por Isadora de Oliveira

* Caminhos Mínimos de Fonte Única

Em um problema de caminhos mínimos temos um grafo dirigido ponderado $G = (V, E)$ com função peso $w : E \to \mathbb{R}$ que mapeia arestas para pesos de valores reais. O peso do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots v_K \rangle$ é a soma dos pesos de suas arestas constituintes:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{K} w(v_{i-1}, v_i)$$

Definimos o peso do caminho mínimo de u para v por

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{Se há um caminho } u \to v \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então um caminho mínimo do vértice u ao vértice v é definido como qualquer caminho p com peso $w(p) = \delta(u, v)$

Algoritmo de busca em largura é um algoritmo que funciona em grafos não ponderados (sem peso).

- Variantes

Problema do caminho mínimo de fonte única: dado um grafo $G = (V, E)$ queremos encontrar um caminho mínimo de determinado vértice de origem $s \in V$ a todo vértice $v \in V$. O algoritmo para o problema de fonte única pode resolver muitos outros problemas, entre os quais as variantes apresentadas a seguir:

Problema de caminhos mínimos com um só destino: Encontrar um caminho mínimo até determinado vértice de destino t a partir de cada vértice v. Invertendo a direção de cada aresta do grafo, podemos reduzir esse problema a um problema de fonte única.

Problema do caminho mínimo para um par: Encontrar um caminho mínimo de u a v para vértices u e v dados. Se resolvemos o problema de fonte única com vértices de fonte u, também resolvemos esse problema. Todos os algoritmos conhecidos para esse problema têm o mesmo tempo de execução assintótica do pior caso que os melhores algoritmos de fonte única.

Problema de caminho mínimo para todos os pares: Encontrar um caminho mínimo de u a v para todo par de vertice u e v. Embora seja possível resolver esse problema executando um algoritmo de fonte única uma vez para cada vértice, em geral podemos resolvê-lo mais rapidamente. (Capítulo 25).

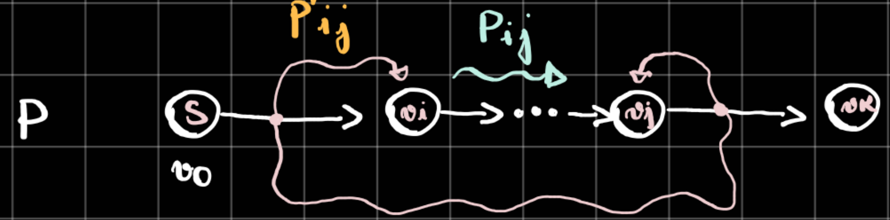
- Subestrutura ótima de um caminho mínimo

Algoritmos de caminhos mínimos se baseiam na seguinte propriedade: um caminho mínimo entre dois vértices contém outros caminhos mínimos. Algoritmo de fluxo máximo de Edmonds Karp baseia na propriedade. Além de que subestrutura ótima é um dos indicadores fundamentais da possível aplicabilidade da programação dinâmica e metodo guloso. O lema enuncia com exatidão a pro priedade de subestrutura.

- Lema 24.1 (Subcaminhos de caminho mínimo são caminhos mínimos)

Dado um grafo dirigido ponderado $G = (V, E)$ com função peso $w: E \to \mathbb{R}$ seja $p = \langle v_1, v_2 \dots v_K \rangle$ um caminho mínimo do vértice v_0 ao vértice v_K e para quaiquer i e j tais que $1 \leq i \leq j \leq K$, seja $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \dots v_K \rangle$ o subcaminho p do vértice v_i ao vértice v_j. Então p_{ij} é um caminho mínimo de v_i a v_j.

P não é CM pq o p'_{ij} é um CM?



Prova: Se decompusermos caminho $v_0 \overset{p_{0i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jK}}{\rightsquigarrow} v_K$ teremos que $w(p) = w(p_{0i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jK})$. Agora suponha que exista um caminho p'_{ij} de v_i a v_j com peso $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Então, $v_0 \overset{p_{0i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p'_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jK}}{\rightsquigarrow} v_K$ é um caminho de v_0 a v_K cujo peso $w(p_{0i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jK})$ é menor que $w(p)$, o que contradiz a hipótese de que p seja um caminho mínimo de v_0 a v_K.

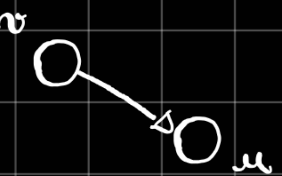
Se o grafo $G = (V, E)$ não contém nenhum ciclo de peso negativo que possa ser alcançado da fonte s, então para todo $v \in V$, o peso do caminho mínimo $\delta(u, v)$ permanece bem definidos mesmo que tenha um valor negativo. Se tiver um ciclo de peso negativo que pode ser alcancado a partir de s, os pesos de um caminho mínimo não são bem definidos. Se houver algum ciclo de peso negativo em algum caminho de s a v definiremos $\delta(s, v) = -\infty$

- Relaxamento

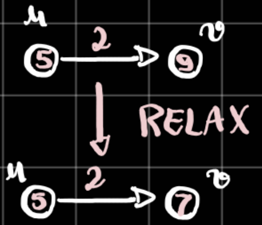
Mantemos o atributo $v.d$ que é o limite superior para o peso de um caminho mínimo da fonte s a v. (estimativa de caminho mínimo).

RELAR uma aresta (u, v) consiste em testar se podemos melhorar o caminho mínimo até v que encontramos até agora passando por u, e em caso positivo atualizamos $v.d$ e $v.\pi$. Uma etapa de relaxamento pode diminuir o valor da estimativa do caminho mínimo $v.d$ e atualizar o atributo predecessor de v, $v.\pi$. Relaxamento da aresta (u, v) no tempo $O(1)$.

```
RELAX(u, v, w)
  if v.d > u.d + w(u, v)
      v.d = u.d + w(u, v)
      v.π = u
```



Relaxamento é o único meio de mudar estimativas de caminho mínimo e predecessores.



- Desigualdade triangular: para qualquer aresta (u, v) $\in E$, temos $\delta(s, v) \leq \delta(s, v) + w(u, v)$.

Lema

Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido ponderado com função peso $w : E \to \mathbb{R}$ e vértice de fonte s. Então para todas as arestas $(u, v) \in E$ temos $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$

Prova: Suponha que p seja um caminho da fonte s ao vértice v. Então p não tem peso maior que qualquer outro caminho específico que segue um caminho mínimo da fonte s até o vértice u, e depois percorre a aresta (u, v)