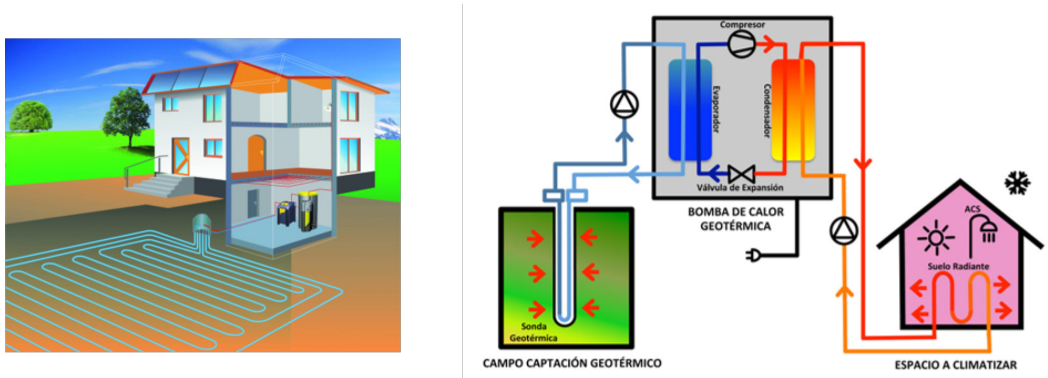
Sistema de calefacción geotérmico

La climatización geotérmica aprovecha el hecho de que la temperatura del suelo a una cierta profundidad se mantiene prácticamente constante a lo largo del año y no se ve afectada por las ocilaciones térmicas en la superficie. En la figura se muestra un esquema de la instalación (izquierda) y de su funcionamiento (derecha). Mediante un circuito intercambiador por el que circula un fluido es posible extraer calor del terreno para calentar la vivienda en invierno (ver figura). En verano, por el contrario, la temperatura del suelo a una cierta profundidad es inferior a la de la superficie, e invirtiendo el sentido del compresor conseguimos refrescar la vivienda.



En este proyecto vamos a estudiar cómo las oscilaciones térmicas en la superficie se propagan hacia el interior. El objetivo principal del estudio es determinar la profundidad óptima a la que debe colocarse el circuito exterior de la instalación.

Para ello, vamos a estudiar la transmisión del calor en la superficie terrestre mediante un modelo sencillo basado en la ecuación de difusión. Antes de abordar este problema debemos poner a punto un código que permita resolver numéricamente esta ecuación.

Preámbulo: Ecuación de difusión

Queremos obtener soluciones numéricas de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Consideramos primeramente un sistema de longitud $L = 2.0\,\mathrm{m}$ y constante de difusión $D = 2.0\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Partiremos de una excitación inicial de tipo armónico

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \tag{2}$$

con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t. \tag{3}$$

Nótese que la excitación inicial (2) verifica estas condiciones de contorno (3) para cualquier valor de n.

- Implementa el algoritmo FTCS con condiciones de contorno de Dirichlet completando las líneas que correspondan en el programa dif1.f.

- Utiliza dicho programa para encontrar la solución de (1) para $n = 1$ con las condiciones de contorno (3) en el intervalo $t \in [0, 0.5]\,\mathrm{s}$ partiendo del estado inicial (2). Emplea una red con $N = 100$ celdas y nodos en los extremos y un paso temporal $\Delta t = 2.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$. Representa la solución $u(x, t)$, tanto en una gráfica tridimensional (x, t, u)[1] como mediante una animación[2].

- Compara el resultado con la solución analítica del problema:

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \exp\left[-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \tag{4}$$

- Obtén la solución utilizando distintos valores del intervalo temporal Δt y observa si la solución varía. Encuentra el máximo valor Δt_{max} que permite obtener una solución estable.

- Implementa el algoritmo de Crank-Nicolson en un nuevo fichero dif2.f. Compara la solución obtenida mediante este método con la solución analítica (4). Encuentra máximo valor Δt_{max} que permite obtener una solución estable y compáralo con el del método FTCS. ¿Cuál de los dos métodos es más estable?

Una vez que dispones de un código para resolver la ecuación de difusión mediante el método de Cranck-Nicolson y que has comprobado que funciona correctamente, utilízalo para estudiar la evolución temporal de una perturbación de tipo gaussiano:

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right] \tag{5}$$

con $\sigma = 0.1\,\mathrm{m}$ en un sistema con la misma longitud $L = 2.0\,\mathrm{m}$ y condiciones de contorno que en el caso anterior (3).

- Obtén la solución numérica de este problema para varios valores del coeficiente de difusión D y observa cómo la evolución del sistema depende de este parámetro. Utiliza una red con $N = 200$ celdas y elige un paso temporal Δt adecuado para este estudio.

- Implementa en el código la condición de contorno de Neumann $u' = 0$ en ambos extremos

$$u'(0,t) = u'(L,t) = 0 \qquad \forall t \tag{6}$$

  y observa cómo la solución cambia con respecto al caso en el que imponenemos las condiciones de contorno de Dirichlet (3). ¿Qué significan desde un punto de vista físico las condiciones de contorno (6)?

[1]Puedes utilizar el comando `splot` en `gnuplot` o `Listplot3D` de `Mathematica`.
[2]Puedes utilizar el comando `Animate` de `Mathematica` o el fichero `dif.gnu` de `gnuplot`.

El asunto que nos ocupa: tuberías bajo el suelo

Se desea construir un sistema subterráneo de conducción de agua en una región de clima continental que en invierno alcanza temperaturas bajas. **Queremos determinar la profundidad a la que debemos colocar las tuberías para garantizar que el agua que circula por ellas nunca se congele**. Para ello, vamos a estudiar la conducción del calor en la superficie terrestre mediante un modelo sencillo.

En la región que estamos considerando la temperatura de la superficie del suelo varía entre un máximo de 35 °C en verano y un mínimo de -15°C en invierno. Por ello, supondremos que la temperatura en la superficie ($x = 0$) varía temporalmente de la siguiente forma:

$$T(x = 0) = 10 + 25 \sin(2\pi t) \quad (^{\circ}\mathrm{C}) \tag{7}$$

donde el tiempo t se mide en años.

La transmisión del calor en el suelo viene determinada por la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8}$$

donde x es la profundidad y $D = 2.4\,\mathrm{m}^2/\text{año}$ es la constante de difusión.

En el estudio consideraremos la región comprendida entre $x = 0$ (superficie) y una profundidad de $x = 4\,\mathrm{m}$ y analizaremos la evolución temporal durante un periodo de 4 años. Por otro lado, supondremos que la temperatura inicial es homogénea $T = 10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Además, consideraremos que a una profundidad de 4 m ya no hay flujo de calor y, por tanto, la condición de contorno que debe imponerse en $x = 4\,\mathrm{m}$ es

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=4\,\mathrm{m}} = 0 \tag{9}$$

- Utilizando el método de Crank-Nicolson obtén la evolución temporal de la temperatura en la región considerada, $T(x, t)$, utilizando como pasos espacial y temporal $\Delta x = 0.04\,\mathrm{m}$ y $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ años, respectivamente.
- Representa gráficamente la **evolución temporal de la temperatura** a las siguientes profundidades: $x =$0, 0.5, 1.0 y 2.0 m.
- Determina las **temperaturas máxima, mínima y media** en función de la profundidad y representa gráficamente el resultado.
- ¿A partir de qué profundidad podemos garantizar que el agua no se congela nunca?