Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira

Lista de Exercícios 6 - Relações

1. Prove: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. Seja $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V = \{3, 5, 7, 9\}$. Achar $(S \times W) \cap (S \times V)$.

3. Seja R a relação de $E = \{2, 3, 4, 5\}$ para $F = \{3, 6, 7, 10\}$ que é definida pela sentença aberta "x divide y".

(1) Escreva R como um conjunto de pares ordenados, isto é, ache o conjunto solução de R.

(2) Esboce R no diagrama coordenado $E \times F$.

4. Cada uma das sentenças seguintes define uma relação entre os números reais. Esboce cada relação no diagrama coordenado $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(1) $y = x^2$

(2) $y \leq x^2$

(3) $y < 3 - x$

(4) $y \geq \sin(x)$

(5) $y \geq x^3$

(6) $y > x^3$

5. Quando é que uma relação R em um conjunto A não é reflexiva?

6. Seja $E = \{1, 2, 3\}$. Considere as seguintes relações em E: $R_1 = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$, $R_4 = \{(1, 2)\}$, $R_5 = E \times E$. Diga se cada uma das relações é ou não reflexiva.

7. Seja $S = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. Verifique se as relações binárias a seguir são reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antissimétricas, ou transitivas.

(a) $R_1 = \{(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 2),\ (4, 4),\ (6, 6),\ (0, 1),\ (1, 2),\ (2, 4),\ (4, 6)\}$

(b) $R_2 = \{(0,1),\ (1,0),\ (2,4),\ (4,2),\ (4,6),\ (6,4)\}$

(c) $S = \{0,1,2,3,4,5\}, \quad xR_3y \leftrightarrow x + y = 5$

8. Prove que sendo R uma relação em um conjunto A, R é transitiva se, e somente se, R^{-1} é transitiva.

9. Para cada uma das relações binárias R a seguir, encontre o domínio, a imagem e a relação inversa R^{-1}.

(a) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $R = \{(b,2),\ (b,3),\ (d,1),\ (d,3)\}$

(b) $A = B = \{a,b,c,d\}$ e $R = \{(b,a),\ (c,d),\ (a,b),\ (a,d),\ (a,c)\}$

10. Prove que sendo R uma relação em um conjunto A, R é reflexiva se, e somente se, R^{-1} é reflexiva.

11. Seja R a relação nos números naturais $\mathbb{N}$ definida pela sentença aberta "$(x-y)$ é divisível por 5", isto é: $R = \{(x,y)|x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, (x-y) \text{ é divisível por } 5\}$. Prove que R é uma relação de equivalência.

12. Ache todas as partições de $A = \{a,b,c,d\}$.

13. Seja R a relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que é definida por: (a,b) está relacionado a (c,d) que escrevemos da seguinte forma: $(a,b) \simeq (c,d)$ se, e somente se, $a+d = b+c$. Prove que R é uma relação de equivalência.

14. Quais das relações a seguir são relações de equivalência sobre o conjunto A dado?

(a) $A = \{a,b,c\}$ e $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$

(b) $A = \{a,b,c\}$ e $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

(c) $A = \mathbb{N}$ e a ordem usual menor ou igual.

15. Construa o diagrama de Hasse da relação de ordem por inclusão em $A = \wp(\{a,b,c,d\})$.

16. Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}|x \leq y\}$ sobre o conjunto dos números reais, ou seja, x está relacionado com y segundo R, se x é menor que y ou x é igual a y. Prove que essa relação é uma relação de ordem. Ela é de ordem total?

17. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e seja $a \in A$. Prove que $a \in [a]$.

18. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e sejam $a, b \in A$. Prove que aRb se e somente se, $[a] = [b]$.

19. É possível uma relação ser de ordem e ser de equivalência simultaneamente?

20. Prove que sendo R uma relação em um conjunto A, então R é antissimétrica se, e somente se, $R \cap R^{-1} \subset I_A$.

Bom trabalho!