por Isadora de Oliveira

* Árvore Geradora Mínima.

Suponha que temos um grafo conexo não dirigido $G = (V, E)$ com uma função peso $w: E \to \mathbb{R}$ e desejamos encontrar uma árvore geradora mínima para G.

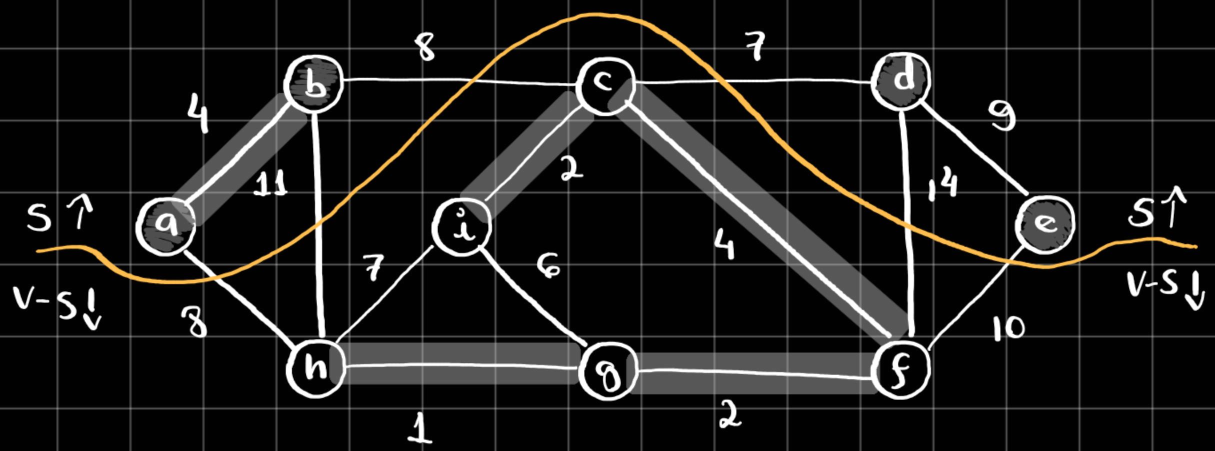
Essa estratégia gulosa é representada pelo método genérico apresentado a seguir, que desenvolve a árvore geradora mínima uma aresta por vez. O método genérico administra um conjunto de arestas A, mantendo o seguinte invariante do laço:

Antes de cada iteração, A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima.

Em cada etapa, determinamos as arestas (u, v) que pode ser adicionada a A sem violar esse invariante, no sentido de que $A \cup \{(u, v)\}$ também é um subconjunto de uma árvore geradora mínima. Denominamos tal aresta de aresta segura para A, já que ela pode ser adicionada com segurança a A e, ao mesmo tempo manter o invariante.

```
GENERIC-MST (G, w)
    A = ∅
    while A não forma uma árvore geradora
        encontre uma aresta (u, v) que seja segura para A
        A = A ∪ {(u, v)}
    return A
```

Um corte (S, V-S) de um grafo não dirigido G = (V, E) é uma partição de V. Como na figura abaixo, dizemos que a aresta (u, s) ∈ E cruza o corte (S, V-S) se um de seus pontos externos está em S e o outro está em V-S. Dizemos que o corte respeita um conjunto A de arestas se nenhuma aresta A cruza o corte. Uma aresta é uma aresta leve que cruza um corte se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que cruza o corte. Pode haver mais de uma aresta leve que cruza um corte no caso de empates. De modo mais geral, dizemos que uma aresta é uma aresta leve que satizfaz uma dada propriedade se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que satisfaz a propriedade.



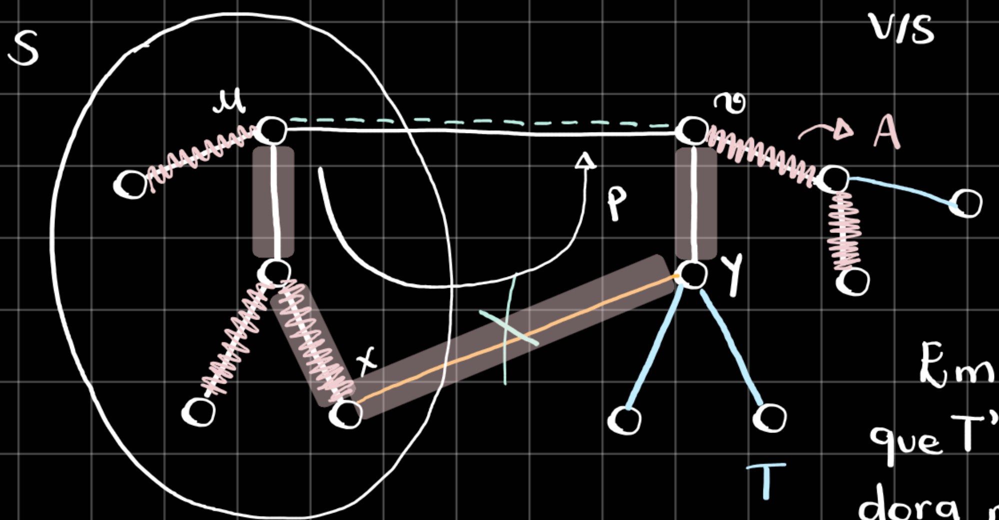
Regra para reconhecer arestas seguras é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 23.1

Seja G = (V, E) um grafo conexo não dirigido com uma função peso de valores reais w definida em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima para G, seja (S, V-S) qualquer corte de G que respeita A e seja (u, v) uma aresta leve que cruza $(S, V-S)$. Então, a aresta (u, v) é segura para A.

Prova: Seja T uma árvore geradora mínima que inclui A, e suponha que T não contenha a aresta leve (u, v) já que se contiver, terminamos. Construiremos uma outra árvore geradora mínima T' que inclui $A \cup \{(u, v)\}$ usando uma técnica de recortar e colar, mostrando assim que (u, v) é uma aresta segura para A.

A aresta (u, v) forma um ciclo com as arestas no caminho simples p de u a v em T, como abaixo. Visto que u e v estão em lados opostos do corte $(S, V-S)$, no mínimo uma aresta em T se encontra no caminho simples p e também cruza o corte. Seja (x, y) qualquer dessas arestas. A aresta (x, y) não está em A porque o corte respeita A. Como (x, y) está no único caminho simples de u a v em T, remover (x, y) separa T em duas componentes. A adição de (u, v) reconecta as duas componentes e forma uma nova árvore geradora $T' = T - (x, y) \cup \{(u, v)\}$.



Em seguida mostramos que T' é uma árvore geradora mínima. Visto que (u, v) é a aresta leve que cruza

$(S, V-S)$ e (x,y) também cruza esse corte, $w(u,v) \leq w(x,y)$
Então: $w(T') = w(T) - w(x,y) + w(u,v)$
$\leq w(T)$

Porém T é uma árvore geradora mínima, de tal modo que $w(T) \leq w(T')$ assim, T' também deve ser uma árvore geradora mínima.
Resta mostrar que (u,v) é realmente uma aresta segura para A. Temos $A \subseteq T'$, já que $A \subseteq T$ e $(x,y) \notin A$; assim $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$. Consequentemente, como T' é uma árvore geradora mínima (u,v) é segura para A.

Esse teorema ajuda a compreender melhor o funcionamento do método GENERIC-MST. Que é executado $|V|-1$ vezes arestas.

Corolário 23.2

Seja $G=(V,E)$ um grafo conexo não dirigido com uma função peso de valor real w definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima para G, e seja $C=(V_C, E_C)$ uma componente conexa (árvore) na floresta $G_A=(V,A)$. Se (u,v) é uma aresta leve que conecta C a alguma outra componente em G_A, então (u,v) é segura para A.

Prova: O corte $(V_C, V-V_C)$ respeita A e (u,v) é então uma aresta leve para esse corte. Portanto (u,v) é segura para A.