Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta Período: 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira

Lista de Exercícios 1 - Revisão (Lógica Proposicional)

1. Nas sentenças seguintes, diga quais são proposições e quais não são.

(a) Em 22 de abril de 1500, descobriu-se o Brasil.

(b) Bill Gates é miserável.

(c) Você sairá de carro hoje?

(d) O número $2^{9875423} + 21$ é primo.

(e) Gosto de vôlei, então irei ao shopping.

(f) Eu sou brasileiro, se e somente se, sou inteligente.

(g) O Brasil é um belo país e seus habitantes são geniais.

2. Seja p : "π é um número irracional" e a proposição q : "2 não é um número primo". Escreva, na linguagem corrente, as proposições compostas dadas por:

(a) $p \vee (\sim q)$

(b) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to p)$

(c) $q \to p$

3. Seja p : "Está frio" e q : "Está chovendo". Construa uma frase que descreva cada uma das seguintes proposições:

(a) $\sim p$

(b) $p \wedge q$

(c) $p \vee q$

(d) $q \leftrightarrow p$

(e) $p \to \sim q$

(f) $q \vee \sim p$

(g) $\sim p \wedge \sim q$

(h) $p \leftrightarrow \sim q$

(i) $\sim\sim q$

(j) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$

4. Seja p : "Ela é alta"e seja q : "Ela é elegante". Escreva cada uma das proposições na forma simbólica usando p e q.

(a) Ela é alta e elegante.

(b) Ela é alta mas não é elegante.

(c) É falso que ela é baixa ou elegante.

(d) Ela não é nem alta nem elegante.

(e) Ela é alta, ou ela é baixa e elegante.

(f) Não é verdade que ela é baixa ou não é elegante.

5. Determine o valor verdade de cada uma das seguintes proposições compostas.

(a) Se $3 + 2 = 7$, então $4 + 4 = 8$.

(b) Não é verdade que $2 + 2 = 5$ se e somente se $4 + 4 = 10$.

(c) Paris está na Inglaterra ou Londres está na França.

(d) Não é verdade que $1 + 1 = 3$ ou $2 + 1 = 3$.

(e) É falso que se Paris está na Inglaterra, então Londres está na França.

6. Construir a tabela-verdade de cada uma das proposições:

(a) $\sim p \wedge q$

(b) $\sim (p \rightarrow \sim q)$

(c) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

(e) $(p \wedge q) \vee (\sim p) \vee (\sim q)$

(f) $p \wedge (q \vee r)$

(g) $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$

(h) $(p \to \sim p) \leftrightarrow p$

(i) $q \to (p \vee q)$

(j) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

(k) $(\sim p \to p) \leftrightarrow p$

(l) $q \to (p \vee q)$

(m) $(p \to p) \leftrightarrow p$

(n) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(o) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(p) $(p \to q) \to [p \vee (q \wedge r) \to p \wedge (p \vee r)]$

(q) $p \vee (q \wedge r)$

(r) $(p \vee q) \vee r$

(s) $(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \to (q \wedge r)]$

(t) $p \vee \sim p$

(u) $(p \vee (\sim p \vee q)) \wedge \sim (q \wedge \sim r)$

(v) $[p \vee (q \to r)] \to p$

(w) $(\sim p \leftrightarrow \sim q) \to (p \to \sim r)$

(x) $p \to p$

(y) $p \to (p \wedge p)$

(z) $p \leftrightarrow (p \wedge p)$

7. Verificar, por tabelas-verdade, que a negação de $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$ e $p \leftrightarrow q$ é logicamente equivalente a respectivamente, $\sim p \vee \sim q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge \sim q$ e $p \leftrightarrow \sim q$ ou $\sim p \leftrightarrow q$.

8. Verificar que $\sim\sim p \Leftrightarrow p$.

9.

(a) Prove, usando tabelas-verdade a Lei Associativa: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

(b) Prove, usando tabelas-verdade a Lei Distributiva: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

10. Prove, usando tabelas-verdade, que a operação de disjunção pode ser escrita em termos das operações de conjunção e negação. Especificamente, $p \vee q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$.

11. Prove que a operação condicional se distibui na operação de conjunção.

12. Decida se cada um dos seguintes é verdadeiro ou falso:

(a) $p \Rightarrow p \wedge q$

(b) $p \Rightarrow p \vee q$

13. Prove que $p \wedge q$ logicamente implica em $p \leftrightarrow q$.

14. Mostre, através da construção de tabelas-verdade se as expressões E_1 e E_2 são equivalentemente lógicas:

$$E_1 = (s \rightarrow (p \wedge \sim r)) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$$

$$E_2 = (p \wedge q \wedge \sim r \wedge s) \vee \sim (p \vee s)$$

15. Seja a tabela verdade do operador $\odot$:

p	q	$p \odot q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(a) O operador $\odot$ segue a lei da associatividade com o operador $\wedge$, ou seja, $(x \odot y) \wedge z \Leftrightarrow x \odot (y \wedge z)$?

(b) O operador $\odot$ segue a lei da distributividade com o operador $\wedge$, ou seja, $x \odot (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \odot y) \wedge (x \odot z)$?

16. O estudo da lógica compreende métodos e princípios utilizados para distinguir o raciocínio correto do incorreto. Vários matemáticos influenciaram no desenvolvimento da lógica e desta forma se tornaram muito importantes nesse cenário. Pesquise as principais contribuições dos seguintes matemáticos, bem como uma breve história de suas vidas.

(a) Aristóteles.

(b) George Boole.

(c) Augustus De Morgan.

(d) Giuseppe Peano.

(e) Bertrand Russell.

(f) David Hilbert.

(g) René Descartes.

(h) Kurt Gödel.

17. Simplifique cada uma das seguintes proposições.

(a) $\sim (p \vee \sim q)$

(b) $\sim (\sim p \to q)$

(c) $\sim (p \wedge \sim q)$

(d) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$

(e) $\sim (\sim p \leftrightarrow q)$

(f) $\sim (\sim p \to \sim q)$

18. Determine o valor lógico para cada uma das seguintes proposições. (No caso, o conjunto universal é o conjunto dos números reais). Em seguida, negue as proposições.

(a) $\forall x, |x| = x$

(b) $\exists x, x^2 = x$

(c) $\forall x, x + 1 > x$

(d) $\exists x, x + 2 = x$

(e) $\exists x, |x| = 0$

19. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine o valor lógico de cada uma das proposições:

(a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

(b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

(c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

(d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$

20. Negue cada uma das proposições:

(a) $\forall x, p(x) \wedge \exists y, q(y)$

(b) $\exists x, p(x) \vee \forall y, q(y)$

(c) $\forall x, p(x) \vee \forall y, q(y)$

(d) $\exists x, p(x) \wedge \exists y, q(y)$

21. Negue cada uma das seguintes proposições:

(a) Se existe algum tumulto, alguém é morto.

(b) É de dia e todos estão de pé.

22. Apresente um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições. No caso, $B = \{2, 3, ..., 8, 9\}$.

(a) $\forall x \in B, x + 5 < 12$

(b) $\forall x \in B, x$ é primo

(c) $\forall x \in B, x^2 > 1$

(d) $\forall x \in B, x$ é par

23. Faça a simplificação lógica da seguinte expressão, usando apenas as leis da lógica:

$$(p \wedge (\sim (\sim p \vee q))) \vee (p \wedge q)$$

24. Mostre a equivalência lógica da seguinte proposição, inicialmente usando tabela-verdade e, em seguida, usando apenas as leis da lógica:

$$(p \to r) \vee (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$$

25. Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Se for falsa, apresente um contra-exemplo:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \frac{(a-1)}{a},$$

não é um inteiro.

26. Escreva a negação da afirmação:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ se } n \text{ é primo então } n \text{ é ímpar ou } n = 2.$$

27. Qual é o contrapositivo da afirmação:

$$\forall \text{ inteiros } a, b \text{ e } c, \text{ se } a - b \text{ é par e } b - c \text{ é par, então } a - c \text{ é par?}$$

Bom trabalho!! Estou à disposição para o que precisarem!!