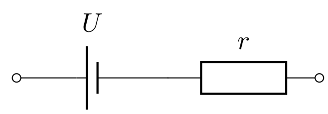
1. (8-9 класс). Серёжа хочет собрать гирлянду для новогодней ёлки. У него есть 10 красных светодиодов и столько же синих, а также элемент питания, изображенный на рисунке (его параметры $U = 220\text{В}, r = 1\text{кОм}$). Красный светодиод имеет сопротивление $R_\text{к} = 8\text{кОм}$, и загорается, если напряжение на нем не меньше $U_\text{к} = 8\text{В}$. Синий светодиод имеет сопротивление $R_\text{с} = 4\text{кОм}$, и загорается, если сила тока через него не меньше $I_\text{с} = 10\text{мА}$. Предложите схему для гирлянды, в которой все 20 светодиодов загорятся.



2. (8-9 класс). Юра хочет приготовить какао. Он заглядывает в холодильник и находит там бутылку молока объёмом $V = 500\text{мл}$. Затем, он открывает шкаф и обнаруживает там плитку шоколада массой $m = 100\text{г}$ и кастрюлю с теплоемкостью $C = 500\frac{\text{Дж}}{\text{град}}$. Юра выливает молоко в кастрюлю и разламывает в него шоколад, после чего ставит кастрюлю на электроплиту. Комфорка плиты имеет тепловую мощность $N = 300\text{Вт}$, при этом $\alpha = 15\%$ тепла рассеивается. Юре становится скучно ждать, пока какао приготовиться, и он решает немного вздремнуть. Юра предпочитает какао при температуре $t_\text{к} = 70°\text{C}$. Помогите ему рассчитать, на какое время нужно поставить таймер, чтобы какао приготовился. Вам известны следующие данные:

   - Плотность молока: $\rho_\text{м} = 1100\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
   - Удельная теплоемкость молока: $c_\text{м} = 3900\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$
   - Удельная теплоемкость твердого шоколада: $c_1 = 5500\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$
   - Удельная теплоемкость плавленного шоколада: $c_2 = 1675\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$
   - Удельная теплота плавления шоколада: $\lambda = 125\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$
   - Температура плавления шоколада: $t_\text{пл} = 35°\text{C}$
   - Температура в комнате: $t_0 = 25°\text{C}$
   - Температура в холодильнике: $t_\text{х} = 5°\text{C}$

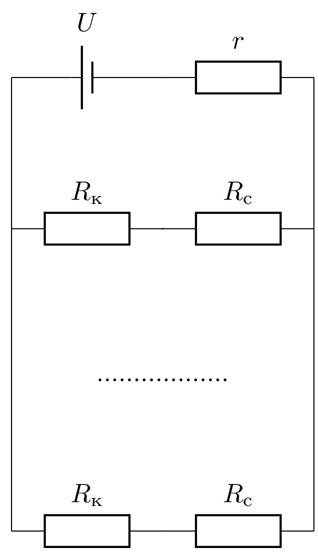
3. (10 класс). Двое школьников катаются на санках с ледяной горки. Они стартуют одновременно и без начальной скорости, один с высоты h, другой с высоты $4h$. У основания горка переходит в заснеженную горизонтальную поверхность, коэффициент трения между снегом и полозьями санок - μ. Найдите:

   - Расстояние между школьниками после полной остановки (2 балла).

- Время от начала движения до того момента, как второй школьник догонит первого (6 баллов).

4. (10 класс). Запах новогодней ёлки появляется из-за соединения борнилацетата (входит в состав эфирных масел хвойных деревьев, молярная масса $M = 196$г/моль). Человек чувствует хвойный запах, если концентрация борнилацетата составляет $n = 10^{-6}$ (1 молекула на 10^6 других молекул в воздухе). Ёлку ставят в комнате площади $S = 25$м^2 с потолками высотой $h = 3$м. За 1 секунду ёлка распыляет в воздух $\Delta m = 0.5$мг борнилацетата. Через какое время τ человек, находящийся в комнате, почуствует хвойный запах? Считать, что борнилацетат распространяется по комнате равномерно. Атмосферное давление $p_0 = 100$кПа, температура в комнате $t = 27°$C.

1. Чтобы получить на резисторах требуемые напряжение и силу тока, можно построить такую схему:



Пусть I - ток, текущий через светодиоды. Тогда через источник течет ток $10I$. Найдем этот ток, а также напряжение на красных светодиодах:

$$\begin{cases} U = 10Ir + I\left(R_к + R_с\right) \\ U_к = IR_к \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = \frac{U}{10r+R_к+R_с} = 10\text{мА} \\ U_к = \frac{UR_к}{10r+R_к+R_с} = 8\text{В} \end{cases}$$

2. Пусть τ - время нагрева системы до температуры $t_\text{к}$. Распишем уравнение теплового баланса:

$$\left(1-\frac{\alpha}{100\%}\right)N\tau = c_\text{м}\rho_\text{м}V\left(t_\text{к}-t_\text{х}\right)+C\left(t_\text{к}-t_0\right)+c_1m\left(t_\text{пл}-t_0\right)+$$
$$+\lambda m+c_2m\left(t_\text{к}-t_\text{пл}\right)$$

Отсюда:

$$\tau=\frac{c_\text{м}\rho_\text{м}V\left(t_\text{к}-t_\text{х}\right)+C\left(t_\text{к}-t_0\right)+c_1m\left(t_\text{пл}-t_0\right)+\lambda m+c_2m\left(t_\text{к}-t_\text{пл}\right)}{\left(1-\frac{\alpha}{100\%}\right)N}\approx$$
$$\approx 729 \text{ сек} \approx 12 \text{ минут}$$

3. (a) Воспользуемся законом сохранения энергии ($\Delta W_p = A_\text{тр}$):

$$\begin{cases} mgh=\mu mgS_1 \\ 4mgh=\mu mgS_2 \end{cases}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{3h}{\mu}$$

(b) Введем ось вдоль горки вниз, на горизонтальной поверхности по направлению движения. Тогда ускорения на этих участках, соответственно, равны $a_1 = g\sin\alpha, a_2 = -\mu g$ (можно не придираться к нахождению ускорений из динамических соображений). Из уравнения

$$\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{gt^2\sin\alpha}{2}$$

находим время спуска первого и второго школьников:

$$t_1=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$t_2=\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Из закона сохранения энергии (или из кинематики) находим скорости школьников у основания горки:

$$V_1=\sqrt{2hg}$$
$$V_2=2\sqrt{2hg}$$

В течение времени $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ первый школьник тормозил на заснеженном участке пути, а второй все еще спускался с горки. Найдем, насколько первый школьник удалился от основания горки за это время, а также его скорость в момент, когда второй школьник оказался внизу горки:

$$S = V_1\Delta t - \frac{\mu g(\Delta t)^2}{2} = \sqrt{2hg}\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{\mu g}{2\sin^2\alpha}\frac{2h}{g} =$$
$$= \frac{h}{\sin\alpha}\left(2 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)$$
$$V = V_1 - \mu g\Delta t = \sqrt{2hg} - \frac{\mu g}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}\left(1 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)$$

Найдем время τ, за которое второй школьник догнал первого по горизонтальной поверхности:

$$V_2\tau - \frac{\mu g\tau^2}{2} = S + V\tau - \frac{\mu g\tau^2}{2}$$
$$\tau = \frac{S}{V_2 - V} = \frac{\frac{h}{\sin\alpha}\left(2 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)}{2\sqrt{2hg} - \sqrt{2hg}\left(1 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)} = \frac{h\left(2 - \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)}{\sqrt{2hg}\left(1 + \frac{\mu}{\sin\alpha}\right)\sin\alpha} =$$
$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{2 - \frac{\mu}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\mu}{\sin\alpha}}$$

Осталось сложить t_2 и τ, и получим искомое время:

$$t = t_2 + \tau = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{2 - \frac{\mu}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\mu}{\sin\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{2 - \frac{\mu}{\sin\alpha} + 4 + 4\frac{\mu}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\mu}{\sin\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{6 + 3\frac{\mu}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\mu}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{h}{2g}}\frac{3\left(\mu + 2\sin\alpha\right)}{(\mu + \sin\alpha)\sin\alpha}$$

4. Обозначим за ν_0 - число моль воздуха в комнате, а за ν - число моль борнилацетата. Тогда:

$$\begin{cases} p_0 Sh = \nu_0 RT \\ n = \frac{N}{N_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta m\tau}{M\nu_0} \end{cases}$$

Таким образом, находим τ:

$$\tau = \frac{p_0 ShMn}{RT\Delta m} \approx 1179 \text{ сек} \approx 20 \text{ мин}$$