VNiVERSiDAD
Đ SALAMANCA

Tema 4: Modelización de datos y técnicas de Fourier

Series Temporales: Análisis en el dominio de la frecuencia

Esta primera sesión tiene por objetivo el análisis de series temporales en el dominio de la frecuencia usando la transformada de Fourier..

Series Temporales: Análisis en el dominio de la frecuencia

Descripción del trabajo que se realizará en la Sesión 4.2

Los objetivos básicos de esta segunda sesión del tema se centran en el desarrollo de un código por el estudiante de un programa para el cálculo de las **partes real e imaginaria de la transformada de Fourier** de una serie temporal. En la primera sesión se ha desarrollado un *set* de programas para la lectura y manipulación de series temporales largas y para discretizar (muestrear) en el dominio de tiempo una función analítica e introducir los valores en dos vectores (uno para el tiempo – eje de abscisas - y otro para la magnitud de la función eje de ordenadas). Como en la sesión anterior se programa en Fortran compatible con FORTRAN 77 y se verifica la correcta implementación del código mediante comparación de los resultados obtenidos con analíticos y/o numéricos disponibles.

Precisión: Doble.

Formato: En principio, libre. El uso de subrutinas está prohibido.

Compilación: La usada hasta ahora. Es decir, con *check* de accesos fuera de límites en matrices y excepciones de tipo *floating point* en el *runtime* (consultar manual)

Documentación. Es obligatorio documentar el código definiendo todas las variables e identificando la función de los bloques principales.

Código realizado en la segunda sesión

Cálculo de la transformada de Fourier de una serie temporal

El trabajo solicitado en la sesión (ver el apartado de Entregables) en la sesión está previsto para su ejecución en un **tiempo medio de dos horas**.

Transformada de Fourier

Las propiedades espectrales de una señal determinista *x(t)* están contenidas en su transformada de Fourier (FT) *X(ω)*. La señal *x(t)* en el dominio del tiempo puede recuperarse totalmente (en fase y en amplitud) mediante la transformada inversa de Fourier (IFT):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega \tag{1}$$

Calcúlese la transformada de Fourier de la función siguiente:

$$g(t) = e^{-a|t|} \qquad a > 0 \tag{2}$$

Tenemos que hacer uso de la sección de código de muestreo (discretización) desarrollado en la sesión anterior. Tras ella procedemos a implementar el código de la DFT (Discrete Fourier Transform) separando partes real e imaginaria[1].

El procedimiento para simplificar el cálculo se basa en aprovechar la propiedad del escalado temporal de la FT (una de las propiedades básicas de la transformada de Fourier): Si una función *g(t)* tiene como FT a *G(w)*, la misma función con escalado temporal en una cantidad real *b* tiene como función FT a:

$$g(bt) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{|b|}G\left(\frac{\omega}{b}\right) \tag{3}$$

En particular se tiene que

$$g(-t) \quad \leftrightarrow \quad G(-\omega) \tag{4}$$

Usando la eq. (4) podemos descomponer *f(t)* y simplificar el cálculo de su FT usando la función escalón unitario:

$$\begin{aligned} &e^{-a|t|} = e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t) \\ &e^{-at}u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a+j\omega} \\ &e^{at}u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a-j\omega} \\ &e^{-a|t|} \quad \leftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, basta con aplicar la discretación en un rango (obviamente finito) de tiempos positivos y tratar de ajustar a $(a+j\omega)^{-1}$.

Teoría adicional

1 – Discretización y teorema de Nyquist-Shannon

Tal y como señalábamos en la primera sesión, las funciones analíticas deben muestrearse para pasar a una escritura de tipo discreto (no continuo en el tiempo) en análisis numérico.

[1] En FORTRAN es posible hacer cálculos en variable compleja, pero dado que no disponemos de tiempo para su análisis hacemos los cálculos de parte real imaginaria como variables reales separadas.

El criterio para elegir intervalo temporal de discretización (*time step*) lo proporciona el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon y exige calcular la transformada de Fourier.

La discretización de una señal se hace cada *DT* segundos (*time step*), la inversa de este paso temporal se llama tasa de muestreo f_s (en Hz). Dada una señal en el dominio del tiempo g(t) – una señal es necesariamente continua e integrable – su transformada de Fourier *G(w)* trivialmente existe. Dado que una señal no puede tener infinita energía *G(w)* tiene que ser limitada en banda (es decir, extinguirse a partir de una frecuencia B_{max} en Hz u ω_{max} en rad/s). El teorema del muestreo garantiza que la señal puede recuperarse sin pérdida de información (es decir, sin alteración) tras la discretización si la tasa de muestreo cumple que $f_s \geq 2B_{max}$.

2 - Densidad espectral de potencia

Si tratamos, por ejemplo, una medida de voltaje (*x(t)* expresada en voltios) la función $X(\omega)$ tiene unidades de V/Hz y puede ser considerada como la **densidad espectral de voltaje** de *x(t)*. La aplicación directa de la Eq. (1) a una serie temporal aleatoria no es siempre posible porque, por ejemplo, $X(\omega)$ puede no existir para alguna de las muestras, sin embargo si nos restringimos al conocimiento de la **densidad espectral de potencia** en lugar de la de voltaje su existencia está trivialmente garantizada: para un proceso aleatorio *X(t)* se define $x_T(t)$ como la porción de una función muestra *x(t)* que existe entre $-T$ y T siendo T finito:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T < t < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases} \tag{6}$$

Siendo $x_T(t)$ y ya que T es finito se tiene necesariamente que:

$$\int_{-T}^{T} |x_T(t)| dt < \infty \tag{7}$$

La FT de $x_T(t)$ existe y se denota por $X_T(\omega)$:

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{8}$$

La energía de la serie es finita en el intervalo temporal considerado y puede escribirse como (la última igualdad del teorema de Parseval):

$$\int_{-T}^{T} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^{T} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 dt \tag{9}$$

Y la potencia promedio en el intervalo será:

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|X_T(t)\right|^2}{2T} d\omega \qquad (10)$$

La PSD simplemente es el límite del valor esperado de la Eq. (9):

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X_T(t)\right|^2\right]}{2T} d\omega \qquad (11)$$

Este resultado es muy importante, en primer lugar, porque establece que la potencia promedio, P_{XX}, de un proceso aleatorio $X(\omega)$ viene dada por el promedio temporal de su segundo momento:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right]dt = A\left\{E\left[X^2(t)\right]\right\} \qquad (12)$$

Para un proceso al menos estacionario en sentido amplio (por ejemplo, para un proceso ergódico) $E\left[X^2(t)\right] = \overline{X^2} = cte.$ y $P_{XX} = \overline{X^2} = cte.$

En segundo lugar, P_{XX} puede ser obtenido mediante una integración en el dominio de la frecuencia conmutando el límite con la integral en la Eq. (11) definiendo la **densidad espectral de potencia** como:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|X_T(t)\right|^2\right]}{2T}; \qquad P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega \qquad (13)$$

Relación entre la PSD y la función de autocorrelación

La función de autocorrelación fue calculada en la sesión precedente. Puede probarse que para una serie al menos estacionaria en sentido amplio (**Teorema de Wiener-Khintchine**):

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega t}d\tau \quad ; \qquad R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{+j\omega t}d\omega \qquad (14)$$

Es decir, podemos obtener la PSD de manera directa usando la Eq. (13) y de manera indirecta a través del cálculo intermedio de la función de autocorrelación (Eq. (14)).