Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta Período: 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira

Lista de Exercícios 8 - Funções

1. Utilizando a definição de função, explique o diagrama de flechas que é utilizado para ilustrar o conceito de função no Ensino Médio.

2. Consideremos os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e as relações binárias de A em B:

(a) $f_1 = \{(x, y) \in A \times B | y = x^2\}$;

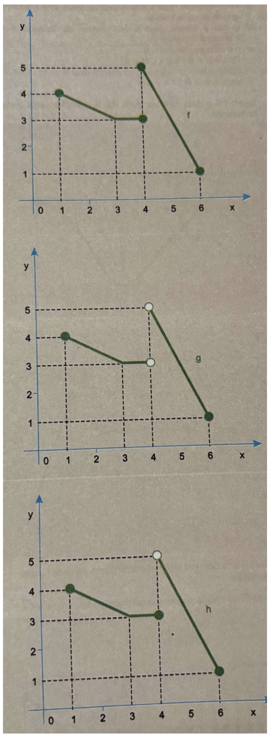
(b) $f_2 = \{(x, y) \in A \times B | y^2 = x^2\}$;

(c) $f_3 = \{(x, y) \in A \times B | y = x - 2\}$;

(d) $f_4 = \{(x, y) \in A \times B | y = x^2 - 2x + 1\}$

Construa o diagrama de flechas de cada uma, verifique se é ou não uma função de A em B e, em caso afirmativo, escreva o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

3. Sejam f, g e h três relações binárias de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 6\}$, cujos gráficos cartesianos são apresentados a seguir:



Verifique, em cada caso, se a relação é ou não função de A em $\mathbb{R}$ e, em caso afirmativo, escreva o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

4. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções dadas a seguir. Verifique se as funções f e g são iguais.

(a) $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ e $g : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$.

(b) $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ e $g : B \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x = 0\}$ e $B = \{0, 3\}$.

5. Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ funções. Então $f = g$, se e somente se, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

6. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sejam $f : A \to A$ e $g : A \to A$ definidas por: $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$, $g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. Encontre $g \circ f$ e $f \circ g$.

7. Dadas as funções $f(x) = 2x + a$ e $g(x) = 3x - 1$, determine o valor de a para que se tenha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

8. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas, por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

(a) Calcule as funções compostas $f \circ f$, $g \circ f$ e $f \circ g$.

(b) Demonstre que f é bijetora e encontre a sua inversa.

(c) Mostre que g não é injetora nem sobrejetora.

9. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 2$.

(a) Calcule $f(0)$ e $g(0)$ e pré-imagens de 1 por f e g.

(b) Encontre $g \circ f$ e $f \circ g$ e verifique se são iguais.

(c) Calcule as pré-imagens de 4 por $g \circ f$ e $f \circ g$.

(d) Verifique se as funções f e g são injetoras e/ou sobrejetoras, justificando sua resposta.

10. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - 3x$ e $g(x) = x^2 - 5x + 3$. Determine $f \circ g$, $g \circ g$ e os seus respectivos domínios.

11. Prove o teorema a seguir:

Teorema 0.0.1 Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções tais que $\mathrm{Im}(f) \subset C$ e a relação:

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times D : \exists y \in B \,\mathrm{com}\, y = f(x) \wedge z = g(y)\},$$

então a terna $(g \circ f, A, D)$ é uma função.

12. Prove o teorema a seguir:

Teorema 0.0.2 Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ duas funções tais que

$$f(x) = g(x),$$

para todo $x \in A \cap C$, e considere a relação em $(A \cup C) \times (B \cup D)$: $f \cup g = \{(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) : y = f(x),\ \text{se } x \in A \text{ e } y = g(x),\ \text{se } x \in C\}$. Então, $(f \cup g, A \cup C, B \cup D)$ é uma função.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + 1$. Obtenha $f \circ f \circ f$.

14. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:
$f(x) = x + 3$, se $x \leq 3$ e $x - 4$, se $x > 3$,
$g(x) = 2x - 7$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

15. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to [-4; +\infty[$ a função definida por $f(x) = x^2 - 4$. Determine a inversa de f e esboce os gráficos de f e f^{-1}.

Bom trabalho!