Lista

01.

Prove por indução que:

$(a^m)^n = a^{m.n}, \forall a, m, n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$

(i) Base: $n = 1$

$(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$

(ii) Hipótese de Indução

Suponha que:

$(a^m)^K = a^{m.K}$, para algum $K \in \mathbb{N}$

(iii) Passo Indutivo

mostrar que:

$(a^m)^{K+1} \overset{?}{=} a^{m.(K+1)}$

$(a^m)^{K+1} = (a^m)^K . a^m \overset{H.I.}{=} a^{m.K} . a^m = a^{m(K+1)}$

$\square$

Logo, por indução, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

02. Provar por indução que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \quad n \geq 2$$

(i) Base: $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$$

$$\frac{2(2-1)(2+1)}{3} = \frac{2(1)(3)}{3} = 2$$

(ii) Hipótese de Indução

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{K-1} i(i+1) = \frac{K(K-1)(K+1)}{3}$$

(iii) Passo Indutivo

mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \frac{(K+1)K.(K+2)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{K} i(i+1) = \sum_{i=1}^{K-1} i(i+1) + K(K+1)$$

$$= H.I. \ \frac{K(K-1)(K+1)}{3} + K(K+1)$$

$$= \frac{K(K+1)(K-1+3)}{3} = \frac{K(K+1)(K+2)}{3}$$

Logo, por indução, a propriedade vale para todo $n \geq 2$.

$\square$

Q3.

Sequência $a_1, a_2, a_3 \ldots$

$a_1 = 3$

$a_K = 7 \cdot a_{K-1}, \forall K \geq 2.$

$a_n = 3 \cdot 7^{n-1}, \forall n \geq 1.$

Dem.:

(i) Passo Base:

$\cdot n_0 = 1$ $\quad a_1 = 3 \cdot 7^{1-1}$

$a_1 = 3 \cdot 1$

$a_1 = 3$

(ii) Passo Indutivo:

H.I. $\{ a_i = 3.7^{i-1}, 1 \leq i < K$

Tese $\{ i = K, a_K = 3.7^{K-1}$

$\forall K \geq 2.$

$a_K = 7 . \underbrace{a_{K-1}}_{1 \leq K-1 < K} \rightarrow$ H.I.

$a_K = 7.(3.7^{K-1-1})$

$a_K = 3.7^{1+(K-2)}$

$a_K = 3.7^{K-1}$

$\square$

04.

Provar que:

$7^n + 2$ divisível por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) Passo Base:

$n = 0$

$7^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ divisível por 3

(ii) H.I.

$7^K + 2 \equiv 0 \mod 3$

(iii) Passo Indutivo:

$7^{K+1} + 2 \equiv 0 \mod 3$

$7^{K+1} + 2 = 7.7^K + 2 \equiv 1.7^K + 2 \mod 3$

$\equiv 7^K + 2 \equiv 0 \mod 3$

Logo, por indução, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

05.

$n \in \mathbb{N}^*$

$a_{n+1} = a_n + r, \; r \in \mathbb{R}$

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

b) $\underbrace{S_n = a_1 + \ldots + a_n}$

$$\underbrace{S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r}_{(*)} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Dem.:

(i) Passo Base:

$n_0 = 1$

$S_1 = a_1$

(ii) Passo Indutivo:

H.I. $\left\{ S_K = K \cdot a_1 + \frac{K(K-1)}{2} \cdot r, \; \forall K \geq 1. \right.$

Tese $\left\{ S_{K+1} = (K+1) \cdot a_1 + \frac{(K+1) \cdot K}{2} \cdot r, \; \forall K \geq 1. \right.$

Temos:

$$S_{K+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{K+1}$$

$$= \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_K}_{S_K \text{ H.I.}} + \underbrace{a_{K+1}}_{\text{item (a)}}$$

$$= K \cdot a_1 + \frac{K(K-1)}{2} \cdot r + (a_1 + K \cdot r)$$

D S T Q Q S S

06.

a) Provar que R é transitiva se e somente se R^{-1} é transitiva.

$\Rightarrow$ Suponha que R transitiva:

Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$

Logo, $(z,y),(y,x) \in R^{-1} \rightarrow (z,x) \in R^{-1} \rightarrow R^{-1}$ é transitiva

$\Leftarrow$ Suponha que R^{-1} é transitiva:

Se $(z,y),(y,x) \in R^{-1} \rightarrow (z,x) \in R^{-1} \rightarrow (x,z) \in R \rightarrow R$ é transitiva

Logo, R é transitiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ é transitiva.

b) Provar que R é simétrica se e somente se, $R = R^{-1}$.

$\Rightarrow$ Se R é simétrica:

Se $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \rightarrow R \subseteq R^{-1}$.

Como $(x,y) \in R^{-1} \rightarrow (y,x) \in R \rightarrow (x,y) \in R \rightarrow R^{-1} \subset R$.

Logo, $R = R^{-1}$.

$\Leftarrow$ Se $R = R^{-1} \rightarrow (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R \rightarrow R$ é simétrica.

Logo, R é simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

D S T Q Q S S
D L M M J V S

07.

a) $x \equiv y \pmod{m}$ $\qquad$ $x - y = m.K,\ K \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{m \mid x - y \qquad\qquad x - y = m.K,\ K \in \mathbb{Z}}_{\text{congruência módulo } m}$

(i) $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x \equiv x \pmod{m}$ $\qquad$ Reflexiva ✓

$x - x = 0$

$m \mid 0$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

Se $x \equiv y \pmod{m}$, então $x - y = m.K, K \in \mathbb{Z}$, multiplicando a expressão por (-1), temos:

$y - x = -m.K$

$y - x = m.(-K),\ -K \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ Simétrica ✓

$\therefore y \equiv x \pmod{m}$

iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

Se $x \equiv y \pmod{m}$ e se $y \equiv z \pmod{m}$, então $\underbrace{x - y = m.K}_{(1)}$ e $\underbrace{y - z = m.l}_{(2)}$, $K, l \in \mathbb{Z}$.

(1) $x - y = m.K$ $\quad (+)$

(2) $y - z = m.l$ $\qquad$ Transitiva ✓

$x - z = mK + ml$

$x - z = m.\underbrace{(K + l)}_{\in \mathbb{Z}}$

$x - z = m.p,\ p \in \mathbb{Z}$

$\therefore x \equiv z \pmod{m}$

b) conjunto A (rel. eq.)

$a \in A$

$[a] = \{x \in A \,;\, aRx\}$

Cong. módulo 2

$\{0, 1\}$

$[0] = \{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv 0 \pmod 2\}$ Pares

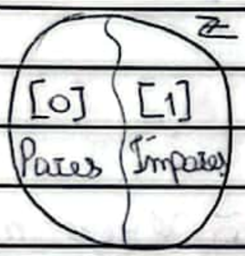
$2 \mid x - 0$ ou $x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv 1 \pmod 2\}$ Ímpares

$2 \mid x - 1$ ou $x - 1 = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k + 1$

c)



08.

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$

a) Ordem

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$. (Reflexiva) ✓
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$. (Transitiva) ✓
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. (Antissimétrica) ✓

b) É ordem total,
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ou $x \leq y$ ou $y \leq x$.

c)

09.

a) Definição:

Máximo de $B \subset A$: $m \in B$ tal que $\forall b \in B, b \leq m$.
Mínimo de $B \subseteq A$: $m \in B$ tal que $\forall b \in B, m \leq b$.

b) Provar que é único:

Suponha que existem dois máximos m e m'.
Então:
$m \leq m'$ e $m' \leq m \Rightarrow m = m'$

Logo, o máximo é único. Análogo para o mínimo.

10.

Sejam:
$A = \mathbb{N}$
$B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

Limitante Inferior: 0
Limitante Superior: ∞ (não existe superior finito)
Mínimo: 0
Máximo: Não existe.
Supremo: ∞
Ínfimo: 0