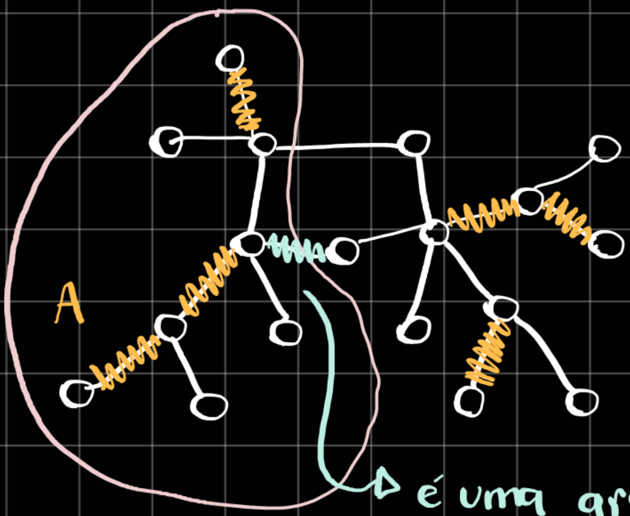
por Isadora de Oliveira

- A é o subconjunto de árvore geradora mínima.

A cada etapa determinamos uma aresta (u, v) que pode ser adicionada a A sem violar a invariante $A \cup \{(u,v)\}$ que também é um subconjunto de uma árvore geradora mínima

GENERIC-MST

```
1   A = ∅.
2   while A ñ eh MST
3       find (u,v) safe for A
4       A = A ∪ {(u,v)}
5   return A
```



é uma aresta segura para A?

linha 3 já que é exacutada, o invariante estabelece que existe uma árvore geradora T tal que $A \subseteq T$. A deve ser um subconjunto próprio de T e portanto deve haver uma aresta $(u,v) \in T$ tal que $(u,v) \notin A$ e (u,v) é segura para A.

não pertence a A ainda nesse momento porque está sendo encontrada na linha 4 ela pertence a A.

- Um corte $(S, V-S)$ de um grafo não dirigido $G=(V,E)$ é uma partição de V.

Dizemos que a aresta $(u,v) \in E$ cruza o corte $(S, V-S)$ se um dos seus pontos extremos está em S e o outro está em $V-S$.

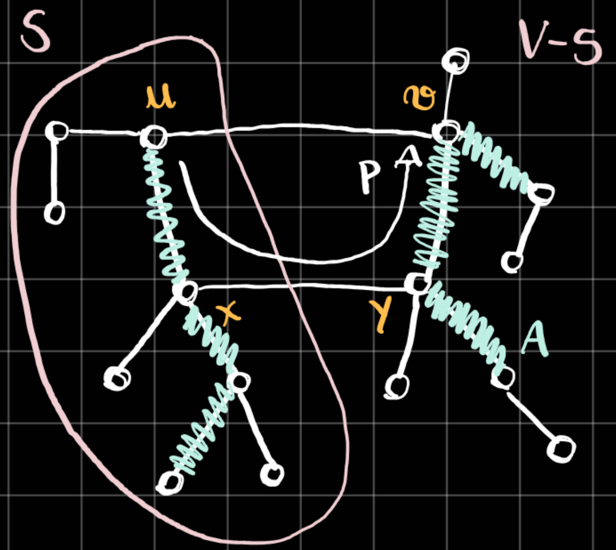
O corte respeita um conjunto A de arestas se nenhuma aresta em A cruza o corte.

Uma aresta é uma aresta leve que cruza um corte se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que cruza o corte.
Pode haver mais de uma aresta leve que cruza um corte no caso de empates. De modo geral dizemos que uma aresta é leve que satisfaz uma dada propriedade, se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que satisfaz a propriedade.

Regra de reconhecer arestas seguras é dado pelo teorema 23.1.

Teorema 23.1

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não dirigido com uma função peso de valores reais w definida em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma MST para G, seja $(S, V-S)$ qualquer corte de G que respeita A e seja (u, v) uma aresta leve que cruza $(S, V-S)$. Então a aresta (u, v) é segura para A.



Prova: Seja T uma MST que inclui A e suponha que T não contenha a aresta leve (u, v), já que contiver terminamos. Construiremos uma outra MST T' que inclui $A \cup \{(u, v)\}$ usando uma técnica de recortar e colar, mostrando assim que u, v é uma aresta segura para A.
Se as arestas formam um ciclo

com as arestas simples no caminho p de u a v em T. Visto que u e v estão em lados opostos do corte $(S, V-S)$ no mínimo uma aresta em T se encontra no caminho simples p e também cruza o corte. Seja (x,y) qualquer dessas arestas. A aresta (x,y) não está em A. Como (x,y) está no único caminho simples de u a v em T, remover (x,y) separa T em duas componentes. A adicação de (u,v) reconecta as duas componentes e forma uma nova árvore geradora $T' = T - (x,y) \cup \{(u,v)\}$. Em seguida mostramos que T' é uma árvore geradora mínima.

Visto que (u,v) é uma aresta leve que cruza $(S, V-S)$ e (x,y) também cruza esse corte, $w(u,v) \leq w(x,y)$. Então:

$$
\begin{aligned}
w(T') &= w(T) - w(x,y) + w(u,v) \\
&\leq w(T)
\end{aligned}
$$

Porém T é uma MST de modo que $w(T) \leq w(T')$ assim T' também deve ser uma MST.

Mostrar que (u,v) é uma aresta segura para A. Temos $A \subseteq T'$, já que $A \subseteq T$ e $(x,y) \notin A$; assim $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$. Consequentemente, como T' é uma MST (u,v) é segura para A.

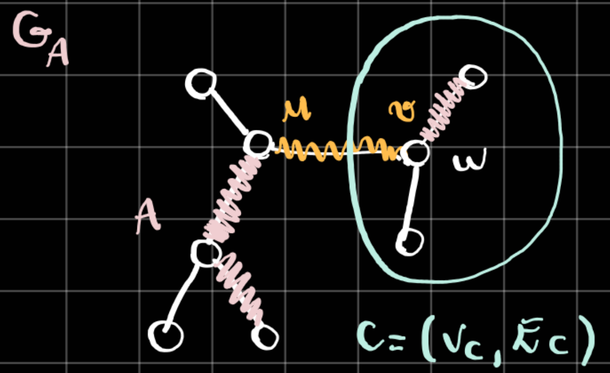
A medida que o algoritmo progride o conjunto A é sempre acíclico caso contrário uma MST incluindo A conteria um ciclo o que é uma contradição.

O algoritmo é executado $|V|-1$ (edges) de uma MST

Quando a floresta contém apenas uma única árvore, o método termina.

Corolário 23.2

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não dirigido com uma função de peso de valor real w definida em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma MST para G, e seja $C = (V_C, E_C)$ uma componente conexa (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve que conecta C a alguma componente em G_A então (u, v) é segura para A.



Prova: O corte $(V_C, V - V_C)$ respeita A, e (u, v) é então uma aresta leve para esse corte. Portanto, (u, v) é segura para A.