo guardián una sóla pregunta que consiste en dos partes: una relativa a la puerta y otra a la calidad del guardián. ¿Cuál debe ser la pregunta y cuál la interpretación de la respuesta?

(Indicación: construir una tabla de verdad y llegar a la pregunta «¿conduce la puerta 1 a la muerte y Vds. no son ambos mentirosos?».)

E.3.11. Para que la gente sea feliz

El economista W ha declarado que «para que la gente esté feliz es necesario tener inflación».

Cuando se le preguntó a W el porqué de su afirmación, contestó que se fundaba en tres hechos:

a) o los precios permanecen estables o habrá inflación.

b) es imposible que los precios permanezcan estables y al mismo tiempo permitir que los salarios suban.

c) pero, o permitimos los salarios crecer, o la gente no estará feliz.

Suponiendo verdaderos estos tres hechos, ¿está Vd. de acuerdo con la declaración del economista W?

Es análogo al ejemplo 2 de **3.9**.

E.3.12. Álgebra de propiedades de objetos

Otra aplicación del álgebra de Boole (aplicación que algunas veces se confunde con el álgebra de proposiciones) es el *álgebra de propiedades de objetos*.

Se refiere a enunciados como: «este traje es azul», «el hierro es pesado», etc. Si fijamos un conjunto universal U y llamamos $S(p)$ el conjunto de los objetos de U que tienen la propiedad p, se tiene:

$$S(p \vee q) = S(p) \cup S(q)$$
$$S(p \wedge q) = S(p) \cap S(q)$$
$$S(p') = S(p)$$

Esto es suficiente como punto de partida, para demostrar fácilmente que

también el álgebra de Boole es un modelo matemático para el álgebra de propiedades de objetos.

E.3.13. Paradoja de Russell. ¿Está bien definido el «catálogo» de todos los catálogos de libros españoles?

Indicación. No, porque si existiera, aún cabría formar otro nuevo catálogo que contuviera además aquél, etc. Se trata de la llamada *paradoja de Russell*. Este mismo tipo de contradicción se presenta en «el conjunto de todos los conjuntos». Por esto se parte del llamado conjunto universal, para definir las operaciones con sus subconjuntos.

E.3.14. Hemos definido una lógica en que las proposiciones elementales sólo tienen dos valores: verdadero o falso. Supongamos que consideramos la posibilidad de tres valores: verdadero, falso e indeciso. Formar tablas de verdad para proposiciones compuestas.

E.3.15. Determinar la validez del siguiente argumento:

Premisa 1.ª. Si el sol brilla, no está lloviendo.
Premisa 2.ª. El sol no brilla.
Conclusión. Está lloviendo.

E.3.16. Partición en regiones

Si consideramos dos subconjuntos A, B de V, tenemos los siguientes conjuntos disjuntos (fig. 24):

$$R_1 = A \cap B$$
$$R_2 = A \cap \bar{B}$$
$$R_3 = \bar{A} \cap B$$
$$R_4 = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Además $V = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, es decir, que estas cuatro regiones forman una partición de V.

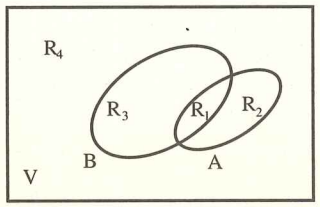


FIGURA 24

Análogamente, si se parte de 3 conjuntos A, B, C, se obtiene una partición de V en $2^2 = 8$ regiones y, en general, si se parte de n conjuntos, se obtiene una partición de V en 2^n regiones, que también se llaman *conjuntos finales*.

Dados n conjuntos A, B, C,..., contenidos en V, se llaman *conjuntos positivos* los que se obtienen como intersecciones de 2, de 3,..., de n, y además los A, B, C,..., M y el V. Son en total:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

Por ejemplo: Si $n = 3$, tenemos A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$ y V.

Se demuestra que los cardinales de los 2^n positivos de A, B, C,..., M se pueden calcular algebraicamente a partir de los cardinales de los conjuntos finales de A, B, C, ..., M, y viceversa.

Si siguiendo varios criterios, damos varias clasificaciones dicotómicas A, $\bar{A}$, de un conjunto V, podemos calcular los cardinales de los conjuntos finales, y si alguno es negativo, esto indica contradicción en los datos.

E.3.17. Mediante el diagrama de Venn de la figura 25, identificar cada una de las 16 regiones que aparecen.

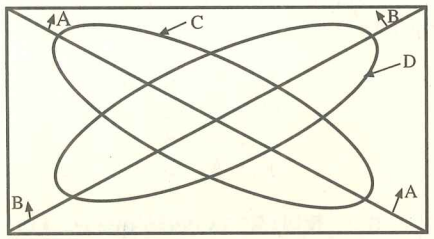


FIGURA 25

E.3.18. Profundizar en las analogías entre circuitos, conjuntos y proposiciones. P.e., los análogos de conjunto universal y conjunto vacío; las analogías de implicación, equivalencia, etc.

E.3.19. Álgebra binaria

Se suele llamar *Álgebra binaria de Boole* o *álgebra lógica*, el modo de operar con los símbolos 0 y 1 que hemos visto en el álgebra de circuitos y que se resume en las siguientes *tablas de Boole*.

Suma lógica		
+	0	1
0	0	1
1	1	1

Producto lógico		
·	0	1
0	0	0
1	0	1

Complementación	
0	1
1	1

La tabla de la suma lógica es la que se presenta, de modo natural, p.ej., en Genética, cuando se cruzan dos caracteres, uno dominante y otro recesivo. Así si se unen dos genes, uno correspondiente a ojos azules (recesivo) y otro a ojos negros (dominante) tenemos la siguiente tabla de descendientes

+	azul	negro
azul	azul	negro
negro	negro	negro

es decir, obtendremos descendientes en una proporción de tres con ojos negros a uno con ojos azules.

E.3.20. Numeración binaria y ordenadores

Actualmente es importante el sistema binario, pues permite utilizar circuitos de conmutación para realizar las operaciones con números en el sistema binario. Esta es una de las explicaciones de por qué funcionan los ordenadores como máquinas aritméticas. Aunque es largo de explicar con todos los detalles hacemos alguna indicación.

Las tablas de sumar y multiplicar en el sistema de numeración binario son:

Suma		
+	0	1
0	0	1
1	1	10

Producto		
·	0	1
0	0	1
1	0	1

Como se ve, sólo hay discrepancia en la suma 1 + 1 = 10, que, en la suma de Boole, vimos que era 1 + 1 = 1.

Es interesante comprobar para convencerse de la posibilidad de realizar sumas con los circuitos lógicos, que el circuito

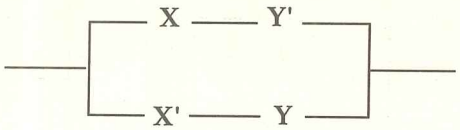


FIGURA 26

nos realiza la operación de suma en el sistema binario. Se ve que $Z = X\,Y' + X'\,Y$ nos da el resultado en los cuatro casos posibles:

$$0 + 0 = 0,\ 1 + 0 = 1,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 10$$

Los tres primeros son inmediatos y también en el cuarto se comprueba inmediatamente que si

$$X = 1,\ Y = 1,\ \text{es } Z = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

con lo que se ve que basta que haya un mecanismo que transporte el 1 de 10

EULER (1707-1783)

El matemático más prolífico de la historia: 80 grandes volúmenes de contribuciones importantes.

4. ORGANIZACIÓN, COMUNICACIÓN, GRAFOS, ALGORITMOS

«Mas por lo mismo que es imposible conocer directamente la plenitud de lo real, no tenemos más remedio que construir una realidad, suponer que las cosas son de una cierta manera. Esto nos proporciona un esquema, es decir, un concepto o enrejado de conceptos. Con él, como a través de una cuadrícula, miramos luego la efectiva realidad y, entonces, sólo entonces, conseguiremos una visión aproximada de ella. En esto consiste el método científico.»

ORTEGA Y GASSET

4.1. El problema del cartero chino y los servicios públicos

Como ya vimos al estudiar el problema de los puentes de Koenigsberg **[1.6]** el concepto matemático de *grafo* resulta por abstracción a partir de realidades como el mapa de carreteras o ferrocarriles de un país, el esquema de los cables de un aparato electrodoméstico, una red de comunicaciones telefónicas, o de rutas aéreas...

Muchos problemas de servicios públicos, como recogida de basuras, reparto de cartas y paquetes, etc., se suelen llamar del *cartero chino* y tratan de hacer mínimo el camino necesario para el reparto a través de un grafo de calles. Si no se resuelve este problema para un cierto servicio, se repiten «recorridos muertos» y el coste se multiplica inútilmente. Se cita el ejemplo de una aplicación de la metodología de grafos en Israel que permitió economizar el 40% en el coste de lectura de contadores eléctricos.

Tales problemas pueden resolverse encontrando un circuito euleriano **[1.6]**, cuando existe.

En virtud del teorema visto, el grafo de la figura 1 (que permite representar el retículo de calles de la figura 2) al ser conexo y tener valencias 2 ó 4 en todos los vértices, tiene un circuito euleriano, que

vamos a determinar. La idea general es: partimos de un vértice y vamos siguiendo aristas sin duplicar ninguna hasta volver al punto de partida, recorriendo el máximo posible de las mismas. Si no hemos logrado un circuito euleriano, partimos nuevamente de un vértice y recorremos un nuevo circuito, etc. Más concretamente en el grafo de la figura 3:

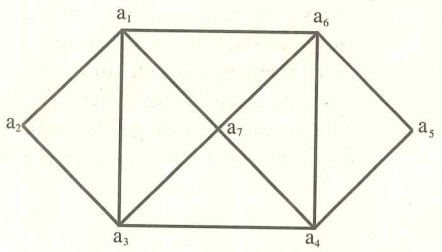


FIGURA 1

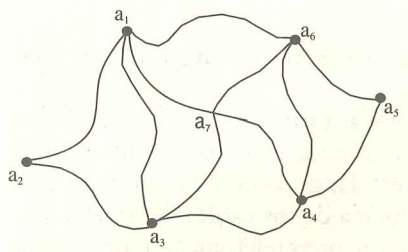


FIGURA 2

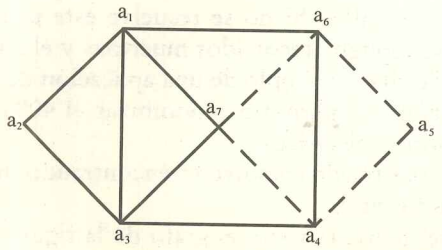


FIGURA3

1.° Elegimos a_1.

2.° Engendramos un circuito euleriano (parcial) $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_6\, a_1\, a_7\, a_3\, a_1$.

3.° Como el circuito es parcial pasamos a

4.° Elegimos un vértice a_5 no perteneciente al anterior circuito.

5.° Formamos un nuevo circuito $a_5\, a_6\, a_7\, a_4\, a_5$.

6.° Reunimos los dos circuitos en uno euleriano, mediante intercalación oportuna del 2.° en el 1.°:

$$\begin{array}{c} a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_6\, a_1\, a_7\, a_3\, a_1 \\ \downarrow \\ a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_4 \\ \hline = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_4\, a_6\, a_1\, a_7\, a_3\, a_1 \end{array}$$

A veces no existe el circuito euleriano, como vimos en el problema de los puentes de Koenigsberg y el *problema del cartero chino* es *encontrar un camino que cubra todas las aristas del grafo, con el mínimo número de duplicaciones.*

No podemos entrar en toda la técnica general de resolución de este problema. Sirva el ejemplo para despertar el interés por la misma.

4.2. Grafos y digrafos. Sociogramas

Indicaremos ahora otros problemas que ponen de manifiesto la extraordinaria cantidad de aplicaciones (organización y comunicación de sociedades humanas, transportes, circuitos eléctricos, etc.) en que son útiles estas modelizaciones para conocer lo mejor posible las interrelaciones entre los elementos de un sistema, es decir, su estructura básica.

Veamos algún ejemplo en el campo de la organización y comunicación de sociedades humanas.

Si consideramos un conjunto de individuos (*A, B, C,..., L*), que pueden ser los que habitan en la misma casa o en la misma ciudad o pertenecientes a un parlamento, etc., cabe considerar diversas *relaciones* entre los pares (*A, B*), (*C, D*), (*A, C*)... como p.e. («*A* es amigo de *B*»), o («*A* está en comunicación con *B*»), o («*A* es más rico que *B*»), o («*A* manda en *B*»)... Fijada una de estas relaciones y el conjunto, es

interesante estudiar las propiedades de la estructura de esta relación definida para algunos pares del conjunto. Estos esquemas se llaman *sociogramas* en Sociología.

Observemos que las dos primeras relaciones son simétricas y las dos últimas son asimétricas. Para cada tipo de relación corresponde un tipo de *grafo*, los primeros, que hemos utilizado en el problema de los puentes de Koenigsberg, se llaman *grafos no dirigidos*, o simplemente *grafos*, y los segundos *grafos dirigidos* o *digrafos*.

Precisando lo dicho **[1.6]** definiremos un *grafo* $G(A, E)$ como un conjunto finito de puntos $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, llamados *vértices*, y un conjunto $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de *aristas* que unen a pares de puntos. No es necesario que todo par de vértices determine una arista que pertenezca al grafo.

P.e. consideremos los individuos $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ y supongamos la relación (a_i es amigo de a_j), que parece natural considerarla como simétrica. La representación del conjunto de relaciones:

a_1 es amigo de a_3
a_2 " " " a_4
a_2 " " " a_5
a_4 " " " a_1

se realiza por el grafo de la figura 4.

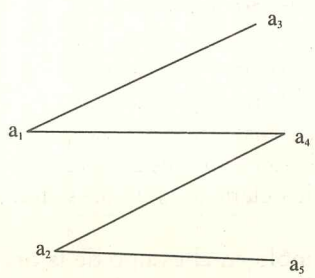


FIGURA 4

A las definiciones ya dadas en **[1.7]** de *trayectoria* y *circuito* agregamos ahora la de *grafo completo*, que se refiere al caso en que cada dos vértices distintos están unidos por un *arco*.

4.3. Organización jerárquica

Los *grafos dirigidos*, que son los más importantes, se han introducido para representar relaciones irreflexivas como en el ejemplo siguiente:

En una organización, la relación básica es xSy (x es superior a y) o (x manda en y) y la representaremos por un *arco* con flecha en y, es decir, dirigido de x a y. Entonces el digrafo de la figura 5 representa la *jerarquía* de la organización. Se adoptan los siguientes convenios para la relación xSy.

1.° Nadie es su propio superior, no se verifica xSx para ningún x (propiedad irreflexiva).

2.° Un individuo x no puede ser superior e inferior de otro y, es decir, xSy es incompatible con ySx (*propiedad de asimetría*).

3.° Si xSy y ySz es xSz (*propiedad transitiva*).

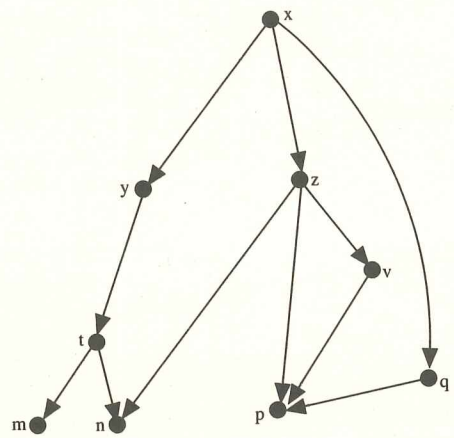


FIGURA 5

La condición necesaria y suficiente para que se verifiquen las tres propiedades indicadas es que el digrafo no tenga ciclos. Esta propiedad tiene un sentido intuitivo claro. Su demostración es sencilla y queda como ejercicio para el lector.

Precisando las ideas del ejemplo, definiremos un *digrafo* $D(A, E)$ como un conjunto finito de puntos o vértices $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y un conjunto $E = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de *arcos* que unen *pares ordenados* de puntos. No es necesario que todo par ordenado de vértices determine un arco que pertenezca al *digrafo*. Y no hay que advertir que tanto cuando se habla de arco como de arista, nos referimos a un objeto abstracto que une los dos vértices, aunque intuitivamente se represente por un segmento rectilíneo.

4.4. Relación entre grafos, digrafos y matrices

El manejo de grafos se facilita introduciendo algunas matrices asociadas que permiten su representación numérica *(codificación)*.

La *matriz de adyacencia* se define asociando a cada arco a_{ij} definido por los vértices

i, j, el número a_{ij} → *1 si* a_{ij} pertenece al grafo
→ *0* " " no " " "

Se considera (fig. 6) el grafo (a_1, a_2, a_3).

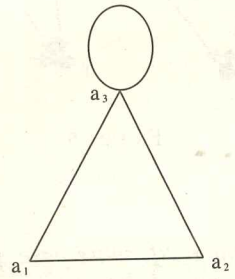


FIGURA 6

Su matriz de adyacencia es simétrica.

	a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1
a_2	1	0	1
a_3	1	1	1

Para el digrafo (a_1, a_2, a_3, a_4) (fig. 7) la matriz es

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	0	0
a_2	0	0	1	0
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	0

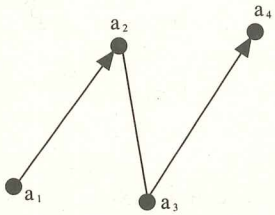


FIGURA 7

Es inmediato ver que la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido es simétrica y no lo es necesariamente si el grafo es dirigido.

Son bien conocidas las operaciones con relaciones y las correspondientes con matrices, pero aquí no entramos en ellas.

4.5. El problema del *lider*

Una serie de problemas interesantes en Sociología se pueden resolver mediante los grafos o sociogramas. P.e. ¿quién es el miembro

de un grupo humano con más influencia en el mismo? (*problema del leader*), ¿qué individuos podrían destruir la unidad o la cohesión de un grupo? En otro orden de ideas, ¿qué centros de comunicación al ser ocupados o destruidos aislarían algunas regiones del campo enemigo?

P.e., si consideramos el sociograma de la figura 8, parece a primera vista que x es el elemento que domina a más elementos, a saber 4, mientras y domina a 3 y z a 2. Sin embargo y, al dominar a x y a z, domina a 8 indirectamente, es decir, que se puede considerar a y como *lider*.

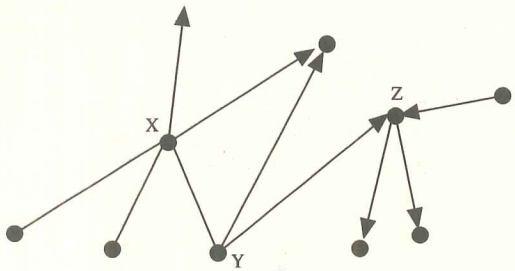


FIGURA 8

Conviene precisar esta idea de *lider*.

Decimos que en un grupo humano G (comité, parlamento, país,...) un individuo x tiene *influencia de orden n* sobre y, si en el digrafo asociado a G, existe una trayectoria de longitud n que parte de x y llega a y. Se dice que x es un *lider* en G si tiene influencia sobre cada elemento de G para algún valor de n. Si $n = 1$ para todos los elementos de G se llama *lider directo*.

Si el grafo está partido no hay *lider*. Si el grafo no está partido se puede demostrar que existe, al menos, un *lider*.

Para determinar si un grupo G tiene como *lider* un elemento x, se puede ir comparando con uno de los otros elementos de G. Este procedimiento inicial se ha de sustituir por otros algoritmos directos que no exponemos por su dificultad teórica.

4.6. Sistemas relacionales

Por lo visto hasta aquí los tipos de grafos considerados aparecen como modelos matemáticos de algunos *sistemas relacionales*. De un modo general, diremos que *sistema relacional* es un conjunto A de elementos con una o más relaciones $(R_1, R_2,..., R_k)$ definidas para ellos $(A; R_1, R_2,..., R_k)$.

Vamos, pues, a precisar algo más la noción de relación.

Dado el conjunto A, diremos que hemos definido la *relación binaria* R en A, si especificamos un cierto subconjunto R de pares ordenados de A, que verifican la propiedad R. Naturalmente, este conjunto R será un subconjunto del conjunto *producto cartesiano* $A \times A$, formado por todos los pares de A.

P.e., si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$A \times A = \{(a_1,a_1), (a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_2,a_1),...(a_3,a_3)\}$$

y se verifica $\{a_1Ra_2, a_2Ra_3, a_3Ra_3\}$

es $R = \{(a_1,a_2), (a_2,a_3), (a_3,a_3)\}$

El grafo aparece así como una representación del sistema relacional (A, R).

A esta noción se le puede dar un carácter *dinámico*, suponiendo el conjunto A en instantes sucesivos $t_1, t_2,..., t_n$, a los que se asocian las R relaciones $R_{t1}, R_{t2},..., R_{tn}$, y definimos (A,R_{ti}) $[i = 1, 2,...,n]$.

4.7. Algoritmos

El punto de vista del matemático aplicado al resolver un problema de la realidad física, biológica, etc., implica llegar finalmente a resultados numéricos con sus consecuencias prácticas. De modo que una vez introducido el *modelo matemático*, se hace preciso establecer un *algoritmo* o sucesión *finita* de operaciones (lógicas, matemáticas, etc.) que conduzca sin ambigüedad a la solución.

Imaginemos que a un niño que tiene un calculador manual se le da como problema poner en práctica las siguientes instrucciones:

1.er paso. $x = 3{,}2$
2.º paso. $y = 6x^2 + 2x + 4$

Encontrará posiblemente serias dificultades, pues este conjunto de dos instrucciones no es un algorítmo, ya que no indica directamente qué operaciones sucesivas se han de realizar con el calculador.

En cambio, sí se le dan las instrucciones:

1.er paso. Borrar todos los cálculos del calculador.
2.º paso. Introducir 6 en el acumulador, presionando 6 y +.
3.er paso. Multiplicar el número del acumulador por 3,2, presionando el 3, la coma, el 2 y el ×.
4.º paso. Sumar 2 al número del acumulador presionando el 3 y el +.
5.º paso. Multiplicar el número del acumulador por 3,2, presionando el 3, la coma, el 2 y el ×.
6.º paso. Sumar 4 al número del acumulador presionando el 2, la coma y el +.
7.º paso. Leer el número en el acumulador que es el valor de y.

Tras estos pasos llegará al cálculo de la citada expresión

$$y = 6x^2 + 2x + 4, \text{ puesta en la forma}$$
$$y = (6x + 2)x + 4, \text{ para } x = 3{,}2$$

Podemos decir que el primer conjunto de instrucciones no es un algorítmo, pero el segundo sí, ya que mediante un número finito de instrucciones se llega sin dudas al resultado final del problema.

4.8. Organigramas

Resulta generalmente conveniente y cómodo poner el algorítmo en forma de *organigrama* o *esquema lógico* de cálculo, en que, con el auxilio de algunos signos convencionales, se van expresando las operaciones que sucesivamente se han de realizar para poner en práctica el citado algorítmo y llevarlo hasta sus últimas consecuencias.

Los símbolos más usuales en la confección de organigramas, con su significado, son:

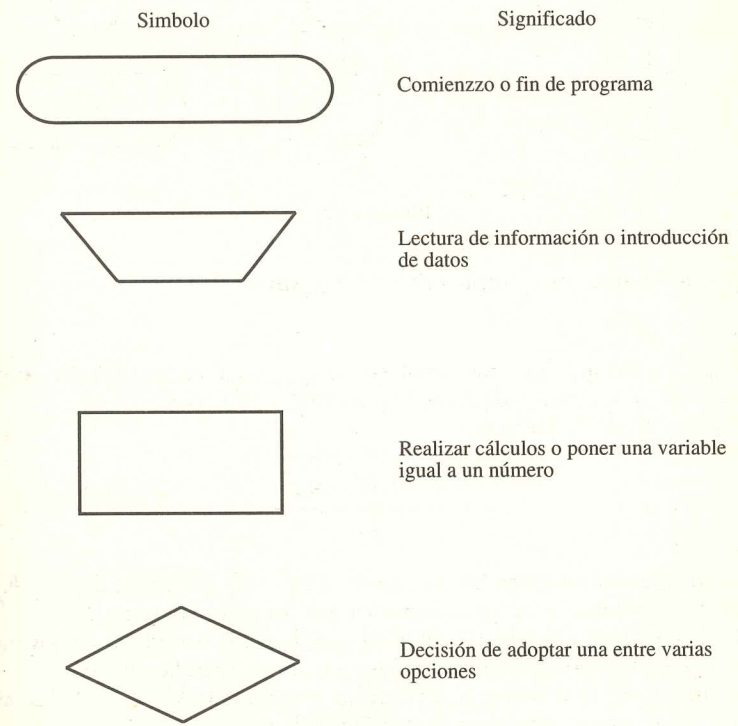


FIGURA 9

A veces un organigrama puede tener un desarrollo muy amplio y se utilizarán varias hojas de pael. Entonces se indica la relación entre ellas si son tres, p.e., en la forma (fig. 10).

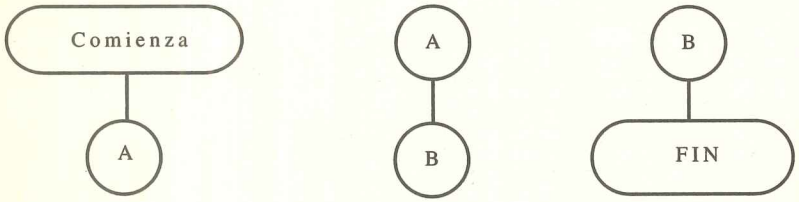


FIGURA 10

He aquí algunos ejemplos de organigramas.

Ejemplo 1

Supongamos que queremos establecer un organigrama para el cálculo de las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

La bien conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

no es un algorítmo, pues en la sucesión de cálculos a partir de los datos a, b, c se pueden presentar varios casos según los valores numéricos de a, b, c.

En primer lugar, al haber el doble signo ±, hay que considerar ambos signos con los correspondientes resultados x_1, x_2, según se utilice el + o el –.

El algorítmo debe indicar además que, si el radicando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias y deben expresarse adecuadamente.

Además, hay que tener en cuenta la posibilidad de que aparezcan las ex presiones $\frac{k}{0}$, $\frac{0}{0}$, e indicar qué camino se ha de seguir en tales casos para evitar toda ambigüedad.

En el organigrama, que se encuentra a continuación (fig. 11), se han tenido en cuenta estas consideraciones y constituye una expresión desarrollada de un algoritmo para resolver la ecuación de segundo grado. He aquí algunas aclaraciones: la relación $a : 0$ encerrada en el símbolo de decisión indica que se compare a con 0 y si es $a \neq 0$ se sigue un camino del organigrama, y si $a = 0$, se sigue el otro. Análogamente, se puede decir respecto de las otras decisiones.

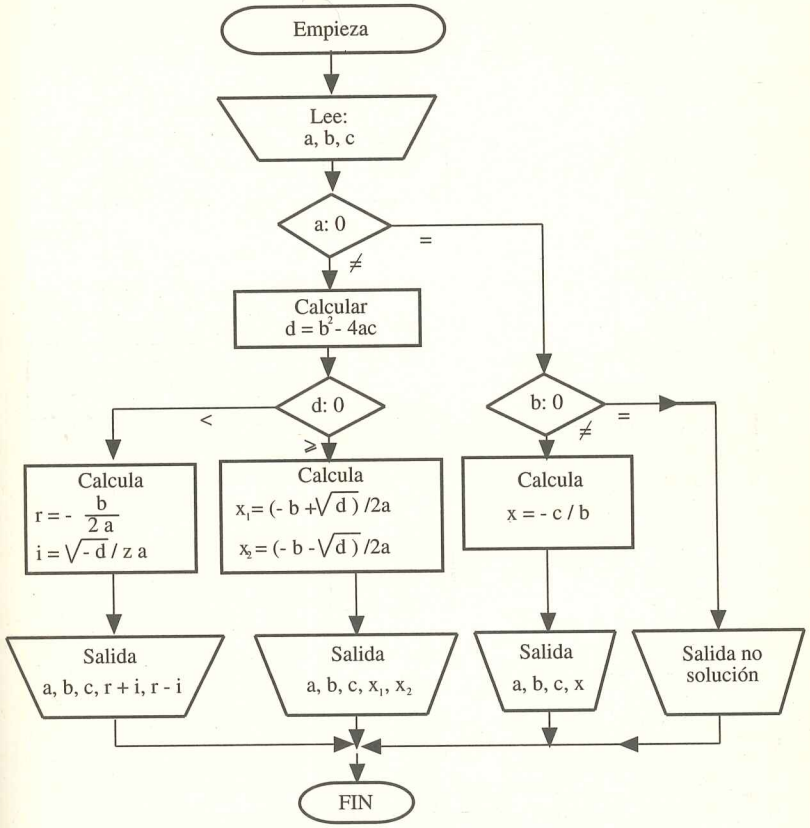


FIGURA 11

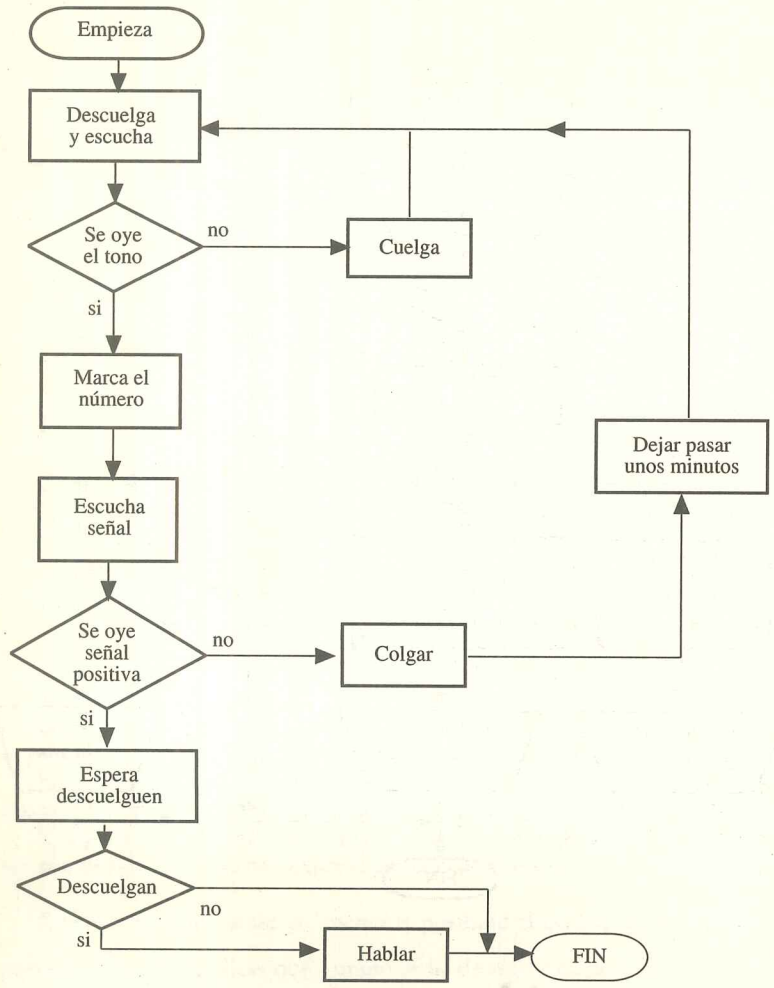


FIGURA 12

Cualquier persona que haya estudiado la fórmula de la ecuación de segundo grado observará la mayor lentitud para lograr la solución del problema con el organigrama. en cambio, admitirá que esta forma de presentar la solución sería la más adecuada para una persona o una máquina que no supiera nada de ecuaciones de segundo grado y únicamente supiera realizar las operaciones elementales que aparecen en el organigrama.

Ejemplo 2

Establecer un organigrama para las operaciones que se han de hacer para una llamada telefónica.

Con este ejemplo se ve cómo pueden organizarse en forma de diagrama sencillo (independiente de que luego vayan o no a ser utilizadas para ponerlas en práctica en un ordenador) las operaciones elementales de una actuación sencilla de la vida diaria.

Aunque en la primera época de la introducción de los ordenadores se le dio importancia fundamental al lenguaje utilizado para introducir los cálculos en la máquina, posteriormente se considera que lo fundamental es el *algoritmo*, que describe la sucesión finita de operaciones. Por esta razón aquí nos limitamos a las ideas básicas de construcción de algoritmos para los procesos de cálculo, en vez de llegar al detalle del aprendizaje de algún lenguaje como Basic, PL1, Fortran, que, en definitiva, es una cuestión más técnica y rutinaria.

4.9. Ciclos

En el ejemplo de la llamada telefónica se observa la presencia en el organigrama, de un *ciclo*, que se presenta cuando no se oye el tono para volver a iniciar los movimientos y otro cuando no se oye señal positiva para iniciar nuevamente el proceso.

Este tipo de organigrama con ciclos se presenta en los procesos que dan lugar a cálculos reiterativos, con los que tiene especial ventaja el cálculo con el ordenador.

Veamos, como ejemplo, el cálculo de la media de n números (fig. 13)

$$m = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i$$

El organigrama parte de calcular

$$S = \sum_{1}^{n} x_i \text{ y después}$$

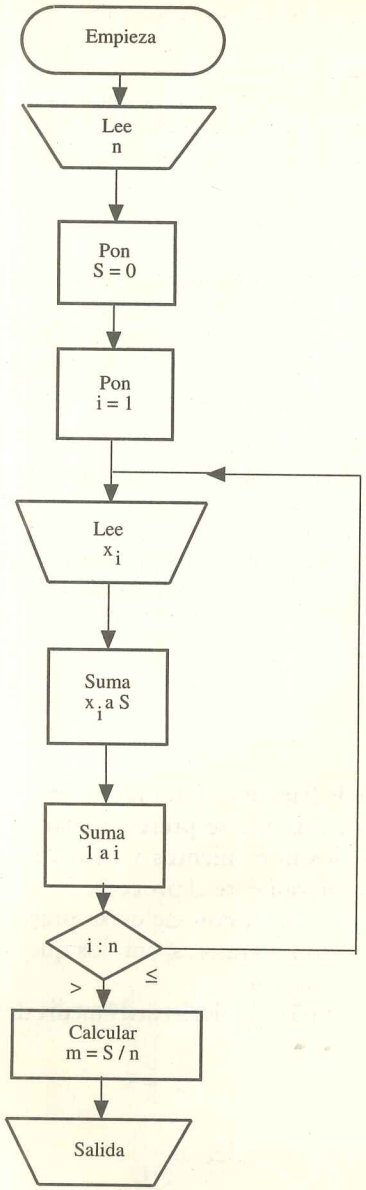


FIGURA 13

$m = \frac{1}{n} S$ y aparece un ciclo, que se reitera cada vez que se suma un nuevo número, caracterizado por un índice i, y el algoritmo establece que esta sucesión de ciclos termina cuando $i = n$; entonces hay que hacer la división $\frac{S}{n}$.

Es frecuente simplificar la escritura del organigrama suprimiendo palabras como «Pon» y «Calcula». Además sentencias como «suma x_1 a S» se sustituyen por $S \leftarrow S + x_1$.

Este tipo de ciclos aparecen también en los organigramas de los métodos iterativos de cálculo, en que un número se ha de calcular por prueba y error, modificándose cada vez el resultado del cálculo precedente, terminándose el cálculo cuando se obtienen dos valores consecutivos, que están ambos dentro de los límites de tolerancia fijados.

4.10. Estructura del ordenador

En los ejemplos de algoritmos puestos en forma de organigrama, observamos las siguientes tareas elementales que aparecen en todos:

1.ª tarea: Lectura de información.
2.ª tarea: Guardar información para uso posterior.
3.ª tarea: Operar sobre información guardada.
4.ª tarea: Controlar la sucesión en que se han de realizar las distintas operaciones.
5.ª tarea: Salida de los resultados finales de los cálculos.

De acuerdo con esto, son cinco los órganos fundamentales del ordenador, entre los que existen las conexiones que se indican en la figura 14.

Dicho en forma breve: la *unidad de control* juega el papel del calculista que ordena a la *unidad aritmética* las operaciones que ha de hacer; ésta juega el papel de la máquina calculadora tradicional que va haciendo las operaciones concretas (suma, resta, multiplicación, comparación y decisión) que le va pasando la unidad de control. La unidad de *entrada* recibe los datos escritos y las operaciones que ha de realizar en forma de *programa*. Este programa, que se llama *programa objeto*, ha de ir en el lenguaje o código de máquina del ordenador

particular que utilicemos. Este programa objeto se obtiene a partir del llamado *programa fuente*, que irá escrito en uno de los lenguajes usuales (FORTRAN, ALGOL, PL 1, etc.), y éste a su vez se obtiene a partir del organigrama mediante una adecuada traducción.

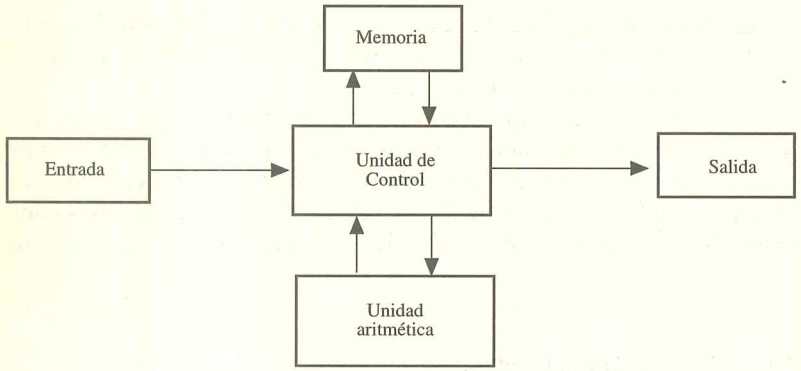


FIGURA 14

La operación de paso del programa fuente al programa objeto recibe el nombre de *compilación*.

El programa objeto se introduce en la *unidad de entrada* que sirve de puente entre el hombre y la máquina. Análogamente la *unidad de salida* proporciona la información elaborada por el ordenador.

La *unidad de memoria* se utiliza como depósito para los datos de entrada y los datos de cálculos intermedios, que la *unidad de control* ordena entrar en la *unidad aritmética* en el momento oportuno.

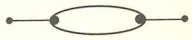
La memoria está compuesta de unidades elementales o *bits*, que son elementos físicos susceptibles de dos estados opuestos que suelen asociarse a las cifras 0 y 1. Un número binario se representa por una sucesión de cifras 0, 1, y en la máquina por una sucesión de bits en uno u otro estado. Los bits aparecen agrupados en la máquina en grupos de 30 ó 60, cada uno de los cuales constituye una «palabra». Cada palabra recoge una *instrucción* o bien un *dato*. Los *datos* se envían a la unidad aritmética, donde son elaborados de acuerdo con las *instrucciones* que vienen de la unidad de control.

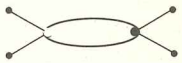
Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.4.1. Multigrafos

Un grafo tal que *puede haber en él pares de elementos enlazados por dos o más aristas* se llama *multigrafo*.

Se han utilizado como esquemas para las fórmulas de compuestos de la Química. P.e., Pólya los ha utilizado para calcular el número de isómeros de un compuesto orgánico.

Así el grafo del acetileno de fórmula H-C ≡ C-H sería 

y el del etileno de fórmula $\begin{matrix} H \\ H \end{matrix}\rangle C = C \langle \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}$ sería 

E.4.2. Modelo de comportamiento en grupo: grafo signado

Supongamos tres individuos, Manuel, Nemes y Pedro, y convengamos en que cuando dos individuos están en buena relación el arco que los une lleva el signo +, cuando están en mala relación el - y cuando la relación es neutral no hay arco entre ellos. Se tienen así los *grafos signados*.

Todos los grafos posibles están en la figura 15 (suponiendo excluida la neutralidad).

En a) podemos decir que hay una situación equilibrada, pues cada uno está de acuerdo con los otros dos. En b) hay un desequilibrio, pues M y N están de acuerdo, pero M está de acuerdo con P y N no. En c) hay equilibrio, pues M y N están de acuerdo y ambos en desacuerdo con P. En d) hay desequilibrio, pues ninguno está de acuerdo con otro.

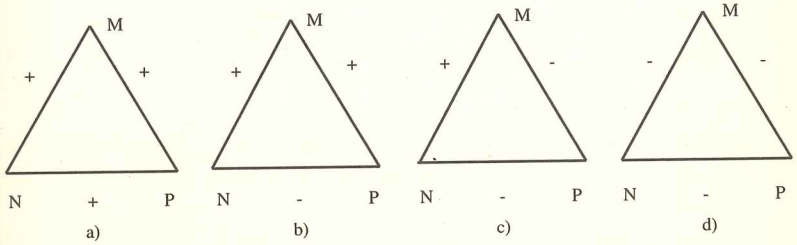


FIGURA 15

Este ejemplo es el punto de partida para estudiar las relaciones en un conjunto más amplio mediante el grafo signado. P.e., se ha estudiado el grafo signado de un parlamento, gobierno, consejo de administración, etc.

E.4.3. En un ecosistema marino el fitoplancton es devorado por el zooplancton o por los omnívoros, o muere. El zooplancton es comido por los omnívoros o por los carnívoros, o muere. Considerando el conjunto S = (fitoplancton, zooplancton, omnívoros, carnívoros, muerte), definir una relación en el conjunto $S \times S$ y establecer el correspondiente grafo.

E.4.4. Redes de distribución (Networks)

Un conjunto de modelos que se utilizan frecuentemente en los problemas de tráfico en las ciudades, carreteras, telefonía, etc., son las llamadas *redes de distribución*. Se trata, en definitiva, de *grafos mixtos*, en que algunos vértices van unidos por aristas (doble dirección) y otros por arcos (dirección única) (fig. 16).

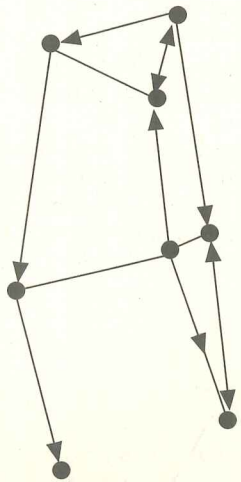


FIGURA 16

Especialmente interesantes son los *árboles* que son redes conexas sin ciclos, que se aplican al estudio de las comunicaciones de una gran ciudad con el resto del territorio (fig. 17).

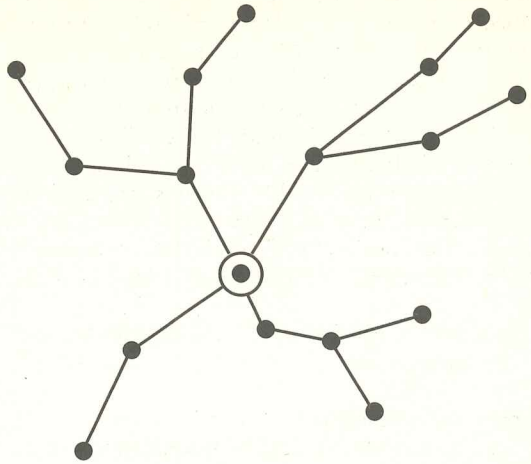


FIGURA 17

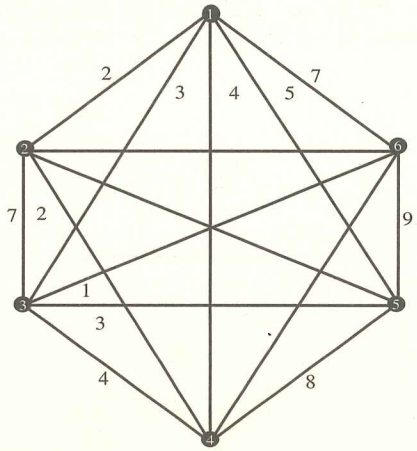


FIGURA 18

Estos esquemas son básicos para los estudios llamados de análisis y evaluación de tráfico futuro de una ciudad, región (es corriente que tengamos más de 10.000 vértices y más de 60.000 arcos). Al formular un plan de transporte a largo plazo para una ciudad es corriente comenzar por dividirla en *zonas*, que se consideran como orígenes y destinos de tráfico principales. A este esquema zonal se le asignan intensidades de tráfico para un año futuro, en forma análoga a la de la figura 18. En ella se indica, por ejemplo, que el tráfico entre las zonas 1 y 2 será de $2 \cdot 10^3$ vehículos cada día, etc.

En la etapa siguiente se proponen varias rutas y el tráfico interzonal que se estima para ellas, viéndose si el tráfico calculado se mantiene entre los límites establecidos. Finalmente se elige uno entre los varios diseños posibles presentados.

Análogos problemas se presentan en el tráfico telefónico, en los sistemas de distribución de agua, gas, etc.

E.4.5. Relaciones entre neuronas

De acuerdo con un modelo Thrall (1967), consideramos un conjunto de 6 neuronas que designamos por S = {a, b, c, d, e, f}. Se ha comprobado que una neurona puede o no ser apta para enviar impulsos directos a otra. Esta transmisión se realiza por un mecanismo bastante complicado consistente en un axón, una synapsis y una dendrita, lo que se representa más simbólicamente así —— (——. En la figura 19 se tiene un grafo que representa las relaciones entre las seis células. De acuerdo con la representación indicada, *a* puede enviar impulsos a *b* y a *d*, etc. El grafo se puede sustituir por el conjunto de pares ordenados, cada uno de los cuales representa un par de células entre las que existe la posibilidad de enviar impulso de la primera a la segunda.

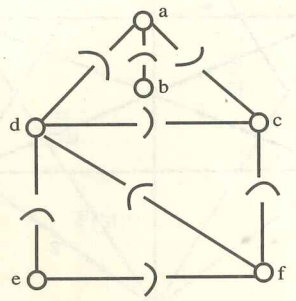


FIGURA 19

E.4.6. Método PERT

La ordenación de tareas necesarias para realizar una obra (como p.e., construir un edificio, un barco, avión, etc.) implica una serie de condiciones (como p.e., que el tejado o las puertas de una casa se han de hacer después que las paredes y éstas después de los cimientos). Otras tareas no han de tener necesariamente una relación de precedencia. Resulta, pues, que tal conjunto es ordenado, pero no completamente ordenado. La representación por un grafo es el punto de partida de la aplicación del llamado método PERT o de camino crítico para determinar el mínimo tiempo necesario para realizar la obra total (véase Kauffman, La Méthode PERT [Dunod, París]).

E.4.7. Obtener organigramas para los algoritmos que aparecen en lecciones posteriores.

E.4.8. La relación «es hijo de» se representa por el grafo de la figura 20 para el siguiente conjunto de individuos: Pedro es hijo de Jaime y éste hermano de Carmen; el padre de éstos es Ramiro, cuyo hermano, Samuel, tiene como hijos a María y Antonio.

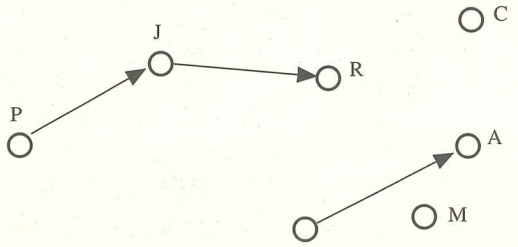


FIGURA 20

Si la relación fuera «es hija de», el grafo sería el de la fig. 21.

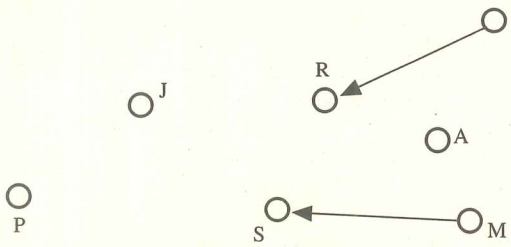
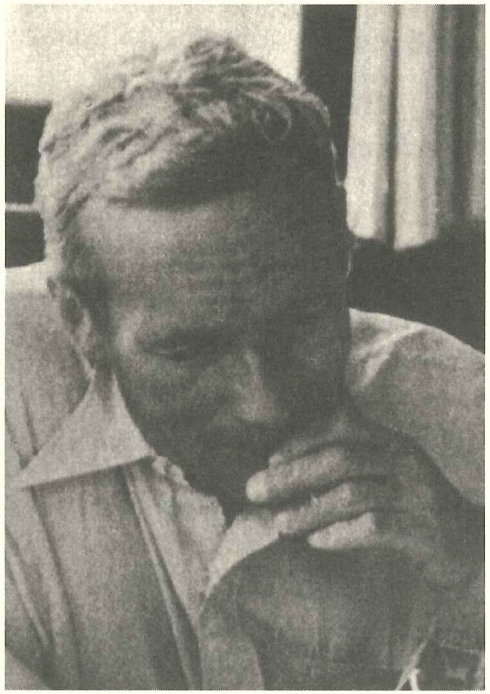


FIGURA 21

KOLMOGOROFF (1903-1985)



Estableció en 1930 el modelo axiomático del Cálculo de Probabilidades.

5. MODELOS PROBABILÍSTICOS. AZAR, INCERTIDUMBRE Y PROBABILIDAD

«But, surely God does not throw dice...»

ALBERT EINSTEIN

5.1. Problema del caballero de Meré a Pascal en 1654

Vamos a estudiar la modelización de un problema clásico del juego de dados propuesto a Pascal por el famoso tahur caballero de Meré: «He observado en mis partidas de dados que no es ventajoso apostar a la aparición de al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados, cosa que me extraña ya que he comprobado que sí es ventajoso apostar a la aparición de un seis en 4 tiradas».

He aquí el *razonamiento* del Caballero de Meré con sus pobres Matemáticas de la regla de tres: «Si yo puedo apostar por un resultado específico de 6 en 4 tiradas, puedo apostar por un resultado específico de $6 \cdot 6 = 36$ en $6 \cdot 4 = 24$ tiradas».

Está claro que este *razonamiento* no es aceptable como ya vio experimentalmente el propio de Meré. La solución correcta la dio Pascal y nosotros, para llegar a ella, vamos a empezar por dar algunas generalidades sobre los modelos probabilísticos, que se hacen necesarios en el estudio de los fenómenos aleatorios, de azar y en situaciones de incertidumbre.

5.2. Fenómenos aleatorios

Al repetir un experimento aleatorio en las mismas condiciones iniciales suele ser corriente obtener resultados sucesivos no coincidentes e imprevisibles y, si se quiere tener modelos matemáticos apropiados a los mismos, éstos han de ser *probabilísticos*.

Para fijar las ideas consideraremos un fenómeno aleatorio particular como es lanzar un dado al aire y observar el resultado que se obtiene cuando el dado reposa sobre un tablero.

Supondremos que siempre se obtiene uno de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, que se consideran como *sucesos elementales*. El conjunto formado por todos ellos se llama *espacio muestral* o *suceso seguro*. Es natural considerar sucesos como «obtener múltiplo de dos», «obtener múltiplo de tres», etc. Cada uno de estos sucesos se puede considerar como un subconjunto del espacio muestral. Así el primero «obtener múltiplo de dos» es el subconjunto del espacio muestral (2, 4, 6) y el segundo «obtener múltiplo de tres» es el subconjunto (3, 6). Esta indicación permite ver la estrecha relación entre conjuntos y sucesos.

Es interesante distinguir entre *experimento* y *prueba*. El *experimento aleatorio* es el conjunto de operaciones que nos conducen al realizarlas a obtener sucesos. Cada una de dichas realizaciones se llamará una *prueba*.

Asociamos a un *experimento aleatorio* o a una *observación aleatoria* los resultados posibles *a, b, d,* ..., indescomponibles en otros más simples, que llamaremos *resultados o sucesos elementales*. Los podemos considerar como elementos o puntos de un conjunto *E*, que llamaremos *espacio muestral* o *suceso seguro*. Corresponde esta noción a la de conjunto universal.

Los subconjuntos de tal espacio serán *sucesos* asociados a la experiencia u observación aleatoria. Cuando contengan un sólo punto serán sucesos elementales. Una manera sistemática de *obtener* todos los sucesos elementales del espacio muestral es mediante un árbol en que van poniéndose las alternativas posibles en las ramas sucesivas.

P.e., las composiciones posibles de una familia de tres hijos se obtienen así (fig. 1):

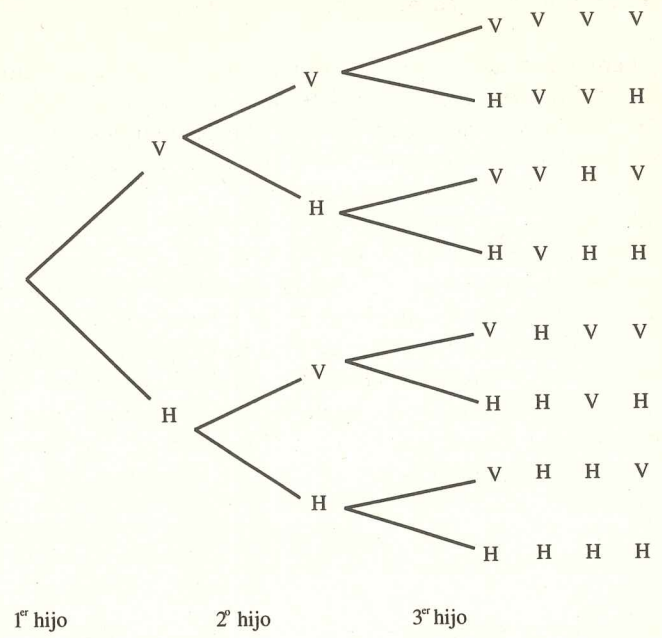


FIGURA 1

Hay un perfecta correspondencia entre nociones de las teorías de conjuntos y de probabilidades, por lo que no daremos nuevas definiciones.

Algebra de conjuntos	*Algebra de sucesos*
Conjunto universal.	Suceso seguro o espacio muestral
Elemento o punto.	Suceso elemental.
Subconjunto.	Suceso.
Conjuntos disjuntos.	Sucesos incompatibles.
Unión de conjuntos.	Unión de sucesos.
Conjunto vacío.	Suceso imposible.
Conjunto complementario.	Suceso contrario.
Intersección de conjuntos.	Intersección de sucesos.

5.3. Experimentos aleatorios. Números aleatorios

Ya hemos indicado algunas características de los fenómenos aleatorios y el aspecto básico de la determinación y propiedades de los sucesos aleatorios como subconjuntos del espacio muestral.

Para estudiar más profundamente estos fenómenos debemos realizar algunos experimentos aleatorios.

Todas estas experiencias son sencillas, pero queremos advertir desde ahora que el lector obtendrá mucho más provecho e intuición realizándolas efectivamente, que limitándose a leer e imaginar que las hace. La Estadística y el Cálculo de Probabilidades son ciencias cuyo substrato intuitivo empírico es muy directo y, por ello, es importante adquirir esta intuición como consecuencia de experiencias. Intuiciones que, por otra parte, son menos fáciles de adquirir que las que constituyen la base de la Geometría o la Aritmética, que derivan más directamente de experiencias sensoriales que continuamente hacemos desde nuestra infancia.

a) Experiencias aleatorias con una moneda.

Lance el lector sucesivamente una moneda, p.e., 20 veces, y anote los resultados que va obteniendo en cada experiencia al observar la parte superior de la moneda, recogiendo así una *serie estadística observada*, como p.e.:

Experiencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado	C	C	F	C	C	C	F	F	C	F	F	F	F	C	C	F	C	F	F	F

b) Experiencias aleatorias con una bolsa de bolas que contiene 50 blancas y 50 negras. Se empieza mezclando bien las bolas y se saca una primera bola, se anota su color, se devuelve a la bolsa, se mezclan nuevamente las bolas, se saca una segunda bola, etc. Obtenga el lector de este modo una *serie estadística*, como p.e.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	b	n	n	b	n	b	n	b	b	b	n	n	b	b	n	b	b	b	n

c) Observación de resultados aleatorios de nacimientos en una población.

Recójanse datos relativos al nacimiento de niños en una maternidad a lo largo del tiempo y se obtendrá al registrar las observaciones relativas al sexo de los mismos una serie estadística observada como la siguiente (de 100 datos):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	b	n	n	b	n	b	n	b	b	b	n	n	b	b	n	b	b	b	n

d) Experimentos artificiales. Tablas de números aleatorios.

Los experimentos de los ejemplos *a), b)*, se pueden realizar de una manera sencilla y rápida si se dispone previamente de una *tabla de números aleatorios*. Con ello se evitan las tendencias o sesgos que se pueden presentar al hacer estas experiencias con monedas, bolas, etc.

Si tenemos una bolsa con diez bolas marcadas con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y sacamos bolas con reemplazamiento (como en *b*) y vamos anotando en columnas los dígitos que resultan se obtiene una *tabla de números aleatorios*. En realidad, para la construcción efectiva de estas tablas, a fin de evitar que se produzcan tendencias o sesgos en las series estadísticas que se forman, como ocurre efectivamente si no se realiza con gran cuidado la mezcla y selección de las bolas en la bolsa, se han utilizado ciertos dispositivos experimentales electrónicos que evitan tales sesgos (*). En las páginas siguientes se encuentra una muestra de tabla de números aleatorios que será útil al alumno para hacer los experimentos artificiales que se le proponen. Por otra parte, cualquier ordenador tiene programas para obtener rápidamente una serie de números aleatorios.

* Así se han obtenido las tablas de la Rand Corporation «A million Random digits», Free Press, Glencoe, Illinois, 1955.

TABLA DE DÍGITOS ALEATORIOS

45	41	43	51	86	14	10	47	26	47	06	29	38	07	73	89	42	29	87	40
15	15	97	79	59	74	82	14	39	14	51	20	47	08	04	11	65	58	15	22
43	66	22	58	29	51	56	05	69	61	58	12	10	41	45	96	04	38	25	15
91	73	49	42	11	59	33	33	25	80	34	29	07	41	11	39	77	43	53	30
56	39	68	29	44	02	37	60	83	72	12	47	15	97	93	22	10	68	17	24
95	91	76	07	68	81	63	57	69	54	45	41	21	29	79	14	62	46	62	85
48	09	10	89	18	69	05	55	08	03	99	88	15	20	94	71	24	11	46	20
15	89	00	45	73	27	82	13	37	30	98	49	94	93	22	52	30	78	49	44
23	70	41	01	44	30	19	48	20	89	92	18	61	17	28	23	69	13	00	76
18	61	56	54	70	51	08	16	49	34	65	68	03	00	97	71	62	52	85	63
89	06	28	36	53	50	91	10	09	27	42	19	91	01	59	36	37	06	86	82
31	49	60	16	45	95	51	60	96	18	35	57	96	08	69	83	01	76	49	24
02	87	84	46	27	12	69	08	36	73	38	46	86	09	85	31	93	77	98	96
45	69	86	62	08	43	67	74	47	00	13	91	69	83	90	79	14	74	20	73
56	75	05	46	84	01	23	89	24	05	63	89	91	34	10	28	64	42	62	18
92	95	27	23	29	45	99	15	94	21	87	46	45	09	11	84	80	80	62	34
27	66	70	00	71	64	12	66	39	48	62	83	76	01	42	97	64	23	75	90
92	20	36	63	26	32	75	17	64	45	39	79	12	53	94	48	86	42	18	61
55	12	26	10	55	21	74	12	92	16	88	05	55	45	98	72	02	42	17	97
53	82	47	47	96	37	02	06	42	50	33	20	04	23	30	73	16	76	74	15

FIGURA 2

Si con estas tablas queremos realizar el experimento *a)* no hay más que suponer que a las cifras pares les corresponde *C* y a las impares *F*, con lo que la serie de los 20 primeros dígitos de la primera columna de la tabla nos da la siguiente serie de 20 pruebas artificiales con la moneda:

C C C C F F F F C C C F C C C C C C F

Realice el lector análogamente el experimento *b)* y piense si puede reproducir artificialmente el *c)*.

Si se toman dos columnas de la tabla, los números de dos cifras se pueden considerar como si fueran obtenidos de una bolsa con 100

bolas numeradas de 00 a 99. Análogamente se pueden tomar 3 o más columnas.

5.4. Regularidad estadística

Podemos decir que ninguno de estos fenómenos es determinista, sino aleatorio. Una *característica* de estos fenómenos es que *no se puede predecir el resultado de cada experiencia y observación particular.*

Esta característica indica la necesidad de nuevos métodos para el estudio de estos fenómenos. La idea intuitiva inicial, que ha sido el punto de partida para introducir el método estadístico, es la *estabilidad de las frecuencias o ley de la regularidad estadística: Si se lanza un gran número de veces una moneda se observa que se obtiene aproximadamente el mismo número de C y de F, es decir, se puede predecir la proporción de C y de F en una gran serie de experiencias.*

Veamos cómo se pueden conducir experimentos que nos indiquen y confirmen esta propiedad experimental de los fenómenos de azar punto de partida del *modelo probabilístico.*

Comenzamos por lo que se llama *tratamiento de la información* viendo la manera de *ordenar, elaborar o procesar* estas series estadísticas para obtener de ellas *información* relativa a las frecuencias de los distintos *sucesos* que pueden ocurrir.

A partir de una serie estadística observada se puede formar una tabla de frecuencias en la forma siguiente; p.e., con la del experimento *a)*: Se cuenta el número n' de observaciones en que se ha obtenido *F* y el cociente $\frac{n'}{n}$ de este número por el total de observaciones *n* se llama *frecuencia relativa* o, simplemente, *frecuencia* de *F* y se escribe $fr(F) = \frac{n'}{n}$. En nuestro caso se ha obtenido:

$$fr\,(F) = \frac{11}{20}, \quad fr\,(C) = \frac{9}{20}$$

y la tabla de frecuencias se dispone así:

moneda	repetición	frecuencia
C	9	9/20
F	11	11/20
Total	20	1

En los experimentos *b), c)* y *d)* el lector puede formar las tablas de frecuencias.

Si queremos hacer ostensible la estabilidad de las frecuencias en los experimentos considerados podemos hacer una representación gráfica (fig. 3) de la frecuencia de un suceso (tomada como ordenada)

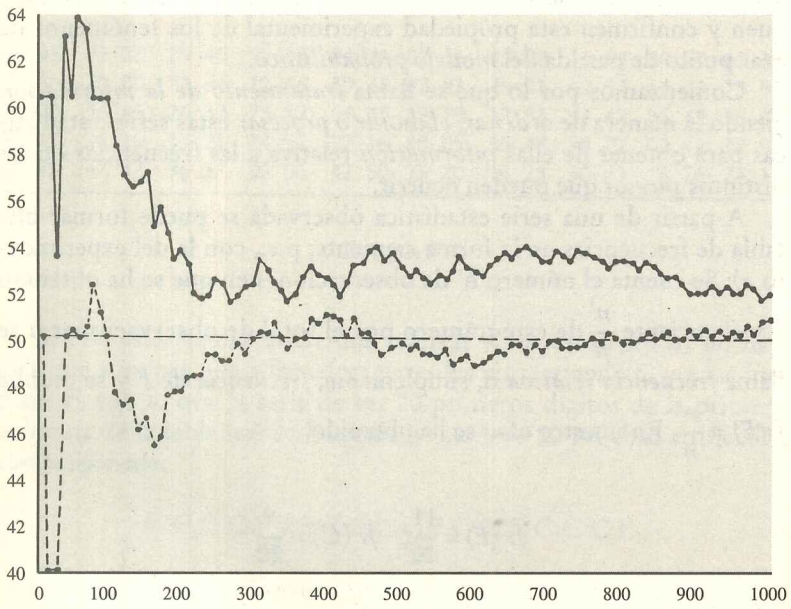


FIGURA 3

para número n creciente de observaciones (tomando como abscisa n). Así con los datos de nacimientos y de experimentos con una moneda se han obtenido las gráficas adjuntas que representan las variaciones de la frecuencia en sendas series estadísticas de 1.000 observaciones (la de varones representada con rayas y la de F en la moneda representada con puntos).

Como se ve, tanto una como otra gráfica presentan fuertes oscilaciones al principio, que luego se van amortiguando hasta que aparecen oscilaciones muy pequeñas alrededor de una tendencia que, en el caso de las bolas, es la recta paralela al eje X de ordenada 0,5 y en el caso de los nacimientos de ordenada $\cong$ 0,51. Aparece así clara la analogía en el comportamiento de las frecuencias al crecer n en ambos fenómenos. Análogamente, en el caso de la bolsa, como la proporción de bolas blancas es 0,5, el experimento sugiere y confirma que las frecuencias se van aproximando a este valor fijo. El lector puede repetir experimentos análogos con la moneda y con la ruleta y comprobar que obtiene series que se comportan de modo similar a las anteriores. Otro experimento que puede hacerse es poner en la bolsa 25 blancas y 75 negras y comprobar que las frecuencias de blancas se estabilizan hacia $\frac{1}{4}$ y las negras hacia $\frac{3}{4}$.

Tenemos así una primera idea de cómo estos fenómenos, aparentemente tan distintos, como el resultado de la extracción de una bola de una bolsa y la observación del sexo de un niño que nace, tienen, sin embargo, regularidades estadísticas que los hace completamente análogos y que nos permitirán encuadrarlos en un mismo *modelo teórico*.

Vemos también que este número hacia el que se estabilizan las frecuencias y al que llamaremos *probabilidad*, juega un papel importante en la caracterización del fenómeno aleatorio.

5.5. Modelo matemático de los sucesos observables y de las probabilidades

Continuando con el lanzamiento de un dado al aire, sea, p.e., A el suceso que significa obtener 1 ó 2 puntos.

Si se hacen n pruebas y en ellas resulta n' veces el suceso A, desde luego se verifica:

$$0 \leq n' \leq n$$

luego

$$0 \leq \frac{n'}{n} \leq 1$$

1.ª PROPIEDAD:

$$\boxed{0 \leq fr\,(A) \leq 1}$$

Sean dos sucesos A y B *incompatibles*, es decir, tales que si se verifica uno, no se verifica el otro. Sea C su unión, es decir, $C = A \cup B$. P.e.:

$$A = (2, 3),\ B = (4, 5),\ C = (2, 3, 4, 5).$$

Si realizamos n pruebas y en ellas se obtiene n' veces C, n'' veces A y n''' veces B, se verifica que siempre que se realiza C es que se ha realizado A o se ha realizado B y sólo uno de ellos, a causa de ser estos sucesos *incompatibles*.

Es decir, tenemos así:

$$n' = n'' + n'''$$

y también

$$\frac{n'}{n} = \frac{n''}{n} + \frac{n'''}{n}$$

Tenemos, pues, la

2.ª PROPIEDAD. *Si A y B son sucesos incompatibles, es:*

$$\boxed{fr(A \cup B = fr(A) + fr(B)}$$

Si ahora consideramos el suceso E que se obtiene cuando sale (1, 2, 3, 4, 5, 6) y que se llama *suceso seguro*, su frecuencia será:

$$fr(E) = \frac{n}{n} = 1$$

es decir, tenemos:

3.ª PROPIEDAD. *La frecuencia del suceso seguro E es*

$$\boxed{fr(E) = 1}$$

Estas propiedades de las frecuencias valen cualquiera que sea el número *n fijado* de observaciones. Sin embargo, de poco valdrían para hacer predicciones para un número pequeño de observaciones, ya que, para un número pequeño de observaciones no hay regularidad en el comportamiento de la frecuencia.

Las experiencias permiten comprobar que en muchos fenómenos es aplicable la llamada *ley de regularidad* de las series estadísticas o *ley del azar*.

4.ª PROPIEDAD. *Si una cierta experiencia se repite n veces, se observa que la frecuencia* $f(A) = \frac{n'}{n}$ *de un suceso fijado, tiende a estabilizarse (aproximarse a un valor fijo), entendiendo esta locución en sentido experimental.*

La comprobación experimental de este comportamiento regular de las frecuencias es esencial para que un fenómeno se pueda considerar como aleatorio y aplicarle el *modelo matemático del Cálculo de probabilidades*.

Teniendo en cuenta por un lado la representación intuitiva de los sucesos como puntos de un espacio o elementos de un conjunto, y, por otro, las propiedades de las frecuencias, vamos a hacer una doble abstracción, construyendo un sistema de axiomas con un modelo matemático para los sucesos, y otro, apoyado en el primero, para las que llamaremos probabilidades de estos sucesos.

Como consecuencia de lo visto, podemos partir de un *espacio muestral E* en el que se ha definido una familia $\mathbb{A}$ de sucesos o subconjuntos A, B,... que es un álgebra de Boole, es decir, que se pueden realizar las operaciones de unión, intersección y complementario.

El espacio muestral E, con la clase $\mathbb{A}$ de sucesos nos da una es-

tructura en la que es posible establecer una medida o probabilidad de los sucesos que será un número asociado a cada suceso, número que vendrá aproximadamente medido por la frecuencia.

La estabilidad de las frecuencias de un suceso en las largas series de pruebas relativas a un fenómeno aleatorio y las relaciones sencillas que acabamos de ver se verifican entre estas frecuencias, conducen a la introducción de los siguientes axiomas, de Kolmogoroff, que no son más que un modo de definir el concepto de probabilidad por tres propiedades, que son la traducción de las propiedades [1], [2] y [3] de las frecuencias.

AXIOMA I. *A cada suceso* $A \in \mathbb{A}$ *le corresponde un número real* $P(A)$, *que llamaremos su probabilidad, tal que* $0 \leq P(A) \leq 1$.

AXIOMA II. *Si* $A_1, A_2, \ldots$, *son incompatibles*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

AXIOMA III. $P(E) = 1$

Llamaremos al espacio E, con el álgebra $\mathbb{A}$ de sucesos, sobre la que se ha definido la función de probabilidad P, *espacio de probabilidad o espacio probabilístico* y lo designaremos por $(E, \mathbb{A})$. Como se ve, la función P es una aplicación de la clase $\mathbb{A}$ de los sucesos A_i en el intervalo [0, 1].

Tenemos así el siguiente cuadro de correspondencia entre nociones empíricas y conceptos matemáticos del modelo.

Realidad empírica	*Modelo matemático*
Experimento aleatorio	*Espacio probabilístico* $(E, \mathbb{A}, P)$
Resultados experimentales	*Sucesos*
Frecuencias en largas series	*Probabilidades*
Propiedades de las frecuencias	*Axiomas de las probabilidades*

ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS

I. *Si* $\bar{A}$ *es el suceso opuesto a* A, *tenemos:*

$$P(A \cup \bar{A}) = P(E) = 1$$
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

luego

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

II. En particular el *suceso imposible* $\phi = \bar{E}$, *tiene probabilidad cero, pues* $P(\phi) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

III. *Probabilidad de la unión de sucesos compatibles.* Sean dos sucesos A y B, es decir, tales que $A \cap B = C$.

Se tienen las siguientes relaciones

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}); \quad B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \qquad [1]$$

Por ser los sumandos sucesos incompatibles tenemos (axioma II):

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}); \quad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \qquad [2]$$

Además tenemos:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \qquad [3]$$

y por el axioma II:

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \qquad [4]$$

y sustituyendo la [2] en [4] queda:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

El proceso de modelización seguido se resume en el adjunto cuadro.

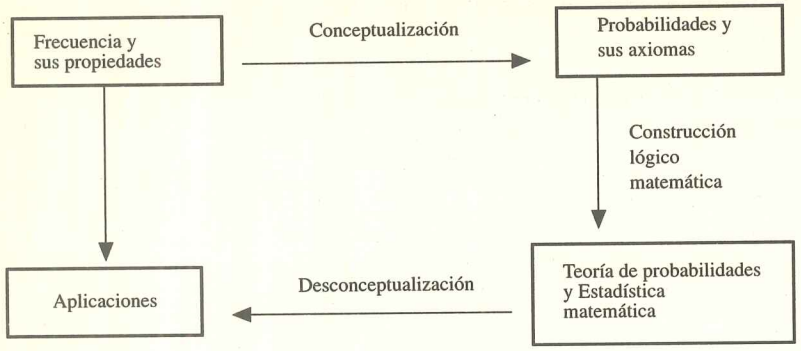


FIGURA 4

5.6. Aplicación del cálculo de probabilidades a la práctica

En las aplicaciones *prácticas* es necesario partir de unas probabilidades *iniciales* para calcular las de otros sucesos que nos interesen. Fijadas dichas probabilidades de sucesos elementales, se obtienen mediante la aplicación de los teoremas aquí demostrados las probabilidades de otros sucesos que interesen y la ley de regularidad estadística nos permitirá conocer así aproximadamente las frecuencias de dichos sucesos. Ahora bien, para llegar a obtener las probabilidades iniciales caben varios caminos:

1.° Determinación experimental de las probabilidades mediante las frecuencias correspondientes a los sucesos que se consideran en un gran número de pruebas: tal es el método que siguen los actuarios al determinar las probabilidades a partir de estadísticas de muertes, accidentes, en la industria para calcular probabilidades de producción de piezas defectuosas, o de fiabilidad (duración de una pieza), o en medicina, de curación de una enfermedad, etc.

2.° En ciertos casos puede calcularse el valor de algunas probabilidades si aplicamos el siguiente convenio: *Si un fenómeno aleatorio puede dar lugar a k sucesos elementales incompatibles dos a dos y tales que*

$$E = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k$$

y que podamos admitir que

$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_k)$$

tendremos

$$P(E) = P(a_1) + \ldots + P(a_k) = \frac{k}{k} = 1,\ P(a_i) = \frac{1}{k}$$

Además, si A es la unión h sucesos $a_1, \ldots, a_h$, será:

$$P(A) = P(a_1) + \ldots + P(a_h) = \frac{h}{k}$$

Así hemos sido conducidos a la clásica *regla de Laplace*: cociente de casos favorables por casos posibles considerados como equiprobables. Conviene *observar* que el cálculo anterior reposa sobre la admisión de la *igualdad de probabilidades*.

3.° Un tercer método es asignar *probabilidades personales o subjetivas* a los sucesos elementales, basándose en la comparación de situaciones reales con experimentos típicos como ruletas o bolsas con bolas.

Supongamos que un individuo se encuentra en una carrera de caballos y, como consecuencia de informaciones que tiene, está dispuesto a apostar en favor del caballo «Lindo» como si la situación fuera la misma que antes del suceso obtener blanca en una bolsa que tiene 5 blancas y 1 negra, es decir, como si la probabilidad de que «Lindo» ganara fuera $\frac{5}{6}$.

En definitiva, en esta interpretación de la probabilidad como *probabilidad personal* una vez asignadas por un individuo las probabilidades a los sucesos elementales, las probabilidades de otros sucesos se calculan por las mismas reglas de cálculo ya obtenidas y su interpretación se hace volviendo a la comparación con la bolsa de bolas, es decir, si después de una serie de cálculos el individuo ha llegado a obtener como probabilidad de un cierto suceso 0,85 interpretará que se encuentra ante una situación que es la misma que si estuviera interesado en el suceso «obtener bola blanca de una bolsa que contiene 85 blancas y 15 negras».

En cierto modo, se puede considerar este nuevo punto de vista personalista, también llamado *bayesiano*, como una generalización de la probabilidad obtenida a partir de una frecuencia en una serie larga de pruebas, a situaciones en que la información de que dispone el individuo es más incompleta y precaria. Por otra parte, consideremos que, en un gran número de aplicaciones usuales de las probabilidades, el hombre piensa más que en la repetición de un experimento y en su frecuencia en la *comparación* de la situación en que se encuentra (que no se va a repetir) con situaciones típicas definibles por una ruleta o una bolsa con bolas (p.e., el enfermo que va a decidir entre operarse o no).

Con esto podemos decir que la probabilidad se aplica también a los procesos de decisión en que se ha de *opinar* sobre la realización futura de sucesos futuros.

5.7. Lo que es y lo que no es una modelización: solución de Pascal al problema de De Meré

Tras la introducción del modelo probabilístico, la solución del problema de «de Meré» se reduce a lo siguiente: la probabilidad de la no aparición de un 6 en una tirada es $\frac{5}{6}$ y la de no aparición en 4 tiradas es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ y la de aparición de algún 6 en 4 tiradas, es decir, el suceso contrario será

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}516 > \frac{1}{2}$$

La probabilidad de no obtener doble 6 al lanzar dos dados es $\frac{35}{36}$ y la de ningún doble 6 al lanzar 24 veces es $\left(\frac{35}{34}\right)^{24}$ y la de obtener, al menos, un doble seis, o sea, el suceso contrario es : $1-\left(\frac{35}{36}\right)^4 \cong 0{,}491 < \frac{1}{2}$.

Al traducir estos resultados de probabilidades a las frecuencias se tiene la *explicación científica mediante un modelo matemático* de las observaciones hechas en sus largas series de juegos por el caballero de Meré.

Un análisis del fallo de las pobres Matemáticas que aplicaba de Meré conduce a las siguientes observaciones: no se trata, con la Matemática aplicada al explicar fenómenos reales, de utilizar de manera más o menos razonable tal o cual fórmula, sino de *crear* o *buscar* las matemáticas apropiadas que conduzcan al modelo matemático válido para la situación considerada. Esto último es lo que se llama concreta y correctamente *modelización*, según venimos insistiendo. Ver hasta qué punto el modelo se ajusta bien a la realidad, reiterando los experimentos, constituye la *validación* del modelo.

5.8. La ley genética de Mendel

Observación de un experimento y recogida de datos

Estudiando Mendel el cruzamiento de una variedad de guisantes amarillos y otra de verdes, observó que los guisantes verdes, al reproducirse, dan siempre verdes, pero los amarillos dan unos sólo amarillos, y otros amarillos y verdes. Estos amarillos, que dan sólo amarillos, forman una raza pura que da indefinidamente amarillos. Si se cruzan verdes con amarillos de raza pura se obtiene una primera raza de híbridos verdes. Si éstos se cruzan entre sí, se obtiene guisantes amarillos y verdes aproximadamente en la proporción 3 : 1. Mendel (1865), que realizó estas experiencias, obtuvo los siguientes resultados:

Planta núms.	NUMERO DE GUISANTES				Totales n_i
	Amarillos		Verdes		
	Frec. absol.	Frec. rel.	Frec. absol.	Frec. rel.	
1	25	0,69	11	0,31	36
2	32	0,82	7	0,18	39
3	14	0,74	5	0,26	19
4	70	0,72	27	0,28	97
5	21	0,62	13	0,38	34
6	20	0,77	6	0,23	26
7	32	0,71	13	0,29	45
8	44	0,83	9	0,17	53
9	50	0,78	14	0,22	64
10	44	0,71	18	0,29	62

Propiedades empíricas de los datos

Las frecuencias obtenidas condujeron a Mendel a la hipótesis o *modelo empírico* de que dicha generación de híbridos, al reproducirse, daba guisantes amarillos y verdes en la proporción 3 : 1.

Modelización

La explicación teórica, o modelo matemático, indicado por el propio Mendel, es el siguiente: las células somáticas de los seres vivos tienen un número par (constante para cada especie) de cromosomas, y las células reproductoras o gametos, exactamente la mitad. La formación de un nuevo ser consiste en la unión de dos gametos, con lo cual se tiene una célula fecunda con un número par de cromosomas, de la que, por particiones sucesivas, resulta el nuevo ser. En los cromosomas del guisante hay un corpúsculo (gene) portador del carácter color. En la raza híbrida, unos gametos llevan el gene V y otros el A, estando unos y otros en la proporción 1 : 1. Al formarse las células fecundas se pueden tener los siguientes tipos:

$$V_1 V_2, A_1 V_2, V_1 A_2, A_1 A_2$$

Estas posibilidades están equilibradas, ya que la proporción de V y A es la misma. Pero el gene A es dominante, es decir, cuando se encuentra con un gene V, el aspecto exterior del guisante es el mismo que si hubiera sido producido por dos genes A. De aquí resulta que la proporción de amarillos es 3/4, lo que constituye la llamada *ley de Mendel.*

Validación y predicción

Los experimentos posteriores han validado esta ley cuya importancia está en que permite la predicción, es decir, saber con una cierta probabilidad cuál será el resultado del cruzamiento de dos plantas de guisantes de las condiciones anteriores.

5.9. Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes

Para comprender la noción de *probabilidad condicionada* consideremos el siguiente ejemplo: Supongamos que 680 piezas de vulcanita se han inspeccionado de porosidad y dimensiones y se ha obtenido el siguiente cuadro de doble clasificación:

	Porosas (A)	*No porosas* ($\bar{A}$)	*Total*
Con dimensiones defectuosas (B)	14	33	47
Sin dimensiones defectuosas ($\bar{B}$)	120	504	624
	134	537	671

De esta tabla se obtienen las frecuencias de porosas: $fr(A) = \frac{134}{671}$, que será distinta de la frecuencia de porosas entre las de dimensiones defectuosas, que llamaremos frecuencia de A condicionada por B y escribiremos $fr(A/B) = \frac{14}{47}$. Análogamente, $fr(B/A) = \frac{14}{134}$. Además, la frecuencia de las porosas con dimensiones defectuosas será:

$$fr(A \cap B) = \frac{14}{671}$$

Evidentemente se tiene:

$$\frac{14}{671} = \frac{135}{671} \cdot \frac{14}{134}$$

o lo que es lo mismo:

$$fr(A \cap B) = fr(B/A)$$

o bien:

$$fr(B/A) = \frac{fr(A \cap B)}{fr(A)}$$

Esta relación se generaliza a las probabilidades, y pondremos en general:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

El suceso B se dirá *independiente* del A, si

$$P(B) = P(B/A)$$

en cuyo caso la fórmula anterior se simplifica y queda:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{(supuesto } P(A) \neq 0\text{)}$$

5.10. Modelos probabilísticos de crecimiento. Desintegración radiactiva

Los modelos deterministas de crecimiento estudiados en el Capítulo 2 pueden ser mejorados mediante modelos probabilísticos que permiten un conocimiento más profundo del fenómeno, tratando de explicar cuantitativamente las discrepancias aleatorias que se presentan en las predicciones que da el modelo determinista (2.3). A continuación veremos algún modelo probabilístico de crecimiento o de desintegración y, desde ahora, queremos destacar la diferencia entre estos modelos que predicen las probabilidades de que en un instante t la población tenga un cierto tamaño posible, mientras los deterministas se limitan a predecir la media de estos tamaños, lo que es mucho menos informativo.

Siguiendo las ideas anteriores vamos a indicar un modelo de desintegración radiactiva que perfecciona el de (2.5).

Recordemos que allí vimos que si tenemos una porción de materia con N_0 átomos radiactivos, la tasa media de desintegración en el intervalo $(t_0, t_0 + t)$ es proporcional a $N(t)$ número total de átomos no desintegrados.

Si $N(t)$ es grande se puede escribir $N'(t) = -\lambda N(t)$.

La solución de esta ecuación es $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ [1]

Si el número N_0 no es grande este modelo determinista no es utilizable.

Consideremos un solo átomo. Sea T una variable aleatoria igual al tiempo que debemos esperar para que tal átomo se desintegre. Se admite que el átomo no tiene memoria en el sentido de que la probabilidad de que se desintegre en un tiempo t no depende del momento en que empecemos a considerar ese tiempo; es decir:

$$Pr\,[T \geq t + x \,/\, T \geq x] = Pr\,[T \geq t]$$

Si $G(x) = 1 - F(x)$ en que $F(x) = Pr\,[T \leq x]$

será $G(t + x) = G(t) \cdot G(x)$; luego

$$G'(t) = \lim_{x \to 0} \frac{G(t+x) - G(t)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G(t)\,(G(x) - G(0))}{x} = G(t) \cdot G'(0)$$

Como $G(0) = 1 - F(0) = 1$, poniendo $\lambda = -\,G'(0)$ y obtenemos $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ que es la llamada *distribución exponencial.*

La probabilidad de que un átomo no se haya desintegrado en el tiempo t es $1 - F(t) = G(t)$ que para $N_0 = 1$ se reduce a la expresión [1]. Esto se justifica porque al ser $G(t)$ la probabilidad de que un átomo dado no se haya desintegrado en el tiempo t, el *número esperado* de átomos no desintegrados de los N_0 en el tiempo t, será $N_0 G(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, que coincide con [1]; es decir, λ es la tasa de desintegración y [1] nos da la trayectoria media del proceso de desintegración.

5.11. La distribución de Poisson

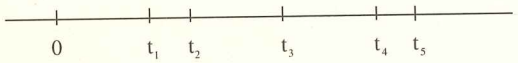


FIGURA 5

Consideremos una sucesión en el tiempo de sucesos aleatorios que tienen lugar en instantes t_1, t_2, ... Así, por ejemplo, llamadas a una central telefónica, desintegraciones de átomos radioactivos, impactos de partículas sobre un registrador Geiger-Müller, rayos cósmicos, etc.

El estudio de fenómenos de este tipo nos llevaría a considerar la ley de probabilidad de una variable aleatoria $\xi(t)$ que da el número de sucesos al variar t. Este estudio de procesos estocásticos o variables aleatorias que son funciones del tiempo es complicado y nos limitamos a considerar el intervalo de tiempo t fijo y calcular $P_k(t)$ probabilidades de k sucesos en el intervalo de tiempo t. Haremos las siguientes hipótesis:

1.° La probabilidad de un solo suceso en el tiempo t es asintóticamente $\lambda\Delta t$, es decir:

$$P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t = 0(\Delta t)$$

en que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

2.° La probabilidad de dos o más sucesos en el tiempo Δt es de un orden infinitesimal superior a (Δt), es decir:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t)}{\Delta t} = 0 \qquad (k > 1)$$

3.° Los números de sucesos en dos intervalos de tiempo no rampantes son variables aleatorias independientes.

4.° Las probabilidades $P_k(t)$ son las mismas a lo largo del tiempo.

Con estas hipótesis se obtiene fácilmente que la probabilidad $P_k(t)$ debe verificar la ecuación diferencial:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda\,[P_{k-1}(t) - P_k(t)] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se comprueba que la solución de esta ecuación es:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}; \; P_k(0) = \begin{cases} 1 \text{ para } k = 0 \\ 0 \text{ para } k > 0 \end{cases}$$

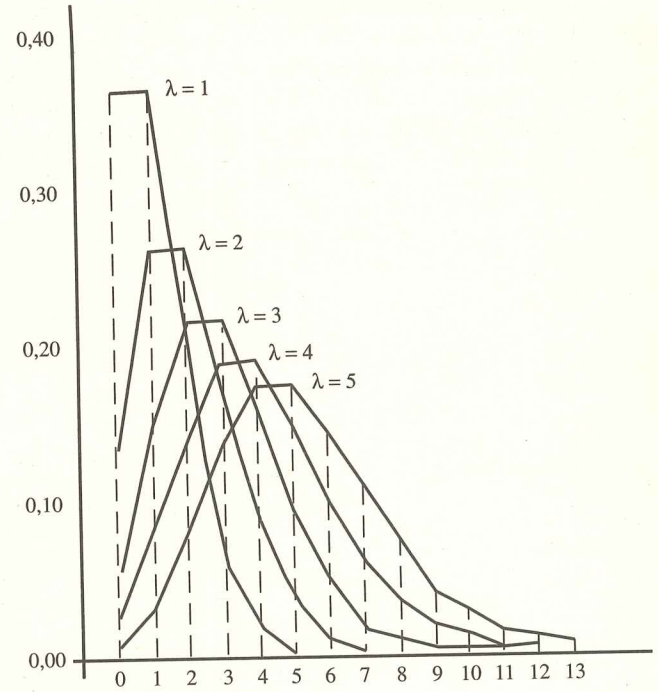


FIGURA 6

que es la *ley de Poisson* de parámetro λt. Se puede ver que el valor medio es λt, es decir, el número esperado de sucesos en un intervalo t es λt, luego λ viene a ser una medida de la densidad de sucesos en un intervalo t. Para $t = 1$, el valor medio es λ, es decir, es el número medio de sucesos por unidad de tiempo (fig. 6).

5.12. Experimento de Rutherford

Una sustancia radiactiva emite partículas α y el número de las que llegan a una cierta región del espacio en un intervalo de tiempo t es el mejor ejemplo conocido de sucesos aleatorios que obedecen a la ley de Poisson. Esto complementa el **E.2.3**, ya que calcularemos no sólo el promedio de partículas desintegradas en un cierto período de tiempo, sino la probabilidad de un cierto número de desintegraciones.

En los experimentos de Rutherford (1910), una sustancia radiactiva fue observada durante $N = 2.608$ períodos de 7,5 segundos; y se contó el número de partículas que alcanzaron el contador en cada período. El número total de partículas fue

$$T = \Sigma k P_k = 10.094$$

y el promedio $t/N = 3{,}870 \simeq \lambda t$

$$\lambda \simeq \frac{3{,}87}{7{,}5}$$

K = núm. de partículas	N_k = número de períodos con K partículas	Valores teóricos NP_k ($\lambda t = 3{,}87$)
0	57	54,399
1	203	210,523
2	383	407,631
3	525	525,496
4	532	508,418
5	408	393,515
6	273	253,817
7	139	140,325
8	45	67,882
9	27	29,189
$k \geq 10$	16	17,075
	2.608	2.608,000

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ es la probabilidad de que ningún átomo se desintegre en el intervalo de tiempo t. Poniendo

$$e^{-\lambda t} = 1/2;\ t = \frac{ln2}{\lambda}$$

es el tiempo en que la probabilidad de no desintegración es 1/2 y suele llamarse *vida probable* del átomo, y también semivida de la substancia radiactiva (véase la interpretación de **E.2.3**).

Si en el anterior razonamiento, que conduce a la distribución de Poisson, sustituimos el tiempo por longitud, área, volumen, somos conducidos a otras interpretaciones de la misma.

Así, el número de partículas (bacterias, células sanguíneas, partículas de cemento, etc.), en una cierta área del campo del microscopio, sigue una distribución de Poisson.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.5.1. Análisis estadístico de datos de operaciones militares

Frecuentemente en situaciones en que se presenta un gran número de datos y no hay muchas posibles complejidades en el origen de los mismos, su simple clasificación con métodos estadísticos, nos lleva a un modelo que puede ser simplemente un *histograma*, suficientemente útil y expresivo para obtener resultados interesantes.

He aquí algún ejemplo sencillo de cómo un análisis estadístico completamente elemental condujo en la II Guerra Mundial a una importante modificación en el empleo de un arma y en la eficacia de sus resultados. Cuando un bombardero detecta un submarino enemigo, pasa un cierto tiempo hasta que alcanza el punto en que debe lanzar sus cargas de profundidad. El submarino se sumerge tan pronto como se da cuenta por sus medios (acústicos, ópticos, radar, etc.) de que el avión atacante se está aproximando. Si el tiempo de inmersión es treinta segundos y el avión vuela a 420 kilómetros/hora, habrá recorrido en el medio minuto de inmersión del submarino 3,5 kilómetros. Teniendo esto en cuenta, se recogieron series estadísticas para ver cuánto se había sumergido el submarino al pasar el avión por el punto de ataque. En la siguiente tabla de valores

promedios se observó una pequeña dispersión alrededor de dichos promedios (esto es lo importante) de los datos obtenidos en muy distintos ataques y zonas del océano:

Tiempo de inmersión en segundos	Porcentaje de submarinos atacados
Nada	34
0-15	27
15-30	15
30-60	12
Más de 60	11
	100%

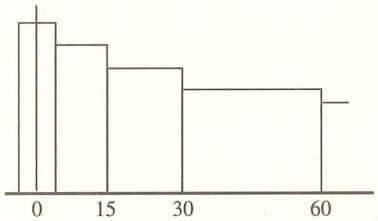


FIGURA 7

Estas cifras (representadas en el histograma fig. 7) ponen de manifiesto que, aun suponiendo que la espoleta de la carga esté calculada para la verdadera profundidad, el número de submarinos atacados disminuye muy rápidamente al aumentar el tiempo que el submarino ha estado sumergido. En primer lugar, la localización del submarino debía estimarse mediante la leve estela a partir del punto en que se sumergió. En segundo lugar, era desconocida la dirección que tomó el submarino al sumergirse. Teniendo, además, en cuenta la incertidumbre al calcular la profundidad, el problema se complicaba. Se trataba, pues, de encontrar medidas que aumentasen significativamente la probabilidad de que el avión detectara al submarino mientras que el avión no era detectado por el submarino a distancia superior a 3,5 kilómetros. Resultó que una reducción en un 20% en la distancia a la cual podía el avión ser detectado por el submarino correspondía un incremento de un 30% en la destrucción de submarinos. Esto puso de manifiesto la importancia de los incrementos incluso pequeños en la velocidad de los aviones y en la eficacia del enmascaramiento. Este trabajo condujo a perfeccionamiento en la técnica de

ataque a submarinos. Por ejemplo, el profesor Williams comprobó que pintando de blanco en vez de negro los bombarderos Whitey, podían acortar en un 20% su distancia a los submarinos sin ser vistos, lográndose de este modo, con un pequeño gasto de pintura, un incremento notable en la destrucción de submarinos.

Subrayemos aquí una de las características de muchos resultados de la Investigación Operativa con pequeño gasto y sin modificación de los armamentos pueden obtenerse grandes mejoras de eficacia.

E.5.2. Accidentes de tráfico

Las razones son, a veces, de magnitudes diferentes. Por ejemplo, la velocidad de un automóvil es la razón de los kilómetros recorridos a las horas empleadas. El número de accidentes mortales en avión se suele expresar en número de ellos por 1.000.000 de kilómetros de vuelo. Por ejemplo, si en 1947 el número de accidentes en Estados Unidos fue 222, en 425.000.000 de kilómetros, esta razón:

$$\frac{222}{425.000.000} \simeq 0{,}00000052$$

se expresa mejor como 0,52 accidentes por 1.000.000 de kilómetros de vuelo.

E.5.3. Paro laboral

Un porcentaje o razón da una medida adecuada de un fenómeno solamente si el numerador y denominador reflejan apropiadamente los elementos que se estudian. Por ejemplo: el número de habitantes de Estados Unidos en 1930 era de 62.137.080 hombres y 60.637.966 mujeres; el número de hombres sin empleo era 6.185.000 y el de mujeres 1.776.000. Si se calculan las correspondientes razones para tener idea del paro masculino y femenino se tiene una idea equivocada. Convendrá tomar como denominadores los números de hombres y mujeres que *desean trabajar*. De este modo se obtienen los siguientes tantos por ciento que reflejan bien la situación:

$$\frac{6.185.000}{40.284.000} \cdot 100 = 15{,}4\% \textit{ para hombres}$$

$$y \frac{1.776.000}{13.015.000} \cdot 100 = 13{,}6\% \textit{ para mujeres}$$

Estudiar con esta idea la situación española actual.

E.5.4. Si su familia guardase un registro diario de los gastos en alimentación, vestido, diversiones y alquiler, ¿cómo se haría una estadística de los gastos de todo el año?

E.5.5. Comentar la siguiente noticia de prensa: «Al aumentar la producción diaria de la fábrica H el 2,5%, el aumento semanal (5 días) resulta ser el 12,5%».

E.5.6. En 1965 murieron muchas más personas por accidentes de aviación que en 1930. ¿Basta esto para afirmar que en 1965 era más peligroso viajar en avión que en 1930?.

E.5.7. Hay menos accidentes de automóvil en España que en Alemania. ¿Basta esto para afirmar que es más peligroso viajar en automóvil en Alemania que en España?

E.5.8. Supongamos que una estadística de *accidentes de tráfico* de la provincia de Barcelona en un cierto mes nos da:

	Núm. de accidentes	Porcentaje
Conductor varón	367	94
Conductor hembra	23	6
	390	100

Hacer una representación de porcentajes mediante un gráfico de sectores. ¿Basta esto para afirmar que en dicho mes en Barcelona las mujeres han sido mejores conductoras que los hombres?

E.5.9. Mortalidad por cáncer

Se dice frecuentemente en la prensa que la proporción de muertos de cáncer aumenta constantemente, pero para que tal afirmación tenga un sentido claro y no pueda interpretarse como un retroceso de la Medicina en tal tratamiento, deben tenerse en cuenta, entre otros, los siguientes factores:

El diagnóstico es actualmente más preciso, de modo que muchos casos que hace unos años se habrían atribuido a «causa desconocida» se incluyen actualmente en el concepto de cáncer. Asimismo, la recopilación de datos estadísticos es hoy más completa que hace años, e incluso se practican en algunos países diagnósticos «post mortem» de fallecidos por «causa desconocida». Además, el progreso extraordinario en la curación de otras enfermedades y la higiene han dado como resultado una disminución en la mortalidad infantil, y por ser el cáncer una enfermedad principalmente de viejos, no es raro que haya aumentado la correspondiente tasa de mortalidad.

E.5.10. Seguridad del tráfico aéreo

La seguridad relativa de los viajes aéreos es un tema de gran actualidad y sobre el que se hace mucha propaganda periodística. Los que desean demostrar que el riesgo es muy pequeño, hacen estadísticas en que figura el número de accidentes por pasajero y kilómetro recorridos. En cambio, los que quieren exagerar el riesgo presentan las estadísticas de accidentes por pasajero y hora de vuelo. Tanto uno como otro punto de vista son excesivamente simplistas, ya que es muy diferente el riesgo de un vuelo según sea con o sin escalas, por encima del mar o no, etc.

E.5.11. Se lanzan tres monedas al aire. Calcular la probabilidad del suceso «al menos una cara».

E.5.12. Problema de d'Alembert

Se lanzan dos monedas al aire. Determinar la probabilidad de que las dos sean caras.

E.5.13. Problema de Galileo

Un jugador italiano expresó su sorpresa a Galileo, por observar que al jugar con tres dados la suma 10 aparece con más frecuencia que la 9. Según el jugador los casos favorables al 9 serían:

126	136
135	145
144	226

y al 10:

225	235
234	244
333	334

Pero Galileo, en su libro *Considerazione sopra il giuoco dei dadi*, vio que estas combinaciones no se pueden considerar igualmente probables.

Explicar por qué y calcular las correspondientes probabilidades.

E.5.14. En el lejano reino de Falandia a los condenados a muerte se les concedía la gracia de que su vida dependiera de que sacasen una bola blanca en el siguiente sorteo: Se ponían 50 bolas blancas en una urna y 50 negras en la otra, vendando los ojos al condenado y eligiendo éste una urna y tomando una bola de ella.

Mas en cierta ocasión, un reo pidió la gracia de que se le dejara distribuir las bolas de otro modo antes de hacer el sorteo. Tras alguna discusión de los

expertos se le concedió la gracia y colocó una blanca en una urna y en la otra 49 blancas y 50 negras.

¿Cuál resultó de este modo la probabilidad de salvar la vida?.

E.5.15. Herencia del albinismo

El albinismo en los seres humanos es un carácter mendeliano simple. Se designará con a y n al gene albino y no albino. El n es dominante (análogo al color amarillo en el guisante), de modo que padres con genes n no pueden tener un hijo albino al menos que ambos sean (na). Supongamos que en una gran población la probabilidad de genes n es p y la de a es $q = 1 - p$.

1.° Suponiendo que el albinismo no sea un factor en la selección matrimonial ni en el número de hijos, ¿qué proporción de individuos de la próxima generación serían albinos?

2.° Si los albinos se casaran sólo con albinos, ¿qué proporción de individuos de la próxima generación serían albinos?

E.5.16. ¿Cómo jugar un juego equitativo con una moneda incorrecta?

E.5.17. Política de Sultán

El Sultán x tiene el propósito de establecer una política que incremente la proporción de mujeres para que los harenes del país estén adecuadamente dotados. Más he aquí que, como nacen aproximadamente los mismos niños que niñas, no es fácil la solución de tal problema. Sometido el asunto al visir, éste le propone la siguiente solución: promulgar una ley que diga que tan pronto como una mujer tiene el primer varón no debe tener más descendientes.

De este modo, al cabo de cierto tiempo habrá familias todas con un solo varón y con una, dos, tres,..., diez,..., etc., hijas y, evidentemente con esta estructura de familias la proporción de mujeres en el país habría aumentado.

Comentar tal solución.

E.5.18. Problema del reparto

El segundo problema propuesto por de Meré es el del reparto: A y B han convenido en jugar un conjunto de partidas de un juego equitativo, que ganará el primero que consiga 5 puntos. Cuando A ha ganado 4 puntos y B, 3, deciden terminar y repartirse la puesta. ¿Cuánto debe recibir cada jugador?.

De Meré proponía que el reparto se hiciera en la proporción 4:3, mientras otros proponían en la razón (5-3):(5-4) (siempre utilizando fórmulas sin base matemática).

Probar que la proporción debe ser 3:1.

E.5.19. El esquema de un circuito eléctrico entre dos puntos P y Q se encuentra en la figura 8. Sea A el suceso que el interruptor a está cerrado, B_1 que está cerrado el b_1, y B_2 que está cerrado el b_2. Expresar el suceso C de que el circuito está cerrado entre P y Q.

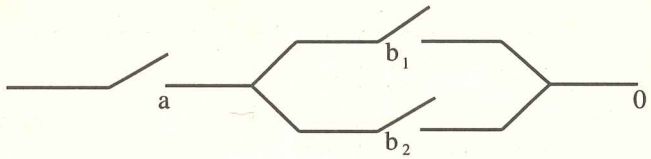


FIGURA 8

E.5.20. Fiabilidad funcional de un satélite artificial

Se llama «fiabilidad» de un sistema A (computadora electrónica, cohete, satélite artificial, etc.), a la probabilidad $p(A)$ de que el sistema funcione con éxito durante un tiempo fijado.

Corrientemente un sistema está compuesto por varios subsistemas cuyo éxito o fallo afecta al éxito del sistema total.

Sea:

A: suceso «que el sistema total funcione con éxito».

A_i: suceso «que el subsistema i funcione con éxito».

Sea $P(A)$ la fiabilidad del sistema total.

$P(A_i)$ la fiabilidad del subsistema i.

Un *sistema serial* se caracteriza porque el sistema total opera con éxito, si, y sólo si, todos los subsistemas funcionan con éxito.

Un segundo tipo de acoplamiento de sistemas parciales es *en paralelo.* Tal sistema se caracteriza porque funciona si al menos uno de los subsistemas funciona.

a) Sea A un sistema formado por 10 subsistemas acoplados en serie. Calcular su fiabilidad sabiendo que $P(A_i) = 0{,}99$, $i = 1, 2,...,10$.

b) Idem para dos subsistemas en paralelo y $P(A_i) = 0{,}90$, $i = 1,2$.

E.5.21. En Geometría se puede abordar el problema práctico de conocer la medida de un segmento con una cierta unidad, p.e., el lado del cuadro tomando el radio como unidad por uno de estos tres métodos: a) se mide con una regla un cierto número de veces y se toma la media; b) se considera que por un teorema de Geometría basado en unos axiomas el lado del cuadrado es $\sqrt{2}$ y se traslada este resultado teórico a la realidad; c) se mide «a ojo». Comparar estos tres métodos con los indicados para obtener la probabilidad de un suceso.

E.5.22. En los siguientes ejercicios se puede admitir que la variable estudiada sigue una ley de Poisson. Determinar esta ley.

a) El número de *llamadas telefónicas* recibidas por minuto en un cuadro de distribución en un determinado período del día da la siguiente tabla:

N.º de llamadas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frecuencia	50	151	220	230	160	100	49	22	7	3	1	0

b) El número de *automóviles* que pasan por un punto determinado de una carretera en cada minuto a cierta hora del día da la siguiente distribución:

N.º de automóviles	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	16	29	27	15	6	4	1	0

c) El número de *colonias bacteriológicas* en un determinado cultivo por 1 mm² da la siguiente distribución:

N.º de colonias	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Frecuencia	10	50	100	168	190	180	120	80	45	20	8	7	2	1	0

d) El número de *errores tipográficos* por página en material impreso da la siguiente distribución:

N.º de errores	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	40	30	15	7	2	1	0

e) El número de veces que es requerido, en un período de tiempo, *el servicio de una grúa* en un taller mecánico, da la siguiente distribución:

N.º de servicios	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia	1	4	10	15	20	16	10	8	3	3	1	1	0

E.5.23. Dosificación de vacunas

Supongamos que en la producción de una cierta *vacuna*, se ha llegado a una etapa en que se sabe que el contenido medio de virus es m por cm³. En un gran recipiente de V cm³ existirán $n = mV$ virus vivos. Si tomamos una muestra de V centímetros cúbicos, determinar las probabilidades de que contenga $k = 0, 1, 2,..., n$ virus vivos, suponiendo que los virus están dispersos uniforme e independiente en el recipiente. Aplicación al caso de que $m = 0{,}005$, $V = 600$ cm³.

STUDENT (1876-1937)

Introductor de la teoría de pequeñas muestras mediante el Método Montecarlo o muestreo artificial.

6. MODELOS DE SIMULACIÓN Y MÉTODO DE MONTECARLO

«At this crisis the mathematicians John Von Neumann and Stanislas Ulam cut the Gordian knot with a remarkably simple stroke.»

D. Mc. Cracken, 1955

6.1. Cálculo de integrales por Montecarlo

Como ya indicamos en [1.7], se conocen con el nombre de *simulación* y *Montecarlo* algunos métodos que permiten resolver problemas que no se saben reducir a un modelo matemático tratable por métodos matemáticos convencionales.

Se suele considerar que un problema cuyo modelo es probabilístico es susceptible de tratamiento por *simulación*, mientras se habla más concretamente de *simulación por Montecarlo* cuando el modelo inicial es determinista y éste se sustituye por uno probabilístico.

En ambos casos, tras llegar al modelo probabilístico, se calculan las probabilidades estimándolas por las correspondientes frecuencias, obtenidas a través de un muestreo artificial.

La simulación permite estudiar el comportamiento de un sistema por método indirecto, cuando los experimentos son difíciles o muy costosos o tienen carácter destructivo. P.e., no existen métodos analíticos sencillos que permitan resolver los problemas de tráfico en un nudo de comunicaciones y, en cambio, estos métodos pueden permitir soluciones rápidas y sencillas de los mismos. Veamos algún ejemplo sencillo.

Sea calcular

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

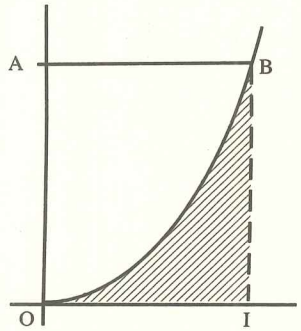


FIGURA 1

En este caso se trata de un problema determinista y para tratarlo por el método Montecarlo hay que buscar un modelo probabilístico que dé el mismo resultado que el cálculo clásico de dicha integral. Si tenemos en cuenta que tal integral se interpreta como área del segmento parabólico rayado en la figura 1, podemos considerar dicha área también igual a la probabilidad de que, al tomar un punto al azar en el cuadrado OABI, caiga en el área rayada, ya que dicha probabilidad es:

$$\frac{\text{Área } OBI}{\text{Área } OABI} = \text{Área } OBI$$

Se trata ahora de estimar dicha probabilidad mediante una frecuencia por un muestreo apropiado.

Tomamos números aleatorios, p.e., con dos cifras decimales para x y para y del intervalo (0,1), y consideramos el punto de coordenadas (x, y). Si es $x^2 \leq y$ el punto (x, y) pertenece al segmento de parábola, y si $x^2 > y$ el punto es exterior y consideramos el suceso desfavorable. Repetida la doble experiencia N veces, si se han encontrado n sucesos favorables, la frecuencia $\frac{n}{N}$ se puede considerar como una estimación de la probabilidad de que el punto tomado al azar caiga en el área OIB, o sea, de la

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

6.2. Algunos problemas de aplicaciones industriales

En muchos problemas industriales la aplicación del Método de Montecarlo se reduce a la idea sencilla siguiente:

Supongamos un proceso cuyo resultado depende de dos factores A y B. Supongamos que podemos controlar A, pero no B, y que fijado A, B varía. ¿Cómo podemos evaluar las elecciones alternativas de valores de A? Para cada valor de A tomamos una muestra de valores de B y obtenemos la distribución correspondiente. Comparamos estas distribuciones, p.e., mediante sus medias y elegimos aquel valor de A que da el mejor resultado promedio.

Este esquema es muy amplio y vamos a ver sobre ejemplos la aplicación del Método de Montecarlo a varios tipos de problemas que, teóricamente, podrían tratarse por otros modelos pero que por su complejidad o dificultad han de resolverse por Montecarlo.

Vamos a ver algunos problemas de colas, reemplazamiento, inventarios, etc., tratados por este método.

Ejemplo 1. Un problema de reemplazamiento de equipos

Se trata de un problema típico que se presenta en el reemplazamiento de instalaciones averiadas, manteniendo a punto una planta siderúrgica.

Una factoría consta de una planta de fundición con dos conjuntos de tres antecrisoles que alimentan un cubilote común, estando cada conjunto de antecrisoles incluido en un horno (fig. 2).

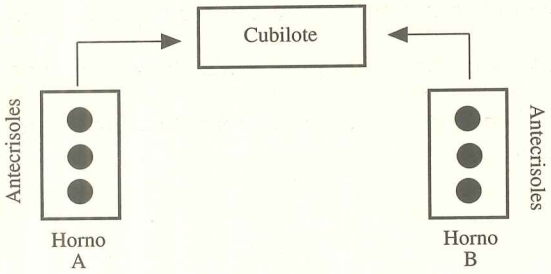


FIGURA 2

El fallo de un antecrisol implica el paro de todo el horno correspondiente por un período de reparación que puede llegar a veinte días. Durante este tiempo se reemplazan los tres antecrisoles y se sobrecarga de trabajo en lo posible el otro horno.

Puede ocurrir también que durante el período de reparación del primer horno falle un antecrisol del segundo, y tenemos un doble fallo, que interrumpe la producción, y hay que tratar de que su frecuencia sea la menor posible.

Tratamos de ver cómo podemos determinar tal frecuencia, que depende, naturalmente, del período de reparación. Concretamente vamos a calcular las probabilidades de 0, 1 y 2 ó más dobles fallos en un intervalo de tiempo de seis meses. Estas probabilidades las calcularemos suponiendo períodos de reparación de 8, 12, 16 y 20 días, para poder después comparar.

El dato básico para resolver este problema es conocer la distribución de duraciones de antecrisoles que se supone han trabajado en condiciones similares a las de la nueva instalación.

Un muestreo experimental nos permite obtener artificialmente datos de la planta que se proyecta (fig. 3).

Se toman ternas de números aleatorios de dos cifras mediante una tabla de números aleatorios. P.e., si una primera terna es 87, 12, 45, cada uno de estos tres números se puede transformar mediante la distribución de partida en la vida de un antecrisol; pero basta transformar el mínimo de los tres, ya que lo que nos interesa es la vida de un horno, y ésta es igual a la menor de las de sus tres antecrisoles. Este número 12 es el que transformamos mediante la distribución, obteniendo 86 días (fig. 3), que significa que el 12 por 100 de la

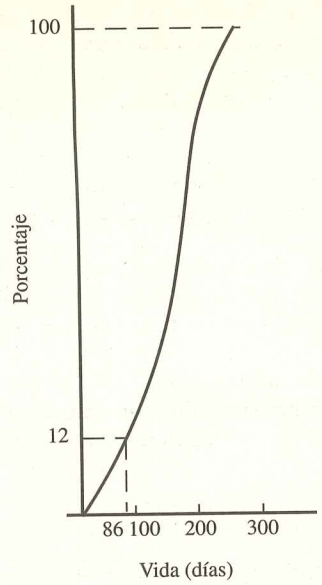


FIGURA 3

población de antecrisoles da una duración ≤ 86 días. De este modo se puede obtener un gran número de duraciones para el horno *A* y formar la tabla adjunta.

TABLA I

HORNO *A*		HORNO *B*		Doble fallo
Vidas	Instante del fallo	Vidas	Instante del fallo	
86	86	73	73	•
132	234	227	316	
172	422	175	507	
132	570	184		
60	646			
80	720			•

En ella aparecen para el horno A una serie de duraciones en la primera columna, y los números de la segunda representan los momentos de comienzo de fallo del horno A, suponiendo que el período de reparación sea 16 días. El primero es el mismo número 86 de la columna primera, el segundo es 234 = 86 + 16 + 132, el tercero es 422 = 234 + 16 + 172, etc.

Para el horno B se hace lo mismo con nuevas ternas de números aleatorios, y se prevé que cuando la diferencia entre los momentos de fallo de uno y otro horno es menor de 16 días, estamos ante un doble fallo. Tal ocurre en los 86 - 73 = 13 < 16.

Anotamos estos dobles fallos con un asterisco en la quinta columna. De este modo, se puede prolongar el experimento hasta obtener un gran número de fallos (p.e., 500), y estos cálculos hacerlos para períodos de reparación de 8, 12, 16 y 20 días.

Fijado el período de reparación, por ejemplo, 16 días, mediante series correspondientes se puede obtener la distribución de intervalo de tiempos entre dos dobles fallos. Se encontró que esta distribución se ajusta bien a la exponencial

$$\frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$$

Como $E[x] = \mu$, resulta que la distribución queda determinada por la media de los tiempos entre dos fallos. Para valor medio, tomando 20 días como período de reparación, se obtuvo $\mu = 570$ días, y para períodos de 8 días, $\mu = 1.070$ días.

El número medio de dobles fallos en un tiempo T será, pues, T/μ

Las probabilidades de 0, 1, 2,... dobles fallos en un cierto tiempo se pueden calcular por la distribución de Poisson:

$$e^{-\lambda T} \frac{\lambda^r}{r!}$$

En la tabla II figuran las probabilidades de 0, 1 y 2 ó más dobles fallos en medio año, correspondientes a distintos períodos de reparación. Se ve que para los distintos períodos de reparación la probabilidad del doble fallo es considerable, pero la de 2 ó más es muy pequeña.

TABLA II

	TIEMPO DE REPARAR EN DIAS			
r	8	12	16	20
0	0,85	0,81	0,78	0,73
1	0,14	0,17	0,19	0,23
≥ 2	0,01	0,02	0,03	0,04

Ejemplo 2. Un problema de colas

En un problema de colas hay que considerar:

1) Mercancías, personas, etc., que llegan a un cierto sitio para requerir un servicio o actividad (*sistema de ingreso*). Puede ser: clientes que llegan a una ventanilla, mercancías que llegan a un depósito para empaquetar o paquetes que llegan a un puerto para expedir, aviones que llegan a un aeropuerto en mal tiempo durante operaciones militares extensas, etc.

2) *Sistema de servicios* requeridos por el ingreso: personal de venta o funcionarios de empaquetar, etc.

3) *Disciplina* de la cola, orden en que las unidades son servidas.

4) Las *salidas, output,* son las ventas, paquetes hechos, aviones que aterrizan, etc.

Los problemas son:

1) Demasiada demanda para los medios existentes, en cuyo caso hay cola por no haber bastantes facilidades.

2) Poca demanda, en cuyo caso hay un exceso de tiempo inactivo para el sistema de servicios, lo cual es antieconómico.

Se trata de obtener un óptimo teniendo en cuenta los costes asociados a la línea de espera y los tiempos inactivos. Este óptimo se puede conseguir, o regulando la corriente de unidades que requieren servicios (cuando es posible) o empleando la adecuada cantidad de facilidades. Es decir, si las facilidades son fijas, se puede regular la corriente de ingreso para hacer mínima la suma de costes de tiempos de espera y tiempos de vacío de los empleados. Si la corriente no está sujeta a control, se puede instalar la cantidad de facilidades de servicio que haga mínimo el coste total de la operación.

Sea el caso concreto de envío a domicilio de fardos de mercancías compradas en un almacén. Si se trata de tener personal suficiente para enviar en el día a cada consumidor, sería necesario un gran número de empleados, camiones, etc. Si se tienen pocos se pueden perder clientes por lentitud en el servicio o bien necesitar pagar facilidades suplementarias. ¿Cómo decidir la amplitud del servicio?

Una posible, pero no práctica, manera de tratar el problema sería probar con diferentes amplitudes de servicio los resultados. Evidentemente no es conveniente desde el punto de vista práctico. Se ve así la ventaja del método Montecarlo, *que puede darnos estos resultados, sin hacer modificaciones reales en el servicio.*

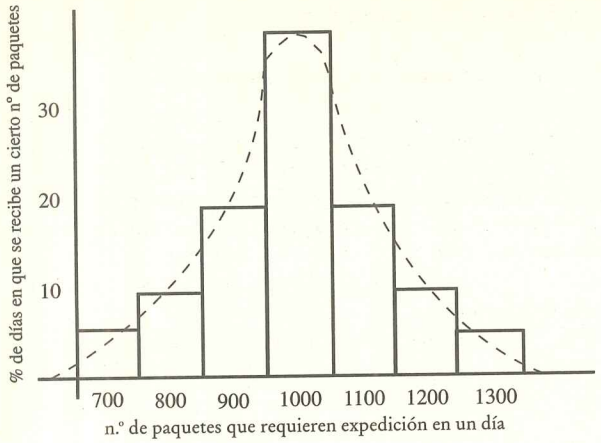


FIGURA 4

Lo primero es estudiar el ingreso de los paquetes en la oficina de expedición. Esto es, saber cuántos paquetes llegan cada día. Este número no es constante, sino que varía de un día a otro. Se puede recoger información, por ejemplo, de un año, y resumirla en un histograma (veáse fig. 4).

Una curva normal N (1.000, 100) se ha ajustado a este histograma.

A continuación se ve el número de paquetes repartidos por un camión en ocho horas de un día. Se encuentra otra distribución representada por el histograma de la figura 5, al que se ha ajustado una distribución normal N (100, 10).

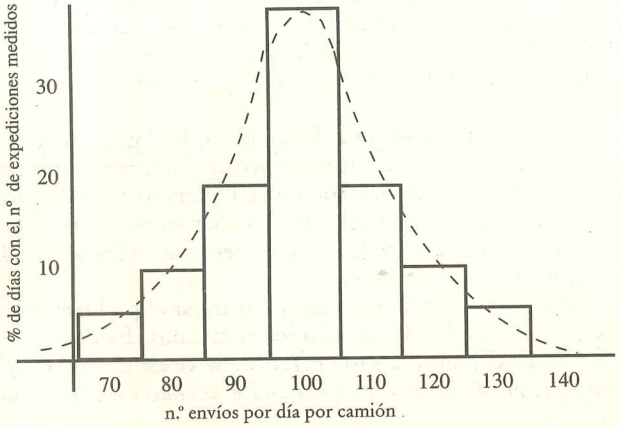


FIGURA 5

Para determinar el número de camiones que deben emplearse son necesarios otros dos elementos de información. Primero, el coste por día y camión. Tanto costes fijos como variables. Segundo, cuánto representa el coste del retraso en los envíos por día. En muchos casos es difícil estimar este coste. Se puede estimar mediante estadísticas de ventas y expediciones. Esencialmente habría que ver la diferencia de negocio de clientes que siempre han recibido servicio en el día y aquellos que tienen que aguardar diferentes tiempos en distintas ocasiones.

Se pueden plantear ahora varios problemas:

a) Cuántos camiones son necesarios para repartir el 90 por 100 de los paquetes en el día que llegan.

b) Cuántos camiones son necesarios para repartir el 90 por 100 de los paquetes en el 95 por 100 de los casos en el día que llegan.

c) Cuántos camiones son necesarios para enviar 75 por 100 de los paquetes en el día y todos los otros en dos días.

d) Cuál será el retraso promedio asociado con amplitudes de equipo de 10, 12, 15 camiones.

e) Tiempo suplementario para expedir en el día todos los paquetes.

TABLA I

		Número de paquetes recibidos				Número de paquetes expedidos		% Expedido	
1	2	3	4	5	6	7	8		
núm. de camiones		valores de la la tabla	valores convert. 100+100(3)	requeridos totales col(4) + + col(8)	desvia-ción normal	valor convert. 10 × N(100,10)	sobrante	1.° día	3.° día
	1	2,455	1.246	1.246	–0,323	968	278	78	22
	2	–0,531	947	1.225	–1,940	806	419	56	44
	3	0,634	937	1.356	0,697	1.070	286	69	31
10	4	1,279	1.128	1.414	3,521	1.352	62	95	5
	5	0,046	1.005	1.067	0,321	1.032	35	97	3
Promedio								79	21
	1	2455	1.246	1.246	–0,323	1.161	85	93	7
	2	–0,531	947	1.032	–1,940	967	65	94	6
	3	–0,634	937	1.002	0,697	1.284		100	
	4	1,279	1.128	1.128	3,521	1.622		100	
	5	0,446	1.005	1.005	0,321	1.238		100	
Promedio								97	3
	1	1,455	1.246	1.246	–0,323	1.452		100	
	2	–0,531	947	947	–1,940	1.209		100	
	3	–0,634	937	937	0,697	1.605		100	
	4	1,279	1.128	1.128	3,521	2.028		100	
	5	0,446	1.005	1.005	0,321	1.548		100	
Promedio								100	

Cada uno de estos problemas se pueden resolver por Montecarlo. Consideremos el d), de comparación de equipos de 10, 12 y 15 camiones.

Se comienza preparando la tabla adjunta.

Se ha tomado una muestra de cinco días. La columna 3 contiene 5 desviaciones normales (0,1), que en la 4 se han convertido en $N(1.000, 100)$. En la 6, otras 5 desviaciones normales (0,1), que se han convertido en la 7 en $10 \times N\ (100,10)$. En la 8 son los números de paquetes que no se han podido servir en el día, y en la 5 se han acumulado éstos a los del día.

Se ha obtenido que para 10 camiones un promedio del 79 por 100 de paquetes se expiden en el día de llegada. Para 12, el 97 por 100, y para 15, el 100 por 100.

En el problema e) se trata de conocer el tiempo suplementario necesario para expedir (en el caso de un equipo de 10 camiones) todos los paquetes en el día. El primer día sobraron 278 paquetes. ¿Cuántas horas requeriría el enviar estos paquetes en promedio?

$$278 \div \frac{100}{8} = 22{,}2\ \textit{horas}$$

En el segundo día quedan 947-806 = 141, que requieren

$$141 \div \frac{100}{8} = 11{,}3\ \textit{horas}$$

Para lo otros es cero, ya que los números de la columna 7 (capacidad de envío) son mayores que los de la 4 (envíos requeridos). Luego el promedio es:

$$\frac{22{,}2 + 11{,}3}{5} = 6{,}7$$

El coste de esta cantidad de tiempo suplementario se puede comparar con el mantener un equipo más extenso.

La solución de estos problemas estadísticos es la base para la comparación desde el punto de vista económico de las distintas soluciones presentadas.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.6.1. Reemplazamiento de equipos

Sea una instalación que contiene un cierto número de lámparas y en la que se debe reponer **inmediatamente** una lámpara que falla. En términos de coste de trabajo puede ser que el coste de equipo especial para instalar **una sola** unidad sea muy caro (p.e., porque haya que poner andamios). Si se renuevan **todas** las lámparas a intervalos se ahorrará trabajo; pero aumentará la pérdida por materiales no usados hasta el fin. El problema es determinar cuándo se debe hacer el reemplazamiento total para hacer mínimo el coste total.

E.6.2. Carga y descarga de calderas

Se tiene que realizar un nuevo proceso químico en una serie de calderas. El trabajo asociado con tal proceso consiste en vaciar y cargar cada caldera.

El vaciado se puede considerar instantáneo, pero cargar es un complejo de operaciones manuales, con una distribución de tiempos de un tipo muy asimétrico, conocida de otros procesos análogos, representado en la figura 6. Se ha propuesto situar a un operario para cargar 10 calderas en fila. Cuando se enciende una luz debe recorrer la fila vaciando y llenando las calderas, como indica la tabla:

Caldera	1º	2º	3º	...
Vacía	0	t_1	$t_1 + t_2$	...
Cargada	t_1	$t_1 + t_2$	$t_1 + t_2 + t_3$	...

El tiempo medio de reacción depende del intervalo entre las señales sucesivas. ¿Cuál debe ser el intervalo de tiempo entre las señales para dar un tiempo medio de reacción requerido T? ¿Qué variación alrededor de este tiempo medio T puede esperarse?.

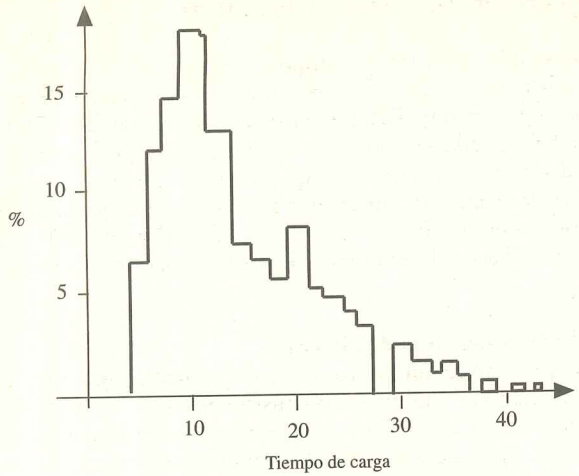


FIGURA 6

E.6.3. Problema de artillería y bombardeo

En los laboratorios de armamento se realizan cálculos y experiencias para evaluar la eficacia de cada arma, y aunque no sea ésta precisamente una misión del investigador, sino, más bien, coordinar y ajustar el equipo, personal, entrenamiento, etc., para una operación real, puede ser muy interesante su aportación en este campo, ya que las armas no se utilizan de una manera aislada, sino en grupos, y los resultados dependen de los esquemas o tipos de fuego utilizados.

El número de proyectiles, bombas, torpedos, etc., necesarios para destruir un blanco depende de dos factores fundamentales: la destructividad del proyectil, es decir, la probabilidad de que si el blanco es alcanzado sea destruido, y la precisión o probabilidad de que el blanco sea tocado. Teniendo en cuenta estas nociones se presentan una serie de importantes problemas que se refieren al cálculo de probabilidades de destruir blancos de diversos tipos y a la determinación de clases de fuegos que crean la máxima destrucción.

De algunos de estos problemas puede darse una solución exacta si se consideran en forma esquemática muy simplificada, por ejemplo, el problema de la destrucción de un nudo ferroviario mediante el lanzamiento de dos bombas de aviación de características conocidas. Pero en cuanto los problemas son algo más complicados, hay que recurrir a métodos aproximados, que no siempre dan la precisión requerida, o bien al método de muestreo artificial, que tiene la ventaja de que, en principio, se puede llegar con él a soluciones tan aproximadas como se desee.

Esencialmente este método se reduce a calcular la probabilidad de destrucción para una clase fuegos, haciendo sobre el papel pruebas artificiales repetidas y observando en cada prueba si el blanco es o no destruido. Cada prueba se desarrolla tomando al azar una desviación de puntería de una población artificial de éstas y una balística para cada proyectil tomada de una población artificial de desviaciones balísticas. Así se determina el impacto de cada proyectil teóricamente lanzado y si destruye o no el blanco. Haciendo un número suficientemente grande de pruebas y el promedio de sus resultados, se obtienen la destrucción media conseguida, permitiendo este método la comparación de las diversas clases de fuegos.

Como ejemplo, consideremos el siguiente problemas: un avión lanza dos cohetes bajo un ángulo de 30° a un emplazamiento circular de artillería situado a una distancia de 1.500 metros. El emplazamiento artillero tiene R metros de radio y queda destruido si algún cohete lo toca. Los cohetes son lanzados desde guías paralelas, distantes tres metros a uno y otro lado de la línea central del avión. Si suponemos que la desviación de puntería sigue una ley normal con $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}010$ y la desviación balística de los cohetes sigue también la ley normal con $\sigma'_x = \sigma'_y = 0{,}005$, se desea calcular la probabilidad de destruir el blanco (fig. 7).

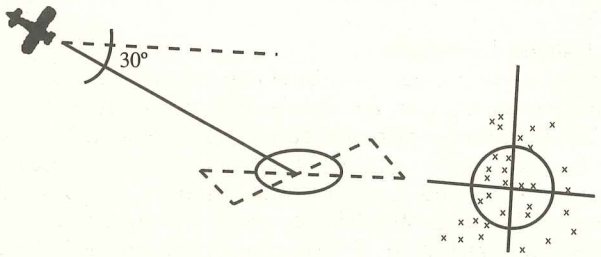


FIGURA 7

Reducimos primeramente los errores típicos a longitudes: 0,010 de 1.500 metros resulta ser 15 metros, y 0,005 se convierte en 7,5 metros. Estos errores típicos se refieren a un plano perpendicular a la línea de tiro de los cohetes. Para pasar a los errores en el terreno hay que dividir por cos 60°. Esto convierte el error típico de puntería σ_x en 30 metros y el balístico σ'_x en 15 metros.

Si llamamos (x_1, y_1) las coordenadas del impacto del cohete de estribor, izquierda, se tiene:

$$X_1 = X_a + X_{b1}$$
$$Y_1 = Y_a + Y_{b1} + 3$$

en que X_a, Y_a son los errores de puntería del disparo y X_{b1} y Y_{b1} los errores balísticos del cohete. Análogamente, las coordenadas del impacto del cohete a babor, derecha, son:

$$X_2 = X_a + X_{b2}$$
$$Y_2 = Y_a + Y_{b2} - 3$$

en que X_a, Y_a, X_{b1}, Y_{b1}, X_{b2}, Y_{b2}, son variantes aleatorias normales con las siguientes desviaciones típicas.

$$\sigma_{xa} = 30 \text{ m} \qquad \sigma_{ay} = 15 \text{ m}$$
$$\sigma_{xb} = 15 \text{ m} \qquad \sigma_{yb} = 7{,}5 \text{ m}$$

Cada pareja de impactos requiere obtener seis desviaciones normales mediante una tabla de números aleatorios, o mejor mediante una tabla de Wold de desviaciones normales. Los cálculos se hacen rápidamente para una muestra, y los resultados, un par de puntos por cada pareja de cohetes, se representan sobre una hoja de papel milimetrado. Esta presentación permite obtener inmediatamente, por ejemplo, para un radio R la frecuencia de pares con, al menos, un impacto interior al círculo.

E.6.4. Cálculo del número π

Supongamos que se quiere calcular el número π, del cual se conocen una definición geométrica y gran número de cifras; pero imaginemos que no se hubiera aún calculado por métodos clásicos. Un método de Montecarlo aplicado a este problema es el siguiente: 1) Según un resultado clásico de Buffon, si se tiene una red de paralelas en un plano a distancia 1 y se lanza al azar una aguja de longitud 0,5, la probabilidad de que corte a un recta es $1/\pi$.

Como se ve, el método de Montecarlo consiste en sustituir un modelo matemático determinista por otro estocástico, reduciendo el problema a un problema de estimación. Realizada tal sustitución, estamos dentro del método que hemos llamado muestreo artificial, y todo se reduce a utilizar tablas de número aleatorios, máquinas de calcular, etc., para jugar rápidamente un gran número de partidas o experimentos artificiales.

E.6.5. Juegos simulados

En el método de Montecarlo están inspirados los llamados «juegos simulados» cuya idea general es formar un modelo de una operación típica, haciendo un programa de la serie de sucesos con reglas deterministas, cuando así sea en la realidad, y con reglas probabilísticas, en caso contrario. Ello nos permitirá obtener resultados experimentales análogos a los de la realidad. Incluso cabe dar entrada en el modelo, al juicio y a la competición humana y observando cómo una persona inteligente aprende el juego y lo desarrolla, podemos intuir mucho respecto a las operaciones en la realidad.

Este método, llamado también «técnica de juego» u «operaciones experimentales simuladas», no debe confundirse con la teoría de juegos de que luego se habla y de la que puede ser un instrumento útil.

Los llamados «juegos de empresas», «juegos de la guerra», son variantes de estas ideas generales. P.e., durante la II Guerra Mundial varias tácticas de localización de submarinos fueron estudiadas por tal procedimiento. Las reglas para el jugador submarino le permitían varias horas de inmersión, durante las cuales él no podría ser visto desde el aire y podría ver al avión sólo a una corta distancia; cuando estaba en la superficie podría ser visto por el avión y ser atacado a menos que se sumergiera a tiempo. Se construyó un aparato con contactos eléctricos para reproducir este juego de modo que el jugador submarinista y el jugador aviador se podían mover sobre planos, sin verse uno a otro. Según afirma Morse, este juego permitió en pocas semanas aprender sobre la teoría de la localización más que en seis meses de estudios analíticos.

El método de trayectorias aleatorias para resolver ecuaciones en derivadas parciales es un método de Montecarlo. Se cita porque se ha visto que la distribución de submarinos en un océano es aproximadamente una solución de la ecuación de Laplace con bases amigas formando una frontera de potencial cero y bases y barcos enemigos formando una frontera de potencial unidad. Una cuestión interesante que se puede abordar por el método de trayectorias aleatorias es la de mover los barcos y bases para obtener la distribución más uniforme posible de submarinos.

E.6.6. Colas en las clínicas

Un curioso resultado obtenido por Bailey, estudiando los tiempos de espera en la clínicas de Cambridge, es el siguiente: un procedimiento para reducir al mínimo el tiempo medio de espera de los pacientes y el tiempo vacío de los médicos consiste en citar a los pacientes con intervalos iguales al promedio de la duración de las consultas y comenzar la consulta teniendo dos pacientes en la sala de espera.

BAYES (1702-1761)

Introductor de una nueva teoría de la inferencia estadística, hoy vigente, basada en su teorema y en su original concepto de probabilidad subjetiva.

7. INFERENCIA ESTADÍSTICA

«It is difficult to understand why statisticians commonly limit their enquiries to averages and do not revel in more comprehensive views.»

GALTON

7.1. Comparación de dos tratamientos curativos

Supongamos que una cierta enfermedad se cura en un 25% de los casos con un método A, y se ensaya un nuevo método B que cura a 7 de los 9 casos tratados. ¿Se puede considerar este resultado como significativo de que el método B es mejor que el A?

Este problema se puede considerar análogo al siguiente: se tiene una bolsa con 4 bolas y se supone que 1 es blanca y 3 negras. Si se sacan bolas al azar con reposición se tiene una proporción de blancas de 25% y tal universo se puede considerar como modelo de la población de enfermos tratados por el método A. Ahora se tiene una bolsa con 4 bolas entre blancas y negras y se extrae una muestra de 9 bolas, de las que resultan 7 blancas (enfermos curados) y 2 negras (enfermos no curados) y tratamos de ver si esta muestra es consistente con la hipótesis de que el universo de enfermos curados y no curados es el mismo anterior, es decir, 25% de curados.

Vamos a introducir algunas nociones intuitivas relativas a este problema, para generalizar después.

Supongamos, concretamente, que tenemos una urna con tres bolas blancas (marcadas con 0) y una negra (marcada con 1).

Supongamos que hacemos dos extracciones consecutivas de bolas, devolviendo la bola después de cada operación, de modo que antes de cada extracción removemos para que podamos admitir que todas las bolas que hay dentro de la urna tengan la misma probabilidad de ser extraídas.

Este procedimiento se llama *muestreo con reemplazamiento*, y a él nos referiremos salvo indicación contraria.

1.° Supongamos que hacemos nueve *extracciones* con reemplazamiento y que los resultados han sido 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0. A esta *muestra aleatoria con reemplazamiento* le corresponde la *distribución de frecuencias* (fig. 1).

$$fr(0) = \frac{5}{9}; fr(1) = \frac{4}{9}$$

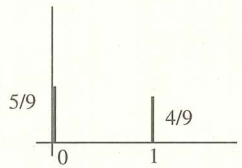


FIGURA 1

2.° Si imaginamos la infinidad posible de extracciones de bolas con reemplazamiento tenemos una población discreta a la que llamaremos la *distribución básica*, en la cual sabemos que (fig. 2):

$$Pr(0) = \frac{3}{4}; Pr(1) = \frac{1}{4}$$

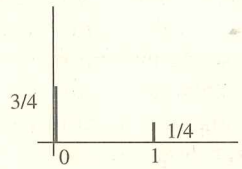


FIGURA 2

3.° Distribución de la media en el muestreo.

A la muestra que acabamos de considerar le corresponde como media:

$$\bar{x} = \frac{5}{9} \cdot 0 + \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{4}{9}$$

que es la proporción de bolas con 1. Se comprende que si obtenemos otras muestras de nueve, los resultados serán diferentes del anterior. Tiene un gran interés determinar la *distribución muestral de la media*, es decir, *la distribución que corresponde a las medias posibles de las infinitas muestras de nueve extracciones*. Esta media puede tomar los valores

$$0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1.$$

Calculamos, por ejemplo

$$P\,[\bar{x} = 3/9]$$

es decir, la probabilidad de que al hacer nueve extracciones salgan tres bolas con 1. Como en la distribución básica es:

$$Pr(0) = \frac{3}{4}; Pr(1) = \frac{1}{4}$$

la probabilidad de obtener la muestra 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, será

$$(1/4)^3\,(3/4)^6$$

Ahora bien, todas las muestras posibles con 3 unos y 6 ceros son

$$\binom{9}{3}$$

luego será:

$$Pr\left[\bar{x} = \frac{3}{9}\right] = \binom{9}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}233$$

De este modo calculamos las otras probabilidades con lo que tenemos:

$\bar{x} =$	0	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	9/9
$Pr(1) = \frac{1}{4}$	0,075	0,025	0,300	0,233	0,117	0,039	0,008	0,001	0,000	0,000

cuya representación gráfica se encuentra en la figura 3.

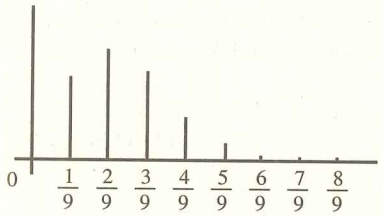


FIGURA 3

Esta distribución nos permite calcular la probabilidad de que al obtener una muestra su media esté comprendida entre ciertos límites. Por ejemplo:

$$Pr\left(\frac{1}{9} \leq \bar{x} \leq \frac{3}{9}\right) = 0{,}225 + 0{,}300 + 0{,}233 = 0{,}758$$

esto en lenguaje de frecuencias se traduce: en una larga serie de muestras de nueve extracciones, el 76% de las medias están comprendidas entre 1/9 y 3/9. Análogamente:

$$Pr\left(\frac{7}{9} \leq \bar{x}\right) = 0{,}001 + 0{,}000 + 0{,}000 = 0{,}001$$

que se traduce: en una larga serie de muestras de nueve extracciones, un 0,1% de las medias son superiores a 7/9.

Bajo la hipótesis H de que la población de curados por el método B es la misma que por el método A, es decir, que

$$H : p(0) = \frac{3}{4}; p(1) = \frac{1}{4}$$

la distribución de las medias en las muestras de extensión 9, se encuentra en el siguiente cuadro, calculado por el procedimiento indicado en el párrafo anterior

$X =$	0	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	9/9
$H =$	0,075	0,025	0,300	0,233	0,117	0,039	0,008	0,001	0,000	0,000

Supongamos ahora que, como decíamos al principio, hemos obtenido una muestra particular para la cual $\bar{x} = \frac{7}{9}$ y queremos ver si este resultado es compatible con la hipótesis H. Si la composición de la urna fuese la H sería:

$$Pr\left(\bar{x} \geq \frac{7}{9}\right) = 0{,}001 + 0{,}000 + 0{,}000 = 0{,}001$$

es decir, en 0,1% de las muestras de 9 resultaría $\bar{x} \geq \frac{7}{9}$. Entonces decidimos rechazar esta hipótesis, ya que el resultado obtenido $\bar{x} \geq \frac{7}{9}$ es un suceso muy raro, pues se produce de cada mil veces una. Conviene observar que aplicando esta regla se puede cometer un error rechazando una hipótesis verdadera en 0,1% de los casos. Este proceso se llama aplicar un test a la hipótesis H, o *contrastar la hipótesis H*, y al valor 0,1% se le llama *nivel de significación*. En definitiva, lo que hacemos es fijar un suceso A, tal que $P(A/H) \leq 0{,}001$, entonces si al tomar una muestra aleatoria se verifica el suceso A rechazamos la hipótesis H.

7.2. Teorema de Bayes

Un enfoque de los problemas de inferencia estadística distinto del clásico, que se ha seguido en [1], es el llamado bayesiano, cuyo fundamento es el famoso teorema de Bayes, que vamos a exponer.

Consideremos el siguiente experimento: Supongamos dos bolsas A y B; la primera que contiene tres bolas blancas y dos negras, y la segunda, dos blancas y una negra. Hacemos pruebas que constan cada una de dos partes: 1.ª sorteo de las bolsas; 2.ª extracción al azar de una bola de la bolsa que corresponda.

Conviene indicar que (X) es el suceso obtener bola blanca en la prueba compuesta, (X/A) es el suceso obtener blanca, suponiendo que haya correspondido la bolsa A; (A) es el suceso ha correspondido sacar bola de (A); (A/X) es, suponiendo que ha salido blanca, que sea de la bolsa (A), etc.

Tenemos para el suceso $X \cap A$:

$$P(X \cap A) = P(X) \cdot P(A/X) = P(A) \cdot P(X/A)$$

luego

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(X)}$$

que es esencialmente la fórmula de Bayes. Suele dársele una forma más apropiada para el cálculo, teniendo en cuenta que en el caso de las dos urnas que estamos considerando se verifica:

$$X = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

luego

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) = P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)$$

y queda la fórmula de Bayes:

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(A) \cdot P(X/A) + P(B) \cdot P(X/B)}$$

En el caso de las bolsas que consideramos, tendremos:

$$P(A/X) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}$$

Este teorema se llama a veces de probabilidad de las hipótesis o de las causas, porque si designamos A y B como causas, nos da la probabilidad de que el suceso X se haya realizado bajo la hipótesis A o por la causa A.

Las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ se suelen llamar *probabilidades «a priori»*, las $P(A/X)$, *probabilidades «a posteriori»* (es decir, una vez que se ha observado X).

Si en lugar de ser dos sucesos A, B, incompatibles, son n: A_1, A_2, ..., A_n, tales que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ es el suceso seguro, tendremos, en condiciones análogas a las indicadas, la *fórmula de Bayes*:

$$P(A_1/X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X/A_1)}{P(A_1) \cdot P(X/A_1) + P(A_2)\, P(X/A_2) + ... + P(A_n)\, P(X/A_n)}$$

7.3. La inferencia estadística en pruebas y exámenes

Comencemos por un ejemplo de aplicación a la *inferencia estadística*.

Supongamos que a consecuencia de muchas experiencias se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe el examen de COU es $P(A) = 0{,}6$. A los que pasan se les hace un test psicotécnico y se ha visto que la probabilidad de que lo superen es $P(X/A) = 0{,}8$. También se ha visto la probabilidad de que pasen el test los que no aprueban COU es $P(X/\bar{A}) = 0{,}1$. Se trata de calcular la probabilidad de que apruebe COU un alumno que ha superado el test, es decir: $P(A/X)$.

Se tienen las siguientes probabilidades que son datos (obtenidos tras gran número de experiencias):

$$P(A) = 0{,}6; \quad P(\bar{A}) = 0{,}4; \quad P(X/A) = 0{,}8; \quad P(\bar{X}/A) = 0{,}2$$

$$P(X/\bar{A}) = 0{,}1; \quad P(\bar{X}/\bar{A}) = 0{,}9$$

las que permiten aplicar la fórmula de Bayes y obtener

$$P(A/X) = \frac{P(A) \cdot P(X/A)}{P(A) \cdot P(X/A) + P(\bar{A}) \cdot P(X/\bar{A})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}1} = 0{,}92$$

Se ve así cómo la probabilidad «a priori» $P(A) = 0{,}6$ de que un alumno apruebe el COU se modifica al saber que ha pasado un cierto test y nos da $P(A/X) = 0{,}92$.

Esta utilización del teorema de Bayes para modificar la probabilidad «a priori» $P(A)$, obteniendo la probabilidad «a posteriori» $P(A/X)$, mediante la información que da el saber que ha resultado X, en un experimento del que conocemos la verosimilitud $P(X/A)$, es un ejemplo sencillo de lo que se llama un *método bayesiano de inferencia estadística*.

En muchos problemas la dificultad de emplear el teorema de Bayes reside en que no son bien conocidos de modo objetivo (a través de largas series de frecuencias) las probabilidades «a priori» $P(A)$, $P(B)$... En tal caso se utilizan *probabilidades subjetivas* que expresan «grados de creencia» del individuo en que se verifiquen los sucesos A, B,... y, naturalmente, el teorema de Bayes nos da la *inferencia* en forma de probabilidad «a posteriori» *subjetiva*.

Dentro de esta óptica se pueden tratar problemas de predicción meteorológica, diagnóstico médico, etc.

7.4. Campañas sanitarias

Supongamos que existiera una prueba diagnóstica para el cáncer con las propiedades $P(A/C) = 0{,}95$, $P(\bar{A}/\bar{C}) = 0{,}95$, en que C es el suceso que «una cierta persona tiene cáncer» y A que «el test es positivo». Calcular $P(C/A)$, suponiendo $P(C) = 0{,}005$. El significado de esta probabilidad «a priori» es que se ha observado que en la población total de los que llegan a la consulta el 0,5% tiene cáncer.

La fórmula de Bayes da:

$$P(C/A) = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(C) \cdot P(A/C) + P(\bar{C}) \cdot P(A/\bar{C})}$$

Si $P(C) = 0{,}005$ resulta $P(C/A) = 0{,}087$, y ésta será la probabilidad de que, supuesto que el test es positivo, el individuo que se ha sometido a él tenga efectivamente cáncer. Obsérvese que se ha supuesto que las pruebas son altamente fiables, y que el resultado debe interpretarse así: sólo el 8,7% de la población de los que dan una prueba positiva tendrá cáncer. Esto pone de manifiesto la conveniencia de tener en cuenta este resultado en campañas sanitarias, por su elevado coste, molestias, riesgos, etc.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.7.1. Una máquina produce en serie un cierto tipo de tornillos que son recogidos en cajas que contienen 1.200. La experiencia ha demostrado que la proporción de estas cajas que contienen varios porcentajes de tornillos defectuosos es:

% de tornillos defectuosos de la caja	*Proporción de cajas que contienen este porcentaje*
0	0,78
1	0,17
2	0,034
3	0,009
4	0,005
5	0,002
6	0,000

Se considera aceptable una caja que contiene el 2% o menos de defectuosos. El objeto de la inspección es rechazar aquellas que tienen un % de defectuosos mayor que el 2%. La inspección normal consiste en el examen de 50 tornillos de cada caja. Una caja inspeccionada dio 6 tornillos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que esta caja contenga más del 2% defectuosos y sea rechazable?

E.7.2. Una urna se ha llenado lanzando un dado y colocando bolas blancas en número igual al número de puntos obtenidos al lanzar el dado. A continuación se añadieron bolas negras en número determinado por una segunda tirada del dado. Se sabe también que el número total de bolas en la urna es 8. ¿Cuál es la probabilidad de que contenga exactamente 5 bolas blancas?

E.7.3. Hay 6 cajas que contienen 12 tornillos buenos y malos; una tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas, 6 buenos y 6 malos, y tres, 4 buenos y 8 malos. Se elige una caja al azar y se extraen 3 tornillos, sin reemplazamiento, de dicha caja; de éstos, 2 son buenos y 1 defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja elegida contenga 6 tornillos buenos y 6 malos?

E.7.4. Un proceso de fabricación de un cierto tipo de piezas es tal que el 5% de las piezas que se producen son defectuosas. Las piezas se embalan en lotes de 100. A un cierto comprador no le importa aceptar un lote si lleva 4 o menos piezas defectuosas, pero no quiere aceptar lotes con más de 4 piezas defectuosas. El vendedor asegura que en ningún lote hay más de 4 piezas defectuosas, aunque realmente no se ha preocupado de que esto sea cierto, ya que ha empaquetado todas las piezas producidas y el comprador, fiado de lo que le dicen, no inspecciona ninguna pieza de los lotes. ¿Qué proporción de lotes aceptará con más de 4 piezas defectuosas?

E.7.5. Se lanza una moneda, si sale cara se echan a bolas blancas a una urna y si sale cruz son $2a$ el número de bolas blancas que se ponen en la urna. Igual procedimiento se sigue con una segunda tirada, poniendo b bolas negras, si sale cara, y $2b$ bolas negras si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

E.7.6. Una empresa tiene establecido un programa que le permite servir todas las demandas con un retraso inferior a una semana. De datos anteriores se conoce que esta condición es cumplida en el 95% de los casos, lo cual es considerado como satisfactorio. Reclamaciones de ciertos clientes hacen sospechar a la dirección que hay demoras superiores, por lo cual decide revisar el proceso; para ello establece la siguiente norma: se seleccionarán al azar tres pedidos y se procederá a observar cómo son servidos; a la vista de la información que obtenga procederá de la siguiente forma:

Si ninguna de las tres órdenes se retrasa, no hace más comprobaciones; si una o más de las órdenes se retrasa, se revisará el proceso.

¿Cuál es la probabilidad de que el proceso sea revisado sin necesidad?

E.7.7. Es muy interesante hacer con los alumnos el llamado experimento de Edwards, consistente en dar unos valores sencillos para los datos que se necesitan en el teorema de Bayes, a fin de estimar *sin cálculo* la probabilidad «a posteriori». Se hará observar la gran discrepancia que suele haber con el resultado del cálculo. Lo más frecuente es creer que $P(C/A)$ debe ser muy próximo a $P(A/C)$ y ya hemos visto que la diferencia puede ser enorme. Como es corriente, aparte de la confusión conceptual, la carencia de intuición para obtener tal resultado y tal cálculo entra en la actividad diaria, a veces subconsciente, del médico, el economista, que pueden así acumular conocimiento intuitivo erróneo.

E.7.8. En una bolsa hay una bola blanca y dos negras y se hacen extracciones con reemplazamiento. Se toma $X = 0$ si la bola que sale es blanca y $X = 1$ si es negra. ¿Cuál es la distribución de una muestra aleatoria simple de extensión 5? ¿Cuál es la distribución de la media aritmética?

E.7.9. Lanzar 100 veces 4 dados al aire y representar el histograma de las medias correspondientes.

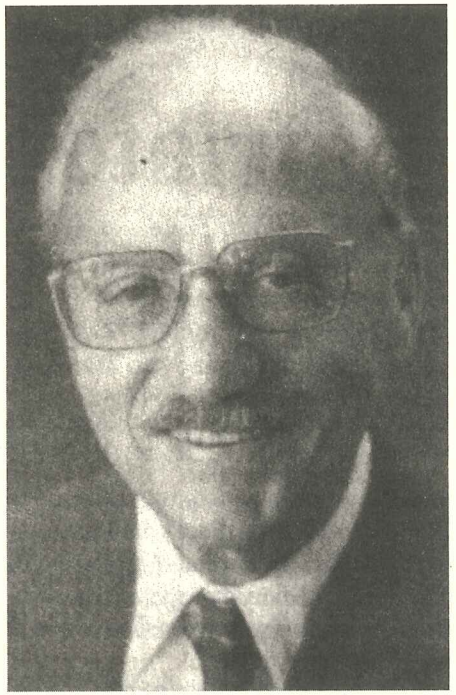
E.7.10. Se extraen bolas con reemplazamiento de una bolsa que contiene 1 negra y 9 blancas. Se representa por $X = 0$ bola negra y $X = 1$ bola blanca. Para muestras (X_1, X_2, X_3, X_4), ¿cuál es la distribución conjunta de las observaciones?, ¿cuál es la distribución de la suma y de la media?.

E.7.11. La probabilidad de defectuoso en un lote es 0,1. Interpretar las distribuciones análogas a las anteriores.

E.7.12. Control de calidad

El control de calidad de la fabricación en serie trata de conseguir que sea mínima la proporción de ítems fabricados defectuosos. Mediante los tests estadísticos es posible lograr que sea muy pequeña (p.e., 0,001) la probabilidad de que aparezca un defectuoso en un cierto lote o serie utilizando los gráficos de control (ver S. Ríos, *Iniciación Estadística*, Madrid, 1994).

DANTZIG (1914)



Introductor del método del simplex de la programación lineal y otros métodos de Investigación Operativa

8. PROGRAMACIÓN. OPTIMIZACIÓN

«No one in his right mind will satisfice if he can just as well optimize.»

H. SIMON

8.1. Introducción

Una tendencia natural en el comportamiento humano es la búsqueda de lo mejor: el hombre ha de afrontar constantemente decisiones (el niño que debe elegir un caramelo, el joven que debe elegir su primer trabajo, el político que debe elegir un plan de desarrollo,...). Elecciones que implican decisiones basadas en algún criterio plausible.

En las ciencias son frecuentes las situaciones del tipo anterior.

Ya Herón, matemático de Alejandría (siglo III a. d. J. C.) afirmó que la luz iba de un punto a otro por la trayectoria mínima. Fermat precisó en su conocido principio que tal mínimo se refería al tiempo de recorrido. Otros principios de mínimo se han originado en diversas ciencias (Mecánica, Biología, Química...), importantes desarrollos que conducen a modelos de optimización de los más variados tipos y fecundas aplicaciones. En ellas los «principios de óptimo» aparecen como una manera de explicar lo que realmente ocurre en el fenómeno natural.

En Economía se presenta de modo natural en muchos problemas un criterio de máximo beneficio, de mínimo coste, de máxima utilidad esperada, etc.

Un ejemplo sencillo nos permitirá comprender este tipo de problemas.

8.2. Problema del viajante

Un problema famoso de optimización, que aún hoy no está completamente resuelto, a pesar de la potencia actual de los ordenadores, es el denominado *problema del viajante.* Un viajante parte de Madrid (M) y debe recorrer las ciudades Toledo, Cuenca y Guadalajara (T, C, G) haciendo el camino más corto por carretera, para volver a Madrid sin pasar dos veces por la misma ciudad (fig. 1). Está claro que cada camino queda definido por una permutación de las letras T, C, G a la que se añade una M al principio y otra al final, con lo que se tienen las 6 rutas posibles: MGTCM, MGCTM,...

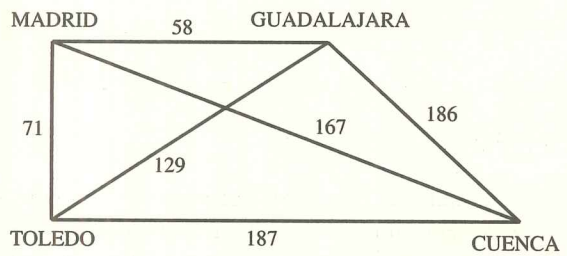


FIGURA 1

Inmediatamente después se calcula el valor en km de cada una de estas rutas por una simple suma de las longitudes de sus tramos y, finalmente, se busca el mínimo número entre los 6 obtenidos y la ruta correspondiente a este número es la solución buscada (se deja para ejercicio del lector).

$$MGTCM = 58 + 186 + 187 + 71 = 502$$

.....

.....

Si consideramos el problema análogo para n ciudades, es claro

que son (n-1)! las rutas posibles, con lo que si n = 50, las rutas serían $49! \simeq 6 \cdot 10^6$ y no es posible resolver el problema basándonos en un simple modelo de enumeración como en el caso n = 4.

Se hacen precisos nuevos modelos que nos eviten la enumeración de todas las rutas posibles.

Aspectos que pueden complicar la modelización son tener en cuenta el coste, que no depende sólo de la distancia sino de distintos medios de transporte (en toda o parte de la ruta, coche, ferrocarril, avión, barco), la duración del recorrido, etc.

8.3. Etapas de la modelización

Hemos visto así tres etapas en la modelización de estos problemas: 1.ª) establecer el *conjunto de alternativas factibles*, es decir, el conjunto de soluciones posibles entre las que se puede elegir; 2.ª) hacer una valoración de cada una de estas soluciones factibles, mediante una *función objetivo*, que valora cada solución a partir de los datos reales, de acuerdo con un criterio plausible; 3.ª) teniendo en cuenta que cada solución dará un valor distinto a la función objetivo, *obtener* aquella solución entre las factibles que nos optimiza (maximiza, minimiza) el objetivo.

En el caso del problema del viajante, está claro que el conjunto factible es el de las trayectorias del viajante que verifiquen las condiciones del enunciado; la función objetivo es el número de kilómetros de la trayectoria y la solución óptima es la de mínimo número de kilómetros.

Una primera clasificación de estos problemas tendrá en cuenta que el número de soluciones factibles sea finito o no. Otra vendrá de que la función objetivo sea lineal o no. Y lo más importante es la modelización de la función objetivo para que nos conduzca *válidamente* a optimizar lo que el decisor (persona interesada en el problema) considera que se debe optimizar.

8.4. Un problema de transporte con coste mínimo

El *problema real* que vamos a modelizar consiste en hacer mínimo el coste mensual de transportar desde tres fábricas de cemento

O_1, O_2 y O_3, las cantidades demandadas mensualmente por 4 centros de distribución D_1, D_2, D_3, D_4 (fig. 2).

El objetivo del modelo es: supuestas conocidas las cantidades que son mensualmente demandadas por los 4 centros D_1, D_2, D_3, D_4, saber de qué fábricas pueden ser suministradas y establecer un programa de envíos que sea satisfactorio, pero que además tenga un coste global de transporte mínimo.

Las variables de que parecen depender los costes de transporte son las cantidades transportadas y las distancias, pero también han de tenerse en cuenta las cantidades que produce cada fábrica y las que pide cada centro, así como los costes de unidad transportada.

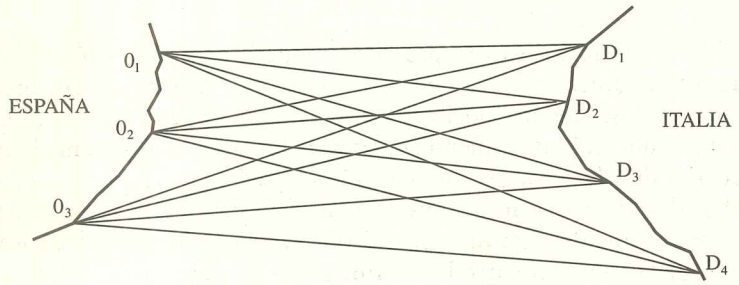


FIGURA 2

Se supone que se han estudiado los datos relativos a estas variables durante algún tiempo y que se ha visto que se podían considerar como parámetros o constantes conocidas para el mes próximo las siguientes variables:

d_j = demanda en D_j ($j = 1, 2, 3, 4$)
S_i = oferta en la fábrica O_i ($i = 1, 2, 3$)

y como incógnitas

x_{ij} = cantidad de cemento a trasladar de la O_i al D_j.

El esquema adjunto da una idea de las demandas y ofertas y coste unitario de transporte.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	S_1
O_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	S_2
O_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	S_3
	d_1	d_2	d_3	d_4	

Con los datos que existen se considera también *aceptable* que el coste de transporte es proporcional a la cantidad transportada y a la distancia. De modo que si los costes unitarios de transporte de O_i a D_j vienen dados por el cuadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4	1	2	5	12
O_2	2	3	1	4	20
O_3	3	5	6	7	32
	15	16	20	19	

El coste total de transporte será la suma de los costes, es decir:

$$C = 4x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + \\ + 3x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34}. \qquad [1]$$

con las condiciones $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) [2] (las cantidades transportadas no son negativas). Además, las condiciones que expresan que las cantidades que salen de las fábricas son las que en ellas existen.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 12 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 32 \end{aligned} \qquad [3]$$

y las condiciones que expresan que las cantidades que llegan a los centros son precisamente las que ellos piden.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 16 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 20 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 19 \end{aligned} \qquad [4]$$

Y lo que se trata, para resolver el problema propuesto, es de hacer mínimo el coste expresado por [1] eligiendo las cantidades a transportar de modo que verifiquen las condiciones [2], [3] y [4].

Para fundamentar este *modelo matemático* debemos destacar las hipótesis que hemos hecho en forma de axiomas adecuados.

8.5. Modelo matemático

Conceptos. Es inmediato pasar a un planteamiento más general:

Vector oferta — *Vector demanda* — *Vector transporte* — *Vector coste*

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{34} \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \dots \\ c_{34} \end{bmatrix}$$

Axiomas

$$A_1) \quad s_1 + s_2 + s_3 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

$$A_2) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= d_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= d_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= d_3 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= d_4 \end{aligned}$$

$$A_3) \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= s_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= s_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= s_3 \end{aligned}$$

Definición

El *coste total* C asociado al vector transporte x y al vector de coste c, es el producto escalar $c_{11}x_{11} + \dots + c_{34}x_{34}$; $C = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x}$.

El problema matemático que se plantea es: cómo determinar un x que verifique A_1, A_2, A_3 y haga mínimo C (llamada *función objetivo*).

No entramos aquí en el aspecto matemático de la resolución efectiva en este problema, llamado de *programación lineal*. El aspecto de *validación* del modelo en este problema se sitúa al nivel de la hipótesis que sirve de base o contrapartida empírica a los axiomas formulados sobre la oferta, la demanda y la constancia del precio de que se habló en el modelo empírico. En definitiva, debemos ver si es aceptable la hipótesis de la *linealidad del modelo* que se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

1.ª *Aditividad*, si una variable x_1 produce un efecto y_1, y una variable x_2 produce un efecto y_2, las variables x_1, x_2 actuando conjuntamente deben producir el efecto $y_1 + y_2$.

2.ª *Homogeneidad*, si una variable x_1 produce un efecto y_1, la variable λx_1 produce el efecto λy_1 (λ número real).

8.6. Ejemplos de programación lineal

Muchos problemas económicos, industriales, militares, etc., tienen como objetivo hacer máxima o mínima una función lineal de varias variables, sometidas a ciertas limitaciones en su variación, que traducen condiciones como limitación de la capacidad de producción de una máquina, o del capital disponible, etc.

La explicación de que aparezcan funciones y ecuaciones lineales *reside* en que muchas relaciones económicas son aproximadamente lineales, p.e., el coste de fabricación de x piezas es aproximadamente función lineal de x. He aquí algunos ejemplos, cuyo planteo puede ser comprendido con el conocimiento de las Matemáticas elementales.

A) Problema de la alimentación animal

El llamado problema de *piensos compuestos* para conseguir la alimentación de un cierto tipo de animales (gallinas, vacas, etc.) con un coste mínimo, ha sido estudiado a partir de 1945 [1].

[1] En que Stiegler («The cost of subsistence», *Journ. of Farm Economics*, 1945) lo estudió para la alimentación humana, considerando 77 alimentos distintos y 9 elementos nutritivos fundamentales.

Se trata de conseguir una dieta que proporcione a las gallinas alimento con ciertas características, como cantidades de nutrientes (vitaminas, calcio, proteínas, etc.), calorías, sabor, etc., mediante la mezcla de alimentos como harina de cebada, de pescado, etc., y esto de modo que el coste de la mezcla o pienso compuesto sea mínimo.

Como un primer paso, el científico (en un problema como éste estarían interesados biólogos, veterinarios, matemáticos, economistas, informáticos) debería comenzar por coleccionar datos relativos a cantidades a_{ij} de los distintos nutrientes ($i = 1, 2, ..., m$) que contienen los alimentos c_j ($j = 1, 2, ..., n$). Estos datos serán consecuencia de análisis bio-químico-estadísticos y supondremos, para *simplificar*, que dichas cantidades a_{ij} son constantes bien conocidas.

También será necesario conocer los precios p_j de los distintos alimentos c_j mediante un conocimiento estadístico de observaciones del mercado. Supondremos también, para *simplificar*, que los precios son constantes bien conocidas. Análogamente se habrán hecho experimentos biológicos-estadísticos (que generalmente serán largos y costosos) que nos permitan aceptar que hay unas cantidades b_i del nutriente i, tales que, a tal tipo de gallina, una cantidad $< b_i$ en su dieta la debilita y una cantidad $> b_i$, le resulta superflua y hasta perjudicial.

Como se ve, hemos hecho una serie de simplificaciones importantes para progresar hacia el modelo matemático (suposición de precios constantes, de alimentos de composición constante, etc.).

Ahora consideramos las relaciones entre cantidades que entran en una mezcla y su coste y las limitaciones de los distintos nutrientes impuestas por los experimentos realizados.

El problema se puede formular ya en términos matemáticos con los datos anteriores.

Es natural considerar el coste proporcional a la cantidad que entra en la mezcla; luego si llamamos x_j la cantidad mensual del alimento c_j en la mezcla, el coste de la misma será:

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

es decir, una función lineal de las n variables $x_1, ..., x_n$. Se trata ahora de determinar los valores de $(x_1, ..., x_n)$, teniendo en cuanta las condiciones siguientes:

1.° Z ha de ser mínima.

2.° Las cantidades x_j han de ser ≥ 0 (ya que no tiene sentido real una cantidad negativa de un alimento).

3.° Las cantidades de los diversos nutrientes han de ser las fijadas por los experimentos biológicos, luego

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i (i = 1, 2, ..., m)$$

B) *Mezcla de materias primas*

Se considera una mezcla de varias materias primas A, B, C, D, cuyos tantos por ciento de un componente R y precios se indican:

Materias	% de R.	Costo por Kg.
A	40	50 pts.
B	12	26 pts.
C	15	32 pts.
D	20	35 pts.

Se trata de obtener una mezcla que contenga por lo menos 19 % de R. y cuyo precio sea mínimo.

Llamando x_1, x_2, x_3, x_4 las cantidades de cada uno de los componentes, se trata de hacer mínimo:

$$50x_1 + 26x_2 + 32x_3 + 35x_4$$

con las condiciones:

$$0{,}40x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}15x_3 + 0{,}20x_4 \geq 0{,}19$$

(que expresan que la proporción de R en la mezcla es $\geq 0{,}19$) y

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

(que expresa que las cantidades que se reúnen pesan 1 kg) y además las condiciones obvias $x_i \geq 0$.

C) *El problema de la mezcla de gasolinas*

Los combustibles se obtienen mezclando cantidades de productos refinados con ciertas sustancias químicas. Cada tipo de combustible

debe satisfacer ciertas condiciones de calidad, de las que las más importantes se refieren a volatilidad e ignición. Además, se han de tener en cuenta restricciones relativas al almacenamiento en la refinería, que implica limitaciones en el consumo de los distintos productos.

Introduciendo el conjunto de precios para cada clase de gasolina producida, el problema es hacer máxima la función neta de ingresos sometida a las condiciones técnicas de calidad y a la política de restricciones que pueden expresarse por ecuaciones lineales.

En este problema el capital, mano de obra y coste de los productos básicos de la refinería se consideran constantes para todos los tipos de gasolina.

D) Problema del almacén

Sea un empresario cuyo almacén tiene capacidad limitada, que vende mercancías, cuyos precios presentan variaciones estacionales. Le interesa, naturalmente, comprar cuando los precios son bajos y vender cuando son altos. La capacidad limitada de su almacén limita los *stocks* que puede reunir y las cantidades que él puede vender. Sujeto a estas limitaciones, trata de hacer máximos sus beneficios. Supongamos el año dividido en n períodos (meses o semanas).

Sea el período i:

p_i' = precio de venta.
p_i = precio de costo.
x_i = cantidad comprada.
x_i' = cantidad vendida.

Sea A = *stock* inicial en el almacén al comienzo del año y B = capacidad del almacén. Será el *stock* en el almacén al final de período i:

$$A + \sum_{k=1}^{i}(x_k - x_k')$$

y el beneficio para el año será:

$$A + \sum_{k=1}^{n}(p_k'x_k' - p_k x_x)$$

el cual habrá de hacerse máximo sujeto a las restricciones

$$A + \sum_{k=1}^{i}(x_k - x_k') \leq B, \text{ para todo } i$$

(que expresa que el *stock* no puede exceder de la capacidad del almacén).

$$x_i < A + \sum_{k=1}^{i-1}(x_k - x_k'), \text{ para todo } i$$

(que expresa que las ventas en el período i no pueden superar el *stock* al final del período i - 1).

Podría complicarse más aún el problema introduciendo limitaciones en los recursos financieros del empresario, etc.

E) Problemas de producción en la empresa

Consideremos el caso de producción en un solo paso de una mercancía sujeta a un pronóstico de venta especificado. El pronóstico de venta expresa las cantidades que se esperan vender durante ciertos períodos de tiempo futuros (días, semanas, meses). Los límites de producción son las cantidades máximas de mercancías, que pueden ser producidas en horario regular y en horas extraordinarias en cada uno de los períodos de tiempo en que se trata de planificar la producción. Imponer las restricciones relativas a los pronósticos de venta significa expresar que la suma de la producción acumulada y la del inventario al comienzo del plan no debe ser inferior a las ventas esperadas en cada momento del plan.

Se trata de determinar el programa que haga mínimo el coste total de producción y venta, en que al evaluar los costes hay que tener en cuenta los incrementos debidos a la producción en horas extraordinarias y las cargas correspondientes a las unidades del inventario, debidas al coste variable de tener una unidad de producto en inventario durante un período de tiempo y la carga de capital adicional inmovilizado por una unidad de producto.

Designemos para el período i por:

M_i = máximo número de unidades que se pueden producir en horas extraordinarias.
S_i = pronóstico de venta.
N_i = máximo número de unidades que se pueden producir en horas extraordinarias.

I_i = inventario al final del período i.
x_i = número de unidades producidas en horas ordinarias.
y_i = número de unidades producidas en horas extraordinarias.
k_i = número de períodos a que se refiere el plan.
P = sobrecarga de tiempo por unidad de producto.
R = carga por unidad del inventario en un período.

Se tiene:

$$I_i = I_{i-1} + x_i + y_i - S_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{j=1}^{i} S_j$$

y se trata de hacer mínimo el coste del plan de producción expresado por

$$C(x, y) = P \sum_{1}^{k} y_i + R \sum_{1}^{k} I_i = P \sum_{1}^{k} y_i + R \left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} (x_j + y_j - S_j) \right]$$

con las siguientes restricciones:

$M_i - x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., k$ (sobre horas ordinarias)
$N_i - y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., k$ (sobre horas extraordinarias)

$$\sum_{j=1}^{i} x_j + \sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{j=1}^{i} s_j \leq 0 \text{ (relativa al inventario)}$$

8.7. Solución geométrica

Sea hacer mínima $Z = x_2 - x_1$ [3]

con las condiciones:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 &\leq 0 \end{aligned} \qquad [4]$$

Podemos dar una interpretación geométrica al problema considerando el plano (x_1, x_2) que llamaremos *espacio de soluciones* (fig. 3). Cada una de las cinco inecuaciones [4] define un semiplano, y la parte común a todos éstos es el *conjunto convexo* rayado: *O A B C D*, cuyos puntos (x_1, x_2) se llaman *soluciones factibles*.

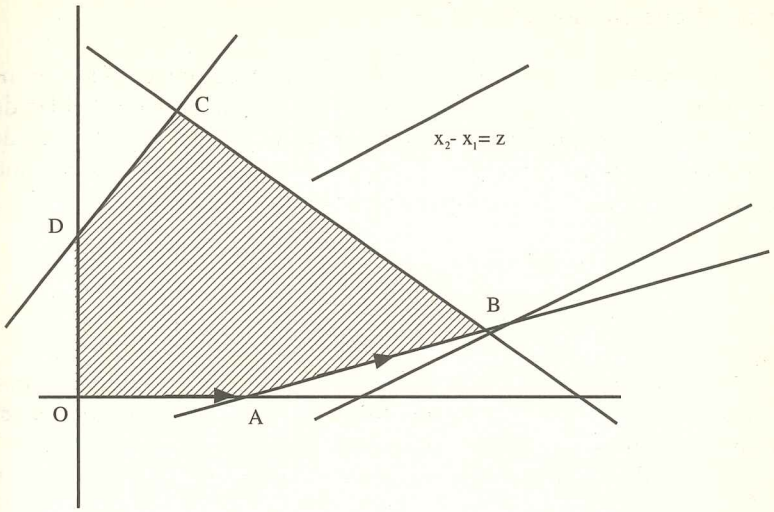


FIGURA 3

Se trata ahora de encontrar entre todas las soluciones factibles aquella que hace mínimo [3]. Para diversos valores de Z representa [3] rectas paralelas, y la recta de éstas que da mínimo valor a Z es la que pasa por el vértice B del polígono convexo, cuyas coordenadas se calculan como punto de intersección de las rectas CB y AB, y son:

$$x_1 = 16/3, \qquad x_2 = 2/3$$

Con esto obtenemos el mínimo para:

$$Z = 2/3 - 16/3 = -14/3$$

Esta propiedad de que *una solución factible óptima corresponde a un punto extremal del conjunto convexo de las soluciones factibles es general*, pero no la demostraremos aquí.

El método geométrico visto en el ejemplo anterior no puede ponerse en práctica más que en casos muy sencillos de dos o tres variables. En casos más complicados se utilizan programas de ordenador apropiados.

8.8. Programación en enteros

Cuando las variables en un problema de programación representan número de hombres, máquinas, etc., no tiene sentido hablar de soluciones fraccionarias o en números reales. En tal caso la idea de redondear las soluciones obtenidas, al considerar las variables como números reales, puede conducir a erróneas optimizaciones.

Un ejemplo curioso es el:

Problema de la mochila

Se tienen n objetos cuyos pesos son $k_1, k_2, \ldots, k_n$, y queremos que el peso del contenido de la mochila sea $\leq K$. Nuestro objetivo es transportar el mayor número posible de objetos.

Se introducen las variables llamadas de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si entra el objeto } i \\ 0 \text{ si no entra el objeto } i \end{cases}$$

Deseamos maximizar

$$P = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

con las condiciones $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_n x_n \leq k;\ x_i = 0, 1$.

Otro ejemplo de planteamiento de un problema ya estudiado es el:

Problema del viajante

Vamos a establecer un modelo más adecuado que el de la simple enumeración. Supongamos que conocemos el tiempo t de ir de la ciudad i a la j y

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si el arco } ij \text{ no forma parte de la ruta} \\ 1 \text{ si el arco } ij \text{ sí forma parte de la ruta} \end{cases}$$

Se ve, p.e., que para la ruta (1, 2, 3, 4, 1) es (fig. 4)

$$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1, \text{ todas las demás } x_{ij} = 0$$

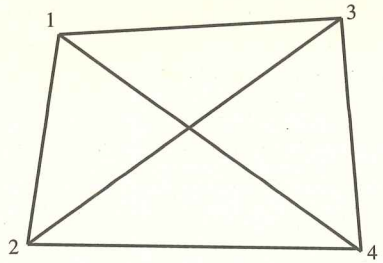


FIGURA 4

Si se toma como criterio buscar la ruta que haga mínima la suma de tiempos de recorrido, la función objetivo será $T = \sum t_{ij}\, x_{ij}$ y se ha de imponer un conjunto de ecuaciones de condición que impliquen que cada ruta pase por todas las ciudades y una sola vez por cada una. P.e., para expresar que la ruta pasa por la ciudad 2 tenemos

$$x_{12} + x_{32} + x_{24} = 1$$

y en general:

$$\sum_i x_{ij} = 1$$

para cada i y, análogamente se obtienen las otras $2^n - 1$ ecuaciones que expresan que sólo se consideran rutas conexas en que se parte de una ciudad y se vuelve al origen.

8.9. Optimización con multicriterios

Consideremos el siguiente problema:

Planificación de la producción de una fábrica con multicriterios

Supongamos que en una fábrica se producen tres tipos de herramientas en cantidades z_1 de tipo A, z_2 de tipo B, y z_3 de tipo C. Cada herramienta de tipo B ocupa en su fabricación doble tiempo que cada herramienta de tipo C, y cada herramienta de tipo A, doble que la de tipo B. Se supone que, si toda la producción fuera del tipo C, se podrían hacer a lo sumo 1.000 unidades diarias. Además el material de

que se dispone diariamente limita a 600 el número total de unidades que se pueden producir.

Tendremos entonces las limitaciones

$$Z \begin{cases} 4z_1 + 2z_2 + z_3 \leq 1.000 \\ z_1 + z_2 + z_3 \leq 600 \\ z_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

que definen en el espacio R_3^+ el conjunto de decisiones o planes de fabricación factibles $(z_1, z_2, z_3) = z \in Z \subset R_3^+$, que coincide con el poliedro convexo OABMCNA (fig. 5).

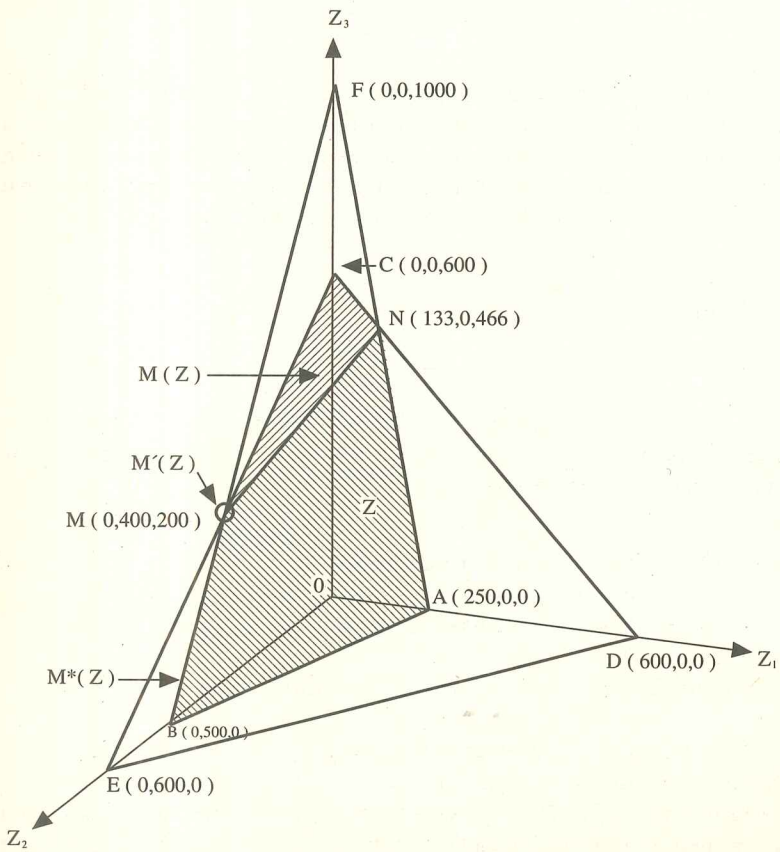


FIGURA 5

El primer propósito del decisor podría ser fabricar el máximo de cada tipo; pero este punto de vista le conduce a hacer máxima cada una de las z_i $(i = 1, 2, 3)$, lo que daría el llamado *punto utópico* $z = (250, 500, 600)$, que por estar fuera del poliedro no es factible. Lo que puede alcanzar son los puntos de Pareto o maximales del conjunto Z, es decir, aquellos puntos z^0 tales que no existe otro $z \in Z$, de modo que $z_i \geq z_i^0$, $\forall i$, y para algún i, $z_i > z_i^0$. Este conjunto de puntos maximales sería el conjunto de dos polígonos (rayados) ABMCNA (fig. 6) que designaremos por $M(Z)$.

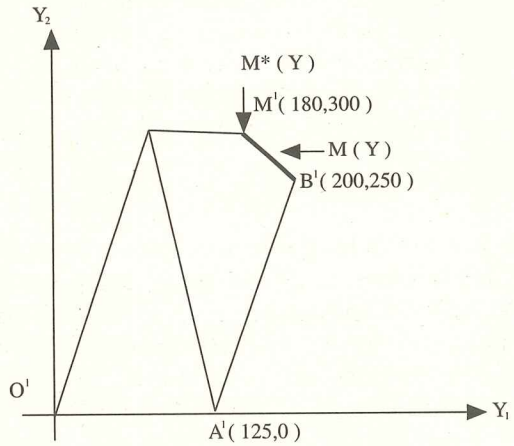


FIGURA 6

Supongamos ahora que el decisor introdujera dos objetivos: 1.º hacer máxima la ganancia total sabiendo que gana 0,5 por unidad de A, 0,4 por unidad de B y 0,1 por unidad de C; 2.º hacer máximo el número total de unidades producidas de tipos B y C. Tendríamos así que hacer máximas

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}5z_1 + 0{,}4z_2 + 0{,}1z_3 \\ y_2 &= 0{,}5z_2 + 0{,}5z_3 \end{aligned} \qquad [1]$$

Si ahora quiere hacer máximos y_1 e y_2, se encontrará que tampoco

tiene sentido más que obtener el conjunto $M(Y)$ de los maximales del conjunto $Y \subset R_2^+$, obtenido de Z mediante la transformación [1].

Y es el polígono convexo O'C'M'B'A'O' (fig. 6), donde A', B', C', M', N', O', son, respectivamente, los transformados mediante [1] de los puntos A, B, C, M, N, O, y M(Y) es el formado por los puntos de M'B'. Los puntos de M(Z) que se transforman en éstos son los de MB, conjunto que se llama de *puntos eficientes* de la transformación y designaremos por $M^*(Z)$. Es intuitivo que $M^*(Z) \subset M(Z)$.

Se observa que el decisor ha reducido sus posibles decisiones maximales del conjunto ABMCNA, al conjunto BM, que es sensiblemente más reducido y, por tanto, de mayor interés en la determinación de la decisión óptima en relación con su sistema preferencial.

Un paso más puede ser que el decisor considere plausible establecer una nueva ponderación de los dos objetivos de primera etapa (y_1, y_2) y fijar un objetivo x de segunda etapa, p.e.,

$$x = 0{,}5y_1 + 0{,}5y_2 \qquad [2]$$

Entonces se tendrá en la recta R^+ un conjunto X transformado del conjunto Y, mediante la transformación [2], siendo así X el segmento de recta O''M'' (fig. 7). Análogamente a como en la etapa anterior, el conjunto de puntos maximales de X está formado por un solo punto $\{M''\} = M(Y)$. El correspondiente conjunto en Y es $\{M'\} = M^*(Y)$ y es intuitivo que en Z es $\{M\} = M^{**}(Z) \subset M^*(Z) \subset M(Z)$.

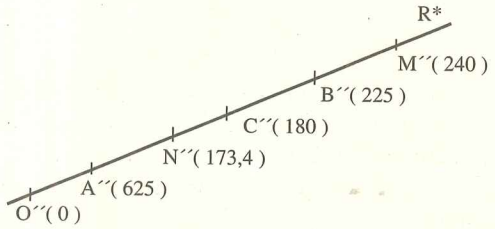


FIGURA 7

Es decir, el conjunto $M^{**}(Z)$ formado sólo por el punto M(0, 400, 200) correspondería a la decisión óptima para el decisor con el sistema de preferencias indicado.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.8.1. Un agricultor tiene una tierra de una hectárea, la posibilidad de gastar 110.000 pesetas y 160 días-hombre de trabajo. Sabe que si cultiva patatas obtiene una ganancia de 40.000 pesetas por área y si cultiva trigo, de 120.000 pesetas. Los costes son 10.000 pesetas por área para las patatas y 20.000 pesetas para el trigo, y la cantidad de trabajo un día-hombre por área de patatas y 4 por área de trigo. Determinar la distribución de máxima ganancia.

E.8.2. Un médico tiene que aconsejar a un paciente un desayuno de pan, leche y mantequilla. Cada día el paciente debe recibir 13 unidades de vitamina A y 10 de vitamina B y tomar al menos dos vasos de leche y menos de tres tostadas de pan. Los contenidos vitamínicos del pan, mantequilla y leche se encuentran en el siguiente cuadro:

Vitamina	1 tostada de pan	1 cucharada de mantequilla	1 vaso de leche
A	2 unidades	4 unidades	2 unidades
B	2 unidades	1 unidad	3 unidades

Si la tostada de pan cuesta 20 pesetas, la cucharada de mantequilla 40 pesetas y el vaso de leche 60 pesetas, determinar el desayuno más económico.

E.8.3. Una empresa minera explota dos minas situadas en sitios diferentes. El mineral que sacan se clasifica por su riqueza en tres tipos: A, B y C. La empresa ha contratado el suministro de 12 Tm de A, 8 de B y 24 de C por semana. Los costes de operación son 2.000.000 pesetas diarias en la primera mina y 1.600.000 en la segunda. Diariamente la primera mina produce 6 Tm de A, 2 de B y 12 de C, mientras la segunda produce 2 Tm de A, 2 de B y 12

de C. ¿Cuántos días debe trabajar semanalmente cada mina para tener un coste mínimo?.

E.8.4. El mismo problema suponiendo que los costos de producción de ambas minas son iguales ambas a 10.000.000 pesetas semanales.

E.8.5. Un granjero cría pollos, patos y pavos. Tiene espacio para 5.000 aves, pero no quiere tener más de 3.000 patos. Supongamos que el coste de criar un pollo es de 90 pesetas, de un pato 60 y de un pavo 240 pesetas, y que puede vender los pollos a 180 pesetas, los patos a 120 pesetas, y los pavos a P pesetas.

Determinar la distribución para obtener el máximo beneficio suponiendo: a) P = 400 pesetas; b) P = 500 pesetas.

E.8.6. Una industria produce dos tipos de productos A y B cuyos costes de producción y limitaciones vienen dados en el cuadro siguiente:

	A	*B*	*Limitaciones*
Mano de obra	20	10	100.000
Materia prima	10	30	180.000
Equipo	5	1	40.000
Beneficio	8	5	máximo

Se trata de fijar las cantidades x_1 y x_2 a producir de A y B para que el beneficio sea máximo.

E.8.7. Para fabricar dos tipos de piezas A y B se ha de utilizar tres máquinas M_1, M_2, M_3, sucesivamente en un orden cualquiera. Los tiempos en cada máquina para cada tipo de pieza, el beneficio de su renta, y las horas totales mensuales disponibles se encuentran en el siguiente cuadro:

	M_1	M_2	M_3	*Beneficio*
A	11 min.	7 min.	6 min.	9.000
B	9 min.	12 min.	16 min.	10.000
Tiempo total	9.900 min	8.400 min	9.600 min.	

Determinar cuántas piezas deben fabricarse de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

E.8.8. Principio de optimización de Bellman o de la programación dinámica

Vamos a dar una idea del método de la programación dinámica que se aplica especialmente al caso de un número grande o una sucesión indefinida de etapas en cada una de las cuales hay que tomar una decisión.

Supongamos que se dispone de una cierta cantidad x de un *recurso económico* (dinero, hombres, máquinas, etc.), que puede aplicarse a distintas *actividades*, 1, 2, 3.

Las cantidades del recurso asignadas a los distintos tipos de actividades, representadas por x_i ($i = 1, 2, 3$), son tales que:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x; \qquad x_i \geq 0$$

y dan una *respuesta* o *ganancia* con los siguientes supuestos:

a) las respuestas de las distintas actividades se pueden medir en una unidad común;

b) la respuesta de una actividad es independiente de las asignaciones a otras;

c) la respuesta total se puede obtener como *suma* de las parciales.

Se supone que a dicha respuesta se puede asociar una función de utilidad, $g_i(x_i)$, ($i = 1, 2, 3$), que mide la dependencia de la respuesta de cada actividad respecto a la cantidad de recurso asignado.

Sea maximizar la suma de utilidades:

$$U = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) \qquad [1]$$

con las condiciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x \qquad [2]$$

$$x_i \geq 0; \ (i = 1, 2, 3) \qquad [3]$$

Geométricamente (fig. 8), el problema se reduce a determinar el máximo de U cuando el vector v de componentes (x_1, x_2, x_3) está en el plano definido por [2].

Para determinarlo, procedemos de la siguiente manera:

a) Se fija x_3 ($x_3 = \xi_3$) y se determina el máximo cuando v está en la recta de intersección del plano dado [2] con $x_3 = \xi_3$.

b) Puesto que el valor óptimo obtenido en a) es una función de ξ_3, se hace variar ξ_3, y se halla el máximo, respecto de ξ_3, de [1]. Como en este procedimiento de determinación del máximo se han considerado para v todos los puntos del plano [2], la solución es la misma que en el planteo directo.

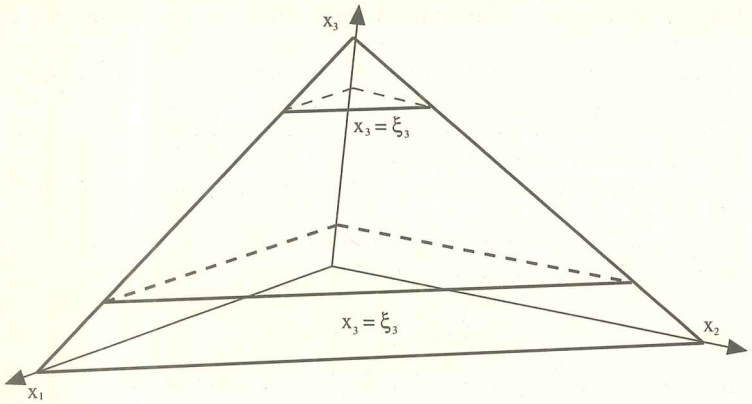


FIGURA 8

Simbólicamente:

$$f_3(x) = \underset{\substack{x_1+x_2+x_3=x \\ x_i\geq 0}}{máx} [g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)] =$$

$$= \underset{0\leq\xi_3\leq x}{máx} \left[\underset{\substack{x_1+x_2=x-\xi_3 \\ x_i\geq 0}}{máx} [g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(\xi_3)] \right] =$$

$$= \underset{0\leq\xi_3\leq x}{máx} \left[g_3(\xi_3) + \underset{\substack{x_1+x_2=x-\xi_3 \\ x_i\geq 0}}{máx} [g_1(x_1) + g_2(x_2)] \right] =$$

$$= \underset{0\leq\xi_3\leq x}{máx} [g_3(\xi_3) + f_2(x-\xi_3)]$$

siendo

$$f_2(x-\xi_3) = \underset{\substack{x_1+x_2=x-\xi_3 \\ x_i\geq 0}}{máx} [g_1(x_1) + g_2(x_3)]$$

Generalizando, el problema a N variables podría enunciarse el principio de Bellman o de la programación dinámica.

La estrategia óptima para N variables es la que se obtiene tomando la N-sima variable como parámetro y buscando el óptimo respecto de éste, suponiendo que en el conjunto de las restantes N – 1 variables se ha seguido la estrategia óptima.

E.8.9. Coste mínimo de una autopista

Entre Madrid y Barcelona se desea construir, en cinco tramos, una autopista, que pasará por las proximidades de diversas ciudades, con el menor costo posible. Para cada tramo, se estudian las posibles variantes y sus diversos costos. Finalmente se llega a dibujar el *grafo* representado en la figura 9, donde en cada eslabón figura el correspondiente coste en cientos de millones de pesetas. Se supone el sentido de Madrid a Barcelona, para el cálculo de costos.

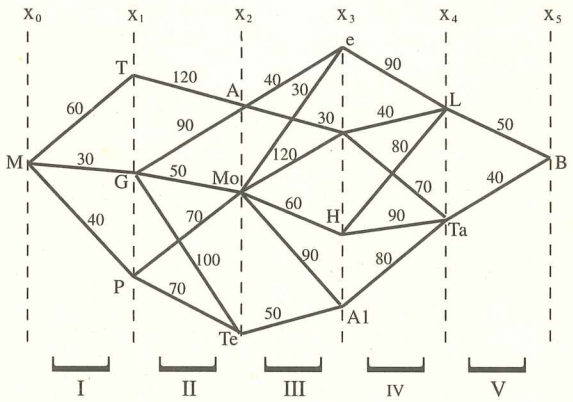


FIGURA 9

Si las variables de decisión relativas a cada tramo son x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y pueden ocupar las distintas posiciones de los vértices situados sobre una misma alineación [2], los costes de cada tramo vendrán dados por las funciones $g_I(x_0, x_1)$; $g_{II}(x_1, x_2)$; $g_{III}(x_2, x_3)$; $g_{IV}(x_3, x_4)$; $g_V(x_4, x_5)$ funciones que expresan la dependencia del costo en cada tramo de los valores que pueden tomar las variables de decisión correspondientes que definen dicho tramo.

El costo total de la autopista será:

$$R(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g_I(x_0, x_1) + g_{II}(x_1, x_2) + g_{III}(x_2, x_3)$$
$$g_{IV}(x_3, x_4) + g_v(x_4, x_5)$$

[2] Las iniciales que aparecen en cada vértice de las figuras corresponden respectivamente, a las siguientes ciudades: M = Madrid; T = Torrelaguna; G = Guadalajara; P = Priego; A = Alcolea del Pinar; Mo = Molina de Aragón; Te = Teruel; C = Calatayud; Z = Zaragoza; H = Híjar; Al = Alcañiz; L = Lérida; Ta = Tarragona; B = Barcelona.

Los costos mínimos $f_I(x_i)$ para las distintas variantes del tramo *I* son:

$$f_I(T) = g_I(M, T) = 60$$
$$f_I(G) = g_I(M, G) = 30$$
$$f_I(P) = g_I(M, P) = 40$$

La trayectoria de mínimo coste, $f_{I,II}(x_2)$ *entre las diferentes trayectorias de los tramos* I y *II*, considerados simultáneamente, vendrá dada, en virtud del principio de optimización, por:

$$f_{I,II}(A) = \min_{x_1=T,G,P} [f_I(x_1) + g_{II}(x_1, A)]$$

$$f_{I,II}(Mo) = \min_{x_1=T,G,P} [f_I(x_1) + g_{II}(x_1, Mo)]$$

$$f_{I,II}(Te) = \min_{x_1=T,G,P} [f_I(x_1) + g_{II}(x_1, Te)]$$

y, considerando la figura 9, resulta como tal[3]

$$M\ G\ A \text{ con coste mínimo} = f_{I,II}(A) = 120$$
$$M\ G\ Mo \text{ con coste mínimo} = f_{I,II}(Mo) = 80$$
$$M\ P\ Te \text{ con coste mínimo} = f_{I,II}(Te) = 110$$

Análogamente, considerando a la vez los tramos *I*, *II* y *III*, el costo mínimo para dichos tramos en conjunto, $f_{I,II,III}(x_3)$, por el principio de optimización, será:

$$f_{I,II,III}(C) = \min_{x_2=A,Mo,Te} [f_{I,II,}(x_2) + g_{III}(x_2, C)]$$

$$f_{I,II,III}(Z) = \min_{x_2=A,Mo,Te} [f_{I,II,}(x_2) + g_{III}(x_2, Z)]$$

$$f_{I,II,III}(H) = \min_{x_2=A,Mo,Te} [f_{I,II,}(x_2) + g_{III}(x_2, H)]$$

$$f_{I,II,III}(Al) = \min_{x_2=A,Mo,Te} [f_{I,II,}(x_2) + g_{III}(x_2, Al)]$$

[3] Cuando un vértice no se encuentra unido con ningún otro, consideramos que el coste del eslabón es infinito.

y de la figura 9 se tiene:

$$M\ G\ A\ C \text{ con coste mínimo} = f_{I,II,III}(C) = 160$$
$$M\ G\ A\ Z \text{ con coste mínimo} = f_{I,II,III}(Z) = 150$$
$$M\ G\ Mo\ H \text{ con coste mínimo} = f_{I,II,III}(H) = 140$$
$$M\ P\ Te\ Al \text{ con coste mínimo} = f_{I,II,III}(Al) = 160$$

De manera similar:

$$f_{I,II,III,IV}(L) = \min_{x_3=C,Z,H,Al} [f_{I,II,III}(x_3) + g_{IV}(x_3, L)]$$

$$f_{I,II,III,IV}(Ta) = \min_{x_3=C,Z,H,Al} [f_{I,II,III}(x_3) + g_{IV}(x_3, Ta)]$$

resultando, para el conjunto de los tramos *I*, *II*, *III* y *IV*, las trayectorias:

$$M\ G\ A\ Z\ L \text{ con coste mínimo} = F_{I,II,III,IV}(L) = 190$$
$$M\ G\ A\ Z\ Ta \text{ con coste mínimo} = F_{I,II,III,IV}(Ta) = 220$$
$$M\ P\ Te\ Al\ Ta \text{ con coste mínimo} = F_{I,II,III,IV}(Ta) = 220$$

Finalmente obtendremos:

$$f_{I,II,III,IV,V}(B) = \min_{x_4=L,Ta} [f_{I,II,III,IV,V}(x_4) + g_V(x_4, B)]$$

y, de aquí, resulta:

$$M\ G\ A\ Z\ L\ B \text{ con coste mínimo} = f_{I,II,III,IV,V}(B) = 240$$

de donde, la autopista buscada, que parte de Madrid (*M*), pasará por las ciudades de Guadalajara (*G*), Alcolea del Pinar (*A*), Zaragoza (*Z*), Lérida (*L*), para finalizar en Barcelona (*B*), al ser el coste de esta variante el menor.

La optimización secuencial se ha realizado en el sentido de Madrid (*M*) a Barcelona (*B*), el mismo resultado se hubiese obtenido realizándolo en sentido inverso, es decir, de Barcelona (*B*) a Madrid (*M*), cuya comprobación dejamos al cuidado del lector.

E.8.10. Optimización en Economía, Biología, etc.

En Economía es frecuente hablar de *comportamiento racional* de un consumidor cuando maximiza su «utilidad» con la restricción de su presupuesto o de una empresa si trata de maximizar su tasa de crecimiento sujeta a un límite inferior para los beneficios, etc. Análogamente, en Biología se considera que una planta dispone sus hojas de modo que hagan máxima su exposición a la luz de la que depende la función de fotosíntesis, sujeta a ciertas restricciones físicas,...

En todos los casos se supone que el comportamiento debe ser el que resulta de este paradigma de la optimización con restricciones.

Su formulación es análoga al caso de la programación lineal, siendo no lineal la función objetivo o las restricciones, o ambos. Pero el algoritmo matemático es mucho más complicado.

E.8.11. Formular un modelo de programación lineal con objetivos múltiples dentro del marco en que se sitúa [E.8.10].

VON NEUMANN (1903-1957)

Creador de la Teoría de juegos y otras geniales contribuciones a la Matemática, Economía, Física,...

9. PROCESOS DE DECISIÓN

«Nada es más difícil y, por consiguiente, más precioso que saber decidir.»

NAPOLEÓN BONAPARTE (*Maxims*, 1804)

9.1. Decisiones individuales y función de valor

A fin de introducir algunas ideas generales relativas al esquema de un proceso de decisión, vamos a ver algunos ejemplos sencillos, en los que es fácil destacar las características y etapas de los mismos.

Elección del pintor óptimo

Supongamos que se pide a un individuo H que elija entre los pintores españoles Dalí, Picasso, Goya, el Greco, Murillo, Ribera, Solana, Velázquez, el que considera mejor. Parece que sería natural que comenzara por establecer preferencias entre pares de pintores

	Picasso	Dalí	Solana	Goya	El Greco	Velázquez	Murillo	Ribera	f
Picasso	0	1	1	0	0	0	1	1	4
Dalí	0	0	1	0	0	0	1	0	2
Solana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Goya	1	1	1	0	1	0	1	1	6
El Greco	0	1	1	0	0	0	1	1	4
Velázquez	1	1	1	0	1	0	1	1	6
Murillo	0	1	1	0	0	0	0	0	2
Ribera	0	1	1	0	0	0	1	0	3

poniendo $a_i > a_j$, cuando considere que el pintor a_i es mejor que el a_j. Estos resultados le permiten obtener una matriz cuadrada en que en la intersección de la fila i con la columna j pondrá $a_{ij} = 1$, si $a_i > a_j$ y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.

A partir de estos datos, se propone definir una *función de valor* que represente fielmente la preferencia. A saber, una función real $f: A \to R$, de modo que sea:

$$a \succ b \text{ (} a \text{ preferido a } b\text{) si y sólo si } f(a) > f(b) \qquad [1]$$

Antes de seguir adelante veamos cómo se construye la función f. Para esto basta observar que el número de unos en cada fila, da el número de pintores que son inferiores al titular de la fila. Así, tenemos la función que define la ordenación:

$$\begin{gathered} f(Goya) = f(Velázquez) = 6 \\ f(Greco) = f(Picasso) = 4 \\ f(Ribera) = 3 \\ f(Dalí) = 2 \\ f(Murillo) = 0 \\ f(Solana) = 0 \end{gathered}$$

Observemos que la función f nos da en forma sencilla el orden de preferencia, que es lo que nos hemos propuesto.

Se dice en tal caso que se ha establecido un homomorfismo del sistema relacional empírico $\mathbb{A} \equiv (A, \succ)$ en el sistema relacional numérico $\mathbb{B} = (R, >)$, es decir, una correspondencia entre el conjunto A y el R, de modo que se verifica la relación [1].

Resulta así que $\mathbb{B} \equiv (B, >)$ es un *modelo matemático* de $\mathbb{A} \equiv (A, >)$, y que se llama *escala ordinal numérica* del sistema relacional empírico $(A, \succ)$ a la terna $(\mathbb{A}, \mathbb{B}, f)$.

Vamos a puntualizar los pasos de la modelización realizada en el problema anterior.

Hemos empleado, al presentar el problema, como es natural, vocablos extramatemáticos como «individuo», «preferencia», etc. Para tratar matemáticamente los problemas, estos vocablos deben ser sustituidos por otros bien definidos en el vocabulario matemático, sobre los que se pueda construir un *modelo matemático* que refleje, mediante algunos axiomas, las propiedades de la situación real de decisión considerada.

A continuación, como ejemplo de un proceso de modelización, escribimos a dos columnas algunos enunciados, a la izquierda los imprecisos con el lenguaje ordinario, a la derecha los correspondientes en lenguaje matemático:

Un individuo debe elegir entre los elementos de un cierto conjunto formado por pintores (Goya, Velázquez, etc.).	Z es un conjunto finito de elementos $z \in Z$.
El individuo tiene un sistema de preferencias de pintores para todos los pares de tal modo que ninguno es preferido a sí mismo y además si no prefiere un cierto pintor a otro, y éste no lo prefiere a un tercero, no prefiere el primero al tercero.	Sobre Z está definido un orden $\succ$ para todo par z, $z \in Z$, tal que para ningún $z \in Z$ es $z \succ z$ y si $z, z', z'' \in Z$, y es $z \succ z'$ y $z' \succ z''$ entonces es $z \succ z''$.

Se demuestra (por un razonamiento análogo al que hicimos en el caso de los pintores) el siguiente *Teorema* (Cantor): Existe una función de valor $f: Z \to \mathbb{R}$ tal que $z \succ z' \Leftrightarrow f(z) > f(z')$.

Demostrado el teorema (lo que puede hacer el lector siguiendo los pasos del ejemplo) es posible pasar a traducirlo al lenguaje empírico de la columna izquierda.

Para elegir entre los pintores el óptimo (o entre los resultados posibles de una decisión) basta elegir el mayor entre los números reales que se asignan a los mismos, mediante una función de valor $f(z)$.	← Interpretación empírica del problema

En el ejemplo, el máximo de $f(z)$ es 6 que corresponde a Goya y a Velázquez.

Obsérvese que el modelo sólo se refiere al orden y nada dice sobre calificación relativa.

Comprender bien este doble paso del enunciado empírico al abs-

tracto y del modelo abstracto, tras una cierta elaboración matemática, a la situación empírica, es fundamental para trabajar con rigor en este campo.

9.2. Decisiones individuales y función de utilidad

Veamos ahora casos más complejos de decisiones asociadas a incertidumbre.

A) El vendedor de periódicos

Un vendedor de revistas (*decisor*) hace semanalmente un pedido de una cierta revista, cuyo coste unitario es de 400 pts y su precio de venta 500 pts y se supone que cada unidad no vendida en el día constituye un pérdida de 5 pts. Se supone que la demanda tiene uno de los tres valores 0, 1, 2, pero no es conocida su ley de probabilidad. El problema es buscar la *decisión óptima* con el *criterio* de hacer máxima la ganancia. Para esto se dispone de la *variable de decisión*, número de unidades *a*, encargadas en el día. En el siguiente cuadro figuran en la fila superior las posibles demandas o *estados del ambiente*, en la columna izquierda los posibles pedidos o *alternativas* del decisor y los elementos de la matriz son los *resultados o consecuencias* (ganancias correspondientes) obtenidas por una simple operación a partir de la demanda, la variable de decisión y los costes unitarios de compra y venta.

$a_i \backslash \theta_i$	0	1	2
1	–5	100	100
2	–10	95	200

Otra representación muy usada es el *árbol de decisión* (fig. 1), en que se parte de un punto de decisión *J* (indicado con un cuadradito) del que parten dos arcos a_1, a_2, que representan las dos decisiones posibles. Al final de a_1 hay un punto de azar (marcado con un circulito) del que parten tres arcos θ_1, θ_2, θ_3, que representan los estados del ambiente. Al final de cada uno de éstos figura el resultado o consecuencia de cada decisión y cada estado.

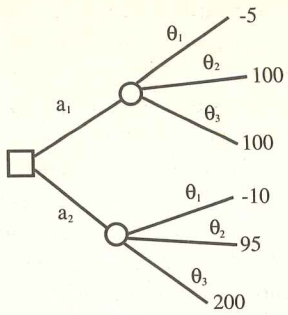


FIGURA 1

Si el estado del ambiente es conocido con certidumbre, el resultado es un número que es la ganancia por la cantidad de revistas vendidas; si el ambiente es aleatorio y el estado del mismo viene definido por una distribución de probabilidad, el resultado económico es una distribución de probabilidad, etc. Para llegar a una *regla de decisión*, habrá que tener en cuenta los *objetivos* del decisor y algún *criterio* final. P.e., suponiendo el caso simple de certidumbre y sabiendo que el objetivo del decisor es ganar lo más posible hay una regla de decisión obvia. Se ve en el esquema que si la demanda es $\theta = 2$ la mejor decisión es a_2; si la demanda es $\theta = 1$ la mejor decisión es a_1. Si no se sabe nada de cuál será la demanda cada día, en este caso de total *incertidumbre* una regla de decisión puede ser la llamada maximin: *elegir la máxima entre las mínimas ganancias en cada decisión*. Como con la a_1, la mínima ganancia (pérdida) es –5 y con a_2, es –10 y el máximo de estos dos números corresponde a a_1, ésta será la regla máximin de decisión.

Si supiéramos o creyéramos que la distribución de probabilidad de estados es $p(\theta_1) = p(\theta_2) = p(\theta_3) = 1/3$, una regla posible, llamada de *Laplace*, sería *hacer máxima la esperanza matemática de ganancia*, que nos da:

$$E[a_1] = \frac{1}{3}(-5 + 100 + 100) = \frac{195}{3}$$

$$E[a_2] = \frac{1}{3}(-10 + 95 + 200) = \frac{285}{3}$$

y la mejor decisión con esta información y el *criterio de la esperanza* sería a_2. Aquí tenemos el primer atisbo del interés de los conceptos estadísticos en las decisiones.

Podemos decir que en este ejemplo hay *un solo decisor, objetivo único* (maximizar la ganancia), *ambiente* (certidumbre, aleatorio, incertidumbre), las *decisiones posibles* son dos que se pueden enunciar explícitamente, las *consecuencias* están relacionadas de modo inmediato con las decisiones y el criterio correspondiente varía según las situaciones y es uno de los fines de la teoría su formulación, justificación y aplicación adecuadas. Se comprende la posibilidad de considerar problemas análogos más complejos como el de un kiosco de venta de periódicos con varios propietarios interesados no sólo en la ganancia inmediata, sino en el prestigio futuro de la empresa, en la ampliación continuada de la oferta, etc.

En todo caso, el esquema general de un proceso de decisión se resume en el cuadro siguiente (fig. 2):

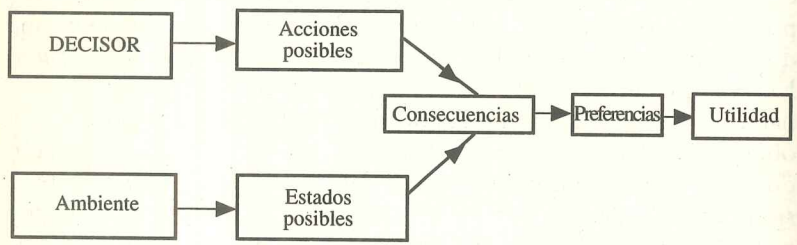


FIGURA 2

B) *Problema del jugador de loterías*

Supongamos la situación de decisión siguiente: un jugador B debe elegir entre adquirir o no un billete de lotería que le cuesta 10^6 pts y puede obtener con él un premio de $3 \cdot 10^6$ pts o no ganar nada. Designemos por a_1, a_2 las dos acciones posibles del individuo y supongamos que los dos estados del ambiente: tener premio (w_1) y no tener premio (w_2) tienen probabilidades $p(w_1) = p(w_2) = 1/2$.

Podemos presentar el problema mediante el esquema siguiente de beneficios o consecuencias finales del jugador:

	w_1	w_2
a_1	$2 \cdot 10^6$	-10^6
a_2	0	0

Si el individuo se guiara por el criterio tradicional de la esperanza matemática del valor monetario, se tendría que para la acción a_1 su esperanza sería:

$$E\,[a_1] = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^6 + 0{,}5\,(-10^6) = 0{,}5 \cdot 10^6$$

y para la a_2: $E[a_2] = 0$, luego parece preferible a_1.

Las críticas más comunes al criterio de la esperanza matemática, que hemos aplicado en ejemplos anteriores, son: a) identificar el posible resultado de una cierta acción en una sola ocasión o partida con el resultado promedio si esta acción se repite en un número grande de sucesivas partidas en las mismas condiciones; b) no tener en cuenta la situación económica inicial del que decide y, por tanto, prescindir del riesgo de ruina al identificar la cantidad ganada en una partida con el valor esperado.

En el caso del Sr. B, si perder 10^6 pts puede originarle una situación económica catastrófica, no parece aconsejable tal comportamiento.

Ante una situación tan simple como ésta, parece claro que el *valor monetario esperado* no es una guía de acción plausible. Lo que se trata es de ver si el Sr. B considera razonable, dada su situación económica, aceptar una pérdida de 10^6 pts, asociada a una posible ganancia de $2 \cdot 10^6$ pts con $p = 0{,}5$, o prefiere mantenerse como está inicialmente poseyendo 10^6 pts.

No parece que ante una disyuntiva tan simple haya otra posibilidad que considerar la *preferencia personal*. Lo que trataremos ahora es de ver cómo la *teoría de la utilidad* puede dar una guía para el comportamiento ante *situaciones complejas* a partir del comportamiento personal ante situaciones simples como la anterior. Por ejemplo, si un individuo considera inaceptable la anterior *perspectiva aleatoria* que designaremos brevemente con la notación

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2 \cdot 10^6 & -10^6 \end{bmatrix}$$

también debe considerar inaceptable la siguiente que es peor:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 2\cdot 10^6 & 0 & -10^6 \end{bmatrix}$$

Pero la más importante justificación para la introducción del concepto de utilidad viene de la existencia de problemas en que no es fácilmente aplicable una valoración económica numérica en pesetas o alguna otra magnitud medible de las consecuencias de la decisión o en que tal valoración puede resultar de una simplificación excesiva y completamente empírica y convencional del problema. Tal caso se presenta cuando se trata de tener en cuenta las consecuencias de una decisión, que se traducen en prestigio o buena fama o, en el caso de un problema militar, lo que se llama el «valor militar» de unas instalaciones o de una victoria, o cuando se ha de establecer preferencias sobre complejos que representan la situación económica de un individuo o de un país en años sucesivos, etc. En todos estos casos no es aplicable la llamada «teoría tradicional de la decisión» y se impone el nuevo punto de vista, que podríamos llamar «teoría personalista o moderna» de la decisión, cuyo instrumento fundamental es el concepto de «valor relativo» o «utilidad».

9.3. La utilidad de Von Neumann

En un problema de decisión en ambiente de riesgo, a cada decisión le corresponde una distribución de probabilidad entre unos ciertos premios o cosas seguras. El decisor debe elegir aquella decisión que le dé la distribución de probabilidad «óptima». Se trata con esta teoría normativa de asignar al decisor un «comportamiento racional», que le permita, respetando unas cuantas reglas que se consideran plausibles y se formulan explícitamente en forma de un sistema coherente de axiomas, pasar de situaciones de decisión muy simples, en que no cabe más que el criterio personal, a situaciones complejas.

Elección entre loterías

Supongamos que un ama de casa se enfrenta con la elección entre dos loterías, cuyos premios son A = lavadora, B = friegaplatos, C = te-

levisor, D = máquina de coser, y desea saber cuál le es más favorable de las dos siguientes:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}25 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}50 & 0{,}15 & 0{,}20 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

No exponemos la teoría, sólo indicamos que para llegar a esta comparación puede comenzar por establecer un orden (transitivo, reflexivo y completo) de preferencia entre los premios que podría ser el siguiente $A_1 \gtrsim A_2 \gtrsim A_3 \gtrsim A_4$. Habrá de establecer un axioma de continuidad que permita obtener relaciones de indiferencia entre los premios centrales como A_2 y loterías con los extremos, es decir, p.e.:

$$A_2 \sim \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix}$$

Asimismo habrá de considerar relaciones de indiferencia del tipo

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ A_1 & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

en que A_4 se ha *sustituido* por su equivalente según [1] (axioma de sustitución). Habrá de admitir también la posibilidad de reducir expresiones como la anterior mediante la *regla de la probabilidad compuesta*. Habrá de admitir finalmente la transitividad y completitud de la relación $\gtrsim$ en el conjunto de las distribuciones de probabilidad que se le presentan.

Se ve así, que comportarse admitiendo estas reglas, equivale a asignar un número real a cada lotería, que es lo que llamaremos su *utilidad* y a considerar *óptima* la decisión que dé una lotería de máxima utilidad esperada.

Fijados los premios extremos A_1 y A_4, consideraremos para cada premio intermedio con qué probabilidad p considera el decisor que es

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim A_2$$

Si la respuesta es p = 0,6, es decir, que el decisor considera

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim A_2$$

diremos que la *utilidad* de A_2 es $u(A_2) = 0{,}6$.

Análogamente si

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim A_3$$

pondremos $u(A_3) = 0{,}2$.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim A_1 \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix} \sim A_4$$

pondremos $u(A_1) = 1$, $u(A_4) = 0$

De este modo se obtiene:

$$U[\xi] = U\left[\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}25 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= U\left[\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}25 \\ A_1 & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} & A_4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= U\begin{bmatrix} 0{,}25\cdot 1 + 0{,}30\cdot 0{,}6 + 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}25\cdot 0 & 0 \\ A_1 & A_4 \end{bmatrix}$$

luego $U(\xi) = 0{,}25\cdot 1 + 0{,}30\cdot 0 + 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}25\cdot 0 = 0{,}47$

Se observa que $U(\xi) = E[u(\xi)]$.

Análogamente resulta

$$U(\eta) = 0{,}15\cdot 1 + 0{,}50\cdot 0{,}6 + 0{,}15\cdot 0{,}2 + 0{,}20\cdot 0 = 0{,}48$$

Como $0{,}47 < 0{,}48$, el ama de casa debe considerar $\eta > \xi$.

De un modo general se demuestra que si partimos de unos resultados seguros $A \gtrsim B \gtrsim \ldots \gtrsim C$ y formamos distribuciones de probabilidad con los mismos:

$$\xi = \begin{bmatrix} p_1 p_2 \cdots p_e \\ A\ B \ldots L \end{bmatrix}, \eta, \ldots$$

y llamamos utilidad de B al número u(B) tal que el decisor considera que:

$$\begin{bmatrix} u(B) & 1 - u(B) \\ A & L \end{bmatrix} \sim B$$

y análogamente para los restantes, se verifica que

$$U[\xi] = E[u(\xi)] = p_1 u(A) + \ldots + p_e u(L)$$

de modo que $\xi > \eta \Leftrightarrow U(\xi) > U(\eta)$, o dicho en otra forma: el orden entre las perspectivas aleatorias es el mismo que entre los números reales que son sus *esperanzas de utilidad* (teorema de Von Neumann).

9.4. Decisión con información o experimento asociado

Supongamos que a un decisor se le presentan 10 bolsas de bolas tales que 8 son de tipo w_1 con 4 bolas blancas y 6 negras y 2 son del tipo w_2 con 9 blancas y 1 negra. Se considera que el decisor al presentársele una bolsa puede afirmar que a_1 = la bolsa es de tipo w_1, o bien a_2 = la bolsa es de tipo w_2 y que las consecuencias de estas decisiones posibles, medidas como utilidades del decisor, se encuentran en los vértices finales del árbol adjunto (fig. 3).

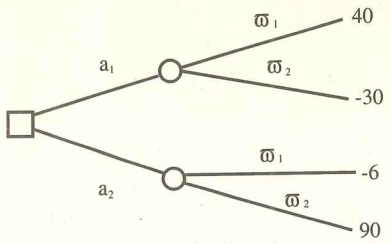


FIGURA 3

Como el decisor conoce la distribución a priori de urnas: $P(w_1) = 0{,}8$, $P(w_2) = 0{,}2$ estaría ante un problema de *decisión en riesgo con distribución a priori conocida* y debe tomar la decisión que haga máxima la esperanza de utilidad. Como

$$E[a_1] < 0{,}8 \cdot 40 + 0{,}2 \cdot (-30) = 2 \cdot 6$$
$$E[a_2] = 0{,}8 \cdot (-6) + 0{,}2 \cdot 90 = 13{,}2, \text{ debe tomar la decisión } a_2$$

Una situación nueva se presenta si se le ofrece al decisor la posibilidad de hacer un experimento que le cuesta 5 unidades y le permite sacar una bola de la urna que le ha correspondido y observar el color de la bola.

En el árbol adjunto (fig. 4) está el esquema de las posibilidades del decisor: elige «no hacer experimento» (e_0), «sí hacer» (e_1); en el primer caso, se repite el esquema ya visto; en el segundo, puede salirle blanca (B) o negra (N). Si sale B, puede afirmar a_1 o a_2 y, finalmente, según que sea la urna w_1, w_2, tendremos las ganancias en los vértices finales. De los datos del problema resultan conocidas las probabilidades del cuadro siguiente:

$P(w_1) = 0{,}8$	$P(w_2) + 0{,}2$
$P(B/w_1) = 0{,}4$ $P(N/w_1) = 0{,}6$	$P(B/w_2) = 0{,}9$ $P(N/w_2) = 0{,}1$

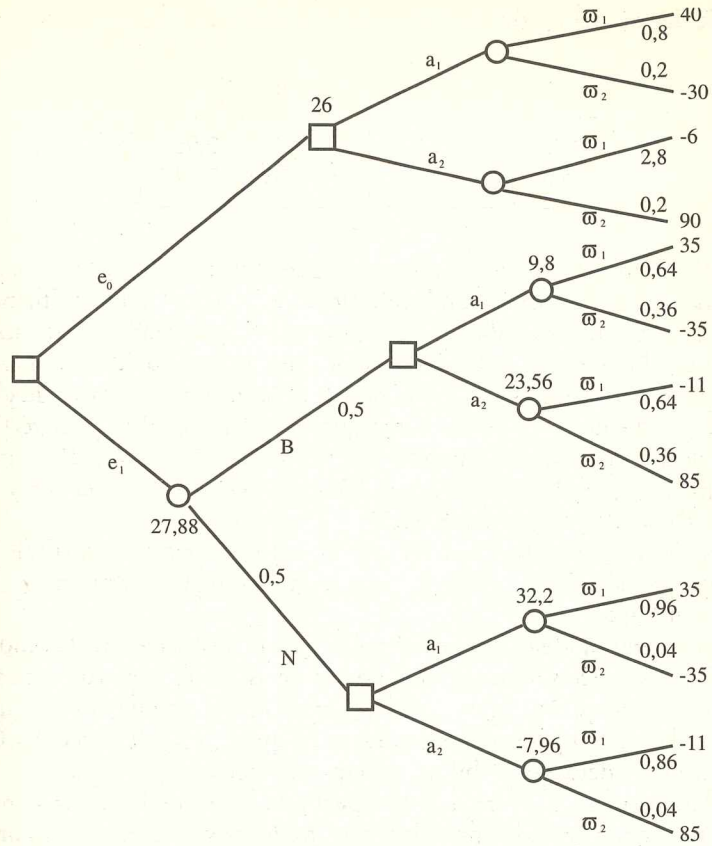


FIGURA 4

Pero justamente las que interesan son las P(B) y P(N) y $P(w_i/B)$, $P(w_i/N)$ que se obtienen por la fórmula de Bayes.

$$\text{P.e. } P(w_1/B) = \frac{P(w_1) \cdot P(B/w_1)}{P(w_1) \cdot P(B/w_1) + P(w_2) \cdot P(B/w_2)} =$$
$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}9} = 0{,}64$$

Se tiene así el cuadro:

$P(B) = 0{,}5$	$P(N) = 0{,}5$
$P(w_1/B) = 0{,}64$ $P(w_2/B) = 0{,}36$	$P(w_1/N) = 0{,}96$ $P(w_1/N) = 0{,}04$

Para buscar la decisión óptima se sigue el *método regresivo* o de la *programación dinámica* marchando de derecha a izquierda y situando en cada paso correspondiente a una intervención del azar las esperanzas de utilidad que resultan de las distribuciones de probabilidad y en cada cuadrado correspondiente a una decisión, la máxima de las utilidades correspondientes a los vértices contiguos a la derecha. P.e., en el vértice final de los arcos (e_1, B, a_1) pondremos $9{,}8 = 0{,}64 \cdot 35 + 0{,}36\ (-35)$ y análogamente en (e_1, B, a_2) pondremos $23{,}56 = 0{,}64 \cdot (-11) + 0{,}36 \cdot 85$ y en el (e_1, B) pondremos máx $(9{,}8; 23{,}56) = 23{,}56$; etc.

Así se llega finalmente a ver que lo mejor es elegir e_1, y, si sale B, elegir a_2 y, si sale N, elegir a_1. Con esta estrategia se obtiene 27,88 como utilidad.

El mismo modelo anterior se aplicaría a una situación real como la siguiente: un decisor se enfrenta con la decisión de construir una fábrica (a_1) = pequeña, (a_2) = grande, para producir un nuevo ítem cuya demanda, en una primera conjetura, es tal que $P(w_1) = 0{,}8$, $P(w_2) = 0{,}2$ (siendo w_1 = demanda débil, w_2 = demanda fuerte).

Para mejorar la información respecto de la futura demanda se realiza un sondeo entre los posibles consumidores y se obtienen las probabilidades condicionadas $P(B/w_i)$, $P(N/w_i)$, y a partir de éstas se modifican las probabilidades a priori mediante la fórmula de Bayes, como hemos indicado en el ejemplo de las bolsas, valiendo todo el resto del ejemplo que el lector adaptará como ejercicio.

Se observa que en este caso se manejan probabilidades subjetivas en la distribución a priori, que se modifican a través de la fórmula de Bayes, en el siguiente paso, lo que es característico del método bayesiano.

Tenemos así un ejemplo de lo que se llama *análisis de decisiones*, que se aplica en condiciones más generales que en el ejemplo, ante situaciones como elección del tratamiento más apropiado para un enfermo, o elección de lugar para la implantación de una fábrica, o un nuevo aeropuerto, etc.

9.5. Decisiones colectivas

Todos hemos comprobado al llegar a decisiones colectivas cómo la ausencia de una normativa en tribunales, jurados, etc., ha dado, a veces, el triunfo al más simpático, al más hábil o al más poderoso, que ha logrado imponerse por sugestión, habilidad o amenaza, a un grupo de personas con menos dosis de tales cualidades.

Ciertamente no existe una interpretación única del término *decisión colectiva*, que también se ha confundido frecuentemente con otras denominaciones como decisión multipersonal, decisión social, decisión de grupo, etc.

Podríamos decir que una *decisión colectiva* se presenta cuando las actividades de dos o más individuos interesados en una situación de decisión están *interrelacionadas*.

Esta amplia definición comprende: a) las *decisiones de grupo* que, a partir de las decisiones individuales, a través p.e., de un mecanismo de votación, conducen a una decisión final; b) las *decisiones multipersonales*, en que cada decisor toma una decisión y ellas conjuntamente engendran un curso de desarrollo para el proceso (juegos de estrategia, negociaciones, teoría de equipos,...), etc.

Dentro de las decisiones de grupo, caben distintos tipos de situaciones. P.e., a) las decisiones de un comité para determinar una inversión óptima para una empresa; b) las decisiones de un parlamento para establecer la política económica para un país; c) las elecciones de un país sobre un conjunto de candidatos a diputados; d) de un jurado sobre culpabilidad o no de un acusado; e) de un tribunal que resuelve un concurso, etc.

Estos ejemplos nos llevan a una nueva distinción entre situaciones en que cabe que los individuos que forman parte del conjunto expresen sus preferencias individuales en forma de utilidades y aquellas otras en que sólo parece posible considerar ordenaciones. Empecemos por éstas últimas.

9.6. Votaciones. El teorema de Arrow

Tres gastrónomos P, Q, R clasifican tres restaurantes a, b, c de la siguiente manera:

P establece el orden de preferencia $a \succ b \succ c$.
Q establece el orden de preferencia $b \succ c \succ a$.
R establece el orden de preferencia $c \succ a \succ b$.

Si se aplica la regla de la mayoría siempre se obtiene que tienen dos votos contra uno cada una de las preferencias siguientes:

$$b \succ c$$
$$c \succ a$$
$$a \succ b$$

Aparece así una contradicción con la transitividad, lo cual constituye la llamada *paradoja de Condorcet* (1785).

Esta y otras conocidas paradojas de las votaciones, así como la opinión extendida entre los economistas de la época sobre la carencia de sentido de la amalgamación de utilidades individuales, llevó al Premio Nobel Prof. Arrow a estudiar el problema de amalgamación de preferencias individuales para obtener una función de preferencia social en su libro famoso de 1951.

Arrow se plantea la cuestión de qué criterios mínimos deben satisfacer las preferencias sociales obtenidas a partir de las preferencias de un conjunto de individuos que forman tal sociedad. «Si excluimos la posibilidad de comparaciones interpersonales de la utilidad -dice Arrow- los únicos métodos satisfactorios de pasar de las preferencias individuales a las sociales para conjuntos amplios de individuos son las impuestas o las dictatoriales».

Sea un conjunto de 3 ó más alternativas A = {x, y,...,z}. Sea $J_1, J_2, \ldots, J_n$ un conjunto de decisores cada uno de los cuales fija un orden de preferencia entre las alternativas. Se trata de ver si existe alguna regla de decisión colectiva que permita asignar a cada conjunto de elecciones de preferencias una nueva ordenación colectiva.

Si suponemos que A = {x, y, z} hay 13 órdenes posibles, cada uno de los cuales se llama un *perfil de preferencias* (se suponen todos los órdenes transitivos, reflexivos y completos).

Los perfiles posibles son:

R=	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}
	x y z	x z y	y x z	y z x	z x y	z y x	x y-z	y z-x	z x-y	x-y z	x-z y	y-z x	x-y-z

El objetivo es definir la *función social* φ: RxRxR $\rightarrow$ R, es decir que, p.e., nos dé φ (R_1, R_3, R_4) = R_6,... Arrow demostró que *si una función social verifica las condiciones de dominio universal, unanimidad, independencia de alternativas irrelevantes es necesariamente una dictadura.*

Brevemente, estas condiciones significan:

Dominio universal: El número de individuos es $n \geq 2$, el número de alternativas es $|A| \geq 3$ y el dominio R en que está definida la función es el de todos los perfiles posibles.

Unanimidad: Si todos los individuos establecen el mismo orden entre dos alternativas, el orden colectivo debe respetar estas preferencias.

Independencia de alternativas irrelevantes: Si $A_1 \subset A$ y un perfil de A se modifica de modo que los elementos pertenecientes a A_1 no alteran su posición relativa, la función social resultante del perfil original y del modificado deben coincidir para las alternativas de A_1.

Dictadura: No existe un individuo tal que cuando él prefiere *x* a *y* (para algún *x* e *y*) la sociedad prefiere *x* a *y*, cualesquiera que sean las preferencias de los restantes individuos.

Este decepcionante resultado de las primeras investigaciones de Arrow desanimó a muchos investigadores de proseguir el estudio de las decisiones colectivas. Pero pronto las cosas cambiaron y como otros muchos teoremas negativos famosos (p.e., el teorema de Gödel, o el teorema de Banach-Tarski) dio lugar a una extensísima serie de trabajos, que hoy continúa, para aclarar el alcance de sus condiciones y las consecuencias de las modificaciones de las mismas. Un poco de meditación en las condiciones del teorema pone de manifiesto la dura exigencia de algunas como, p.e., que la regla valga para *todas* las posibles ordenaciones de preferencias individuales, por caprichosas que sean.

Un libro reciente de Kelly, resume los 356 trabajos realizados en torno a la idea de modificar o suprimir algunas de las hipótesis o condiciones de Arrow. Tales trabajos han logrado la rehabilitación de la regla de la mayoría de un modo completamente general para dos opciones y de un modo amplio para *n* opciones, en condiciones similares a muchas situaciones reales: votaciones con dos partidos políticos o con un conjunto de partidos que admitan una cierta ordenabilidad de sus opiniones.

9.7. Problema del sindicato (riesgo compartido)

Un ejemplo simplificado del problema del sindicato es el siguiente: supongamos que J_1 desea asegurar una casa que vale $2 \cdot 10^7$ pts en la compañía de seguros J_2. Sean ω_1 (estado de no siniestro), ω_2 (destrucción total) con las probabilidades que se indican y la partición que indicamos:

	P	*Pago*	*Partición*	
			J_1	J_2
w_1	0,999	0	−2.000	2.000
w_1	0,001	$-2 \cdot 10^7$	−2.000	$-19.998 \cdot 10^3$

Si suponemos que $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son las funciones de utilidad de J_1 y J_2 al no haber partición se obtiene el punto M ($\bar{u}_1 = 0{,}001 \cdot u_1\,(-2 \cdot 10^7)$; $\bar{u}_2 = u_2\,(0) = 0$) y al hacer la partición indicada se obtiene un punto de Pareto $N(\bar{u}_1 = u_1\,(-2.000), \bar{u}_2)$, siendo

$$\bar{u}_2 = U \begin{bmatrix} 0{,}999 & 0{,}001 \\ 2.000 & 19.998 \cdot 10^3 \end{bmatrix} > 0$$

que para ambos es mejor (fig. 5).

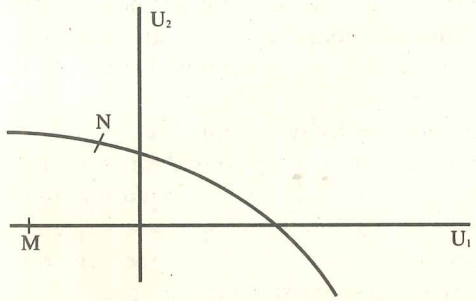


FIGURA 5

La idea de sindicato es la que se presenta al compartir riesgo, de modo que un grupo de personas trata de limitar la ganancia de unos clientes haciendo máxima la suya, con tal restricción.

9.8. Decisiones de grupo bayesianas y paretianas

En las decisiones de grupo en que cada uno de los individuos del mismo tiene una opinión particular (probabilidad subjetiva) y una valoración particular (utilidad subjetiva), se suelen considerar dos métodos fundamentales distintos que se llaman *conducta bayesiana* y *conducta paretiana*.

La primera se justifica diciendo que si el grupo debe tener un interés común, debe esforzarse en ponerse de acuerdo previamente a la decisión en aceptar unas probabilidades y utilidades comunes y después con ellas hacer máxima la esperanza de utilidad.

La conducta paretiana se justifica pensando en que en cada caso uno tiene su probabilidad y su utilidad y con ellas determina para las diferentes acciones posibles las correspondientes esperanzas de utilidad. El acto o *actos de Pareto* implican determinar un punto tal que no exista otro que sea al menos tan aceptable como el anterior por todos y preferido por uno al menos.

Supongamos que un equipo de dos expertos debe aconsejar a una empresa sobre la elección (a_1) o rechazo (a_2) de un equipo electrónico. Están de acuerdo sobre las utilidades, que se encuentran resumidas en el adjunto grafo (fig. 6).

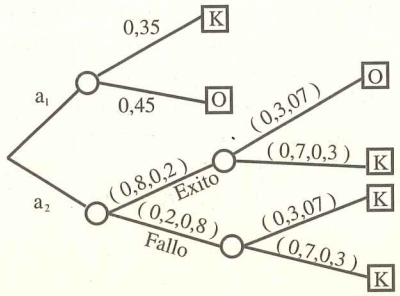


FIGURA 6

Si el equipo escoge a_1 sabe que tienen una probabilidad objetiva de 0,55 de obtener un premio K y 0,45 de no obtener nada; si eligen a_2 recibirán K si 1.° un equipo electrónico tiene éxito y además hay devaluación de la moneda o 2.° si el equipo falla y no hay devaluación. La probabilidad de obtener K para J_1 con la decisión a_2 es: $(0{,}8 \cdot 0{,}7) + (0{,}2 \cdot 0{,}3) = 0{,}62 > 0{,}55$ y lo mismo para J_2.

Si adoptan una conducta bayesiana y se ponen de acuerdo sobre las probabilidades tomando la media de las probabilidades de los dos tenemos el grafo de la figura 7.

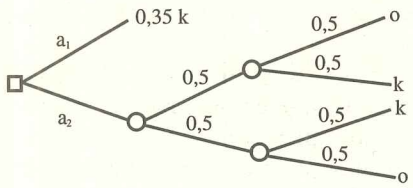


FIGURA 7

Tendríamos para uno y para otro $(0{,}5 \cdot 0{,}5) + (0{,}5 \cdot 0{,}5) = 0{,}5$ de obtener K.

Entonces el grupo eligiría a_1 en contra de las opiniones de uno y de otro; luego a_1 no es una decisión óptima Pareto.

Vemos, pues, en este ejemplo, sugerido por Raiffa, que el ponerse de acuerdo en las opiniones puede conducir a una decisión distinta de la que ambos consideran individualmente óptima.

Resumimos así las diferencias: los paretianos consideran como un peso muy fuerte el criterio de Pareto y no admiten el bayesiano porque puede conducir a una decisión en contra de todas las opiniones de los individuos del grupo. Los bayesianos (de grupo) consideran que el principio de sustitución entre loterías equivalentes es tan básico como el de Pareto y no encuentran grave que la racionalidad colectiva contradiga las racionalidades individuales.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.9.1. Enunciar y describir las fases y aspectos en forma análoga a los ejemplos del texto de algunos problemas de decisión relativos a:

a) elección de carrera.
b) elección de pareja.
c) elección de automóvil.
d) elección de una flota de camiones para una empresa de transporte.
e) elección de vacaciones.

E.9.2. Intentar formular los correspondiente modelos matemáticos que abarquen tipos de problemas análogos.

E.9.3. Poner ejemplos de problemas de decisión en que no sea inmediata la relación entre decisión y resultado.

E.9.4. Al Sr. Alfa le ofrecen 4 puestos de trabajo. Considera que debe tener en cuenta tres criterios para seleccionar el mejor, a saber sueldo, localización, comunicación. Establece las siguientes escalas de calificación:

	Puestos			
Criterio	A	B	C	D
Sueldo	Alto	medio	medio	bajo
Localización	medio	bajo	alto	medio
Comunicación	bajo	bajo	alto	medio

¿Puede establecer algunas preferencias como consecuencia de estos datos?

¿Podría buscar nuevos criterios o desdoblar alguno de los anteriores en otros subcriterios, o buscar para algunos escalas más estrictas?.

E.9.5. El siguiente cuadro representa las preferencias entre tipos de lecturas de la mayoría de los individuos de un grupo de jóvenes encuestados entre 18 y 23 años:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = \textit{Novela policiaca} \\ b = \textit{Poesía} \\ c = \textit{Ciencia-ficción} \\ d = \textit{Comics} \\ e = \textit{Libros de viajes} \end{array}$$

Ver si para estos datos existe una función de valor ordinal y, en caso afirmativo, dar los valores de $f(x)$.

E.9.6. Ídem en el caso de que las preferencias vengan dadas en la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

E.9.7. Dar con detalle la demostración del teorema de Cantor enunciado en [5.3].

E.9.8. Escalas de medidas

Al establecer la función de utilidad de Von Neumann [9.3], como también la función de valor de Cantor [9.1], seguimos procedimientos que son paralelos a los que se emplean en Geometría, Psicología, etc., para establecer *escalas de medida* de atributos o magnitudes (longitud, volumen, peso,...).

Como hemos visto, se trata de establecer un *teorema de representación*, que afirma la existencia de un homomorfismo entre un conjunto de elementos y objetos empíricos (loterías, regletas,...) entre los que se verifican ciertas *relaciones empíricas* (esta lotería es preferida a aquélla, esta regla tiene una longitud suma de aquellas dos,...) y un conjunto de números reales entre los que se verifican *relaciones numéricas*, que corresponden a las empíricas.

P.e., a las operaciones de preferencia $\succeq$ y la mixtura entre loterías corresponden las de ($\geq$) y combinación lineal convexa entre los números reales. Así se ha introducido la función de utilidad para loterías, que se puede considerar como una *escala* de medida para comparar situaciones de decisión con resultados aleatorios. Y, análogamente, en el teorema de Cantor.

La escala de Von Neumann se llama *escala de intervalo*, porque es invariante respecto a una trasformación lineal positiva y la escala de Cantor se llama *escala ordinal* por ser invariante respecto a una transformación *monótona*.

Escalas del primer tipo son las de temperatura centígrada y Farenheit, y del segundo, la escala de dureza de Moss, etc.

La forma menos fuerte de medida es la *escala nominal*. La lista de los alumnos de un curso es un homomorfismo 1-1 de dicho conjunto en la sucesión 1, 2,... y se puede considerar como una escala nominal de la clase.

En Química, p.e., se ha de distinguir entre millares de cuerpos distintos y mediante el análisis se llega a clasificaciones de estos cuerpos: 1) en cuerpos simples y compuestos; 2) en cada una de estas categorías se introducen nuevas clasificaciones (metales, halógenos,...).

En la llamada *escala de razón* la medida admite el grupo de transformaciones, $y = cx$ ($c \neq 0$). El cero es un valor fijo y la razón $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} =$ *constante.*

En la práctica, muchas magnitudes físicas se miden con aparatos que dan valores numéricos. Están basados, muchas veces, en las operaciones empíricas utilizadas para la definición de la escala. Otras veces, como ocurre con el dinamómetro, relacionan la magnitud que se quiere medir con otra más fácilmente medible. En el caso de la probabilidad subjetiva y de la utilidad, hay métodos intuitivos que requieren la colaboración de expertos.

E.9.9. Evolución de las escalas de medida

La evolución histórica de las escalas de medida de temperatura de la Física se resume así:

a) escala nominal (frío, caliente).
b) escala nominal asociada a algunos sucesos naturales (helado, frío, templado, caliente, hirviendo).
c) escalas de intervalo, mediante termómetros (centígrados, Farenheit).
d) escala de razón (Kelvin).

Una evolución análoga se puede esperar en relación con las medidas en otros campos como la Economía, Psicología,...

E.9.10. Relaciones significativas

Supongamos que un experimentador J_1 mide la temperatura x con una escala centígrada y otro J_2 mide y con una escala Farenheit. Se observa que siempre que en dos medidas de J_1 se obtiene $x' < x''$, las correspondientes de J_2 son $y' < y''$. En cambio puede ser $x' = 2x''$ y $y' \neq 2y''$, ya que, según sabemos, $x = \frac{9}{5}y + 32$. Se dice que la relación $x' < x''$ *es significativa* y la $x' = 2x''$ *no es significativa.*

E.9.11. ¿Tiene sentido decir que la temperatura a mediodía (30°) ha sido doble que la temperatura a medianoche (15°)? Se supone en la afirmación anterior la temperatura en escala centígrada, ¿por qué no ocurre la misma relación con las correspondiente temperaturas Farenheit?.

E.9.12. ¿Tiene sentido decir que el coeficiente intelectual de un individuo es 1/3 superior al de otro?

E.9.13. ¿Tiene sentido decir que el coste de la vida ha duplicado cuando el índice de precios al consumo ha aumentado un 100%?

E.9.14. ¿Tiene sentido cuantificar juicios relativos a que un suceso es más verosímil que otro?

E.9.15. Sean tres alternativas (x, y, z) y supongamos que una votación da los siguientes resultados (órdenes estrictos):

	x y z	*y x z*	*y z x*	*z x y*	*z y x*	*Total*
votantes	23	2	17	10	8	60

Comprobar la paradoja de Condorcet con esta votación.

E.9.16. Programación dinámica estocástica

Una persona juega en una rifa pudiendo elegir en el estado de partida, E_0, entre dos tipos distintos de rifa, estados E_1 y E_2. Si elige E_1 tiene un 50 por 100 de probabilidades de obtener en la jugada sucesiva y última un premio de 100 pesetas, estado E_3, o de 20 pesetas, estado E_4. Si, por el contrario, elige el E_2 tiene un 50 por 100 de probabilidades de lograr un premio de 100 pesetas en la jugada sucesiva y final, estado E_5, o de optar, estado E_6, entre dos nuevas rifas, estados E_7 y E_8. En el estado E_7 tiene un 50 por 100 de probabilidades de conseguir un premio de 10 pesetas, estado E_9, o nada, estado E_{10}. En el estado E_8 posee un 20 por 100 de probabilidades de alcanzar el premio gordo, 200 pesetas, estado E_{11}, y un 80 por 100 de no obtener nada, estado E_{12} (fig. 8).

Considerando únicamente las ganancias y pérdidas esperadas determinamos los valores esperados asociados a cada estado. Tendremos para E_8

$$40 \text{ pts} = 0{,}20 \cdot 200 \text{ pts} + 0{,}80 \cdot 0$$

Para E_7:

$$50 \text{ pts} = 0{,}50 \cdot 100 \text{ pts} + 0{,}50 \cdot 0 \text{ pts}$$

Por el principio de optimización se determina el valor asociado con el estado E_6, que corresponde a 50 pts. Es claro que si el jugador llega a E_6 lo mejor será que vaya a E_7 que tiene valor esperado mayor que E_8.

Para E_2 tenemos:

$$0{,}50 \text{ pts} \cdot 100 \text{ pts} + 0{,}50 \cdot 50 \text{ pts} = 75 \text{ pts}$$

y para E_1

$$0{,}50 \cdot 100 \text{ pts} + 0{,}50 \cdot 20 \text{ pts} = 60 \text{ pts}$$

luego si estamos en E_0 lo mejor será elegir E_2. Con esto habremos asignado como valor asociado a E_0, 75 pts.

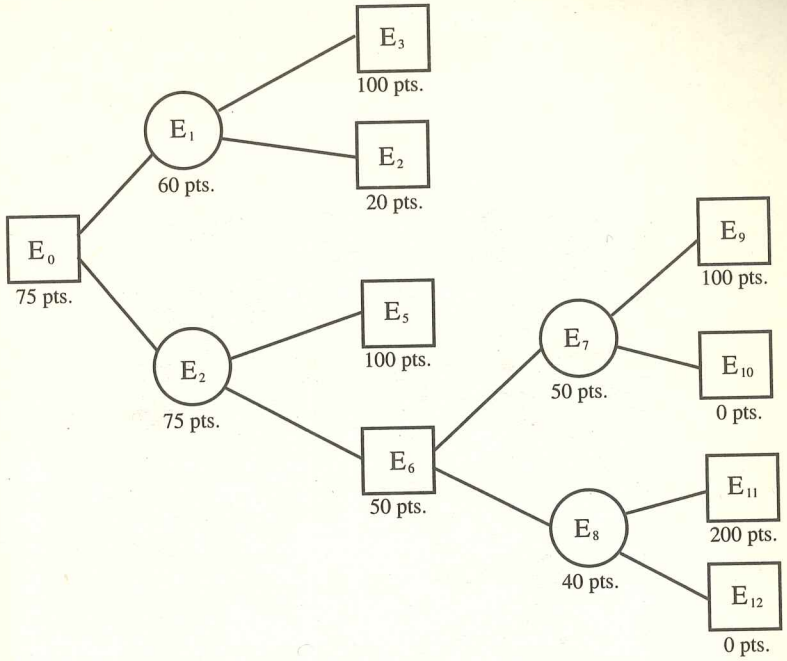
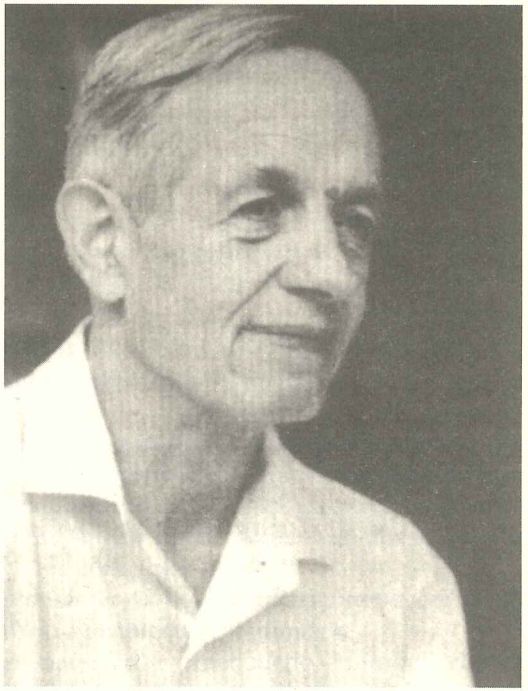


FIGURA 8

Se ha obtenido así la cantidad óptima, que el jugador debe arriesgar, y la estrategia óptima: elegir E_2y, si se va a E_6, elegir E_7.

En este ejemplo se ha prescindido de consideraciones relativas a la utilidad por actualización en ambiente aleatorio, para que se comprenda mejor la idea del método regresivo en la programación dinámica estocástica para la determinación de la estrategia. En los problemas reales habrá de tenerse en cuenta.

NASH (PREMIO NOBEL 1994)



Premio Nobel de Economía (1994), autor de la Teoría de juegos cooperativos.

10. JUEGOS DE ESTRATEGIA

«And you all know, security is mortal's chiefest enemy.»

SHAKESPEARE

10.1. Introducción

En multitud de juegos de sociedad (póker, damas, ajedrez, bridge, etc.), en muchas cuestiones económicas, sociales, militares, políticas, se presentan situaciones en que hay intereses encontrados y en que los participantes han de tomar decisiones, de las que depende el resultado final de la competición.

El origen de la teoría fue especialmente buscar un planteamiento más satisfactorio a problemas económicos.

El primer matemático preocupado en buscar esquemas teóricos aplicables a tales situaciones parece haber sido Borel (1921); pero se debe a Von Neumann el desarrollo de una teoría satisfactoria a partir de su *Memoria de Mathematische Annalen* (1928) y una serie de trabajos que culminan en su libro en colaboración con el economista Morgenstern: *Theory of games and economic behaviour*.

10.2. Algunos ejemplos

Análogamente a como los juegos de azar fueron el punto de partida del cálculo de probabilidades, los juegos de estrategia han sido el punto de partida de esta teoría.

Conviene señalar la diferencia esencial entre los juegos de azar y de estrategia. En los primeros, como el juego de cara o cruz, no interviene para nada la inteligencia de los jugadores, mientras en los segundos (póker, ajedrez,...) tiene un papel fundamental.

Planteemos algunos ejemplos sencillos.

1) Batalla del mar de Bismarck

Una situación práctica de tipo militar en que se aplicó el modelo de juegos fue la *batalla del mar de Bismarck*. En una fase de la misma para hacer el traslado de un convoy, los japoneses tenían dos rutas posibles cada una de ellas de tres días; pero, por la ruta norte, la visibilidad era casi imposible, mientras que por la sur la visibilidad sería prácticamente segura. El general Kenney podía concentrar sus aviones de reconocimiento en una u otra ruta. Si los aviones detectaban el convoy podía ser bombardeado hasta el final. En consecuencia, se puede formular el siguiente juego en que la matriz representa las pérdidas estimadas (relativas) de los japoneses (J_2) y las ganancias de los americanos (en días de bombardeo efectivo).

Estrategias japonesas

Estrategias americanas	Ruta norte	Ruta sur
Ruta norte	2	2,5
Ruta sur	1	3

Se ve que hay un *punto de equilibrio* que es el que corresponde a (ruta norte, ruta norte). Unos y otros eligieron esta estrategia y, aunque los japoneses tuvieron pérdidas elevadas en los dos días de bombardeo efectivo, si hubieran elegido la ruta sur, el resultado podría haber sido peor. Y, análogamente, si los americanos hubieran elegido la ruta sur, sus ganancias hubieran sido menores.

2) Problemas de los representantes

Sean los señores Álvarez y Bermúdez representantes de dos empresas que se hacen la competencia. Los representantes se dirigen a los mismos consumidores. Al comienzo de la lista de cada representante están los dos compradores más fuertes, cuyas órdenes en potencia son, respectivamente: 1.000.000 y 500.000 pesetas. Supongamos además que A es mejor vendedor que B, o que sus ofertas son más atractivas que las de B; es decir, que si A y B se dirigen simultáneamente a un consumidor es preferido A; pero si B llega antes puede obtener la orden de compra.

En la figura se representa la situación

Sr. Bermúdez se dirige al

Sr. Alvarez se dirige al	Comp. más fuerte	Comp. débil
Comprador más fuerte	1.500.000	1.000.000
Comprador débil	500.000	1.500.000

Se ve que, en virtud de lo dicho, si ambos se dirigen primero al comprador más fuerte y después ambos al segundo, obtiene Alvarez las dos órdenes, y lo mismo si se dirigen ambos al más débil y después ambos al más fuerte; pero si se dirige Alvarez al uno y Bermúdez al otro, obtiene cada uno una orden. En la matriz figura lo que gana Alvarez.

Se trata de ver cuál es la estrategia más conveniente para cada representante.

3) Avión contra submarino

El problema típico de ataque aéreo a submarinos, cuyo esquema es el cuadro adjunto, se presenta constantemente en la guerra como consecuencia de las medidas y contramedidas debidas a diversos progresos técnicos, tácticos, etc. Aunque las cifras que se dan no son reales, lo interesante es la compresión del problema.

Antes del empleo del radar para localizar submarinos, el porcen-

taje de submarinos hundidos era, según múltiples estadísticas, el 40 por 100.

AVIÓN CONTRA SUBMARINO (Proporción de submarinos vistos que son hundidos)			
		SUBMARINOS	
		No usa receptor de radar	Usa receptor de radar
Avión...	No usa radar	40 %	70 %
	Utiliza radar	80 %	20 %

Cuando lo aviones empezaron a usar radar, el número de submarinos hundidos se elevó a 80 por 100 de los visados. Pero pronto los submarinos comenzaron a usar receptores de radar y pudieron percibir con mucha antelación la proximidad de aviones equipados con radar, con lo que el porcentaje de submarinos hundidos descendió al 20 por 100. Viendo esto, el mando de los aviones dejó de usar radar, esperando volver al porcentaje del 40 por 100; sin embargo, el porcentaje de submarinos hundidos fue el 70 por 100. Una información demostró que los submarinos continuaban utilizando los receptores de radar, lo cual representaba una desventaja para los submarinos, ya que tenían que desmontar el aparato y ponerlo bajo cubierta, lo cual suponía una pérdida de tiempo para iniciar la inmersión. Después de algún tiempo, el mando de los submarinos se dio cuenta de que al no usar los aviones radar, era contraproducente usar receptores y, en efecto, se comprobó que al suprimirlos el porcentaje de submarinos hundidos volvió a ser el 40 por 100.

El problema es saber, para cada mando, cuál es la estrategia más ventajosa. Si ambos emplean radar, tiene ventaja el mando submarino; si el uno lo emplea y el otro no, tiene ventaja el mando de los aviones.

10.3. Conceptos fundamentales

Un *juego* es un conjunto de reglas que condicionan el comportamiento de ciertos individuos o grupos, llamados jugadores, que participan en el mismo.

Esta reglas establecen los posibles *movimientos* o pasos de los jugadores que pueden ser *personales* (en los cuales interviene la destreza del jugador), o del *azar*.

Cada realización de un juego se llamará una *partida* y cada movimiento en una partida particular se llamará una *jugada*. Así, en el lenguaje corriente distinguiremos el «juego de damas», de «una partida de damas», y un «paso o movimiento en el juego», de «una jugada hecha por un jugador en una cierta partida».

Empezaremos por los juegos más sencillos, con indicación de las soluciones.

Consideremos el siguiente ejemplo sencillo de juego en que suponemos que se da una *matriz de pago*, como p.e.:

$$\begin{Bmatrix} 4 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

y dos jugadores P_1, P_2. Cada uno de ellos conoce la matriz, y escriben independientemente sobre un papel un número, sin que el otro sepa cuál es. El número que elige P_1 representa la fila, y el de P_2, la columna. Hecho esto, P_2 paga a P_1 una cantidad de pesetas igual al número de la matriz que está en la fila y columna elegidas. P.e., si P_1 elige 1.ª y P_2, 2.ª, paga 1 peseta P_2 a P_1; pero si P_1 elige 2.ª, y P_2, 3.ª, paga 3 pesetas P_2 a P_1.

Se ve que el juego es de dos personas, un solo movimiento y se llama *rectangular*. En cada partida hay una jugada en que cada jugador hace su elección. El juego se llama de *suma cero*, porque las cantidades ganadas por los jugadores en conjunto suman cero. Si P_1 gana 1 y P_2 gana –1, en total la ganancia es cero.

Se trata de saber si hay un modo óptimo de jugar para cada jugador. En el ejemplo considerado se ve fácilmente que al jugador P_1 le conviene jugar a la segunda fila, y a P_2, a la segunda columna.

Conviene subrayar que la teoría de juegos trata la cuestión de cuál

es el mejor procedimiento para cada jugador mediante *una norma de conducta general*, que puede aceptarse o no; pero que, una vez aceptada, da lugar a interesantes resultados, tanto desde el punto de vista matemático como de las aplicaciones. Esta norma de conducta se resume así: P_1 piensa que P_2 elige de modo que la ganancia de P_1 sea mínima, y por consiguiente, P_1 elige de modo que este mínimo sea lo mayor posible (puede obtenerse a partir de un conjunto sencillo de axiomas pero aquí no entramos en ello).

En la representación gráfica adjunta (fig. 1) se puede considerar cada fila de la matriz como una carretera que va pasando por una sucesión de montañas y valles de, E a W, y cada columna, como otra carretera, de N a S, que va pasando por los mismos puntos.

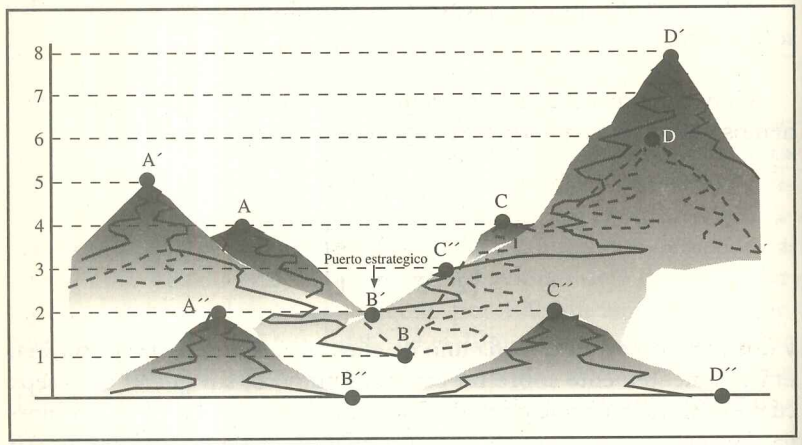


FIGURA 1

Las carreteras posibles para P_1 son $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ y para P_2, $A\ A'A''$, $B\ B'\ B''$, $C\ C'\ C''$, $D\ D'\ D''$. El problema económico es equivalente al siguiente problema topográfico: Suponiendo que P_1 y P_2 puedan elegir cada uno uno de dichos caminos, cuál deben elegir, si desean encontrarse en un punto, y P_1 desea que sea lo más alto posible y P_2 lo más bajo posible.

Se ve que en el caso anterior, la solución es que P_1 siga la carretera 2.ª, de EW, y P_2, la carretera 2.ª, de NS, las cuales se encuentran precisamente en un puerto en el sentido corriente dado en topografía a esta palabra. Los puertos que se consideran en la teoría de juegos son sólo los que corresponden a máximos en las carreteras de NS, y a mínimos, en las de EW. Éstos los llamaremos *puertos estratégicos*, y se demuestra que en todo juego rectangular que tiene un puerto, existe una estrategia simple óptima para cada jugador y recíprocamente; es decir, existe una jugada óptima para cada jugador, en el sentido de que puede ganar menos (o perder más) si no juega a ella y el otro jugador persiste en la suya.

10.4. Otros ejemplos

a) Juego de pares y nones

P_1 elige par, y P_2, impar. Simultáneamente adelantan una mano cada uno con 1 ó 2 dedos, y gana 1 pts P_1, si la suma de dedos es par, o P_2 gana 1 pts, si la suma es impar.

La matriz de pago es, como fácilmente se ve:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

b) Papel, piedra, tijeras

El papel (1) gana a la piedra (2), porque la envuelve; ésta a las tijeras (3), porque las mella, y éstas al papel, porque lo cortan. P_1 y P_2 pronuncian simultáneamente una de las tres palabras o hacen un signo equivalente, y da 1 pts el que pierde al que gana, según la regla precedente.

$$\begin{Bmatrix} 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

c) Juego de los dos dedos

Dos jugadores muestran 1 ó 2 dedos, y, a la vez, pronuncian un número que trata de predecir los dedos que mostrará el otro; el que

acierta el número del otro, gana un número de pesetas igual al total de dedos mostrados.

Designando por ||1, 2|| el que un jugador muestre 1 dedo y diga 2, tenemos la siguiente matriz de pago:

$$\begin{array}{c} \\ ||11|| \\ ||12|| \\ ||21|| \\ ||22|| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ||11|| & ||12|| & ||21|| & ||22|| \end{array} \\ \begin{Bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{Bmatrix} \end{array}$$

Como ejercicio, puede generalizar el lector este juego con tres dedos.

d) Juego del detective

Sherlock Holmes desea ir de Londres a Dover, y de allá, al continente para huir del prof. Moriarty, que le persigue. Después de tomar el tren, al partir, observa la presencia del prof. en el andén. Sherlock Holmes supone que su adversario, que le ha visto, puede alcanzarle tomando un tren especial. Sherlock Holmes se enfrenta con la alternativa de llegar a Dover o bajarse en la única estación intermedia: Canterbury. Su adversario tiene las mismas posibilidades. Ambos pueden hacer la elección del punto de descenso independientemente uno del otro. Si ambos descienden en el mismo lugar, Sherlock Holmes espera que seguramente Moriarty le matará. Si Holmes llega a Dover, está seguro de escapar a Europa.

La manera (convencional) de reducir esta situación a un juego rectangular puede ser la siguiente:

Si ambos se apean en D o en C, S da 100 a M (un número grande), ya que se puede dar por cogido. Si S se apea en D, y M, en C, S casi seguro escapa (ponemos –50). Si S, en D, y M, en C, quizá escape (ponemos 0).

La matriz será:

$$\begin{Bmatrix} 100 & 0 \\ -50 & 100 \end{Bmatrix}$$

Vemos, pues, que el esquema de juegos rectangulares es más amplio de lo que a primera vista parecía. Precisamente uno de los teoremas más sorprendentes de la teoría es que juegos extraordinariamente complicados, como el ajedrez, pueden reducirse a este esquema.

10.5. Estrategias simples. Valor del juego

Consideramos, en general, una *matriz rectangular de pago*:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

y suponemos que P_2 elige una columna; P_1, una fila, y P_2 paga a P_1 la cantidad que indica el número situado en la fila y columna elegidas.

Este es el esquema general de un *juego rectangular de suma nula*.

Si P_1 elige la primera fila, está seguro de obtener al menos $\min_j a_{1j}$ y, en general, si elige el número i, está seguro de obtener $\min_j a_{ij}$

Puesto que puede elegir i, arbitrariamente elegirá $i = i_0$ tal, que sea máximo el valor $\min_j a_{ij}$; luego ganará, por lo menos, con tal elección:

$$\max_i [\min_j a_{ij}] = \max_i \min_j a_{ij}$$

Análogamente, P_2 hará una elección que le asegurará por lo menos:

$$\max_j [\min_i (-a_{ij})] = \max_j [-\max_i a_{ij}] = -\min_j \max_i a_{ij}$$

Si fuera:

$$\max_j \min_i a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$$

se saca la consecuencia que P_1 puede ganar v y P_2 puede impedir que P_1 gane más de v.

Si P_1 no juega a i_0 y P_2 sí juega a j_0, P_1 ganará menos de v. Análogamente, si P_1 juega a i_0 y P_2 no juega a j_0, P_2 perderá más de v. Entonces si uno y otro juegan de una manera racional y creen que el otro hace lo mismo, deben jugar de dicho modo.

Esta elección de i_0, por P_1, y de j_0, por P_2, es lo que se llama una *estrategia simple* para cada jugador y v se llama el *valor* del juego.

Sea la matriz de pago:

$$\begin{Bmatrix} 4 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

tenemos:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\,[1, 2, 0] = 2 = a_{22},$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min\,[5, 2, 4, 8] = 2 = a_{22}$$

Conviene, pues, a P_1, jugar a $i = 2$ y a P_2 jugar a $j = 2$.

Se debe observar que la jugada óptima para P_1, es 2.ª, si él no sabe nada de lo que va a hacer P_2 y cree que juega racionalmente; pero si P_1 tiene información, p.e., de que P_2 juega a 3.ª, le convendrá jugar a 1.ª, con lo que ganará 4 en vez de 3.

El plan que seguiremos ahora es el siguiente:

1.° Caracterización de los juegos rectangulares que admiten esta solución.
2.° Estudio de los otros juegos, ya que la propiedad anterior no es cierta para todo juego rectangular. Ejemplo:

En el caso del submarino atacado por el avión vimos que la matriz del juego es:

$$\begin{array}{cc} & \textit{sub.} \\ \textit{av.} & \begin{Bmatrix} 40 & 70 \\ 80 & 20 \end{Bmatrix} \end{array}$$

y tenemos:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\,[40, 20] = 40$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min\,[80, 70] = 70$$

luego:

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$$

10.6. Caracterización de los juegos con estrategia simple. Matriz con puerto

El siguiente teorema de fácil demostración caracteriza los juegos con puerto:

Supongamos que $f(x, y)$, *definida en* $x \in A$, $y \in B$, *es tal, que existen:*

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \quad y \quad \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

La condición necesaria y suficiente para que exista un puerto (x_0, y_0) *es que:*

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

La matriz del juego del párrafo anterior tiene un puerto en el punto $\|2, 2\|$; luego las estrategias óptimas son 2 para P_1 y 2 para P_2, y el valor del juego es 2.

10.7. Juegos sin puerto. Estrategias mixtas. Teorema minimax

En los juegos sin puerto, como el de pares y nones, cuya matriz hemos visto que es:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

no hay una estrategia pura óptima, ya que si P_1 juega a 1, a P_2 le conviene jugar a 2, y si P_1 juega a 2, a P_2 le conviene jugar a 1; y en ambos casos el resultado es el mismo. Así, pues, no conviene a ningún jugador jugar siempre la misma estrategia pura, pues el otro tendría ventaja.

En tal caso se considera que los jugadores hacen las elecciones con arreglo a una cierta ley de probabilidad.

Ejemplo. Anteriormente dimos la siguiente matriz del juego de avión contra submarino:

AVIÓN CONTRA SUBMARINO (Proporción de submarinos vistos que son hundidos)			
		SUBMARINOS	
		No usa receptor de radar	Usa receptor de radar
Avión...	No usa radar	40 %	70 %
	Utiliza radar	80 %	20 %

He aquí, sin entrar en detalles técnicos, brevemente expuesta la solución del problema, según la teoría de Von Neumann: cada mando debe utilizar el radar ocasionalmente en una cierta proporción, pero dentro de esta proporción, completamente al azar. Evidentemente, esto último es necesario, pues si el mando de los submarinos conociera la ley con que el mando de los aviones utilizara el radar, tendría una ventaja efectiva utilizando los receptores en las mismas ocasiones.

Si llamamos x e y las probabilidades respectivas de no usar radar (que se pueden tomar aproximadamente iguales a las frecuencias), el valor esperado de submarinos hundidos es:

$$E(x, y) = 40xy + 70x(1-y) + 80y(1-x) + 20(1-x)(1-y) =$$

$$= -10(9xy - 5x - 6y - 2) = -90(x - 6/9)(y - 5/9) + 53\frac{1}{3}$$

Hecha esta descomposición, se ve que el mando de aviones puede hacer máximo su valor esperado, haciendo $x = 6/9 = 2/3$, independientemente de lo que haga el mando submarino, y, análogamente, el mando del submarino puede hacer mínima $E(x, y)$, si hace $y = 5/9$.

Estas estrategias, llamadas *mixtas*, son óptimas desde el punto de vista de cada mando en el sentido de que si A no utiliza su estrategia óptima, B puede obtener una ventaja utilizando la suya, es decir:

$$E(x, 5/9) \leq E(2/3, 5/9) \leq E(2/3, y)$$

Si ambos mandos utilizan sus respectivas estrategias óptimas, la proporción de submarinos hundidos a la larga será de $53\frac{1}{3}$ por 100, y el mando submarino no logrará con otra estrategia disminuir esta proporción, si el mando de aviones utiliza su estrategia óptima, a menos que el mando de submarinos deje de utilizar su estrategia óptima.

La estrategia aleatoria o mixta de avión es el conjunto de probabilidades (2/3, 1/3) con que debe no utilizar y utilizar el arma. Pero esta estrategia aleatoria debe interpretarse en el sentido de que no ha de seguirse ninguna ley, si no se quiere correr el riesgo de que sea descubierta por el servicio de información enemigo. Cuando entre en una zona donde puedan existir submarinos, por ejemplo, lanzando un dado, si obtiene 1, 2, 3 ó 4, no utilizarán radar, y si obtienen 5 ó 6, sí lo utilizarán, y análogamente el submarino que sube a la superficie, mediante un paquete de nueve cartas, si sacando al azar una de ellas resulta ser una de las cinco primeras, no utilizará receptor, y si es de las cuatro últimas, sí lo utilizará. De este modo se cumple la condición de sujetarse a la estrategia óptima sin que de antemano pueda ser conocida del enemigo el arma especial empleada.

Sea, en general, la matriz del juego:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

Una *estrategia mixta* de P_2 es un vector $X = \|x_1, \dots, x_m\|$ tal, que

$$\sum x_i = 1 \quad \text{y} \quad x_i \geq 0$$

Decimos que $X \varepsilon S_m$ (simplex).

Análogamente, $Y = ||y_1, ..., y_n||$ es una *estrategia mixta* de P_2.

La esperanza matemática de P_1 es

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$$

Jugar P_1 a la estrategia pura k equivale a jugar a la estrategia mixta $||0, ..., x_k = 1, ..., 0||$. Si para algún $X^* \varepsilon S_m$ y algún $Y^* \varepsilon S_n$ es:

$$E[X, Y^*] \leq E[X^*, Y^*] \leq [X^*, Y]$$

diremos que $||X^* Y^*||$ es una solución del juego o un *puerto estratégico* y que X^* e Y^* son las *estrategias mixtas óptimas* para P_1 y P_2. E $(X^* Y^*)$ se llaman *valor* del juego.

La justificación intuitiva es la siguiente:

Si (X^*, Y^*) es un puerto, P_1 jugando a X^* está seguro de obtener $E(X^*, Y^*)$ por lo menos, y puede ganar menos si juega a otra X.

Se trata, pues, de ver si existen y son iguales

$$V_1 = \text{máx}_x \ \text{mín}_y \ E(XY)$$

$$V_2 = \text{mín}_y \ \text{máx}_x \ E(XY)$$

pues entonces existe un puerto (X^*, Y^*) y, por tanto, estrategias óptimas.

El *teorema fundamental de Von Neumann* (que aquí no demostramos) prueba que *para todo juego rectangular existen y son iguales* V_1, V_2.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.10.1. Método gráfico de solución

Se aplica a matrices: 2x*n* ó *m*x2 y aún a 3x*n* ó *m*x3.

Sea la matriz:

$$\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{Bmatrix}$$

Si P_1 utiliza la estrategia $||x, 1 - x||$ y P_2 la 1, el pago esperado por P_1 es: $2x + 7(1 - x) = 7 - 5x$.

Si P_2 utiliza 2, el pago esperado por P_1 es:

$$3x + 5\,(1 - x) = 5 - 2x$$

Si P_2 utiliza 3, el pago esperado por P_1 es:

$$11x + 2\,(1 - x) = 2 + 9x$$

Habría que encontrar una v tal, que:

$$7 - 5x \geq v$$
$$5 - 2x \geq v$$
$$2 + 9x \geq v$$

Con lo cual, P_1 puede escoger un valor óptimo de x.

Análogamente, para P_2 con:

$$2y_1 + 3y_2 + 11y_3 \leq v$$
$$7y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq v$$

Las estrategias mixtas de P_2 dan valores comprendidos entre las estrategias simples, ya que son combinaciones convexas de aquéllas.

Obtenidas $x = 3/11$, $1 - x = 8/11$ es v 42/11, y la estrategia de P_1 se obtendrá resolviendo el sistema:

$$2y_1 + 3y_2 + 11y_3 = 49/11$$
$$7y_1 + 5y_2 + 2y_3 = 49/11$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Representemos las ecuaciones que nos daban el pago esperado por P_1, al utilizar la estrategia $||x, 1 - x||$ y P_2 las 1, 2 y 3:

$$1: -5x + 7$$
$$2: -2x + 5$$
$$3: \ 9x + 2$$

De la simple observación de la figura 2, deducimos que la estrategia óptima para P_1 es el punto de intersección de las rectas 3 y 2, esto es:

$$9x + 2 = -2x + 5, \quad x = 3/11 \quad 1 - x = 8/11$$

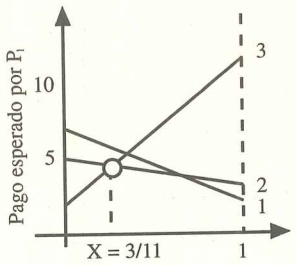


FIGURA 2

Juego de pares y nones

La matriz del juego era:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

Procediendo análogamente, obtenemos los pagos esperados por P_1.

$$1: \; x - (1 - x) = 2x - 1$$
$$1: -x + (1 - x) = -2x - 1$$

La estrategia óptima para P_1 es $x = 1/2$.

Juego del avión y submarino

La matriz del juego era:

$$\begin{Bmatrix} 40 & 70 \\ 80 & 20 \end{Bmatrix}$$

Las ganancias esperadas por P_1:

$$1: 40x + 80\,(1 - x) = -40x + 80$$
$$2: 70x + 20\,(1 - x) = 50x + 20$$

El valor de x nos viene dado por la intersección de 1 y 2 (fig. 3).

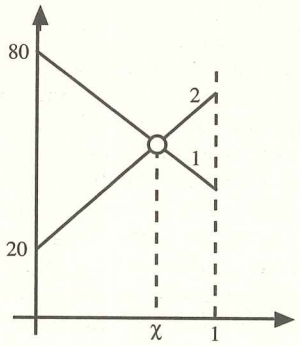


FIGURA 3

E.10.2. Problemas de la propaganda

Un ejemplo notable ha sido desarrollado por Charnes y Cooper, del Instituto Tecnológico Carnegie, en relación con la eficacia de la propaganda. En un mercado en que la demanda se puede considerar estable, bien por los hábitos de los consumidores o por el régimen administrativo, puede decirse que si una empresa gana nuevos consumidores de sus productos, otra los pierde, y nos encontramos ante una situación típica de juego de estrategia de suma nula.

Supongamos que cada una de las empresas *X, Y* gasta 100.000.000 de pesetas en propaganda, distribuida en radio, televisión, prensa, cine, etc., que se han elaborado tres programas de propaganda (tres distribuciones de los 100 millones en los distintos medios), de los que, por métodos estadísticos, se ha podido calcular el beneficio extra (en cientos de millones de pesetas) que obtendría la empresa, y que suponemos resumidos en la siguiente matriz de pago.

	Programas de B		
Programas de A	1	2	3
1	3	4	–1
2	5	2	–3
3	–2	–1	3

Está claro que nos encontramos ante un juego bipersonal de suma nula, que no difiere esencialmente del problema de avión-submarino.

E.10.3. Problemas de una refinería

Un problema de interés económico para una refinería de petróleo, ha sido resuelto por G. Symonds, de la Esso Standard Oil Company. Se trata de una refinería *X*, que produce insuficientes cantidades de gasolina y combustible destilado para satisfacer la demanda y en cambio un exceso de combustible residual. La refinería debe pagar grandes cantidades por transporte de dicho combustible residual, a fin de encontrar mercados para el mismo. Se han establecido cuatro programas diferentes de producción, que darían lugar a ciertos incrementos en los beneficios. Otra refinería *Y*, competidora de la *X*, se encuentra en condiciones análogas. Los beneficios para cada una de ellas dependen del propio programa de producción y del de la otra refinería. Se trata, pues, de una situación cuyo planteo matemático es un juego bipersonal de suma cero, cuya solución numérica fue lograda por el método del simplex, originariamente aplicado en la teoría de la programación lineal.

Otro ejemplo de juegos, también tratado y resuelto en la misma refinería, es el que se presenta en relación con la variación estacional de la demanda del combustible para calefacción. Puede decirse que las variaciones en las tasas de producción son, en general, antieconómicas, y pueden ser reducidas aumentando los inventarios. Pero los inventarios grandes suponen capital improductivo. Un estudio de las ventas pasadas indica las probabilidades de desviación de la demanda normal. Esto permitió considerar el problema como un ejemplo en que uno de los jugadores es la refinería, cuyas estrategias son las tasas de producción y los inventarios, y el otro jugador es la naturaleza cuyas estrategias son las demandas posibles con sus correspondientes probabilidades.

E.10.4. Juegos de suma no nula

De hecho, los modelos de juegos de suma nula son demasiado simplificados, pues en el campo económico apenas tienen realidad concreta y aun en el militar casi siempre se tiende a admitir una cierta cooperación. El desarrollo de la estrategia y la diplomacia en los últimos años demuestra bien claramente el importante lugar que ya ocupa la cooperación en la resolución de conflictos internacionales.

He aquí algunos ejemplos de aplicaciones de los juegos de suma no nula:

a) Un aspecto interesante de la solidez de una empresa en su habilidad para hacer frente a adversidades o luchas con la competencia. Dada la información relativa a la situación financiera de una empresa y de la de sus concurrentes más importantes, la demanda de sus productos y otros datos económicos, un modelo de juego puede determinar si es aconsejable y provechoso lanzar nuevos productos o iniciar una guerra de precios.

b) Una empresa se propone licitar para conseguir algunos contratos del gobierno. Posee una cierta información sobre el comportamiento previo de sus competidores. Su capacidad productiva no le permite aspirar a más del 40 por 100 de los contratos ofrecidos. El problema adopta la forma de un juego n-personal de suma no nula.

c) Supongamos que una compañía minera descubre una zona de terreno que contiene depósitos minerales interesantes. La compañía no piensa explotar inmediatamente estos depósitos, pero sabe que si no compra los derechos de explotación otros competidores los pueden comprar. El coste de tener tierras sin explotar implica inmovilizar importantes capitales. La compañía necesita determinar una estrategia maximal de compras «en tablero de damas» de modo que, al tener recursos financieros limitados, queden zonas sin comprar, pero éstas no sean interesantes para otros al quedar aisladas. Es posible que pequeños competidores compren las zonas residuales en espera de que la compañía comience a explotar las zonas importantes. La compañía debe diseñar su estrategia de compras de modo que no resulte interesante para otras compañías comprar las bandas residuales.

E.10.5. Problema del desarme (modelo de Nash)

PAGOS A EE.UU.

EE.UU. \ RUSIA	No desarme	Desarme
No desarme	–2	10
Desarme	–10	5

PAGOS A RUSIA

RUSIA \ EE.UU.	No desarme	Desarme
No desarme	–2	–10
Desarme	10	5

Se suponen en este modelo, enormemente simplificado, que cada potencia tiene dos estrategias posibles, no desarmar o desarmar. Si ninguno de las dos

desarma, la situación de ambos es fuertemente peligrosa de guerra y podemos indicar esto asignándole a cada uno una utilidad negativa que podemos poner, para fijar las ideas (–2). Si uno desarma y el otro no, la situación es muy mala para el primero y le asignamos una utilidad (–10) y (+10) al otro. Finalmente, si ambos desarman el peligro y consecuencias de guerra son mucho menores y podemos poner como utilidad de cada uno +5.

Como la estrategia «no desarmar» para I es mejor para cualquier cosa que haga II, le convendrá a I adoptarla, y como la estrategia «no desarmar» es mejor para II para cualquier cosa que haga I, le convendrá adoptarla. Así llegamos al punto de equilibrio en que cada una gana (–2). Sin embargo, parece que es mejor para ambos «desarmar», pues entonces ganarían 5 cada uno y esta es la solución a que se llegaría considerando el juego como cooperativo.

E.10.6. Ejemplo de formalización de un juego dado en forma extensiva

Consideremos un ejemplo de representación por un grafo de un juego con dos decisores J_1, J_2. Es la llamada forma *extensiva* (fig. 4).

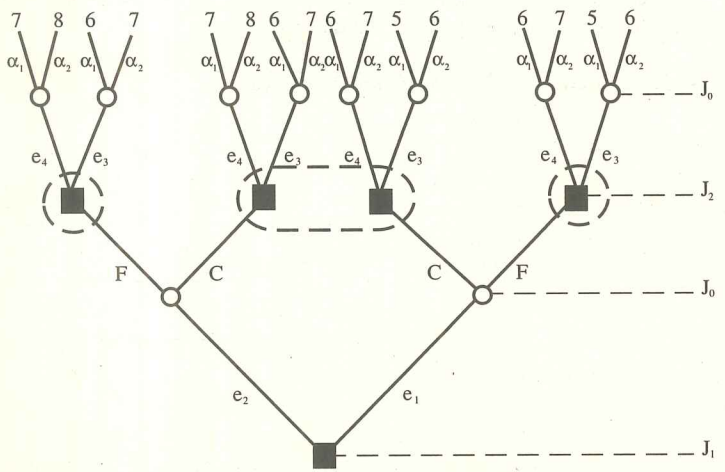


FIGURA 4.

Suponemos que J_1 actúa primero y elige una de las dos acciones e_1, e_2. Interviene en segundo lugar el azar y se sortea entre dos sucesos (C, F) con probabilidades $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y si sale F se informa a J_2 de la elección de J_1 y si

sale C no se le informa. Interviene en tercer lugar J_2 y elige entre dos acciones (e_3, e_4). Finalmente interviene el azar J_0 y se obtienen con probabilidades $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ los resultados (α_1, α_2).

Se obtiene el árbol del juego representando las sucesivas alternativas, y se ve que los 4 vértices correspondientes a los movimientos de J_1 quedan en tres conjuntos llamados de información. En uno hay dos vértices c, c, ya que si en la primera jugada de J_0 el resultado es C, J_2 no es informado de si J_1 eligió e_1 o e_2. En los otros dos conjuntos de información sólo hay un vértice F en cada uno, pues, si salió F, sabe J_2 cuál es la elección que hizo J_1.

Supongamos que definimos el espacio de consecuencias finales asignando, p.e., como ganancia de J_1 y pérdida de J_2 las sumas de las cantidades que figuran en los subíndices de la acciones e_1, e_2, e_3, e_4, α_1, α_2. Las cantidades finales están en los vértices finales del grafo. Son, pues, 5, 6, 7, 8.

En el ejemplo del problema de *stocks* (*9.2*) vimos dos formas, de presentación, la de matriz y la de árbol, y vamos a ver ahora que también en este nuevo ejemplo, algo más complicado, es posible pasar a la forma matricial. Para ello se introduce la idea de *estrategia pura*.

Una *estrategia pura* para un jugador es un plan o conjunto de normas que establece un jugador antes de comenzar el juego y que indica cuál es la acción que debe realizar en cada ocasión que le corresponda actuar, en función de la información que tenga de las acciones y resultados anteriores al momento de su intervención.

Fijada una estrategia por un jugador es posible que otra persona haga el movimiento que haría el jugador si a dicha persona le dan la información correspondiente a los movimientos anteriores.

Para J_1, las dos estrategias puras posibles son elegir e_1, e_2, ya que no vuelve a intervenir. Para J_2 las estrategias las representamos por un complejo de tres componentes en que la primera represente lo que haría si se encontrara en el primer conjunto de información (el de la derecha en la figura), es decir si J_1 elige e_1 y sale F en el sorteo J_0; la segunda componente si se encontrara en el conjunto de información central (si sale C en el sorteo J_0 o J_1 elige e_1 o e_2) y la tercera si se encontrara en el conjunto de información de la izquierda (es decir, si J_1 elige e_2 y sale F en el sorteo J_0).

Así tendríamos como estrategias de J_2, las 8 siguientes:

$$(e_3, e_3, e_3), (e_3, e_3, e_4), (e_3, e_4, e_3), (e_4, e_3, e_3), (e_3, e_4, e_4),$$
$$(e_4, e_3, e_4), (e_4, e_4, e_3), (e_4, e_4, e_4)$$

Los resultados posibles de la primera intervención del azar J_0 son C, F y de la segunda α_1, α_2. Como suponemos pruebas independientes, el espacio de posibles resultados del azar con sus probabilidades será:

$C_{\alpha 1}$	$C_{\alpha 2}$	$F_{\alpha 1}$	$F_{\alpha 2}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Veamos, finalmente, que, fijada una estrategia pura por cada jugador, la consecuencia es una cierta distribución de probabilidad de los resultados finales.

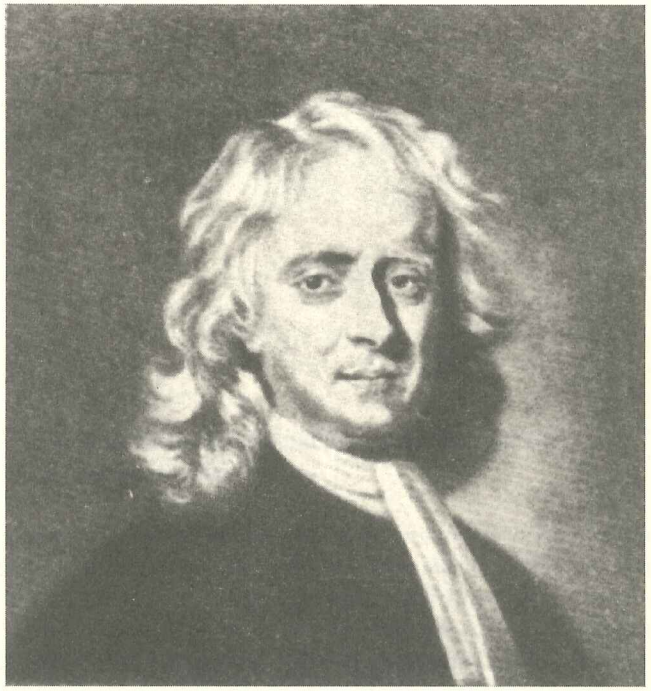
Si J_1 fija (e_1) y J_2 fija (e_3, e_3, e_4) tenemos: si sale F en la primera intervención de azar y α_1 en la segunda, tendríamos 5 con $p = \frac{3}{8}$ y si sale α_2, tendríamos 6 con $p = \frac{1}{8}$; análogamente si sale C en la primera y α_1 en la segunda tendríamos 5 con $p = \frac{3}{8}$ y si sale α_2 tendríamos 6 con $p = \frac{1}{8}$. Como J_1 ha elegido e_1, queda como distribución final.

$C_{\alpha 1}$	$C_{\alpha 2}$	$F_{\alpha 1}$	$F_{\alpha 2}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Se ve así cómo en el caso de dos jugadores aparece una matriz en que las filas corresponden a las estrategias puras de un jugador, las columnas a las del otro y los elementos de la matriz son distribuciones de probabilidad que representan las ganancias o *pagos de los jugadores* que pueden ser iguales en valor absoluto y de signo opuesto, como en este ejemplo o desiguales. Tendremos el siguiente esquema en que cada jugador tiene un movimiento y elige una acción sin conocer la elección de otro y como consecuencia de ambas elecciones se obtiene una distribución de probabilidad de pagos a cada uno de los jugadores.

Este es un ejemplo de reducción del juego dado en *forma extensiva* a la *forma normal o matricial*. Este proceso se puede generalizar a juegos n-personales (teorema de Kuhn).

NEWTON (1642-1727)



Creador de la teoría de la gravitación universal, del Cálculo infinitesimal,... Se ha calificado como la inteligencia suprema que la raza humana ha producido.

11. DE LA ASTROLOGÍA AL SPUTNIK

«I remember a sense almost of intoxication when I first read Newton's deduction of Kepler's second law from the law of gravitation. Few joys are so pure or so useful as this.»

BERTRAND RUSSELL

11.1 Sistemas de la ciencia natural y de las ciencias del comportamiento

En las sociedades primitivas se tuvieron los primeros atisbos de los sistemas más relevantes de la Naturaleza: la Tierra, la Luna, el Sol, los planetas, estrellas,..., cuyos movimientos, observados de modo incipiente, permitieron ajustar algunas actividades vitales (orientación, movimientos, cultivos agrícolas,...), así como la iniciación de algunos sistemas sociales (familias, tribus,...). Mucho más tarde nacieron las sociedades industriales y los sistemas comenzaron a manifestarse asociados a fenómenos económicos, sociales, políticos, como la inestabilidad de los precios, la fluctuación del empleo, cambios políticos,...

Vamos a dedicar estos dos últimos capítulos, de carácter más expositivo, a tratar algunos problemas de los dos campos citados: el de los grandes *sistemas de la ciencia natural*, cuyo estudio recibió fuertes impulsos de los trabajos de Galileo (1564-1642), Kepler (1571-1630), Newton (1642-1727), y el de los *sistemas de comportamiento*, que han necesitado de nuevas metodologías matemáticas (simulación, información, sistemas dinámicos, probabilidad) y cuyo impulso más

decisivo corresponde a N. Wiener (1894-1964), V. Neumann (1903-1957), H. Simon (1916-).

11.2. La caída de los cuerpos, modelo de Galileo

Según una bien conocida anécdota, la observación de la caída de una manzana llevó a Newton al estudio de la gravitación universal, creando modelos maravillosos, que le convirtieron en el primer científico moderno. En realidad, ya desde los griegos, preocupaba saber por qué caían los cuerpos a la Tierra. La respuesta de Aristóteles fue: «*porque* cada cuerpo busca su sitio natural y la Tierra es el lugar natural para los objetos». Esta pobre respuesta, lógicamente, no dio origen a ninguna teoría científica.

En la época de Galileo la pregunta de por qué caen los cuerpos empezó a ser sustituida por «*cómo*» caen los cuerpos a la Tierra.

Más específicamente, se preguntaba Galileo: ¿todos los cuerpos caen a la misma velocidad?, ¿es ésta constante?

Galileo empezó estudiando el ejemplo sencillo de la *caída de un cuerpo sólido abandonado en un punto a una cierta altura sobre la superficie de la Tierra*. El objetivo es llegar a un modelo matemático del fenómeno que permita la previsión en términos numéricos de la posición y velocidad de caída en cada instante.

Se sabe que Galileo hizo un gran número de experimentos, que suelen repetirse en las clases de Física elemental, dejando caer en el vacío y en el aire, desde distintas alturas, diversos objetos (piedra, madera, pluma, perdigón,...) y limitarse a considerar: distancia, tiempo y velocidad. Estos experimentos con sus datos numéricos le condujeron a una serie de etapas (*A-D*) (análogas a las vistas en el Cap. 2).

Primero observaría a través de los datos que la velocidad era creciente al caer el cuerpo y, quizá, podía considerarse plausible en forma más precisa un primer *modelo empírico* (*D*). *Si un cuerpo cae desde un punto del espacio, partiendo con una velocidad nula, su velocidad posterior es proporcional a la distancia ya recorrida*. No vamos a seguir todo el proceso de introducir definiciones de la mecánica elemental, sino que las supondremos conocidas.

El *modelo matemático* (*E*) asociado a este modelo empírico, se obtiene así:

Sea x la distancia del objeto al punto O, tras t segundos de caída libre. La distancia recorrida en el intervalo $(t_0, t_0 + h)$ será $x(t_0 + h) - x(t_0)$ y la *velocidad media* en tal intervalo $\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$, de la cual cual se deduce por paso al límite la llamada *velocidad instantánea* en el momento t_0, a saber:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = v(t_0)$$

Como el modelo empírico (*D*) afirma la proporcionalidad de esta velocidad al espacio ya recorrido, el modelo matemático (*E*) asociado, sería:

$$v(t) = ax$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad [1]$$

Veamos las consecuencias matemáticas de este modelo (etapa *F*). Podemos deducir de [1]:

$$\frac{dx}{x} = adt$$

e integrando

$$\log x = at + c$$

o bien

$$x = e^{at+c}$$

$$x = ke^{at}$$

Así para $t = 0$, es $x = 0$ y queda $0 = k$, lo cual implica para todo t, $x = 0$. Esto nos lleva a *rechazar* el modelo empírico, pues la consecuencia es que el cuerpo no se mueve.

Este ensayo de validación del modelo, que ha conducido a un resultado contradictorio con las experiencias, nos lleva a plantear (etapas *A-D*) un nuevo *modelo empírico* (D_2): *Si un cuerpo cae desde un punto del espacio partiendo con una velocidad nula, su velocidad posterior es proporcional al tiempo transcurrido desde que inicia la caída. Mas aún, el incremento de velocidad es en cada segundo de caída 9,8 m.*

El paso al modelo matemático (etapa *F*) es inmediato, basta poner:

$$\frac{dy}{dt} = 9{,}8t$$

De aquí resulta:

$$dx = 9{,}8t\, dt$$

$$x = 9{,}8\,\frac{t^2}{2} + c$$

Para $t = 0$, $x = 0$, luego $c = 0$ y queda como consecuencia:

$$x = \frac{1}{2}\, 9{,}8\, t^2$$

o bien

$$x = \frac{1}{2}\, gt^2$$

(utilizando la g para representar la aceleración, debida a la gravedad).

Ahora la validación de la ley conduce a su aceptación dentro de una cierta aproximación en que se prescinde de la velocidad del viento y resistencia del aire, el cuerpo se reduce a un punto material, etc.

11.3. Trayectorias de proyectiles

Apoyándonos en este modelo, vamos a considerar una situación más compleja, a saber, el problema de la *trayectoria de un proyectil*,

es decir, de un cuerpo al que se comunica una cierta velocidad inicial v, cuya dirección forma un *ángulo de elevación* α con la superficie terrestre.

Este planteamiento es una primera aproximación al problema real de lanzar una piedra con una catapulta, un proyectil con un fusil o con un cañón, etc., problemas que se denominan de *balística exterior*.

Para llegar al modelo matemático se hacen las siguientes hipótesis:

1) Se admite que la aceleración g de caída libre es constante en la zona del lanzamiento.
2) La Tierra se supone fija y plana en dicha zona.
3) El efecto de resistencia del aire se supone despreciable.

Se considera (fig. 1) que la proyección del móvil sobre el eje x tiene una velocidad $v_x = v_0 \cos \alpha$, que es la proyección de la velocidad inicial v_0 sobre el eje x. El movimiento de la proyección sobre el eje y tendrá una velocidad $v_y = v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt$, es decir, la suma de la proyección de la velocidad uniforme v_0 sobre el eje y, más la velocidad $-gt$ producida por la caída libre. Tendremos:

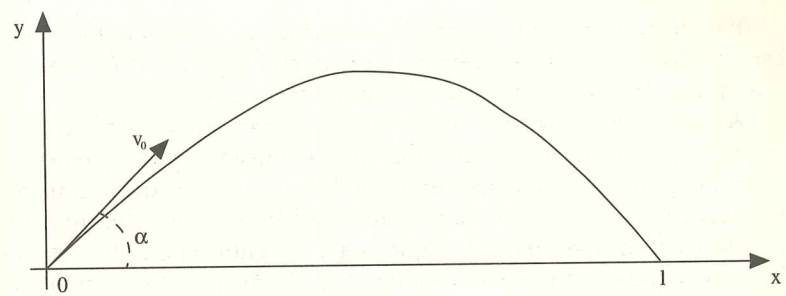


FIGURA 1

$$x'(t) = v_0 \cos\alpha$$

$$y'(t) = v_0\, sen\alpha - gt$$

que sería el modelo matemático del movimiento.

Con sencillas transformaciones, mediante integración, se obtiene

$$x = t\, v_0 \cos\alpha$$

$$y = t\, v_0\, sen\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

que son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil. Eliminando t, se obtiene la ecuación de la parábola:

$$y = x\, tg\alpha - x^2 \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}$$

La intersección de ésta con el eje x, nos da dos puntos de abscisas $x = 0$, $x = \frac{v_0^2}{g} sen\, 2\alpha$, que corresponden respectivamente a los puntos de donde sale el proyectil y donde cae. El alcance del proyectil es, pues $l = \frac{v_0^2}{g} sen\, 2\alpha$.

Esta fórmula permite calcular l, conocidas v_0 y α. Y también buscar α dados l y v_0. Otro problema sería buscar α para que l sea máximo (que es un problema clásico de optimización, etc.).

Al tratar de validar este modelo para los cañones de artillería corrientes se encontraron errores del 15% y aún más, por no tener en cuenta la *resistencia al avance* en el aire. En cuanto se sobrepasan velocidades iniciales de 30 m/s, hay que modificar el modelo, introduciendo en el mismo una fuerza que actúa en sentido opuesto a su velocidad (fig. 2). Estos nuevos modelos iniciados por Newton en los Principia (1687), permitieron soluciones más realistas y útiles hasta que en el siglo XIX se introdujeron las armas de cañón rayado, que permitieron incrementar considerablemente la precisión y el alcance. Característica importante de ésta es la velocidad supersónica de los proyectiles, lo que crea una onda de fuerte compresión, que se separa del proyectil en forma de *cono de Mach* con ángulo de apertura, que depende de la velocidad del proyectil y de la del sonido. Esto ha conducido a nuevas complicaciones en los modelos, que tienen incluso en cuenta la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Esta rotación hace que todo cuerpo debe desviarse de la dirección de su movimiento un poco a la derecha en el hemisferio norte y a la izquierda en el sur.

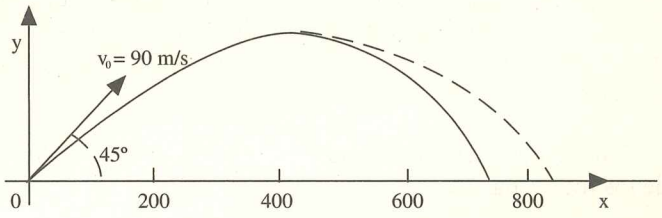


FIGURA 2

Así se han tenido en cuenta, además, la forma de la Tierra, la dependencia de g respecto de la altura, factores meteorológicos y aspectos diversos que contribuyen a un gran perfeccionamiento del modelo.

Es interesante observar que estos modelos de la mecánica clásica, que siempre aparecen como los más propiamente deterministas, pronto dejan de ser útiles a la realidad por aparecer discrepancias o errores, cuyo estudio se necesita cuando un conjunto de causas actúan sin que sea fácil considerar separadamente cada una de ellas.

Su estudio corresponde al Cálculo de Probabilidades.

11.4. Modelo de Newton de la gravitación universal

El objetivo principal de la Astronomía desde los babilonios, ha sido «conocer el fenómeno» o, en otras palabras más actuales, construir modelos matemáticos que explicaran las medidas observadas. Este enfoque fue formulado en términos geométricos por Platón, que planteó a los matemáticos el problema de encontrar modelos basados sobre movimientos circulares uniformes y perfectamente regulares.

Toda una larga y fascinante historia de relaciones entre modelos cada vez más perfeccionados y observaciones cada vez más precisas, va asociada a los nombres de Tycho-Brahe, Copérnico, Kepler, Galileo, Newton, Einstein,...

Aquí nos vamos a limitar a completar el capítulo con un breve resumen del modelo de Newton (Principia, 1689), sin duda una de las

más geniales contribuciones de todos los tiempos a la Ciencia Natural. A partir del esquema de Copérnico, que situaba al Sol en el centro del sistema planetario, logró el astrónomo alemán Kepler, basándose en un importante número de observaciones realizadas durante 10 años, y con su gran imaginación creativa, enunciar sus tres famosas leyes, la tercera de las cuales dedicó Kepler (1619) al rey Jaime I de Inglaterra:

1) Las órbitas de los planetas son elipses en que el Sol ocupa uno de los focos (fig. 3).

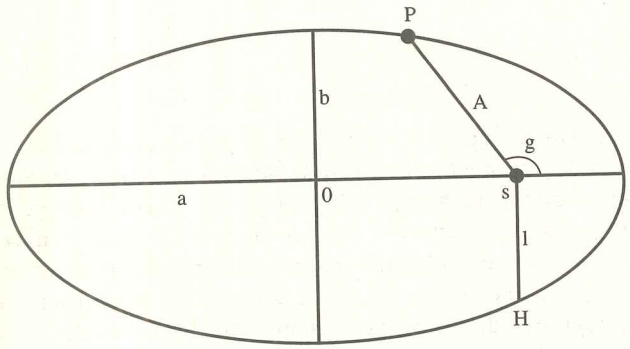


FIGURA 3

Planeta	*Distancia al Sol en 10^6 km*	*Período de revolución en días*
Mercurio	57,9	88
Venus	108,2	225
Tierra	149,6	365
Marte	227,9	687
Júpiter	778,3	4.239
Saturno	1.427	10.753
Urano	2.870	30.660
Neptuno	4.497	60.150
Plutón	5.907	90.670

2) Las áreas A descritas por un vector desde el Sol al planeta son iguales en tiempos iguales, es decir:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta/dt = \frac{1}{2} h \qquad [1]$$

3) Los cuadrados de los períodos de revolución τ de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas, es decir:

$$\tau^2 = ca^3 \qquad [2]$$

Tomando estas leyes como punto de partida, construyó Newton, 70 años después, un modelo explicativo de las leyes de Kepler.

Se obtiene así: representemos en coordenadas polares de origen S, la órbita de la forma

$$l = r\,(1 + e\cos\theta)$$

en que e es la excentricidad y $l = \dfrac{b^2}{a} = SH$. Si ponemos $u = r^{-1}$ queda la ecuación $u = l^{-1}\,(1 + e\cos\theta)$.

Mediante las leyes del movimiento, se puede escribir la fuerza atractiva sobre el planeta por unidad de masa:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left[\frac{d\theta}{dt}\right] = -h^2 u^2 \left[\frac{du^2}{d\theta^2} + u\right] = \frac{h^2 u^2}{l}$$

lo que se deduce de [1]. Como $u = r^{-1}$, resulta que la fuerza total que actúa sobre el planeta debe ser de la forma $\mu \dfrac{m}{r^2}$, en que m es la masa del planeta.

Para probar que la constante μ es la misma para todos los planetas, Newton utiliza la tercera ley de Kepler.

$$\tau^2 = ca^3$$

y el cálculo, lo que le conduce al valor del periodo $\tau = \dfrac{2\pi ab}{h}$.

De ellas resulta:

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{ah^2} = \frac{4\pi^2 l}{h^2} = c$$

de modo que $\frac{h^2}{l} = \mu$ debe ser el mismo para todos los planetas.

En consecuencia, Newton enuncia, de un modo general, su ley de gravitación universal: *cada partícula atrae a cualquier otra con una fuerza* $f = \mu \frac{Mm}{h^2}$, *que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia.*

Con un paso más, decisivo en la historia de la Ciencia y de la Humanidad, Newton demuestra cómo las leyes de Kepler pueden deducirse de su modelo de la ley de gravitación universal, con lo cual consigue una explicación general de toda una gama de fenómenos que van de la caída de una manzana que colgaba de un árbol, al movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, incluyendo el movimiento de los cometas, de las mareas en la superficie de los mares, de los satélites artificiales (Sputnik 4.X.1957, Soyuz - Apolo), que nos han maravillado con la más reciente comprobación de la universalidad de la ley de Newton.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.11.1. Kepler astrólogo

Aunque nunca Newton dijo cuál había sido su trayectoria intuitiva para llegar a la ley de gravitación universal, está claro que su modelo es ciertamente una *generalización* del modelo de Kepler y que en él debió inspirarse, aunque el enorme alcance y aplicabilidad de la ley de gravitación universal pronto dejó a un lado las leyes de Kepler, que en su época fueron especialmente apreciadas por los astrólogos, entre los que se encontraba Kepler, porque si permitían conocer mejor los cielos, también permitirían conocer mejor los asuntos humanos.

E.11.2. La batalla de las Malvinas

En 1914, durante la batalla de las islas Malvinas entre ingleses y alemanes, se observó que las andanadas de los cañones ingleses caían sistemáticamente unos 100 m a la izquierda del blanco. Los ingleses utilizaban un modelo que corregía la puntería de la rotación terrestre, pero no tenían en cuenta que estaban en el hemisferio sur (51° S, 60° W), con lo que en vez de corregir duplicaban el error, al utilizar tablas para 50° N.

E.11.3. Modificación del modelo de Galileo

Modificar el modelo de Galileo poniendo $\frac{dx}{dt} = 32t$, y estudiar sus consecuencias. Ídem adoptar la hipótesis $\frac{dx}{dt} = 8\sqrt{x}$.

Comparar todos estos modelos.

E.11.4. Gotas de lluvia

Este modelo de Galileo debe afinarse si queremos considerar movimientos como la caída de las gotas de lluvia, el lanzamiento de proyectiles, el movimiento de satélites artificiales, etc., en que son significativas otras causas no consideradas en el modelo de Galileo. En el caso de los proyectiles ordinarios, la resistencia del viento, en el caso de los satélites, la atracción mutua, en el caso de las gotas de lluvia, la resistencia del aire,... P.e.: si consideramos una gota de lluvia que cae de un nube a 980 m de altura, y deseamos conocer el tiempo que tardará en caer, si aplicamos el modelo de Galileo, tendremos:

$$980 = 9{,}8t^2$$

luego

$$t = \sqrt{\frac{980}{9{,}8}} = 10 \textit{ segundos}$$

Se ha visto al realizar experimentos, que el tiempo de caída es muy superior, puede llegar hasta 50 segundos para gotas gordas. La explicación es que en el caso de las gotas de lluvia, la resistencia del aire representa una fuerza mucho más importante que en la caída de una canica, o una bola de golf. Un cierto número de modelos han permitido estudiar estos movimientos.

E.11.5. El Sputnik y la balística de cohetes

La balística cósmica fue necesaria al querer disparar satélites artificiales, siendo el primero el Sputnik, lanzado por Rusia con éxito el 4 de octubre de 1957. Esto exigió nuevos modelos que implican, con todo lo anterior, las leyes de Newton y cuya resolución, mediante ordenadores, permite obtener no

sólo el lanzamiento del satélite a una órbita prefijada, sino la llamada *maniobra* de rectificación de la misma para el alunizaje y otros propósitos, como hemos visto con los viajes, no siempre exitosos, de los Apolo, Soyuz, etc.

E.11.6. Los modelos de la Astronomía griega y el error de Cristóbal Colón

Es bien conocido que en la época de Cristóbal Colón se creía que la longitud de la circunferencia terrestre era mucho menor de lo que en realidad es. Ello explica que, cuando Colón desembarcó en América, creyera que había llegado a la costa este de Asia.

Este error venía de los modelos que utilizaron los griegos para calcular la circunferencia terrestre.

Al parecer, se debe a Eratóstenes (270-195 a J.C.) el primer modelo griego que permitía medir la longitud de la circunferencia terrestre. En la figura 4, se representa la circunferencia terrestre, que pasa por las ciudades de Alejandría y Siena, las cuales designamos por A y B.

En un cierto momento, las rectas AS' y BS representan rayos que desde A y B se dirigen al Sol y que se pueden considerar prácticamente paralelas, dada la enorme distancia de la tierra al Sol y la no muy grande distancia entre A y B.

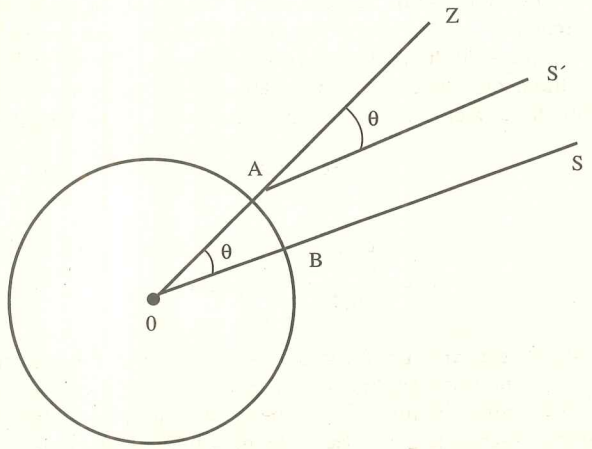


FIGURA 4

Si consideramos el momento en que el Sol está en el cénit de Siena, la recta AS', paralela a AS, formará un ángulo θ con la vertical AZ de Alejandría, igual al ángulo ZOS, en que O es el centro de la Tierra. Conocido θ y la longitud l del arco AB, se puede, por una simple proporción, calcular la longitud de la circunferencia terrestre C, a saber,

$$\frac{C}{360^\circ} = \frac{\theta}{7^\circ 12'}$$

El ingenio de Eratóstenes permitió, construyendo un pozo perfectamente vertical en Siena, determinar el instante del paso del Sol por el cénit, que coincidía con el de la posibilidad de ver el rayo del sol reflejado en la superficie del agua del pozo. La distancia AB fue medida mediante los pasos de un camello, lo que le permitió fijarla en 5.000 estadios. Así obtuvo de la proporción precedente:

$$C = \frac{360^\circ}{7{,}2^\circ} \cdot 5.000 = 250.000 \textit{ estadios}$$

El valor real era 176.471 estadios, es decir, 1,4 veces menor del dado por Eratóstenes.

Un modelo que perfeccionó el de Eratóstenes, fue el de Poseidonio (130 a J.C.).

Éste observó que la estrella Canopus, que se veía al ponerse en el horizonte desde Rhodas, aparecía en Alejandría a 7,5° sobre el correspondiente horizonte. A partir de esta observación, teniendo en cuenta relaciones que se obtienen fácilmente de la figura 5, resulta $AOR = 7{,}5$, y como la distancia de Rhodas a Alejandría resultó 3.750 estadios, se obtuvo, para la circunferencia terrestre, 180.000 estadios, cifra mejor que la de Eratóstenes.

En todo caso, esta medida que perpetuó Ptolomeo (130 a J.C.) en su Geografía hasta la época de Colón, fue la que influyó en el feliz error de Cristóbal Colón.

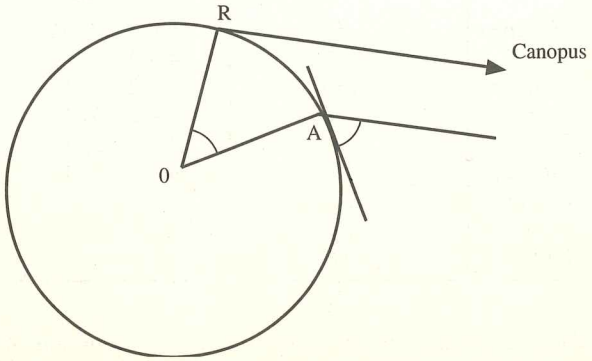


FIGURA 5

E.11.7. Kepler, Newton, Einstein

Los modelos matemáticos tienen una validez dentro de ciertos límites y durante períodos de tiempo más o menos extensos. Así hemos visto el interés de los modelos de Kepler, sobre todo como punto de partida para el modelo de Newton. Los estudios de las perturbaciones de la órbita de Urano, llevaron a Leverrier, astrónomo francés, a predecir la existencia de un planeta más alejado que Urano, lo que le permitió fijar la posición que tendría el nuevo planeta en la noche del 23-9-1846, lo cual fue comprobado por otros astrónomos. El nuevo planeta denominado Neptuno se observó que también presentaba perturbaciones en su órbita, que condujeron al descubrimiento de otro planeta, aún más lejano, al que se denominó Plutón (1930). Análogamente, el estudio de las irregularidades en la órbita de Mercurio llevaron a predecir la existencia de un planeta en las proximidades de Mercurio, e incluso fue denominado tal hipotético planeta Vulcano, que nunca ha sido encontrado. Esto hizo dudar de la validez de la teoría de Newton, logrando Einstein explicar tales irregularidades mediante su teoría de la relatividad.

E.11.8. A la busca de un planeta perdido: la ley de Bode

Las distancias del Sol a los planetas fueron consideradas en 1772 por los astrónomos Bode y Titius y, de ellas (ver la 2.ª columna) indujeron la ley que aparece en la tercera columna, que se suele llamar ley de Bode y se expresa matemáticamente por el modelo que se indica en la tabla. La tercera columna se obtiene tomando como distancia del Sol a Saturno = 100 y obteniendo las otras distancias aproximadamente (Saturno era el planeta más lejano conocido en la época de Bode).

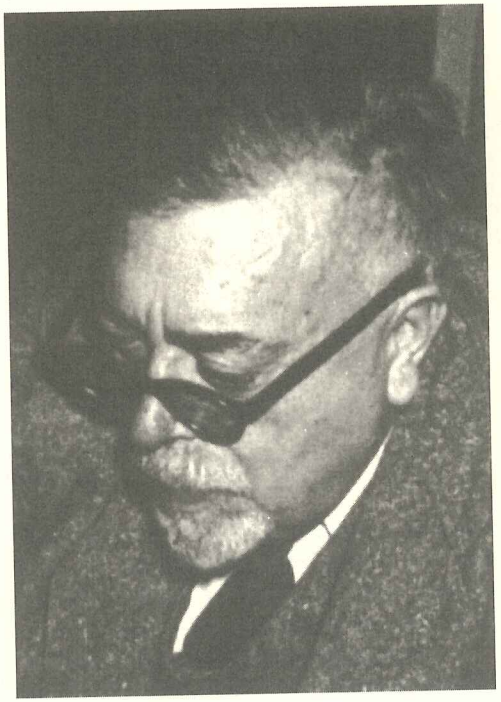
Planeta	*Distancia en millones de kilómetros*	*Modelo de Bode* $4 + 2^n \cdot 3$
Mercurio	58	$(4 + 2^{-1} \cdot 3)/10$
Venus	108	$(4 + 2^0 \cdot 3)/10$
Tierra	150	$(4 + 2^1 \cdot 3)/10$
Marte	228	$(4 + 2^2 \cdot 3)/10$
Júpiter	778	$(4 + 2^4 \cdot 3)/10$
Saturno	1.400	$(4 + 2^5 \cdot 3)/10$
Urano	2.900	
Neptuno	4.500	
Plutón	5.900	

El problema se encontró entonces con la laguna correspondiente a un planeta a la distancia $4 + 2^3(3)$ que no se conocía y hacía que la ley fallara, pero en 1801 Giussepe Piazzi encontró un gran conjunto de asteroides, probables

restos de un planeta correspondiente a dicha distancia. Los descubrimientos posteriores de Urano, Neptuno, Plutón presentaban grandes discrepancias de la ley, que perdió su interés a pesar de haber servido para descubrir los asteroides.

Se observa la diferencia entre la ley de Bode, que es un modelo *puramente descriptivo*, de las de Kepler y Newton, que constituyen un modelo *axiomático explicativo* del sistema solar.

N. WIENER (1894-1964)



Creador de la Cibernética y de su aplicación a los sistemas de comportamiento.

12. SISTEMAS DINÁMICOS

«Self-control is the quality that distinguishes the fittest to survive.»

G. BERNARD SHAW

12.1. Introducción

En varios capítulos se han visto ejemplos de *sistemas dinámicos*, como inventarios en un almacén, crecimiento de una población de personas, bacterias, coches, desarrollo de una epidemia,... En todos ellos se presentan flujos o movimientos de personas, materiales,..., que cambian la situación del sistema en el tiempo.

En un sistema industrial, como una fábrica, los *bloques* o *componentes* pueden ser puestos de trabajo, máquinas, departamentos, divisiones, según el detalle y los objetivos que nos interesen en el estudio que emprendemos.

En éste y en todos los sistemas que interese estudiar, es necesario considerar además del *conjunto de elementos* o componentes que lo forman, su *estructura y organización*, su *comportamiento* y sus relaciones con el *exterior* que le rodea.

Al suponer interconexiones entre las *componentes* se considera que debe haber *ingresos* y *salidas* entre las mismas. Simbólicamente representaremos una *componente* por un *bloque* o rectángulo en que hay al menos una entrada I y una salida S (fig. 1).

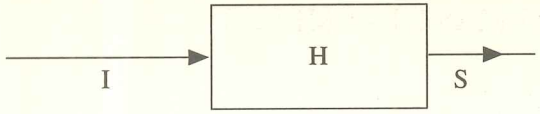


FIGURA 1

Estas entradas y salidas se refieren a corrientes eléctricas, fuerzas, fluidos, filas de individuos, información,..., que entran en H y, tras una cierta transformación, salen de H. Se denominan genéricamente *señales* y, desde el punto de vista matemático son funciones del tiempo.

Uno o más elementos o bloques pueden considerarse como un *subsistema*, pero como a veces estudiarlo en detalle puede resultar innecesario y complicado, es más conveniente tratarlo como un elemento que se suele denominar *caja negra*, para significar que no se tiene en cuenta su estructura y funcionamiento interior, es decir, se le considera simplemente como un elemento.

Estos bloques son los elementos básicos o ladrillos para la *modelización* de un sistema más o menos complejo, proceso con el que pretendemos conocer el funcionamiento del sistema para llegar a la *predicción* de su futuro, y a su *control* o gobierno, ajustando adecuadamente los ingresos del mismo necesarios para obtener respuestas deseadas. Por ello, frecuentemente se utilizan dos o más diagramas del mismo sistema para conocer separadamente los flujos de materiales, de información, etc.

12.2. Modelización por diagramas de bloques

Introducidas algunas nociones generales, pasamos a la representación de los sistemas dinámicos por diagramas de bloques, que vamos a iniciar con el ejemplo de:

Ingreso y salida del agua en un tanque

Supongamos un depósito o tanque cilíndrico (fig. 2), cuya base tiene área A en el que entra agua por un grifo, p.e. con un aporte de k litros por minuto y pérdida de h litros por minuto por un sumidero.

Se trata en este sistema dinámico de establecer un modelo que permita conocer el estado del sistema al cabo de t minutos. En un tiempo Δt_i el *nivel* o *estado* del tanque se modificará y pasará de ser $z(t_i)$ a $z(t_i + \Delta t_i) = z(t_i) + (k - h)\,\Delta t_i$.

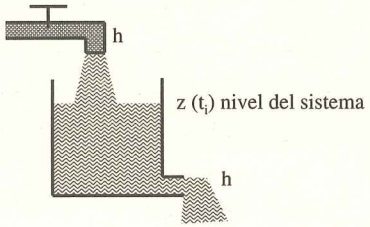


FIGURA 2

De un modo más general, si el *ingreso* del sistema es variable con el tiempo y representamos su tasa de ingreso por la función $f_1(t)$ y la tasa de pérdida por $f_2(t)$, tendremos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A}\,(f_1(t) - f_2(t)) \qquad [1]$$

que mediante una integración inmediata nos dará el *estado* o *nivel* del sistema:

$$z(t) = \int_0^t \frac{1}{A}\,(f_1(t) - f_2(t))dt + z(0) \qquad [2]$$

Se ve aquí que se ha considerado $z(t)$ como una variable que en cada momento t caracteriza el *estado* del sistema (en este caso el nivel del depósito). La ecuación diferencial [1] es la llamada *ecuación diferencial del sistema dinámico*, cuya resolución mediante [2] (*ecuación de estado*) nos permite conocer en cada instante el nivel del sistema, relacionándolo con las señales $f_1(t)$, $f_2(t)$ de entrada (una positiva y otra negativa).

Diagrama de bloques

Con el *diagrama de bloques* (fig. 3) tendríamos para el ejemplo del tanque de agua, un bloque sumatorio que significa agregar las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, cada una con su signo, después multiplicar por la constante 1/A; esto conduce al cálculo de la integral, etc.

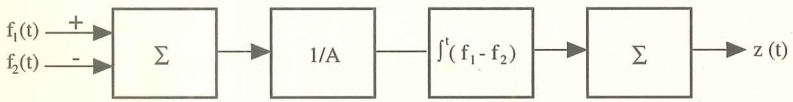


FIGURA 3

Este diagrama de bloques se puede poner en forma más compacta (fig. 4).

Se ve, pues, que en el estudio de un sistema dinámico interesa fundamentalmente el comportamiento global del sistema al pasar el tiempo y cómo se relaciona tal evolución temporal con su estructura y elementos. Esto es lo que se llama su *comportamiento dinámico*.

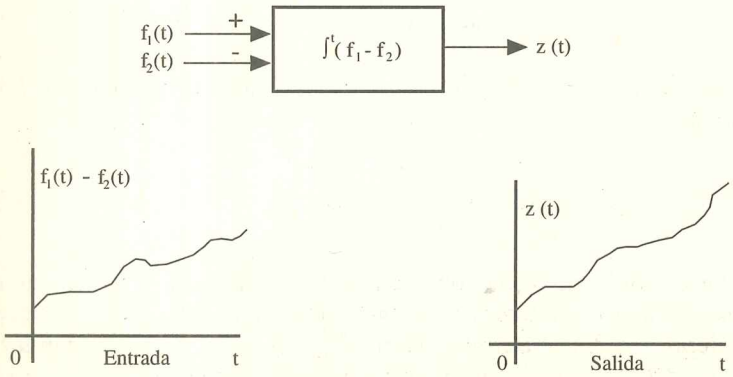


FIGURA 4

12.3. Realimentación

Se utilizan las siguientes representaciones convencionales (algunas de las cuales ya se han visto en los ejemplos).

Una *flecha* se utiliza (como se ha dicho) para designar una señal de causa a efecto que actúa en la dirección de la flecha. Un *punto de ramificación* (fig. 5) representa una situación en que una señal causa más de un efecto. Un *bloque* en forma de rectángulo representa una relación funcional que da las *salidas* (variables dependientes) a partir de las *entradas* (variables independientes). El bloque puede representar la multiplicación de la entrada por una constante, un integrador, etc.

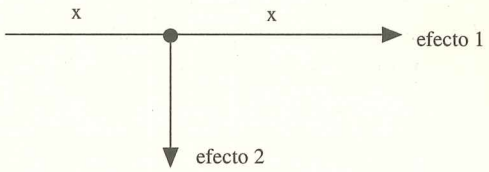


FIGURA 5

Un *comparador* (representado por un círculo) (fig. 6) significa que la salida es la suma de las señales de ingreso con los correspondientes signos.

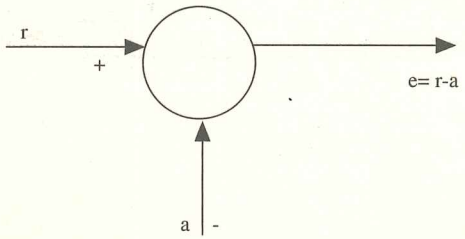


FIGURA 6

Como ejemplo, consideremos la representación por un diagrama de bloques del funcionamiento de la *cisterna del W.C.* Es una muestra antiquísima de mecanismo de regulación.

Se citan como antecedentes el reloj de agua de Ctesibius de Alejandría, contemporáneo de Euclides y Arquímedes (tres siglos a. J. C), el regulador de bebidas de los chinos (siglo I a. J. C.), la copa inagotable de Herón de Alejandría (siglo I a. J. C), etc., que son los ejemplos más antiguos conocidos de mecanismos de realimentación.

A partir del modelo icónico de la figura 7, bien conocido, se ve que al tirar de la cadena se levanta la válvula de salida con lo que sale el agua a una tasa $f_2(t)$ y a la vez el flotador baja y abre la válvula de entrada que repone el agua a una tasa $f_1(t)$ hasta un nivel H, en que se cierra la válvula por el flotador. Así se puede decir que la información relativa al nivel del agua es enviada para realimentar el ingreso por la válvula. De aquí el nombre de *realimentación* que se aplica al dispositivo.

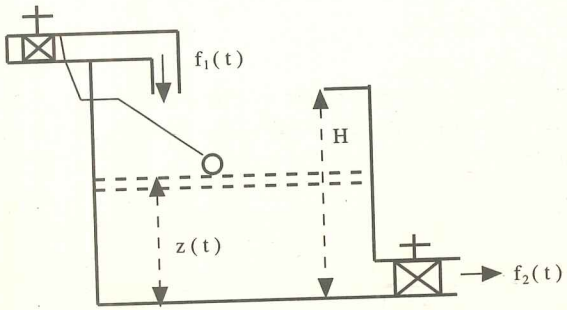


FIGURA 7

De acuerdo con la representación por diagrama de bloques, el sistema se representa como indica la figura 8.

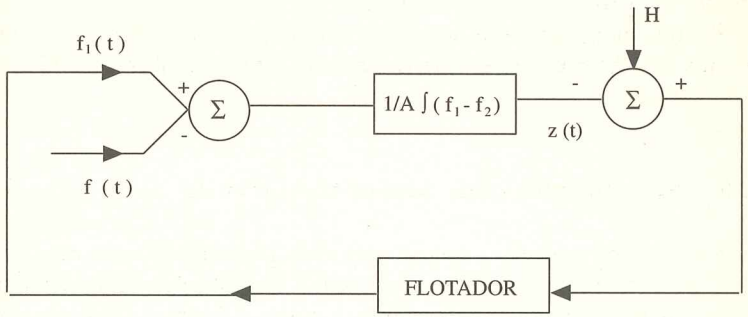


FIGURA 8

12.4. Sistemas abiertos y sistemas con realimentación

Un *sistema abierto* se caracteriza porque sus salidas en un cierto momento no tienen influencia sobre los ingresos de tiempos posteriores.

Así, un reloj no tiene en cuenta la información sobre su desviación respecto a la hora verdadera para modificar su marcha, y es un sistema abierto.

En cambio, el sistema de calefacción de una casa, que contiene termostato, tiene en cuenta la temperatura en un cierto momento para ajustar la entrada de combustible y lograr una temperatura deseada. Se denomina un *sistema de realimentación*, porque rectifica su comportamiento en función de la información sobre su ingreso. Dentro de los sistemas con realimentación, se consideran dos tipos: *positiva* y *negativa*. El caso de cualquier máquina con un regulador que ajusta la velocidad de la máquina para que sea la conveniente se llama un *sistema con realimentación negativa*.

Si se piensa en el problema dinámico de crecimiento de poblaciones de bacterias [2.2] se ve que el tamaño de una población viene afectado por la tasa de crecimiento de la población, tasa que, a su vez, depende del tamaño que haya alcanzado la población. Más aún, las

bacterias nacidas *incrementan* la tasa a que nuevas bacterias son engendradas, resultando lo que se llama un *sistema de realimentación positiva*. Pero si se supone una alimentación limitada, se origina un *sistema de realimentación negativa*.

En resumen, hay realimentación en un sistema si, al menos, existen dos variables x, y tales que si x depende de y, también y está afectada por x.

12.5. Acoplamiento y operador de transferencia

Un sistema complejo está constituido por subsistemas más simples relacionados entre sí. Se comprende el interés de estudiar algunos tipos posibles de acoplamiento o interrelaciones entre sistemas simples, así como las funciones de transferencia, que expresan en forma analítica las relaciones entrada-salida, para abordar problemas de modelización más complicados.

Empezamos por definir el *operador de transferencia* A, para un elemento, como la razón de la salida y a la entrada x. Se pone (fig. 9) $A \equiv \frac{y}{x}$, es decir, si y es una función $f(x)$, el operador A es $\frac{f(x)}{x}$, que en particular puede ser $\frac{f(x)}{x} = k$.

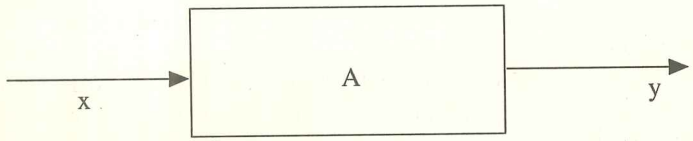


FIGURA 9

Vamos a considerar algunos de los acoplamientos más sencillos de bloques y los operadores a que conducen.

a) Tenemos un *acoplamiento en serie* de dos elementos A_1, A_2 si, como indica la figura 10, disponemos que la salida y de A_2 sea el ingreso de A_1. Es decir, acoplamos el sistema $z = A_1$ y con el $y = A_2x$, obteniendo $z = A_1\,(A_2x)$.

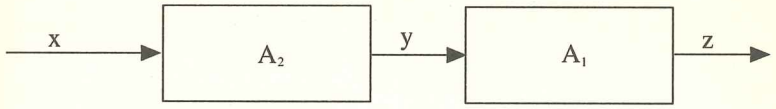


FIGURA 10

P.e., en el caso del tanque puede ser

$$A_2 = k\,(f_1 - f_2),\ A_1 = \int \varphi dt$$

luego

$$A_1(A_2x) = \int k\,(f_1 - f_2)\,dt$$

b) Tenemos un *acoplamiento en paralelo*, si representamos la relación $w = A_1x + A_2x = (A_1 + A_2)\,x$ mediante el esquema que indica claramente que el ingreso x da una salida y por A_1 y otra z por A_2, que se suman dando w (fig. 11).

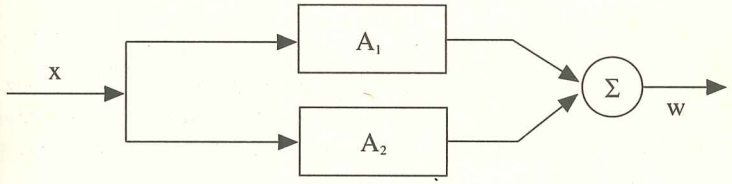


FIGURA 11

c) En una forma esquemática representamos en la figura 12 un *ciclo de realimentación*, que se explica analíticamente así: al haber realimentación la salida $z = A_1y$, se modifica, porque pasa por A_2, con lo

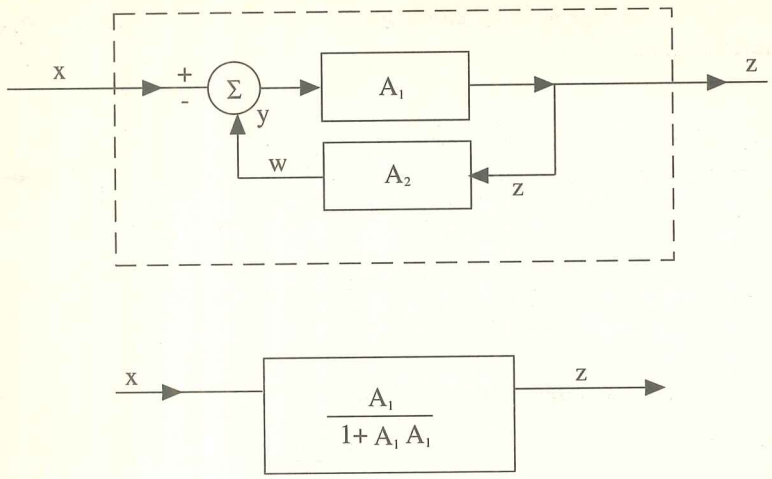


FIGURA 12 a, b

que $y = x - w$, siendo $w = A_2 z$, luego $y = x - A_2 z$, es decir, $z = A_1(x - A_2 x)$, o bien, $z = A_1 x - A_1 A_2 z$, o lo que es lo mismo $A_1 x = z + A_1 A_2 z$, o bien

$$z = \frac{A_1}{1 + A_1 A_2} x \qquad [1]$$

Esto es, que al haber el ciclo de realimentación, la salida en vez de ser $z = A_1 x$, se modifica obteniéndose [1]. Se observa que el sistema con realimentación podría considerarse como equivalente a un sistema con operador $A_3 = \dfrac{A_1}{1 + A_1 A_2}$.

P.e., si A_1 y A_2 son constantes tendríamos $z = \dfrac{k_1}{1 + k_1 k_2} x$, que si no hay realimentación, o sea $k_2 = 0$, queda reducida a $z = k_1 x$.

d) *Acoplamiento jerárquico*

En los sistemas complejos se presentan de modo natural distintos subsistemas que corresponden a diferentes niveles, de modo que la relación fundamental en el sistema es «*A* está a nivel superior a *B*».

Así aparecen las jerarquías de modo natural en sistemas ecológicos, fisiológicos, sociológicos, etc., de las que veremos algunos ejemplos a continuación.

En las estructuras jerárquicas cada bloque representa una función o actividad. Un cierto bloque suele incorporar sólo algunos aspectos de los subsistemas que están representados por bloques de escalones más bajos en la jerarquía.

Así, en un sistema industrial se podrán considerar tres niveles: a) proceso de materiales y energías; b) control y proceso de la información; c) operaciones económicas relativas a eficiencia, beneficios, clientela, etc. En el estudio de organismos vivos se pueden considerar los niveles de individuo, órgano, tejido, célula,... y análogamente en sociología se prolonga la jerarquía a la familia, ciudad, comarca, país, mundo.

Ejercicios, proyectos, notas y comentarios

E.12.1. Cibernética

El gran matemático Norbert Wiener (1894-1964) reconoció la enorme ubicuidad de los sistemas de control en la Naturaleza, en las sociedades humanas, en los organismos vivos, en la tecnología. En un notable libro: *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine* (Nueva York, J. Wiley, 1948) crea la nueva ciencia llamada *Cibernética* (del griego *Kybernet*) que aporta originales puntos de vista para el estudio de la comunicación y el gobierno de los sistemas.

Tras su labor fundamental de los años 40 hay que señalar la metodología de *dinámica de sistemas*, introducida por J. Forrester en los años 50, que aporta útiles prácticos para plasmar la estructura del sistema mediante los diagramas de bloques y las ecuaciones diferenciales, que muy elementalmen-

te hemos introducido aquí. Es especialmente importante la introducción de los diagramas de Forrester y el lenguaje DYNAMO para la simulación.

E.12.2. Importancia de los sistemas con control de realimentación

Estos sistemas, llamados también *adaptativos*, tienen una gran importancia por sus amplias aplicaciones.

En los seres vivos una serie de mecanismos de control permiten la regularidad de sus comportamientos. Así, hay un autocontrol de este tipo para la temperatura, tensión arterial, composición de la sangre, etc., en el hombre y animales.

En un gobierno se suele introducir mecanismos de regulación económica que permitan realizar ciertos niveles de salida como producto nacional bruto, empleo, inflación. Cuando éstos salen de los límites aceptados, hay que modificar las políticas y regulaciones.

En los sistemas ecológicos actúan también sistemas de control, de modo que si una especie disminuye en número, otras sufren las consecuencia y modifican sus comportamientos, con lo que vuelve a surgir un cierto equilibrio.

E.12.3. Homeostasia

El mecanismo llamado de *homeostasia* en el cuerpo humano significa la posibilidad del mismo para mantener una serie de constantes vitales, como son la temperatura, concentración de azúcar en la sangre, etc. La explicación detallada de los mismos mediante los esquemas de bloques del organismo es muy complicada y no entraremos aquí en ella. Sin embargo, es interesante indicar alguna explicación de ciertos fenómenos, aunque esté siempre sujeta a revisión tras nuevos experimentos. P.e., si una persona sufre una fuerte hemorragia, baja rápidamente su tensión sanguínea por tener menos volumen de sangre circulando por el mismo sistema, y como esta circulación es absolutamente vital para la actividad cerebral, que puede sufrir un grave daño con sólo faltar 2 ó 3 segundos, el sistema circulatorio experimenta una rápida constricción que reduce su volumen y al incrementarse simultáneamente el número de latidos del corazón, se logra que el cerebro se riegue sin interrupción. A esta *reacción* o realimentación inmediata a la hemorragia, siguen otras como la restauración natural (si no se hace transfusión) del volumen sanguíneo mediante la absorción de líquidos del intestino, que el paciente restaurará después más lentamente con bebidas salinas y alimentación apropiada. Al mismo tiempo, las glándulas endocrinas completan el complejo proceso para restaurar el nivel vital del individuo. Cuando hay un exceso de presión sanguínea, los sensores aumentan el número de mensajes al cerebro y disminuye la circulación y la presión arterial y análogamente en el caso de tensión débil.

Un fenómeno análogo al del control en el caso de hemorragia, se presenta cada vez que nos levantamos de la cama, pues al caer parte de la sangre que se encuentra en el cerebro por la acción de la gravedad, el cerebro envía una señal al corazón para que éste inicie un mayor número de pulsaciones y llegue al cerebro más flujo sanguíneo.

Cuando una persona no puede lograr que funcionen las señales que hacen que el corazón logre un número de pulsaciones normal, se hace necesaria la implantación de un marcapasos para que transmita las señales al corazón y restaure el sistema a su normalidad funcional.

Estos conceptos de realimentación, control, información, fueron introducidos por N. Wiener y con ellos se ha logrado modelizar y conocer los fenómenos biológicos mucho más complicados que los físicos anteriormente estudiados con matemáticas más sencillas.

E.12.4. Negociaciones laborales

En las negociaciones laborales es corriente que los sindicatos pidan una cláusula de elevación automática de salarios de acuerdo con la elevación del índice de precios. Comprobar el interés del adjunto diagrama de bloques (fig. 13) y ver la posibilidad de utilizarlo con ciclos de realimentación adicionales para estabilizar el sistema.

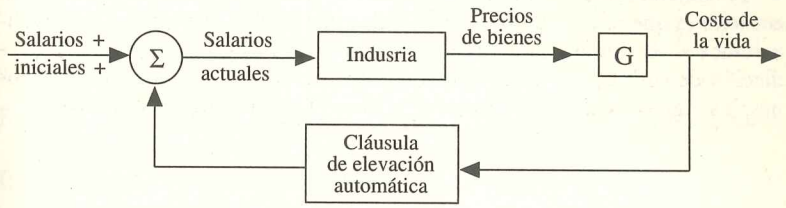


FIGURA 13

E.12.5. Crecimiento de una población

En el instante 0 se tiene una población de 300 moscas en un recipiente de un laboratorio. La tasa de nacimientos es 0,6 por organismo por semana. La tasa de muerte depende de la cantidad de moscas acumulada. Al comienzo, la esperanza de vida es 6 semanas, pero esta esperanza se reduce en un 10% cada vez que la población alcanza un crecimiento del 20%.

Sugerir intuitivamente la evolución en el tiempo de esta población.

Utilizar la *simulación* **[Cap. 6]** para conseguir resultados más ajustados a la realidad.

Comparar con el Cap. 2.

E.12.6. Modelos mundiales

Con estos métodos de modelos dinámicos aquí esbozados, ha abordado Forrester y su seguidores desde problemas importantes de la evolución glo-

bal de una empresa a la evolución del sistema mundial en sus aspectos demográficos, económicos, sanitarios, etc.

La idea de la modelización es más bien de carácter inductivo y después se estudia el ajuste de datos y la más o menos parcial validación del modelo.

E.12.7. Hemos visto en el Capítulo 2 bastantes ejemplos de la evolución del número de individuos de una población (bacterias, hombres...) a lo largo del tiempo, lo cual es una manera *descriptiva externa* de conocer el funcionamiento de tales sistemas. De un modo general, si se consideran n variables $(z_1, z_2, ..., z_n)$ como características suficientes para tener una buena descripción del *estado del sistema* en un instante t, el sistema de funciones

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t))$$

nos dará la evolución del sistema en el tiempo.

Si éstas se pueden relacionar con el estado inicial $z(t_0)$ y el ingreso en el intervalo (t_0, t) se llamarán *ecuaciones de estado* y tendremos una mejor descripción del sistema.

Finalmente, interesa llegar al *modelo* del sistema, que es un conjunto de ecuaciones que relacionan las variables de estado del sistema, con el que realizaremos el conocimiento del funcionamiento del mismo, para llegar a la predicción de su futuro y a su control o gobierno ajustando, mediante decisiones, los ingresos del mismo necesarios para obtener respuestas deseadas.

BIBLIOGRAFÍA

Bender, E. A. *An Introduction to Mathematical Modelling* (Nueva York, J. Wiley Interscience, 1978).

Berry, J. S. *Mathematical Modelling Metodology, Models and Micros* (Nueva York, J. Wiley, 1986).

Burghes, D. N. *Modelling with Differential Equations* (Nueva York, Ellis Horwood Limited, 1981).

Gold, H. J. *Mathematical Modelling of Biological Systems* (Nueva York, J. Wiley, 1987).

Lange, J. de. *Innovation in Maths Education by Modeling Applications* (Nueva York, Ellis Horwood, 1993).

Maki, D. P., y Thompson. *Mathematical Models and Applications* (Londres, Prentice-Hall, 1973).

Mesterton-Gibbons, Michael. *A Concrete Approach to Mathematical Modelling* (Nueva York, Addison-Wesley P. C., 1992).

Meyer, W. J., *Concepts of Mathematical Modelling* (Nueva York, McGraw Hill Book Company, 1984).