Nome: Isadora de Oliveira Matrícula: 2020725309

* Resolução do Trabalho Prático 4

Questão 1

$\boxed{A}$ Seja H o certificado para uma instância SIM de CLIQUE-PAR. Para verificar esse certificado em tempo polinomial basta checar que:

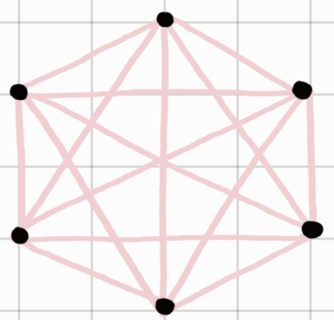
- Se $|H|$ é um número par
- Se $|H| \geq K$
- Se H induz uma CLIQUE em G. Basta verificar se $\forall\, u, v \in V(H) \mid u \neq v,\ \exists\, uv \in E(H)$ e $E(G)$.

logo CLIQUE-PAR está em NP.

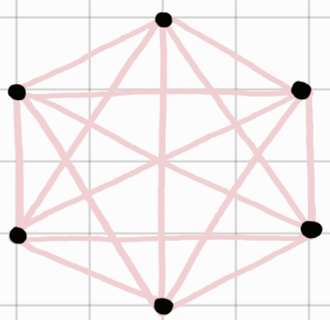
$\boxed{B}$ CLIQUE $\leq_p$ CLIQUE-PAR
(G, K) (G', K')

Suponha que K é PAR: $G' = G,\ K' = K$

G



G'

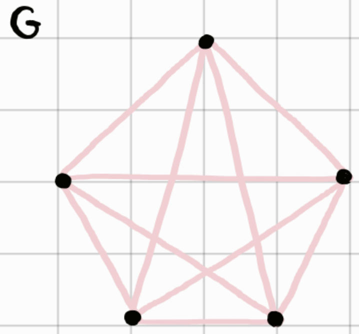


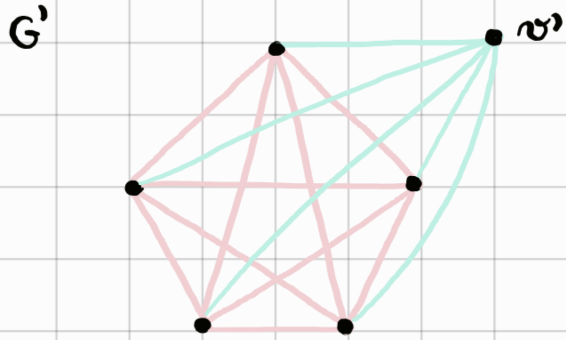
Suponha que K é ÍMPAR

$G' = \{V(G) \cup \{v'\}$

$E(G') \cup \{\forall u \in V(G) : uv'\}$

$K' = K + 1$





Suponha que (G, K) é uma instância SIM para CLIQUE se somente se (G', K') é uma instância SIM para CLIQUE-PAR

Suponha que (G, K) é uma instância SIM para CLIQUE. Se K é par é trivial. Suponha que K é ímpar. Logo $K' = K+1$ pela construção suponha H é CLIQUE em G, então existe um vértice $v' \in G' \mid v' \notin G$ em que $\forall\, uv \in V(G) \mid uv \in E(G)$ temos $uv \in V(G') \mid uv \in E(G') \cup \{v'\}$ assim conseguimos encontrar H em G', logo temos uma instância SIM para CLIQUE-PAR.

Agora suponha que (G', K') é uma instância SIM para CLIQUE-PAR. Se K' é par é trivial. Suponha K é ímpar, então pela construção $\exists$ CLIQUE em G' para isso iremos remover v' de forma que $K' - 1 = K$ logo $v' \notin G$, com isso temos SIM para CLIQUE.

$\boxed{c}$ Sim, já que está em NP e NP-D.

Questão 2

Seja H o certificado para uma instância SIM de CAMINHO HAMILTONIANO. Para verificar esse certificado em tempo polinomial basta checar que:

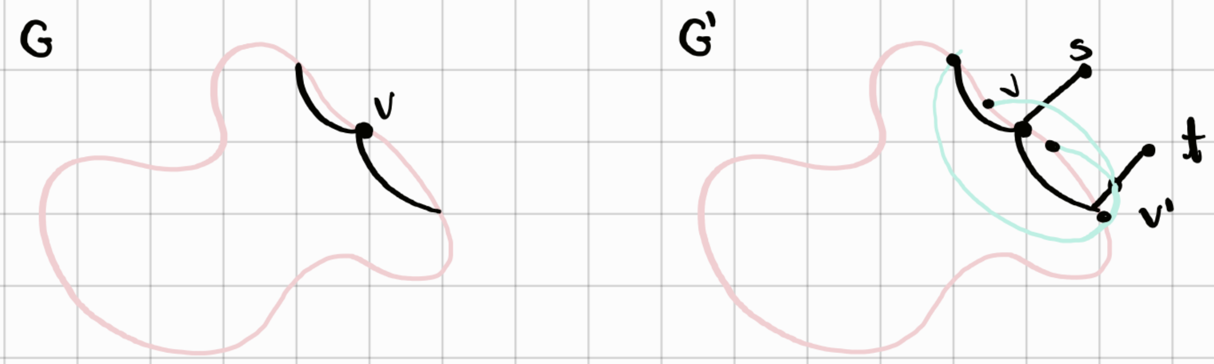
- Se $\forall v$ em H, verificar se $v \in V(G)$
- Se $|H| = |V(G)|$
- $\forall v\ u$ em H verificar que $u \neq v$ (não se repete)
- $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $i = 1$ a $K-1$, $K = |V|$

Note que isso é polinomial no tamanho da entrada $O(|V^2|)$

Logo CM-HAMILTONIANO está em NP.

CICLO HAMILTONIANO (G) $\leq_p$ CAMINHO HAMILTONIANO (G')

Seja $V(G') = V(G) \cup \{v', v\_s, v\_t\}$ onde $\{v', v\_s, v\_t\} \notin V(G)$
$E(G') = E(G) \cup \{(v', v\_t)(v\_s, v)\} \cup \{(v', w) \mid w \in N(v)\}$ para um dado v qualquer selecionado de $V(G)$.
N(v) são os vizinhos de v em G.



Suponha que (G) é uma instância SIM para CI-H se somente se (G') é uma instância SIM para CM-H

Suponha que G é uma instância SIM para CI-H
Então existe um CI-H $S = \{v, v_1, v_2 \dots v_K\}$ em G tal que S representa uma sequência ordenada de vértices adjacentes no CI-H de G.
Fazendo $S' = S$, podemos adicionar v-s no início de S', pois $(v\_s, v) \in E(G')$. Podemos substituir o último vértice v por v' pois $(v_K, v') \in E(G')$. Por fim podemos adicionar v-t no final da sequência S', formando assim, o CM-H $S' = \{v\_s, v, v_1, v_2, \dots v_K, v', v\_t\}$ em G', iniciando por v-s e terminando em v-t. Logo temos SIM para CM-H

Então existe um CM-H $S' = \{v\_s, v, v_1, v_2, \dots v_K, v', v\_t\}$ tem G', tal que S' representa uma sequência ordenada de vértices adjacentes no CM-H de G'. Fazendo $S = S'$, removendo v-s e v-t de S e por fim, substituindo v' por v, temos que $S = \{v, v_1, v_2, \dots v_K, v\}$ formam um CI-H em G. Logo, CI-H é SIM.

Portanto CM-H é NP-D. E como anteriormente provamos que esta em NP, logo ele é NP-C.

Questão 3

Seja H o certificado para uma instância SIM para CM-S
Para verificar esse certificado em tempo polinomial basta checar que:
Dado E' sendo uma sequência de arestas de G(V, E) de tamanho pelo menos K

- Se todas as arestas $(u,v) \in E'$, também $\in E$
- Se não existe vértices repetidos em V'
- $\forall v \in V'$, $v \in V(G)$
- Se as arestas E' não passa mais de uma vez pelo mesmo vértice
- Se $|V'| >= K$

Note que isso é polinomial no tamanho da entrada. Logo CAM-S está em NP.

CAMINHO HAMILTONIANO $\leq_p$ CAMINHO SIMPLES

Seja $V(G') = V(G) \cup \{a,b\}$ e $E(G') = E(G) \cup \{(a,w) e (b,w)\} \mid w \in V(G')\}$. Adicionamos os vertices a,b e acrescentamos arestas destes vertices existentes. Queremos mostrar que o grafo G' terá um caminho entre a e b com pelo menos K' arestas. Note que executa em tempo polinomial, pois basta copiar G e adicionar dois vértices e $|V(G)| * 2$ arestas.

Suponha que (G) é uma instância SIM para CM-H se somente se (G') é uma instância SIM para CM-S

Seja uma instância G de CM-H queremos fazer com que recebendo um CM-H $C = \{x, \dots y\}$ que constrói um CM-S $C' = \{a, x, \dots y, b\}$ com $|C| + 2$ arestas. Como $|C| = |V(G)|$

temos um caminho com o número de aresta que queriamos. Logo existirá um CM-S de pelo menos K arestas entre os vertices a e b se I1 possuir um CM-H. Temos SIM para CM-S.

Agora supondo que C seja uma solução para I2 < G', E', a, b uma sequência do CM-S. Obtemos a solução para I1 removendo os vértices a e b de C. Como $|C| = |V(G)| + 2$, o caminho encontrado passa por todos os vertices de G e portanto temos um CM-H. Logo CM-S é NP-D.

Como antes mostramos que tambem e NP, logo é NP-C.

Questão 4

Seja H o certificado para uma instância SIM de 4-SAT. Para verificar esse certificado em tempo polinomial basta checar que:

- Se temos variáveis $\{x_1 \vee x_2 .. \vee x_n\}$ do qual pode assumi valor booleano verdadeiro (TRUE) ou falso (FALSE) se forem negadas $(\bar{x_1}, \bar{x_2}, \dots \bar{x_n})$.
- Se temos clausulas $\{c_1 \wedge c \quad c_m\}$ de forma que cada clausula contem um conjunto de literais conjuntos (E)
- Se literal é um conjunto de variáveis disjuntos (OU)

Note que operações lógicas podem ser feito em tempo polinomial no tamanho da entrada, logo 4-SAT é NP.

3-SAT $\leq_p$ 4-SAT

Seja 3-SAT que possui uma formula φ na CNF com o seguinte formato $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_6)$ observando que cada claúsulas sempre possui 3 literais podemos transformar em claúsulas de 4 literais (4-SAT) sem perder nenhuma propriedade da seguinte forma:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee y) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{y})$$

Quando o y for negado na clausula a condição verdadeiro/falso dela dependerá de $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ e na outra claúsula se y for 1 ela será verdadeira ou seja:
$(1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee 0) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ a adição do y manteve a propriedade. Note que isso é polinomial no tam entrada.

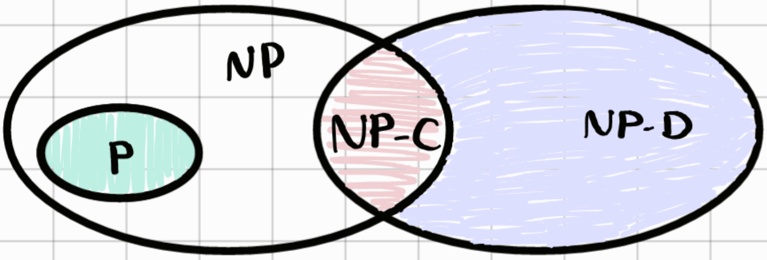
Suponha que C é uma instância SIM para 3-SAT se somente se C' é uma instância SIM para 4-SAT
Seja a construção mostrada anteriormente se uma claúsula 3-SAT for TRUE o que determina se é TRUE em 4-SAT serão os mesmos literais, logo temos que C é SIM para 4-SAT.

Agora suponha que C' de 4-SAT, considerando que:
$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee y) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{y}) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$
O que determina se a sentença é TRUE OU FALSE é somente $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ e como já foi mostrado que um implica no outro, logo C' é uma instância SIM para 3-SAT.

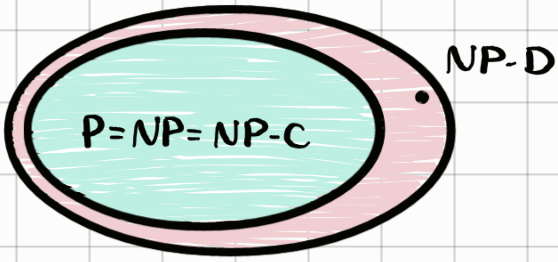
Questão 5

Há dois cenários possíveis:

Cenário 1: Se $P \neq NP$



Cenário 2: Se $P = NP$



Ainda não comprovados, devido a isto iremos assumir que $P \subseteq NP$ (desenho cenário 1), para responder as questões a seguir:

A Sim, todo problema em P está em NP, mas nenhum está em NP-D, pois isso significa resolver todos os problemas NP-D em tempo polinomial.

B Não, se um problema consegue ser resolvido em tempo polinomial podemos utilizar essa solução para verificar se a resposta é SIM. Sendo assim se o problema é P ele pertence a NP. (cenário 1)

C Depende a menos P = NP (cenário 2) o que nesse caso NP-C estaria em P e NP-D ao mesmo tempo. Porém ninguém encontrou um algoritmo que solucione um problema NP-D em tempo polinomial.

D Sim, essa é a definição dos problemas da classe NP-C.

E Não podemos concluir nada sobre Π', pois a transformação proposta ocorre no sentido incorreto $\Pi' \Rightarrow \Pi$ desta forma não fornece informações sobre a complexidade de Π'. E só estamos arrumando um jeito muito difícil de resolver Π' (já que estaria reduzindo a tempo exponencial).

F Não podemos concluir nada sobre Π' porque em tempo exponencial podemos resolver o problema NP-D e produzir uma instância de um problema "comum". Tendo a sua complexidade maior que o custo do algoritmo para resolver Π.

Questão 6

A Não se pode afirmar que é TRUE ou FALSE. CLIQUE é um problema NP-D. Isso significa que até hoje ninguem encontrou algoritmo polinomial para esse problema. Mas isso não significa que esse algoritmo não exista, já que até hoje não foi provado que $P \neq NP$. Encontrar algoritmo polinomial que resolve CLIQUE equivale provar $P = NP$.

B Falso, se Π é NP-D existe uma transformação polinomial de Π para Π', podemos concluir que Π' é tal difícil quanto Π, sendo assim Π é difícil, Π' também é.

C Falso, como $P \subseteq NP$, se Π não pertence a NP, podemos afirmar que Π não pertence a P.

Questão 7

Podemos pensar nos seguintes passos para o algoritmo:

Se $Q >= C_i + C_j$
Se $Q <= C_i$
usar C_i
Se não se $Q <= C_j$
usar C_j
Se não
para cada par de valores (i, j)
criar um nó para cada combinação $(C_i * C_j)$

$\boxed{A}$ Executar o BFS para verificar se um nó pode ser alcançado a partir de outro.
A complexidade do passo 1 seria $O(C_i * C_j)$ e a complexidade do passo 2 seria $O(|V| + |E|) = O(C_i * C_j)$

$\boxed{B}$ Considerando o número de bits das entradas C_i e C_j temos uma entrada com tamanho total de:
$\log C_i + \log C_j = \log C_i C_j = 2^{\log C_i C_j}$ que é exponencial, logo o algoritmo é exponencial no tamanho da entrada e consequentemente não está em P.