



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS

Taller - Modelamiento Físico Computacional

Docente: Carlos Andrés Gómez Vasco

IMPORTANTE: Resuelva, dejando claro sus cálculos paso a paso y sin omitir detalle alguno. Realice los diagramas utilizando las herramientas necesarias para su construcción. Incluso, de ser necesario, use colores para denotar diferencias en las situaciones a resolver.

Nombre: _____ Grupo: _____

EJERCICIOS

(5.0 Puntos)

1. En el libro Looking at History Through Mathematics, Rashevsky propone un modelo matemático para analizar la dinámica de producción de inconformistas en una sociedad. Supóngase que una sociedad tiene una población total $x(t)$ individuos en el tiempo t , medido en años, y que $x_i(t)$ representa el número de individuos inconformistas en ese mismo instante. Se asume que todos los inconformistas que se aparean entre sí producen descendencia inconformista, mientras que una proporción fija r del resto de la descendencia también resulta inconformista. Sean b y d las tasas constantes de nacimiento y muerte de la sociedad, respectivamente. Si el apareamiento ocurre de forma aleatoria, el modelo se describe mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx}{dt} = (b - d)x$$

$$\frac{dx_i}{dt} = (b - d)x_i + rb(x - x_i)$$

Se define la proporción de inconformistas como

$$p(t) = \frac{x_i(t)}{x(t)}$$

El objetivo de este taller es realizar un estudio completo del modelo, tanto desde el punto de vista matemático como numérico y computacional, incluyendo una comparación de eficiencia entre distintos lenguajes de programación.

En primer lugar, se solicita demostrar rigurosamente que la función $p(t)$ satisface una ecuación diferencial independiente del tamaño total de la población. Para ello, debe utilizarse la regla del cociente, sustituir las ecuaciones del sistema original y simplificar cuidadosamente hasta obtener una ecuación diferencial explícita para $p(t)$. Cada paso algebraico debe justificarse claramente. Posteriormente, se debe interpretar el resultado obtenido desde el punto de vista del modelo y explicar por qué la ecuación final no depende explícitamente de la tasa de mortalidad d . Asimismo, debe identificarse el equilibrio del sistema y discutirse su significado social y su estabilidad.

En segundo lugar, se debe resolver la ecuación diferencial obtenida para $p(t)$ mediante separación de variables, obtener la expresión analítica explícita de la solución y evaluar dicha solución para los valores:

$$p(0) = 0,01$$

$$b = 0,02$$

$$d = 0,015$$

$$r = 0,1$$

en el intervalo $t \in [0, 50]$. Se debe calcular el valor exacto de $p(50)$ y analizar el comportamiento cualitativo de la solución cuando $t \rightarrow \infty$.

En tercer lugar, se debe aproximar la solución en el intervalo $t \in [0, 50]$ con paso $h = 1$ año utilizando tres métodos numéricos distintos:

- Método de Euler explícito.
- Método de Taylor de orden 2
- Método implícito del trapecio.

Para cada método se debe deducir explícitamente la fórmula iterativa correspondiente. En el caso del método de Taylor de orden 2, se debe calcular de manera explícita la segunda derivada necesaria para el esquema. En el caso del método del trapecio, se debe deducir y simplificar algebraicamente la expresión que permite despejar p_{n+1} en términos de p_n .

Para cada método numérico se debe:

- Implementar el algoritmo.
- Generar una tabla de valores.
- Graficar la solución aproximada junto con la solución exacta.
- Calcular el valor aproximado de $p(50)$.
- Determinar el error absoluto respecto al valor exacto.
- Analizar comparativamente precisión y comportamiento numérico.

Posteriormente, se debe realizar una comparación de eficiencia computacional implementando los tres métodos en tres lenguajes distintos: Python, C++ y Fortran. Las implementaciones deben estar estructuradas de manera equivalente en los tres lenguajes y deben ejecutar un número elevado de iteraciones (por ejemplo, del orden de 10^7 pasos, ajustando el intervalo según sea necesario) con el fin de medir tiempos de ejecución significativos. Para la medición del tiempo se deben emplear herramientas estándar en cada lenguaje (por ejemplo, `time` o `timeit` en Python, la biblioteca `chrono` en C++, y `cpu time` en Fortran).

Se debe reportar, para cada combinación método–lenguaje, el tiempo total de ejecución y construir una tabla comparativa. A partir de los resultados obtenidos, se debe analizar cuál lenguaje resulta más eficiente, si el costo computacional depende principalmente del método o del lenguaje utilizado, y qué diferencias estructurales entre lenguajes compilados e interpretados pueden explicar los resultados observados.

Finalmente, se debe redactar una discusión técnica en la que se comparen los tres métodos desde el punto de vista del orden de convergencia, estabilidad y costo computacional, y se analice el impacto del lenguaje de programación en el rendimiento del algoritmo. En particular, se debe reflexionar sobre la relación entre modelamiento matemático, diseño algorítmico y eficiencia computacional en el contexto del cómputo científico.

El entregable deberá incluir el desarrollo matemático completo, las implementaciones en Python, C++ y Fortran, las gráficas comparativas, las tablas de tiempos de ejecución y un informe técnico de máximo cinco páginas que sintetice los resultados matemáticos y computacionales obtenidos. (2.0 puntos)