por Isadora de Oliveira

CLIQUE

Entrada: Um grafo G, um inteiro $K \in \mathbb{N}$
Pergunta: ∃ uma clique de tamanho $\geq K$ em G ?

O que é: Quando tenho um grafo que todos os vertices são vizinhos de todo mundo.

$O(n^K)$, K não é constante não é polinomial.

Conferir a resposta para clique, ok.

SAT

Entrada: Uma fórmula φ na CNF
Pergunta: ∃ atribuição as variaveis de φ que a torna verdadeira?

Variáveis booleanas = $\{x_1, \dots x_n\}$
literal - variavel ou negação de uma variável. Ex: $x, \overline{x_2}, x_3$
Clausula => OR de um mais literais
Uma formula CNF => AND de uma ou mais cláusulas

3-SAT

Entrada: Uma formula φ na CNF onde cada clausulas possui exatamente 3 literais

Pergunta: ∃ atribuição as variaveis q que as tornam verdadeira?

Certificado com resposta SIM para SAT, os valores de V ou F de cada literal.
Vou em cada clausula e confiro se a atribuição de fato deixa a formula inteira verdadeira.

Facil fazem em tempo polinomial, percorro a formula e para cada item da formula, vou na tabela e olho qual o valor daquela variavel e vejo se a clausula ficou verdadeira ou falso, se for falso descarta e passa para a próxima

SAT é NP

SAT $\leq_p$ 3-SAT

$$\underbrace{(x_1 \vee x_2)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)}_{C_2} \vee \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{C_3} \vee \underbrace{(\bar{x}_2)}_{C_4}$$

< 3 literais

> 3 literais

Elaborar um algoritmo para pegar uma instância de SAT e construir uma instância 3-SAT. Com resposta SIM entre ambos os lados.

Está pequena

ⓐ

$$(x_1 \vee x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee y) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{y})$$

(b)

$$(\overline{x_2})$$
$$\Downarrow$$
$$(\overline{x_2} \vee y) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{y})$$
$$\Downarrow$$
$$(\overline{x_2} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x_2} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

Está grande

(a)

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$
$$\Downarrow$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x_3 \vee x_4)$$

(b)

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \dots \; x_K)$$

$$\underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee y)} \wedge (\overline{y} \vee x_3 \vee x_4 \dots x_K)$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee y) \wedge (\overline{y} \vee x_3 \vee z) \wedge (\overline{z} \vee x_4 \vee \dots \vee x_K)$$

CLIQUE

Entrada: Grafo G, $K \in \mathbb{N}$

Pergunta: G contém uma clique de tamanho $\geq K$?

Teorema: Clique é NP-Completo?

Prova: Mostraremos que CLIQUE $\in$ NP.

Para isso seja S um certificado contando os vértices de uma clique de G de tamanho pelo menos K

Em tempo polinomial podemos verificar:

① $S \subseteq V(G)$ verificando para cada $v \in S$ se $v \in V(G)$
② $|S| \geq K$ ou seja verifica se S realmente possui ao menos K elementos distintos (cardinalidade)
③ se S é clique Para isso $\forall\ u, v \in S$, com $u \neq v$ conferimos se $u, v \in E(G)$

SAT $\leq_p$ CLIQUE

descrevo problema conhecido

Seja $\varphi = C_1 \wedge \dots C_m$ uma fórmula com n variáveis e m clausulas.
Seja n_i o número de literais em C_i e seja $C_i = \{ l_{i1} \vee l_{i2}, \dots \vee l_{in_i} \}$

Construiremos G da seguinte maneira:
$V(G) = \{ v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n_i \}$
$E(G) = \{ u, v \mid u = l_{ij},\ v = l_{kp},\ i \neq k$, e l_{ij} e l_{kp} correspondem as variaveis diferentes ou $l_{ij} = l_{kp} \}$
Finalmente, seja $K = m$

$\bar{x}_1 = \bar{x}_1$

$x_5 = x_5$

$V(G) \leq n \cdot m$ literais
$|E(G)| \leq n^2 m^2$
Pode ser construido em tempo $O(n^2 \cdot m^2)$

Entrada: numero de variaveis · numero cláusulas

Seja φ uma instância SIM para SAT.
Como φ é uma instância SIM, existe uma atribuição que satisfaz cada clausula de φ.
Seja $c_1, \dots, c_m$ índices tais que l_{ic_i} é verdadeira em C_i.
Seja $S = \{ v_{ic_i} \mid 1 \leq i \leq m \}$. Note que $|S| = K (= m)$.
Mostraremos que S é uma CLIQUE
Sejam $v_{ic_i}, v_{jc_j} \in S$, com $i = j$. Mas como l_{ic_i} e l_{jc_j} são literais verdadeiros então ou eles correspondem a variaveis diferentes ou $l_{ic_i} = l_{jc_j}$. logo S é uma CLIQUE de tamanho $\geq K$ e (G, K) é uma instância SIM p/ CLIQUE.

$\Leftarrow$

Suponha (G, K) é uma instância de resposta SIM
Seja S uma clique de tamanho $\geq K$
Como $K = m$ e como $\forall i j, K$ v_{ij} não é adjacente v_{iK} $j \neq K$, então não existem dois vértices em S com a primeira coordenada igual.
Mas só existem m valores possíveis p/ a primeira coordenada, então como $|S| \geq K = m$.
$S = \{ v_1 d_1, v_2 d_2 \dots v_m d_m \}$
Construiremos uma atribuição da seguinte maneira
Se $v_{id_i} \in S$, então $l_{id_i} = V$. Para variaves que não ocorram em $\{ l_1 d_1, \dots l_m d_m \}$ atribua um valor qualquer
Note que essa atribuição é válida pois os vértices correspondentes a literais conflitantes não podem ser adjacentes. Por outro lado, esta atribuição satisfaz φ, pois $\forall i$, C_i é satisfeito pelo literal l_{id_i}. logo φ é uma instancia SIM. ∎

① Mostra esta NP
Mostra a transformação $\Pi' \leq_p \Pi$
mostra o tempo
Mostra SIM do Π'
Mostra SIM do Π

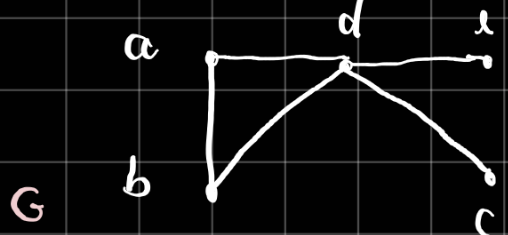
Conjunto Independente:
Entrada: Um grafo G, $K \in \mathbb{N}$
Pergunta: $\exists$ conj ind S com $|S| \geq K$?

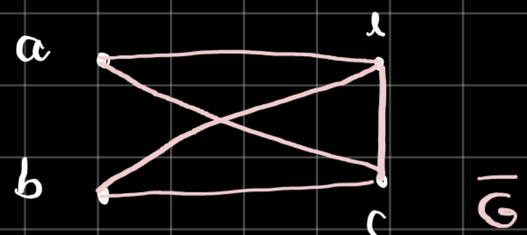
Um conj. ind S em um grafo G é um conj $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall\, u, v \in S$, $uv \notin E(G)$
(ao contrário da clique)

CLIQUE $\leq_p$ Conj Ind.
$I_1 = (G, K) \xrightarrow{T} I_2 = (G', K')$

Complemento de um grafo G
$\overline{G}$ removo as arestas que tem e adiciono onde não tem

Seja $\overline{G}$ o complemento de G, ou seja $V(\overline{G}) = V(G)$
$E(\overline{G}) = \{u, v \mid u, v \in E(V(G)),\ uv \notin E(G)\}$





Seja $I_1 = (G, K)$ uma instância de CLIQUE.

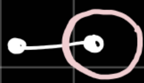
Sejam
$G' = \overline{G}$
$K' = K$
$I_2 = (G', K')$. Note que I_2 pode ser construido em tempo $O(n^2)$

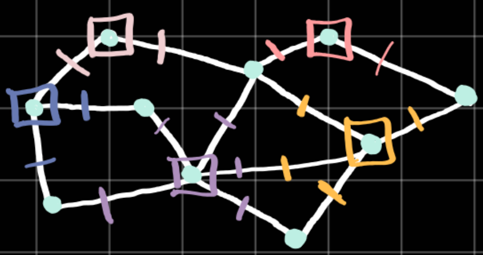
Suponha que I_1 seja uma instância SIM de CLIQUE e seja S uma CLIQUE de tamanho $\geq K$.
Pela definição de complemento, S é um conj. ind. em G', como $K = K'$ e $|S| \geq K$, então $|S| \geq K'$ e I_2 é uma instância SIM p/ Conj. Ind.

$\Leftarrow$ Fazer o inverso

Conj. Ind. é NP-Difícil

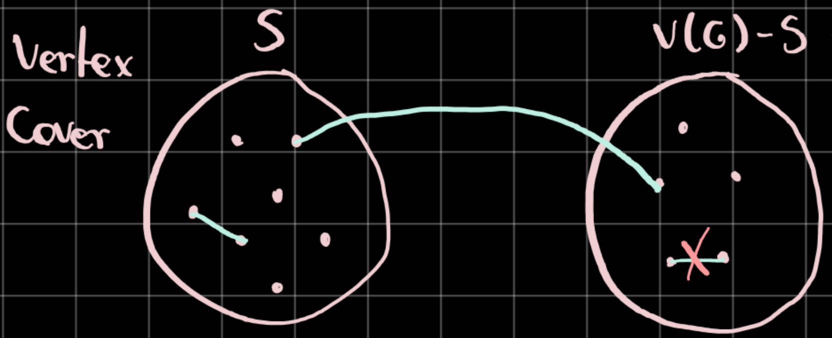
Vertex Cover
Entrada: Grafo G, $K \in \mathbb{N}$
Pergunta: $\exists$ vertex cover de tamanho $\leq K$?

Vexterx Cover
É um conjunto de vertices S. t.q. $\forall\, u, v \in E(G)$
$\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$ (pelo menos uma das duas pontas tem que estar dentro do conjunto)  S



Qual o menor numero de vertice que preciso para vigiar todas as arestas. (otimização)

Para um dado K consigo usar me- menos que K?



$|S| + |V(G)-S| = |V(G)|$

con. ind $\leq_p$ vextex cover

$I_1 = (G, K)$ $\qquad$ $I_2 = (G', K')$

$G' = G$

$K' = |V(G)| - K$

Percorre a entrada copia o grafo inteirinho faz uma conta para calcular o caminho (em tempo linear)

Suponha que I_1 seja uma instância SIM de Conj. Ind. e seja S um conj. ind. de tamanho $\geq K$.
Pelas observações anteriores, $V(G)-S$ é um vextex cov. em G', como $K' = |V(G)| - K$ e $|S| \geq K'$, então $|V(G)-S| \geq K'$ e I_2 é uma instância SIM p/ vertex cover.

$\Leftarrow$ Fazer o inverso

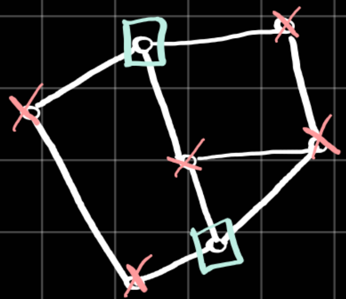
Conjunto Dominante

Entrada: Grafo G, $K \in \mathbb{N}$

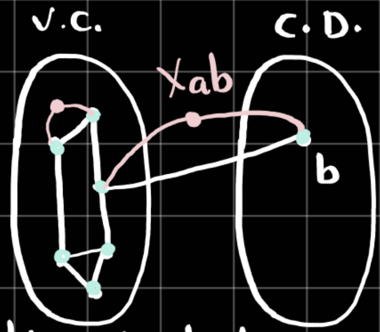
Pergunta: G possui conj dominante de tam $\leq K$

Vertice vigia vértice ou ele está no conjunto ou tem um vizinho que está no conjunto

Um conjunto dominante D em um grafo G é um subconjunto de $V(G)$ tal que $\forall v \in V(G)$, $v \in D$ ou $N(v) \cap D \neq \emptyset$



vertex cover $\leq$ dom.



$I_1 = (G, K) \longrightarrow I_2 = (G' K')$

Podemos supor que G não possui vértices isolados

$V(G') = V(G) \cup \{x_{uv} \mid uv \in E(G)\}$

$E(G') = E(G) \cup \{u x_{uv}, v x_{uv} \mid uv \in E(G)\}$

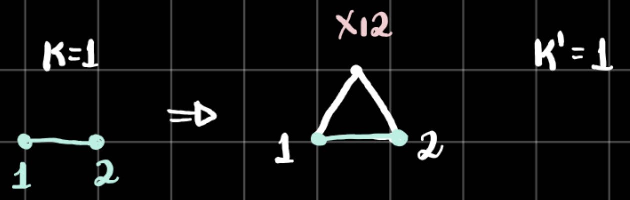
$K' = K$

Pode ser em tempo polinomial procurando o grafo com uma busca ...

Suponha I_1 seja uma instância SIM e seja S um vertex cover de tamanho $\leq K$. Mostraremos que S é um conj. domin. p/ G' com tam $\leq K'$. Como $K = K'$ então temos $|S| \leq K'$. Como não temos vértices isolados, todo vértice possui vizinho. Seja $v \in B$ e seja $u \in N(v)$. Seja $B = V(G)$ e seja $R = V(G') - B$. Como $uv \in E(G)$ então $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$. Logo $u \in S$ ou $v \in S$ e portanto v é dominado por S.

Seja $x_{uv} \in \mathbb{R}$. Como $N(x_{uv}| = \{u, v\}$ e $uv \in E(G))$ e S é um vertex cover de G, então u ou v pertencem a S e portanto, dominam x_{uv}. Logo S é um conjunto dominante de G'. Suponha I_2 é uma instância SIM.

Seja D úm conjunto dominante de G' com cardinalidade $\leq K'$.



$D = \{x_{12}\}$

Se D possui um vertice $x_{uv} \in V(G') - V(G)$ podemos altera-lo removendo x_{uv} e adicionando u em D.

Note que $N[x_{uv}] \subseteq N[u]$, logo, após a alteração D continua sendo um conjunto dominante. Além disso D não aumenta de tamanho neste processo, então ainda temos $|D| \leq |K|$

Podemos então supor que $D \subseteq V(G)$.

Mostraremos que D é um vertex cover para G.

Suponha que $uv \in E(G)$ que não é coberta por D é vertex cover para G.

Seja $uv \in E(G)$, em G' x_{uv} é dominado por D mas $x_{uv} \notin D$. Logo u ou v pertencem a D e portanto, uv é coberta por D.

Conj. Dom. é NP-D