Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG
Disciplina: Matemática Discreta Período: 2025/1
Professor: Anderson José de Oliveira

Lista de Exercícios 2 - Teoremas

1. Pesquise o que é e apresente exemplos sobre cada um dos itens a seguir:

(a) proposição

(b) axioma

(c) conjectura

(d) teorema

(e) lema

(f) corolário

2. Identifique o erro na prova do teorema a seguir:

Teorema 0.0.1 *Para todos inteiros k, se $k > 0$ então $k^2 + 2k + 1$ é um número composto.*

Prova:
Suponha que k é um número inteiro tal que $k > 0$. Se $k^2 + 2k + 1$ é composto então $k^2 + 2k + 1 = r \cdot s$, para inteiros r e s tal que $1 < (k^2 + 2k + 1)$ e $1 < s < (k^2 + 2k + 1)$. Já que $k^2 + 2k + 1 = r \cdot s$ e ambos r e s estão necessariamente entre 1 e $k^2 + 2k + 1$, então $k^2 + 2k + 1$ não é primo. Assim, $k^2 + 2k + 1$ é composto, o que devia ser mostrado. $\square$

3. Identifique o erro na prova do teorema a seguir:

Teorema 0.0.2 *A soma de quaisquer dois inteiros pares é igual a $4k$ para algum inteiro k.*

Prova:
Suponha que m e n são dois inteiros pares quaisquer. Pela definição de par $m = 2k$ para algum inteiro k e $n = 2k$ para algum inteiro k. Por substituição, $m + n = 2k + 2k = 4k$, o que devia ser provado. $\square$

4. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n, $4(n^2 + n + 1) - 3n^2$ é um quadrado perfeito.

5. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. Para todos inteiros n e m, se $n - m$ é par então $n^3 - m^3$ é par.

6. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. O quociente de dois números racionais é um número racional.

7. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não

$$\forall \text{ inteiros } a,\, b \text{ e } c, \text{ se } a|b \text{ e } a|c \text{ então } a|(b+c).$$

8. Prove se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. A soma de quatro números inteiros consecutivos não é divisível por 4.

9 O resultado de $\frac{1}{0}$ é um número irracional? Explique.

10. Prove por contraposição que a soma de dois números reais é menor que 50 então pelo menos um dos números é menor que 25.

11. Prove que se $x > 0$ e $x < y$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, então $x^2 < y^2$.

12. Considere o conjunto dos números inteiros e prove que:

(a) a soma de dois números pares é par.

(b) a soma de dois números ímpares é par.

(c) o produto de dois números pares é par.

(d) o produto de dois números ímpares é ímpar.

(e) a soma de um número par e um número ímpar é ímpar.

(f) o produto de um número par e um número ímpar é par.

13. Prove por absurdo que: Se n é um número inteiro e seu quadrado é ímpar, então n também é ímpar.

14. Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

15. Mostre que a afirmação “Todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma do quadrado de dois inteiros”é falsa.

Bom trabalho!! Estou à disposição para o que precisarem!!