Самборский Иван М4138
12.10.2015

Глава 3.

Задача 1.

По определению из теоремы 3.1 граница Хэмминга: $M \le \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}(q-1)^i}$, где $d \ge 2t+1$.

Код Хэмминга (пример 2.6): $(2^r-1, 2^r-r-1)$ − код с $d=3$. Подставим данные характеристики в формулу границы Хэмминга:

$$M = 2^k = 2^{2^r-r-1} \le \frac{2^{2^r-1}}{\sum_{i=0}^{1}\binom{2^r-1}{i}(2-1)^i} = \frac{2^{2^r-1}}{\binom{2^r-1}{0}+\binom{2^r-1}{1}} = \frac{2^{2^r-1}}{1+2^r-1} = \frac{2^{2^r-1}}{2^r} = 2^{2^r-r-1}$$

Код Голея $(23,12)$ − код с $d=7$. Аналогично:

$$M = 2^k = 2^{12} \le \frac{2^{23}}{\sum_{i=0}^{3}\binom{23}{i}(2-1)^i} = \frac{2^{23}}{\binom{23}{0}+\binom{23}{1}+\binom{23}{2}+\binom{23}{3}} = \frac{2^{23}}{1+23+253+1771} = \frac{2^{23}}{2048} = \frac{2^{23}}{2^{11}} = 2^{12}$$

Задача 3 (Вариант 77).

$n = 19, d = 6$

Воспользуемся границей Хэмминга, из которой получим верхнюю границу для k:

$$M = 2^k \le \frac{2^{19}}{\sum_{i=0}^{2}\binom{19}{i}} = \frac{2^{19}}{\binom{19}{0}+\binom{19}{1}+\binom{19}{2}} = \frac{2^{19}}{1+19+342} = \frac{2^{19}}{362} \approx 1448.3$$

$k \le \lfloor \log_2 1448.3 \rfloor = 10$

Для поиска нижней границы воспользуемся границей Варшамова-Гилберта:

$2^{19-k} > \sum_{i=0}^{4}\binom{18}{i}$

$19 - k > \log_2\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{18}{i}\right)$

$k < 19 - \log_2\left(\sum_{i=0}^{4}\binom{18}{i}\right)$

$k < 7.02$

Значит, при $k=7$ у нас существует код с такими характеристиками $(n=19, d=6)$ ⇒ нижняя граница $k \ge 7$.

Проверим с помощью границы Грайсмера, можем ли мы уточнить границы:

$k = 7 \Rightarrow n \ge 15$

$k = 8 \Rightarrow n \ge 16$

$k = 9 \Rightarrow n \ge 17$

$k = 10 \Rightarrow n \ge 18$

Значит, получили $k \in [7, 10]$.

Задача 4 (Вариант 77).

$n = 19, k = 6$

Самборский Иван M4138
12.10.2015

Воспользуемся границей Хэмминга, из которой получим верхнюю границу для d:

$$M = 2^6 \le \frac{2^{19}}{\sum_{i=0}^{t}\binom{19}{i}}$$

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{19}{i} \le 2^{13} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow d \le 10$$

Для поиска нижней границы воспользуемся границей Варшамова-Гилберта:

$$2^{13} > \sum_{i=0}^{d-2}\binom{18}{i} \Rightarrow d \ge 6$$

Проверим с помощью границы Грайсмера, можем ли мы уточнить границы:

$$19 \ge \sum_{i=0}^{5}\left\lceil \frac{d}{2^i} \right\rceil \Rightarrow d \le 8$$

Значит, получили $d \in [6, 8]$.

Задача 5.

Таблица построена программно (Task5).

n	k	d	Gilberd-Varshamov	Hamming
8	4	4	3	4
10	5	4	3	4
12	6	4	3	4
14	7	4	4	6
16	8	5	4	6
18	9	6	4	6
20	10	6	4	6
22	11	7	5	8
24	12	8	5	8
26	13	7	5	8
28	14	8	5	8
30	15	8	6	10
32	16	8	6	10
34	17	8	6	10
36	18	8	6	10
38	19	8-9	7	10
40	20	8-9	7	12

Задача 7.

Таблица построена программно (Task7).

k	n	Griesmer
3	14	14
4	15	15
5	16	16
6	18	17
7	19	18
8	20	19
9	21	20
10	22	21
11	23	22
12	24	23

Самборский Иван М4138
12.10.2015

13	27	24
14	28	25
15	30	26
16	31	27
17	32	28
18	34	29
19	35	30
20	36	31
21	37	32
22	38	33
23	40	34