MA Eχ 01

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN @i9kin @aljbet и другие…

Собрано 03.09.2023 в 10:22

Содержание

Предисловие

Данные материалы перенесены из notion'a через значительное время после экзамена. Вследствие этого тщательная вычитка не проводилась, а значит количество ошибок/опечаток может быть довольно большим. Прошу прощения за это... но мне правда не очень интересно ворошить материалы 9 месячной давности. Надеюсь, те, кто будет ими пользоваться, сделают их лучше — pr и issues всегда открыты для исправлений и дополнений. (`isagila`, 23.09.03)

1. Вопросы к экзамену

1.1. Вещественная ось. Бесконечность. Окрестность точки.

Def 1.1.1. Вещественная ось это геометрическое изображение множества всех вещественных чисел.

Замечание 1.1.2. Вещественная ось не содержит «дыр». Это значит, что переменная проходя все точки интервала $(a;b)$ принимает все вещественные значения из интервала $(a;b)$. Другими словами, между геометрической осью (множеством точек) и $\mathbb{R}$ действует биекция.

Отрезок A лежит *левее* отрезка B, если любая точка из отрезка A не больше любой точки из отрезка B: $\forall a \in A, b \in B \Big| a \leqslant b$. Если один отрезок лежит левее другого, то между ними найдется как минимум одна точка.

$$\forall A \text{ левее } B \Big| \exists c \in \mathbb{R} \Big| \forall a \in A, b \in B \Big| a \leqslant c \leqslant b$$

Расширенная вещественная ось определяется следующими аксиомами

1. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \Big| -\infty < x < +\infty$
3. $x \cdot \pm\infty = \pm\infty$ (знаки как обычно)
4. $x + \pm\infty = \pm\infty$
5. $x / \pm\mathbf{0} = \pm\infty$ (не ноль, а бесконечное приближение к нему)
6. $x / \pm\infty = \pm\mathbf{0}$ (у нуля есть знак)

Def 1.1.3. Дельта–окрестностью точки a называют $u_\delta(a) = (-\delta + a; a + \delta)$.
Если $a = +\infty$, то $u_\delta(a) = (\delta; +\infty)$. Если $a = -\infty$, то $u_\delta(a) = (-\infty; -\delta)$.

Def 1.1.4. Проколотой дельта-окрестностью точки a называют $\mathring{u}_\delta(a) = u_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Замечание 1.1.5. Если в некоторых окрестностях $\delta_1 \dots \delta_n$ точки a выполняются условия $P_1 \dots P_n$, то все эти условия будут выполняться в пересечении этих окрестностей.

Замечание 1.1.6. Пересечение двух окрестностей одной точки это окрестность меньшего радиуса $u_\delta(a) \cap u_\varepsilon(a) = u_{\min(\delta,\varepsilon)}(a)$.

Замечание 1.1.7. Для двух различных точек всегда найдутся непересекающиеся окрестности $a \neq b \Longrightarrow \exists \delta > 0, \varepsilon > 0 \Big| u_\delta(a) \cap u_\varepsilon(b) = \varnothing$.

1.2. Точка сгущения. Определения предела функции. Односторонние пределы.

Def 1.2.1. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется точкой сгущения (предельной точкой) множества E, если пересечение любой её проколотой δ–окрестности с этим множеством не пусто.

$$\forall \delta > 0 \Big| \mathring{u}_\delta(a) \cap E \neq \varnothing$$

Def 1.2.2. L называется пределом **по Коши** функции $f(x)$ в точке a, если

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x \in E \cap \mathring{u}_\delta(a) \Longrightarrow f(x) \in u_\varepsilon(L)$$

Замечание 1.2.3. Предел можно определить не только через окрестности, но также и через неравенства. L называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если

1. $a \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
2. $a = \pm\infty, L \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x : |x| > \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
3. $a \in \mathbb{R}, L = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f|(x) > \varepsilon$

4. $a = \pm\infty, L = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x{:} |x| > \delta \Longrightarrow |f|(x) > \varepsilon$

Замечание 1.2.4. Можно рассматривать пределы функции в точке только с одной стороны.

1. Левосторонний $\lim_{x\to a-0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \Big| \forall x{:} 0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
2. Правосторонний $\lim_{x\to a+0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \Big| \forall x{:} 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Def 1.2.5. L называется пределом **по Гейне** функции $f(x)$ в точке a, если

$$\forall \{x_n\} \Big| x_n \to a, x_n \neq a \Longrightarrow f(x_n) \to L$$

Определение 1.2.5 не было рассмотрено в курсе, однако оно необходимо для доказательства теорем далее (1.12.).

Замечание 1.2.6. С помощью определения предела по Гейне намного проще доказывать то, что предел не существует, например рассмотрим предел $\lim_{x\to\infty} \sin x$. Пусть $a_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $b_n = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

Обе эти последовательности стремятся к бесконечности при $n \to \infty$, при этом $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ и $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$. Таким образом предел функции $\sin x$ на бесконечности не существует.

Теорема 1.2.7. Определения 1.2.2 и 1.2.5 равносильны.

□ Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
Коши → Гейне
Распишем определение предела по Коши.

$$\forall\varepsilon_2 > 0\exists\delta > 0 \Big| \forall x{:} 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_2$$

Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\} \to a, x_n \neq a$. Т.к. она стремится к a (но никогда его не достигает), то по определению предела последовательности получаем

$$\forall\varepsilon_1 > 0\exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n > n_0{:} 0 < |x_n - a| < \varepsilon_1$$

Т.к. это выполняется для любого ε_1, то это выполняется и для $\varepsilon_1 = \delta$, а это значит, что

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n > n_0{:} 0 < |x_n - a| < \delta$$

Если выполняется неравенство $0 < |x_n - a| < \delta$, то из определения по Коши получаем, что для любого ε_2 выполняется $|f(x_n) - L| < \varepsilon_2$. Объединяем все вместе и получаем

$$\forall\varepsilon_2 > 0\exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n > n_0{:} |f(x_n) - L| < \varepsilon_2$$

Таким образом $f(x_n) \to L$.
Гейне → Коши
От противного: пусть предел по Коши не существует, запишем отрицание предела по Коши.

$$\exists\varepsilon > 0\forall\delta > 0 \Big| \exists x{:} 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \geqslant \varepsilon$$

Т.к. это выполнено для любого δ, то возьмем $\delta = \dfrac{1}{n}$, а x, соответствующий определенному δ будем называть x_n, получим $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$. Т.к. $n \to \infty$, то по теореме о двух жандармах $x_n \to a$, но $x_n \neq a$. Таким образом из определения по Гейне получаем, что $f(x_n) \to L$. Однако из отрицания предела по Коши следует, что $\exists\varepsilon > 0{:} |f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon$, т.е. L не является пределом для x_n. Противоречие. ■

Теорема 1.2.8. Если предел функции в точке существует, то он единственный.

□ От противного: пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} f(x) = B$, при этом $A \neq B$. Тогда по определению предела имеем

$$\forall\varepsilon_1 > 0\exists\delta_1 > 0 \Big| \forall x \in E \cap \mathring{u}_{\delta_1}(a) \Longrightarrow f(x) \in u_{\varepsilon_1}(A)$$
$$\forall\varepsilon_2 > 0\exists\delta_2 > 0 \Big| \forall x \in E \cap \mathring{u}_{\delta_2}(a) \Longrightarrow f(x) \in u_{\varepsilon_2}(B)$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда по свойству окрестностей

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in u_{\varepsilon_1}(A) \cap u_{\varepsilon_2}(B) \\ \exists\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 \Big| u_{\varepsilon_1}(A) \cap u_{\varepsilon_2}(B) = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \in \varnothing$$

Противоречие. ■

Теорема 1.2.9. Предел в точке существует $\Longleftrightarrow$ односторонние пределы в этой точке существуют и равны.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L = A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = A \\ \exists \lim_{x\to a+0} f(x) = B \\ A = B \end{cases}$$

□ ($\Longleftarrow$) Распишем односторонние пределы по определению.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \Longrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0 \exists\delta_1 > 0 \Big| \forall x\colon 0 < a - x < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = B \Longrightarrow \forall\varepsilon_2 > 0 \exists\delta_2 > 0 \Big| \forall x\colon 0 < x - a < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - B| < \varepsilon_2$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда по свойству окрестностей (учитывая, что $A = B$) получаем

$$\left.\begin{aligned} \forall\varepsilon_1 > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_1 \\ \forall\varepsilon_2 > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Это и есть определение предела функции в точке, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = A = B$.
($\Longrightarrow$) Распишем предел по определению.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Раскрывая модуль по определению, получаем $0 < a - x < \delta$ и $0 < x - a < \delta$. Таким образом оба односторонних предела существуют по определению. ■

1.3. Определение предела функции. Предел и бесконечность.

Определения предела функции (в том числе и на бесконечности) уже даны (1.2.), как и определение бесконечности (1.1.).

1.4. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.

Def 1.4.1. $L \in \mathbb{R}$ называется конечным пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n \geqslant n_0\colon |x_n - L| < \varepsilon$$

Def 1.4.2. $L = \pm\infty$ называется бесконечным пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n \geqslant n_0\colon |x_n| > \varepsilon$$

Def 1.4.3. Последовательность называется сходящейся (т.е. сходится), если она имеет конечный предел.

Def 1.4.4. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ это последовательность полученная из $\{x_n\}$ удалением некоторых её членов без изменения их порядка.

Замечание 1.4.5. Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет такой же предел.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$$

Теорема 1.4.6. (Больцано–Вейерштрасса) Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

□ Т.к. последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists a, b \Big| \forall n \in \mathbb{N}\colon a \leqslant x_n \leqslant b$. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам, тогда хотя бы одна из половин содержит бесконечно много элементов из последовательности $\{x_n\}$. Назовём эту половину $[a_1; b_1]$ и возьмём из неё произвольный элемент, который назовём x_{n_1}.
Продолжим выполнять эти действия, после k-ого шага получим, что $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$. Т.к. отрезки вложены друг в друга, то найдется единственное число c, такое что $\forall k \in \mathbb{N}\colon c \in [a_k; b_k]$. Таким образом границы отрезков стремятся к числу c, значит

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c$$

Но при этом

$$x_{n_k} \in [a_k; b_k] \Longrightarrow a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \xrightarrow{\text{предельный переход}} \lim_{k\to\infty} a_k \leqslant \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} b_k$$

Из (1.4.) и (1.4.) по теореме о двух милиционерах следует, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Таким образом последовательность x_{n_k} имеет конечный предел, а значит она сходится. ■

Def 1.4.7. Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 > 0 \,\Big|\, \forall n > n_0, m > n_0 \colon |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 1.4.8. (Критерий Больцано–Коши для сходимости последовательностей) Последовательность фундаментальна $\iff$ она сходится.

□ ($\Longleftarrow$) Распишем определение предела последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \,\Big|\, \forall n > n_0 \colon |x_n - L| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$\forall m > n_0 \colon |x_m - L| < \varepsilon_1$$
$$\forall n > n_0 \colon |x_n - L| < \varepsilon_2$$

Заметим, что

$$|x_m - x_n| = |(x_m - L) + (L - x_n)| \leqslant |x_m - L| + |L - x_n|$$
$$\left.\begin{array}{l} |x_m - L| < \varepsilon_1 \\ |L - x_n| < \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Таким образом последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по определению.
($\Longrightarrow$) Покажем, что фундаментальная последовательность ограничена. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \,\Big|\, \forall n, m \geqslant n_0 \colon |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon = 1$, тогда

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leqslant |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}|$$

Т.к. $\{x_n\}$ фундаментальна и $\varepsilon = 1$, то первый модуль не превосходит единицу. Также заметим, что т.к. мы взяли фиксированный ε, то x_{n_0} это некая константа. Таким образом $\forall n > n_0 \colon |x_n| \leqslant A$, где A это некая константа, которой мы обозначили всю правую часть. Мы видим, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена.
Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна, значит по теореме 1.4.6 из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Допустим эта подпоследовательность имеет предел равный L, покажем, что и исходная последовательность тоже имеет предел L.
По определению фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ имеем

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_1 \,\Big|\, \forall n, m > n_1 \colon |x_n - x_m| < \varepsilon_1$$

По определению сходящейся последовательности $\{x_{n_k}\}$ имеем

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists n_2 \,\Big|\, \forall n_k > n_2 \,\Big|\, |x_{n_k} - L| < \varepsilon_2$$

Пусть $n_0 = \max(n_1, n_2)$, тогда оба условия выполнены. Обозначим $m = n_k$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда

$$|x_n - L| = |(x_n - x_m) + (x_m - L)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Итого имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \,\Big|\, \forall n > n_0 \colon |x_n - L| < \varepsilon$$

Значит последовательность $\{x_n\}$ имеет предел L, а значит она сходится. ■

Теорема 1.4.9. (Вейерштрасса о сходимости последовательности) Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена, то она сходится.

□ Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она имеет супремум, т.е.

$$\exists S \,\Big|\, \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \,\Big|\, S - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant S$$

Т.к. последовательность неубывает, то $n_0 < n \Longrightarrow x_{n_0} \leqslant x_n$. Объединяя эти две формулы, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \Big| \forall n > n_0 \colon S - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \Big| \forall n > n_0 \colon S - \varepsilon < x_n < S + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \Big| \forall n > n_0 \colon |x_n - S| < \varepsilon$$

Таким образом последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел по определению, а значит она сходится. ■

Теорема 1.4.10. Если последовательность сходится, то она ограничена.

□ Если последовательность сходится, значит она имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$. Распишем предел последовательности по определению, после чего раскроем модуль.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n > n_0 \colon |x_n - L| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon + L < x_n < L + \varepsilon$$

Таким образом мы видим, что последовательность ограничена. ■

1.5. Предельный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

Теорема 1.5.1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

□ Раскроем модуль в определении предела.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_\delta(a) \cap E \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Получается, что функция $f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки a. ■

Теорема 1.5.2. (О стабилизации знака) Если $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$, то $f(x) > 0$ в некоторой окрестности a.

□ По теореме 1.5.1, получаем, что $f(x)$ ограничена в некоторой проколотой ε–окрестности точки a, т.е. $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = \frac{A}{2}$, тогда $f(x) > A - \frac{A}{2} > 0$. ■

Теорема 1.5.3. (О предельном переходе в неравенствах) Если $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки a, то

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = A\\ \lim_{x\to a} g(x) = B\end{array}\right\} \Longrightarrow A \leqslant B$$

□ От противного: пусть $A > B$, тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B > 0$$

Тогда по 1.5.2 $f(x) - g(x) > 0$, т.е. $f(x) > g(x)$ в некоторой проколотой δ_1–окрестности точки a. По условию $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой δ_2-окрестности точки a. Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда по свойству окрестностей оба условия должны выполняться, т.е. $f(x) \leqslant g(x)$ и $f(x) > g(x)$. Противоречие. ■

Теорема 1.5.4. (О двух милиционерах) Если $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = A\\ \lim_{x\to a} g(x) = A\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} h(x) = A$$

□ Запишем условие формально, раскрыв два предела по определению

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta_1}(a) \cap X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta_2}(a) \cap X \Longrightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$$
$$\exists \delta_3 > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta_3}(a) \cap X \colon f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, тогда по свойству окрестностей все условия будут выполняться. Раскроем модули по определению и «склеим» полученные неравенства.

$$\left.\begin{array}{l}A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon\\ A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon\end{array}\right\} \Longrightarrow A - \varepsilon < f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) < A + \varepsilon \Longrightarrow A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$$

Причем последнее неравенство выполняется в проколотой окрестности точки a для любого ε. Таким образом $\lim_{x\to a} f(x) = A$ по определению предела. ■

Теорема 1.5.4 также называется теоремой о двух жандармах или теоремой о сжатой функции.

1.6. Бесконечно малые, бесконечно большие функции. Свойства.

Def 1.6.1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (б.м.) в точке a, если её предел в этой точке равен нулю.

Def 1.6.2. Функция $\omega(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) в точке a, если её предел в этой точке равен бесконечности.

Замечание 1.6.3. Функция не бывает бесконечно малой или бесконечно большой где угодно, только в определённой точке. Например, $f(x) = \frac{1}{x}$, тогда

1. $f(x)$ — б.б. в точке $x = 0$.
2. $f(x)$ — б.м. в точке $x = +\infty$.

Теорема 1.6.4. Сумма бесконечно малых в точке равна бесконечно малой в этой же точке.

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = \alpha(x)$$

□ Распишем бесконечно малые по определению.

$$\lim_{x\to a} \alpha_1(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0 \exists\delta_1 > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta_1}(a) \cap E \Longrightarrow |\alpha_1(x)| < \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} \alpha_2(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon_2 > 0 \exists\delta_2 > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta_2}(a) \cap E \Longrightarrow |\alpha_2(x)| < \varepsilon_2$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда по свойству окрестностей оба условия будет выполняться. Также возьмём $\varepsilon > 0$, такую что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Т.к. ε проходит все вещественные значения, то и ε_1 и ε_2 будут проходить все вещественные значения, значит условия в пределе все еще будут истинными, получим

$$\lim_{x\to a} \alpha_1(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta}(a) \cap E \Longrightarrow |\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\lim_{x\to a} \alpha_2(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta}(a) \cap E \Longrightarrow |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Сложим полученные два неравенства и воспользуемся свойством модуля суммы.

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \varepsilon \\ |\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| \end{array}\right\} \Longrightarrow |\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < \varepsilon \tag{MOD}$$

Итого

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_{\delta}(a) \cap E \Longrightarrow |\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| < \varepsilon$$

Это и есть определение предела, т.е. $\lim_{x\to a}(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = 0$. ■

Теорема 1.6.5. Сумма бесконечно больших **одного знака** в точке равна бесконечно большой в этой же точке.

$$\omega_1(x) + \omega_2(x) = \omega(x) \qquad (\omega_1(x) \cdot \omega_2(x) > 0)$$

□ Доказательство аналогично доказательству про сумму б.м. (1.6.4). При раскрытии модуля (MOD) поможет тот факт, что б.б. одного знака.

$$|\omega_1(x)| + |\omega_2(x)| > \varepsilon \Longrightarrow |\omega_1(x) + \omega_2(x)| > \varepsilon$$

■

Теорема 1.6.6. Произведение бесконечно малых в точке равно бесконечно малой в этой же точке.

$$\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) = \alpha(x)$$

□ Доказательство аналогично доказательству про сумму б.м. (1.6.4). Единственное отличие в том, что нужно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$. ■

Теорема 1.6.7. Произведение бесконечно больших в точке равно бесконечно большой в этой же точке.

$$\omega_1(x) \cdot \omega_2(x) = \omega(x)$$

□ Доказательство аналогично доказательству про произведение б.м. ■

Теорема 1.6.8. Произведение бесконечно малой в точке на ограниченную функцию равно бесконечно малой в этой же точке.

$$\alpha_1(x) \cdot f(x) = \alpha(x)$$

□ Доказательство аналогично доказательству про сумму б.м. (1.6.4). Единственное отличие в том, что нужно полагать $e_1 = \dfrac{e}{M}$, где M это граница функции $f(x)$. ■

Теорема 1.6.9. Произведение бесконечно большой в точке на ограниченную функцию (не равную нулю) равно бесконечно большой в этой же точке.

$$\omega_1(x) \cdot f(x) = \omega(x) \qquad (f(a) \neq 0)$$

□ Доказательство аналогично доказательству про произведение б.м. на ограниченную функцию. ■

1.7. Теоремы о пределах.

Теорема 1.7.1. Если $\lim_{x\to a} f(x) = L$, то говорят, что функцию $f(x)$ можно представить пределом $f(x) = L + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м. в точке a

□ По условию теоремы $f(x) = L + \alpha(x) \Longrightarrow f(x) - L = \alpha(x)$. Подставим это в определение предела.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x \in \mathring{u}_\delta(a) \cap E \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Мы показали, что $f(x) - L = \alpha(x) < \varepsilon$, значит определение верно. ■

Теорема 1.7.2. Предел константы равен ей самой.

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad (c = const)$$

□ Распишем определение предела через неравенства.

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |c - c| < \varepsilon$$

Последнее неравенство всегда выполняется, т.к. $\varepsilon > 0$. ■

Теорема 1.7.3. Предел суммы равен сумме пределов.

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

□ Воспользуемся представлением функции пределом (1.7.1) и получим

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha_1(x)$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = B \Longleftrightarrow g(x) = B + \alpha_2(x)$$

Сложим полученные равенства и применим свойство суммы бесконечно малых функций (1.6.4).

$$f(x) + g(x) = A + B + \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$$
$$(f(x) + g(x)) = (A + B) + \alpha(x)$$

Далее воспользуемся представлением функции пределом в обратную сторону.

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$$
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

■

Теорема 1.7.4. Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

□ Воспользуемся представлением функции пределом (1.7.1) и получим

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha_1(x)$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = B \Longleftrightarrow g(x) = B + \alpha_2(x)$$

Перемножим полученные равенства и применим свойства бесконечно малых функций.

$$f(x)\cdot g(x) = AB + A\alpha_2(x) + B\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)$$
$$(f(x)\cdot g(x)) = AB + \alpha(x)$$

Далее воспользуемся представлением функции пределом в обратную сторону.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = AB$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

■

Теорема 1.7.5. Предел частного равен частному пределов (при условии, что знаменатель не равен нулю).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

□ Воспользуемся представлением функции пределом (1.7.1) и получим

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha_1(x)\\ \lim_{x\to a} g(x) = B \Longleftrightarrow g(x) = B + \alpha_2(x)\end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right) \tag{2}$$

Подставим (1) в (2) и упростим, пользуясь свойствами б.м. функций.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{A+\alpha_1(x)}{B+\alpha_2(x)} - \frac{A}{B}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{AB+\alpha_1(x)B - AB - \alpha_2(x)A}{(B+\alpha_2(x))B}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha_1(x)-\alpha_2(x)}{(B+\alpha_2(x))B}\right) = \frac{0-0}{(B+0)B} = 0$$

Получили, что предел (2) равен нулю. Это равносильно следующему

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

■

1.8. Сравнение бесконечно малых. Теоремы об эквивалентных функциях.

Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — б.м. в точке a, тогда

1. $\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0 \Longrightarrow \alpha_1(x)$ более высокого порядка, чем $\alpha_2(x)$.
2. $\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Longrightarrow \alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ одного порядка.
3. $\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty \Longrightarrow \alpha_1(x)$ более низкого порядка, чем $\alpha_2(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)^k} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Longrightarrow \alpha_1(x)$ имеет порядок k по отношению к $\alpha_2(x)$.

Пусть $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — б.б. в точке a, тогда

1. $\lim_{x\to a}\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = 0 \Longrightarrow \omega_1(x)$ более низкого порядка, чем $\omega_2(x)$.
2. $\lim_{x\to a}\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Longrightarrow \omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ одного порядка.
3. $\lim_{x\to a}\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} = \infty \Longrightarrow \omega_1(x)$ более высокого порядка, чем $\omega_2(x)$.
4. $\lim_{x\to a}\frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)^k} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Longrightarrow \omega_1(x)$ имеет порядок k по отношению к $\omega_2(x)$.

Замечание 1.8.1. $o(f(x))$ — обозначение б.м. более высокого порядка для функции $f(x)$. Обычно это обозначение используют для сравнения с некоторым эталоном Δx, например

$$\alpha(x) = o(\Delta x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\Delta x} = 0$$

Замечание 1.8.2. Таким образом, разрешение неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ это на самом деле сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Def 1.8.3. Если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ называются эквивалентными б.м. функциями.

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1 \Longleftrightarrow \alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$$

Замечание 1.8.4. Геометрический смысл эквивалентных функций заключается в том, что в малой окрестности точки a графики функций сливаются. В качестве примера можно рассмотреть функции $\sin x$ и x (рис. 1.8.5).

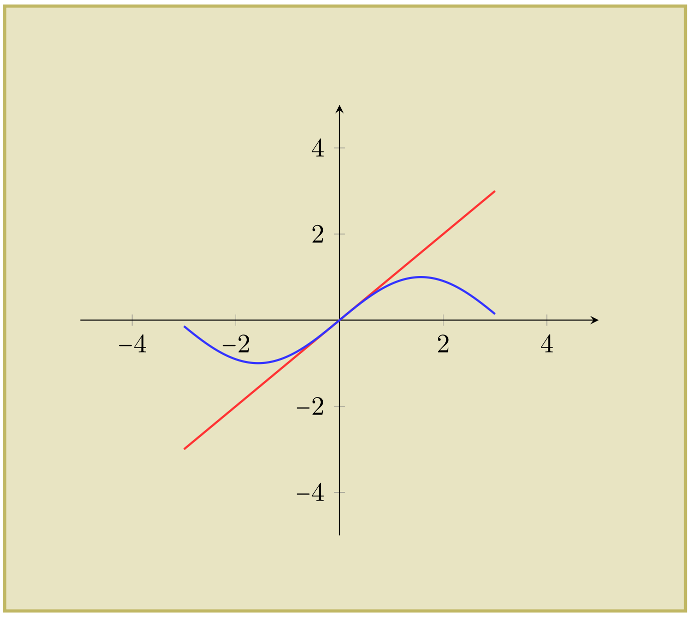

Рис. 1.8.5: Эквивалентные функции

Теорема 1.8.6. В произведении можно заменять эквивалентные функции друг на друга при условии, что они эквивалентны **в одной точке**.

$$\alpha(x) \sim \gamma(x) \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$$

□ Домножим на $\gamma(x)$ и воспользуемся свойством произведения пределов.

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)\cdot\gamma(x)}{\beta(x)\cdot\gamma(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$$

По определению эквивалентных функций левый предел равен единице, значит

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$$

■

Теорема 1.8.7. Разность эквивалентных **в одной точке** б.м. функций это б.м. более высокого порядка, чем эти функции.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Longrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x))$$

□ Сравним $\alpha(x) - \beta(x)$ по определению сравнения б.м. функций, для этого вычислим следующий предел

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} 1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$

По определению эквивалентных функций правый предел равен единице, значит

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 1-1=0$$

Таким образом $\alpha(x)-\beta(x)$ это б.м. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$. Для $\beta(x)$ доказательство аналогично. ■

Теорема 1.8.8. Произведение двух б.м. **в одной точке** функций это б.м. более высокого порядка, чем эти функции.

$$\alpha(x)\cdot\beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x))$$

□ Сравним $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ по определению сравнения б.м. функций, для этого вычислим следующий предел

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\beta(x)$$

По определению б.м. функции этот предел равен нулю. Таким образом $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ это б.м. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$. Для $\beta(x)$ доказательство аналогично. ■

1.9. Первый замечательный предел.

Теорема 1.9.1. Первым замечательным пределом называется следующий предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

□ Построим единичную окружность и проведем к неё касательную, параллельную оси Oy (рис. 1.9.2). Выберем на касательной точку и построим треугольник OAB. По рисунку видно, что

$$S_\triangle OAC < S_{\text{сек}}CA < S_\triangle OAB \tag{1}$$

Выразим эти площади.

$$\begin{aligned} S_\triangle OAC &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi \\ S_{\text{сек}}CA &= \frac{1}{2}\varphi \\ S_\triangle OAB &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot AB = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \qquad \left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{1}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и преобразуем.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin\varphi < \frac{1}{2}\varphi &< \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi \\ 1 < \frac{\varphi}{\sin\varphi} &< \frac{1}{\cos\varphi} \\ 1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} &> \cos\varphi \\ \lim_{\varphi\to 0}1 > \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} &> \lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Левый и правый пределы равны единице, значит по теореме о двух жандармах получаем, что средний предел также равен единице. ■

Теорема 1.9.3.

$$x\sim\sin x \qquad (x\to 0)$$

□ Это следствие из первого замечательного предела (1.9.1). ■

Теорема 1.9.4.

$$x\sim\arcsin x \qquad (x\to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ x\to 0 \Longrightarrow t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\arcsin(\sin t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

По первому замечательному пределу это равно 1, значит исследуемые функции эквивалентны при $x\to 0$ по определению. ■

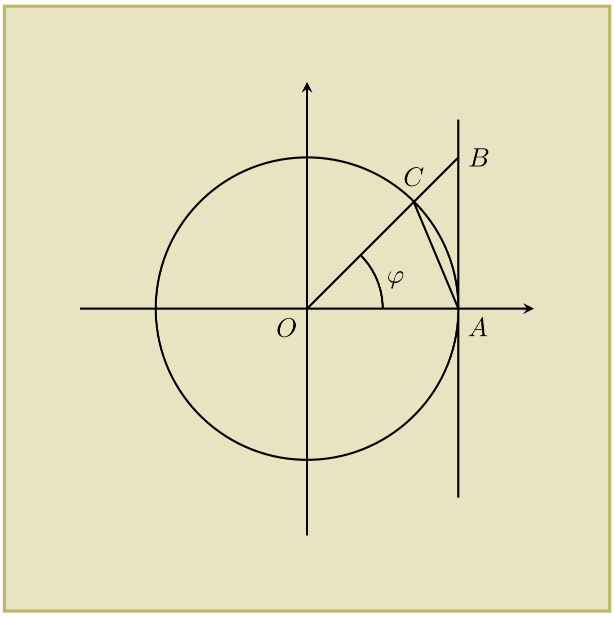

Рис. 1.9.2: Первый замечательный предел

Теорема 1.9.5.

$$x \sim \operatorname{tg} x \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел, раскроем тангенс по определению и воспользуемся свойствами пределов.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Первый предел можно вычислить, он будет равен единице, второй предел также будет равен единице согласно первому замечательному пределу. Это значит, что и исходный предел также будет равен единице. Таким образом получаем, что исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

Теорема 1.9.6.

$$x \sim \operatorname{arctg} x \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = \left[\begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ x \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \end{array} \right] = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t}$$

Т.к. уже доказано, что $t \sim \operatorname{tg} t (t \to 0)$, то этот предел равен единице, а значит исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

Теорема 1.9.7.

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел, в числителе применим формулу повышения степени после чего заменим получившийся синус на эквивалент согласно первому замечательному пределу.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Таким образом получаем, что исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

1.10. Второй замечательный предел. Число e.

Теорема 1.10.1. Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

□ Доказательство этой теоремы делится на два этапа.

Шаг I Для натуральных чисел

Рассмотрим выражение в пределе, раскроем его по биному Ньютона. Обозначив $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}\left(1^{n-k}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot C_n^k\right)\\ &= 1+1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2!}+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}+\dots\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что эта сумма больше двух. Также заметим, что каждое слагаемое положительно, значит последовательность монотонно возрастает. Для того, чтобы доказать, что она меньше трёх запишем её в таком виде

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots \tag{2}$$

Каждая из скобок вида $\left(1-\dfrac{i}{n}\right)$ меньше единицы, значит каждое из слагаемых меньше, чем $\dfrac{1}{i!}$. Т.е. например $\dfrac{1}{3!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)<\dfrac{1}{3!}$. Теперь заметим, что $\dfrac{1}{p!}<\dfrac{1}{2^{p-1}}$ при $p>2$. Из этих двух фактов следует, что сумма (1) меньше чем сумма

$$1+\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \tag{3}$$

Сумму большой скобки в (3) можно вычислить с помощью формулы суммы геометрической прогрессии.

$$\left.\begin{aligned} &\sum=\tfrac{b_1(1-q^p)}{1-q}\\ &b_1=1, q=0.5, p=n \end{aligned}\right\}\Longrightarrow \sum=\frac{1\cdot(1-0.5^n)}{0.5}=2-2\cdot 0.5^n \tag{4}$$

В итоге сумма всей правой части в (3) будет равна $3-2\cdot 0.5^n$ (не теряем единичку за большими скобками) Т.к. $0.5^n\to 0$ при $n\to\infty$, значит эта сумма меньше трёх. Значит искомая сумма (2) также меньше трёх.

Итого сумма (2) находится в диапазоне $(2;3)$. Таким образом последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ограничена и монотонно возрастает, значит по теореме Вейерштрасса она сходится. Число, к которому сходится эта последовательность, обозначается e и примерно равно 2.718281828.

Шаг II.a Для вещественных чисел $x\to+\infty$

Для каждого $x\in\mathbb{R}$ найдется такое число $n\in\mathbb{N}$, что

$$\begin{aligned} n\leqslant x&<n+1\\ \frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}&>\frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{n}+1\geqslant\frac{1}{x}+1&>\frac{1}{n+1}+1 \end{aligned} \tag{5}$$

Запишем исходное неравенство, но в другом порядке: $n+1>x\geqslant n$. Пусть теперь элементы второго неравенства будут показателями степеней для элементов из (5), тогда мы получим

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}>\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}>\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^{n} \tag{7}$$

причем все знаки стали строгими. Рассмотрим предел самого левого элемента этого неравенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{n}+1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) \tag{8}$$

Первый предел равен e согласно Iому шагу доказательства, второй предел равен единице, значит предел левой части равен e Аналогично предел правой части равен e. Значит по теореме о двух жандармах предел выражения в центре также равен e, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^x=e$.

Шаг II.a Для вещественных чисел $x\to-\infty$

Сделаем замену $t=-(x+1)$, получим, что $x\to-\infty\Longrightarrow t\to\infty$ и $x=-(t+1)$. Подставим это в исследуемый предел.

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(t+1)}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

Пользуясь свойством предела произведения и доказанным на шаге II.a получаем, что данный предел равен $e \cdot 1 = e$. ■

Def 1.10.2. Константа $e = 2.718281828\ldots$ определяется как значение второго замечательного предела.

Теорема 1.10.3.

$$\log_a(x+1) \sim \frac{x}{\ln a} \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел и перейдем в основанию e по свойству логарифмов.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{\frac{x}{\ln a}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(x+1)}{\ln a}}{\frac{x}{\ln a}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

По свойству логарифма внесём $\frac{1}{x}$ в степень числа логарифма, после чего вынесем $\ln(x)$ за знак предела, т.к. это непрерывная функция.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left((x+1)^{1/x}\right) = \ln \lim_{x\to 0}\left((x+1)^{1/x}\right)$$

Предел в логарифме является вторым замечательным пределом и равен e, значит исходный предел равен $\ln e = 1$. Таким образом получаем, что исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

Теорема 1.10.4.

$$a^x - 1 \sim x \ln a \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел. Сделаем замену $y = a^x - 1$, тогда $x = \log_a(y+1)$, причем $x \to 0 \implies y \to 0$ (т.к. $\frac{x}{\ln a} \sim \log_a(x+1)$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)\ln a} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln a}\ln a} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)}$$

Полученный предел равен единице, т.к. $y \sim \ln(1+y)$. Таким образом получаем, что исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

Теорема 1.10.5.

$$(1+x)^n - 1 \sim xn \qquad (x \to 0)$$

□ Рассмотрим соответствующий предел, заменим весь числитель на эквивалент по правилу $x \sim \ln(1+x)$ и упростим

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{xn} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + (1+x)^n - 1)}{xn} = \lim_{x\to 0} \frac{n\ln(1+x)}{xn} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Полученный предел равен единице, т.к. $x \sim \ln(1+x)$. Таким образом получаем, что исследуемые функции эквивалентны при $x \to 0$ по определению. ■

1.11. Определения непрерывной функции и ее локальные свойства.

Запись $f(x) \in C_0[a;b]$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.
Запись $f(x) \in C_0(x_0)$ означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Def 1.11.1.

$$f(x) \in C_0(x_0) \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Def 1.11.2.

$$f(x) \in C_0(x_0) \overset{\text{def}}{\iff} \Delta x_0 \to 0 \implies \Delta y(x_0) \to 0$$

Теорема 1.11.3. Определения 1.11.1 и 1.11.2 равносильны.

□ Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.Если $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$. Получаем равносильный предел.

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x_0)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{(f(x) - f(x_0))}_{\Delta y} = 0$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

Это равносильно тому, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. ■

Def 1.11.4. Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Def 1.11.5. Функция называется непрерывной справа/слева в точке x_0, если соответствующий односторонний предел равен значению функции в точке x_0.

Теорема 1.11.6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, тогда следующие функции также непрерывны в точке a

1. $cf(x)\Big|\forall c \in \mathbb{R}$
2. $f(x) + g(x)$
3. $f(x) \cdot g(x)$
4. $\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$

□ Эти свойства доказываются с помощью аналогичных свойств пределов. Например, докажем, что $f(x) \cdot g(x)$ также непрерывна. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x))$, по свойству пределов имеем

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) \in C_0(a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ g(x) \in C_0(a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$$

Таким образом функция $f(x) \cdot g(x)$ также непрерывна в точке a по определению. ■

Теорема 1.11.7.

$$\left.\begin{matrix} g(x) \in C_0(x_0) \\ f(g) \in C_0(g_0 = g(x_0)) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f(g(x)) \in C_0(x_0)$$

□ Т.к. функции $f(g)$ и $g(x)$ непрерывны в точках g_0 и x_0 соответственно, то их пределы в этих точках равны значениям функций в этих точках, распишем пределы по определению.

$$f(g): \qquad \forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \Big| \forall g\colon 0 < |g - g_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(g) - f(g_0)| < \varepsilon_1$$

$$g(x): \qquad \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2$$

Возьмем произвольное ε_1, а ε_2 пусть будет равно δ_1. Тогда из второй строчки получаем, что

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta_2, |g(x) - g(x_0)| < \delta_1$$

Т.к. $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ и учитывая то, что $g(x) - g(x_0) = g - g_0$, подставим получившееся выражение в определение предела для $f(x)$.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \Big| \forall x 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon_1$$

Это определение предела функции $f(g(x))$ в точке x_0. Этот предел равен $f(g(x_0))$, значит функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 1.11.8.

$$\left.\begin{matrix} f(x) \in C_0(x_0) \\ \exists f^{-1}(x) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f^{-1}(x) \in C_0(x_0)$$

1.12. Определения непрерывной функции. Свойства функции, непрерывной на отрезке.

Определения непрерывной функции были даны ранее (1.11.).

Теорема 1.12.1. (Вейерштрасса I) Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нём.

□ От противного: пусть $f(x)$ неограниченна на отрезке $[a;b]$. Тогда $\forall A \exists x_A \in [a;b] : |f(x_A)| > A$. Составим из x_A последовательность, которая будет лежать на отрезке $[a;b]$, т.е. эта последовательность ограничена.
По теореме Больцано–Вейерштрасса (1.4.6) из неё можно выделить сходящую к точке $c \in [a;b]$ подпоследовательность, т.е. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Тогда, т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, значит она непрерывна и в точке c, значит по определению непрерывности (по Гейне) $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$, следовательно предел **конечный**, т.к. $f(c) \in \mathbb{R}$.
С другой стороны, т.к. функция неограниченна, то $\forall n_k \exists x_{n_k} \Big| f(x_{n_k}) > n_k$. Т.к. $\{x_{n_k}\}$ это подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, то элемент в последовательности $\{x_n\}$ будет иметь номер не меньше, чем в подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, т.е. $n_k \geqslant k$.
Таким образом, объединяя полученные два неравенства получаем, что $f(x_{n_k}) > n_k \geqslant k$. Тогда по определению предела (по Гейне) $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$. Противоречие, т.к. функция должна иметь не более одного предела в точке (1.2.8). ■

Теорема 1.12.2. (Вейерштрасса II) Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения.

□ Из первой теоремы Вейерштрасса следует, что т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a;b]$ существует супремум M. По определению супремума

$$\begin{cases} \forall x \in [a;b] \,\Big|\, f(x) \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in [a;b] \,\Big|\, f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$, тогда получим последовательность $\{x_n\}$, такую что $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$.
Значит по теореме о двух жандармах (1.5.4) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Из ограниченной (т.к. x_n имеет конечный предел равный M) последовательности $\{x_n\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса (1.4.6) выделим сходящуюся к точке $c_1 \in [a;b]$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.
Т.к. функция непрерывна в точке c_1, то по определению непрерывности (по Гейне) получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c_1)$. Но т.к. $\{f(x_{n_k})\}$ подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, которая сходится к M, то и $\{f(x_{n_k})\}$ также сходится к M, таким образом $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.
Т.к. предел в точке единственный (1.2.8), то получаем, что $f(c_1) = M$. Таким образом, мы показали, что функция $f(x)$ принимает на отрезке $[a;b]$ наибольшее значение равное $f(c_1) = M$. Аналогично можно показать, что $f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[a;b]$. ■

Теорема 1.12.3. (Больцано–Коши I)

$$\left.\begin{matrix} f(x) \in C_0\,[a;b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a;b) \,\Big|\, f(\xi) = 0$$

□ Разделим исходный отрезок пополам точкой x_0, если $f(x_0) = 0$, то искомая точка найдена. В противном случае, если сдвинем одну из границ отрезка $[a;b]$ в точку x_0 так, чтобы исходное условие теоремы выполнялось

1. $f(x_0) < 0, f(a) < 0 \Longrightarrow a \to x_0$
2. $f(x_0) < 0, f(b) < 0 \Longrightarrow b \to x_0$
3. $f(x_0) > 0, f(a) > 0 \Longrightarrow a \to x_0$
4. $f(x_0) > 0, f(b) > 0 \Longrightarrow b \to x_0$

Обозначим новый отрезок $[a_1;b_1]$, снова разделим его пополам и т.д. В итоге мы либо найдем искомую точку за конечное число разбиений, либо получим последовательность отрезков $[a_n;b_n]$, таких что $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Воспользуемся предельным переходом

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n) \tag{1}$$

Т.к. отрезки вложены друг в друга, то возьмём их общую точку μ. Тогда, если длина отрезков стремится к нулю, то их концы стремятся к точке μ, а учитывая непрерывность функции получаем

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \mu \\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\mu) \end{gathered} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1), получим что $f(\mu) = 0$ и искомая точка найдена. ■

Теорема 1.12.4. (Больцано–Коши II) Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и m — наименьшее значение функции на этом отрезке, а M — наибольшее, то она принимает все значения из отрезка $[m;M]$.

□ Пусть минимум на отрезке $[a;b]$ достигается в точке c_1, а максимум достигается в точке c_2, т.е. $f(c_1) = m, f(c_2) = M$. Причем понятно, что $[c_1;c_2] \subseteq [a;b]$. Возьмём произвольное значение C из отрезка $(m;M)$ и рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = f(x) - C$, которая непрерывна как разность непрерывных функций. Тогда

$$\begin{gathered} h(c_1) = m - C \qquad h(c_2) = M - C \\ C \in (m;M) \Longrightarrow m - C < 0, M - C > 0 \end{gathered}$$

Применим первую теорему Больцано–Коши для функции $h(x)$ на отрезке $[c_1;c_2]$ (мы уже показали, что функция $h(x)$ удовлетворяет условиям этой теоремы). Получим, что

$$\exists \xi \in [c_1;c_2] \,\Big|\, h(\xi) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} [c_1;c_2] \subseteq [a;b] \\ h(\xi) = f(\xi) - C = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C = f(\xi)$$

Значит для произвольного $C \in (m; M)$ мы нашли такую точку ξ, что $f(\xi) = C$, при этом значения функция равные m и M достигаются в точках c_1 и c_2. Таким образом для любого числа C из отрезка $[m; M]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = C$. ■

1.13. Определение и классификация разрывов.

Def 1.13.1. Разрывом называется отсутствие непрерывности в точке.

Классификация разрывов

Классификация разрывов заключается в вычислении односторонних пределов.
К разрывам I-ого рода относятся

1. Устранимый разрыв.
2. Конечный неустранимый разрыв.
3. Разрыв со скачком.

К разрывам II-ого рода относятся

1. Бесконечный разрыв.
2. Несобственный бесконечный разрыв.

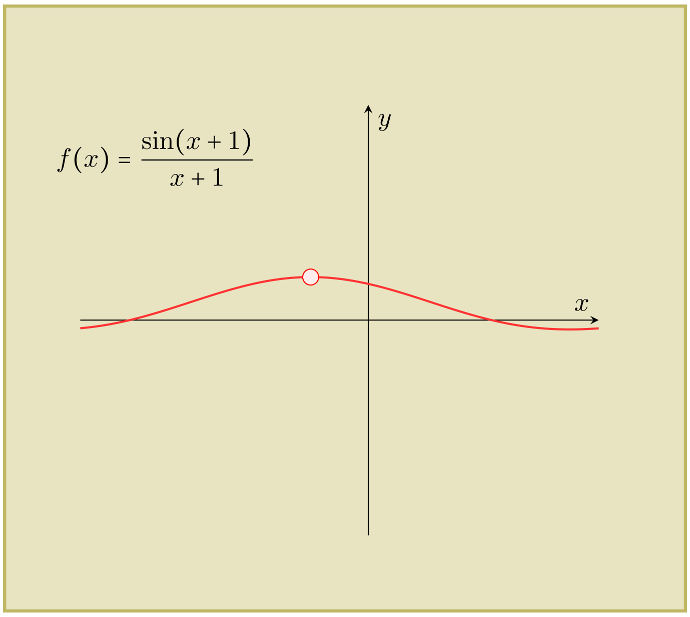

Рис. 1.13.2: Устранимый разрыв

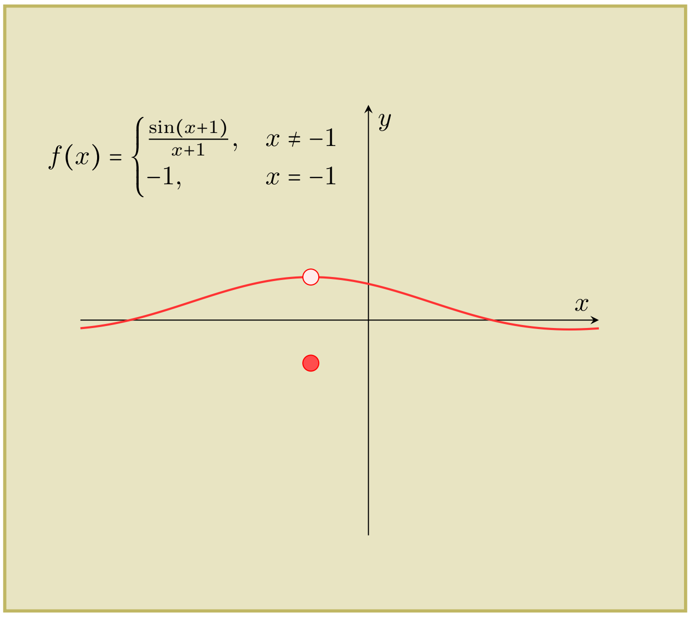

Рис. 1.13.3: Конечный неустранимый разрыв

Def 1.13.4. Разрыв называется устранимым (рис. 1.13.2), если

1. Функция не существует в этой точке.
2. Предел в этой точке существует и конечен.

Def 1.13.5. Разрыв называется конечным неустранимым (рис. 1.13.3), если

1. Функция существует в этой точке.
2. Предел существует в этой точке и конечен.
3. Значение функции не равно значению предела в этой точке.

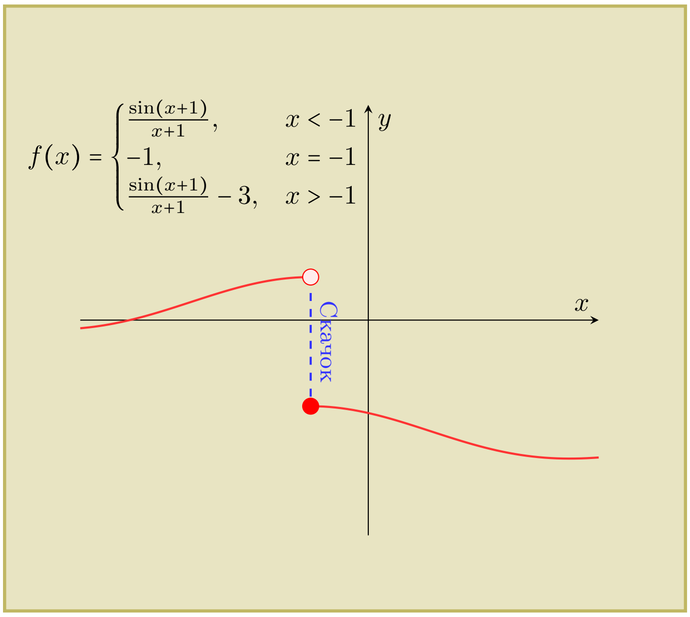

Рис. 1.13.6: Разрыв со скачком

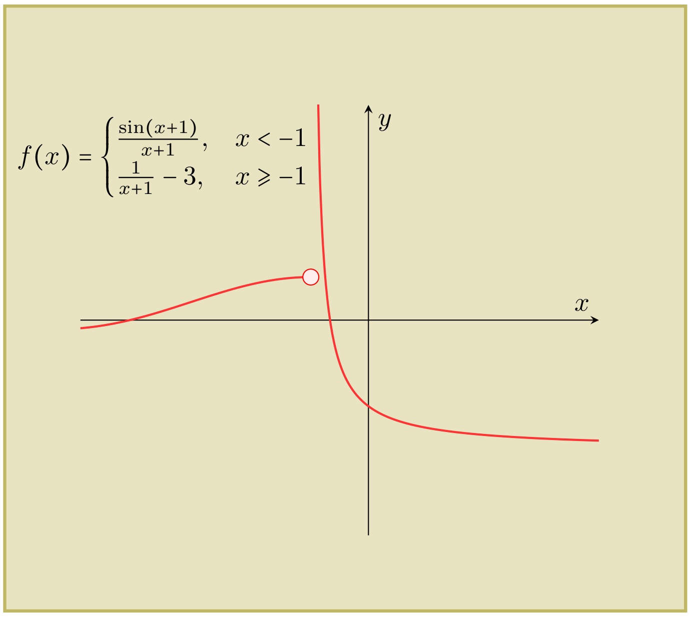

Рис. 1.13.7: Бесконечный разрыв

Def 1.13.8. Разрыв называется разрывом со скачком (рис. 1.13.6), если односторонние пределы в этой точке существуют и конечны, но не равны.

Замечание 1.13.9. Функция может быть не определена в этой точке. Скачок определяется как модуль разности односторонних пределов.

Def 1.13.10. Разрыв называется бесконечным (рис. 1.13.7), если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

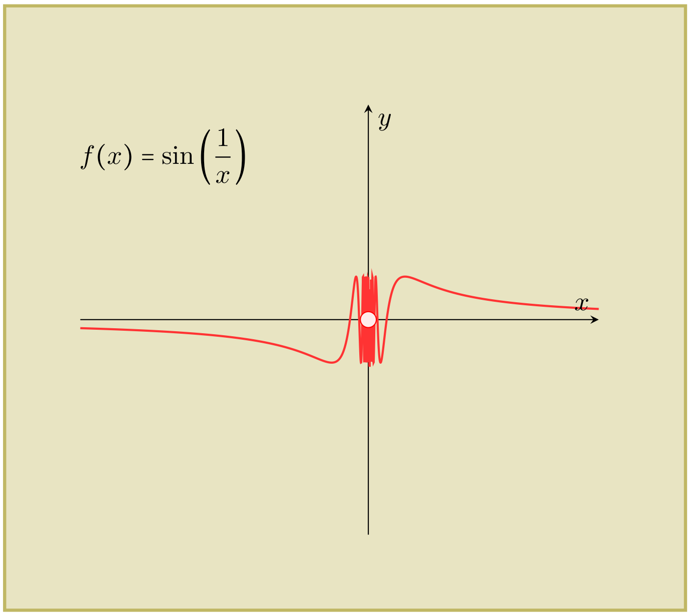

Рис. 1.13.11: Несобственный бесконечный разрыв

Def 1.13.12. Разрыв называется несобственным бесконечным (рис. 1.13.11), если не существует односторонних пределов.

1.14. Определение производной функции. Дифференцируемая функция. Дифференциал 1-го порядка.

Def 1.14.1. Производной функции в точке x_0 называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Def 1.14.2. Функция дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists A \Big| \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1.14.3. (Критерий дифференцируемости) Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если существует конечная производная в этой точке.

□ ($\Longleftarrow$) Распишем производную по определению, после чего воспользуемся представлением функции пределом.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f'(x) + \alpha(\Delta x) \qquad \Big| \cdot \Delta x \\ \Delta y &= f'(x)\Delta x + \underbrace{\alpha(\Delta x)\Delta x}_{o(\Delta x)} \end{aligned}$$

Обозначив $f'(x) = A$, получаем требуемое равенство.
($\Longrightarrow$) Имеем $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, разделим это на $\Delta x \neq 0$ и воспользуемся представлением функции пределом в обратную сторону.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$$

■

Def 1.14.4. Пусть $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{k \cdot \alpha^n(x)} = 1$, тогда $k \cdot \alpha^n(x)$ называют главной частью функции $\beta(x)$.

$$\beta(x) \sim k \cdot \alpha^n(x) \qquad \beta(x) = k \cdot \alpha^n(x) + o(k \cdot \alpha^n(x))$$

Замечание 1.14.5. Главная часть функции позволяет с некоторой погрешностью заменять сложную (показательную, логарифмическую) функцию на простую (степенную), при этом порядок n показывает точность вычисления $\beta(x)$.

Def 1.14.6. Дифференциалом (первого порядка) функции в точке называется главная (линейная) часть её приращения в этой точке $\mathrm{d}y = y'\Delta x$.

Замечание 1.14.7. Дифференциал аргумента равен приращению $\mathrm{d}x = x'\Delta x = \Delta x$, поэтому производную можно обозначить в виде

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \Longrightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Замечание 1.14.8. Дифференциал служит простейшим приближением приращения, т.к. обычно его проще вычислить. При этом $\mathrm{d}y \neq \Delta y$, но при $\Delta x \to 0 \Big| \mathrm{d}y \to \Delta \to 0$ или $ddy \approx \Delta y$.

Замечание 1.14.9. С помощью дифференциала можно вычислять приближенное значение функции.

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Чем меньше будет Δx, тем точнее будут вычисления.

Пример 1.14.10. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и требуется найти $f(67)$, тогда

$$f(67) = f(64 + 3) \approx 4 + \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} \cdot 3 \approx 4 + \frac{1}{16} \approx 4.0625$$

Теорема 1.14.11. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

□ По определению дифференцируемости $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. Воспользуемся предельным переходом.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (A\Delta x + o(\Delta x)) = 0$$

Получаем, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что является определением непрерывности. ■

Замечание 1.14.12. Обратное в общем случае **неверно**, например: $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ непрерывна, но не дифференцируема.

1.15. Правила дифференцирования: производная и дифференциал суммы и произведения функций.

Теорема 1.15.1. Производная суммы равна сумме производных.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

□ Воспользуемся определением производной.

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f(x)+g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)+g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

Два полученных предела равны соответствующим производным по определению. ■

Теорема 1.15.2. Производная произведения функций равна

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

□ Воспользуемся определением производной.

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f(x)\cdot g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

В числителе добавим и вычтем $f(x+\Delta x)\cdot g(x)$, чтобы разложить на множители.

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot(g(x+\Delta x)-g(x))+g(x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x))\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}(g(x))\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

По определению производной заменим два предела производными, а оставшиеся пределы просто вычислим и получим искомую формулу.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

■

Замечание 1.15.3. Дифференциалы вычисляются аналогично производным.

$$\mathrm{d}(f(x)+g(x)) = \mathrm{d}(f(x))+\mathrm{d}(g(x))$$
$$\mathrm{d}(f(x)\cdot g(x)) = \mathrm{d}(f(x))\cdot g(x)+f(x)\cdot\mathrm{d}(g(x))$$

1.16. Правила дифференцирования: производная и дифференциал суммы и отношения функций.

Про производную суммы написано ранее (1.15.).

Теорема 1.16.1. Производная отношения функций равна

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

□ Воспользуемся определением производной.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}$$

Разделим почленно и применим свойства пределов.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

По определению производной заменим два предела производными, а оставшиеся пределы просто вычислим и получим искомую формулу.

$$f'(x)\cdot\frac{g(x)}{g^2(x)} - g'(x)\cdot\frac{f(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

■

Замечание 1.16.2. Дифференциал вычисляется аналогично производной.

$$\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}(f(x)) \cdot g(x) - f(x) \cdot \mathrm{d}(g(x))}{g^2(x)}$$

1.17. Правила дифференцирования: производная сложной функции, инвариантность дифференциала.

Теорема 1.17.1. (Производная сложной функции)

$$\left.\begin{aligned} & g(x) \in C_1(x) \\ & f(g) \in C_1(g_0 = g(x)) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f'(g(x)) = f'(g) \cdot g'(x)$$

□ По критерию дифференцируемости имеем

$$\begin{aligned} u = g(x) \in C_1(x) &\Longrightarrow \Delta u = g'(x)\Delta x + o(\Delta x) \\ y = f(g) \in C_1(g_0) &\Longrightarrow \Delta y = f'(u)\Delta u + o(\Delta u) \\ \Delta y &= f'(u)(g'(x)\Delta x + o(\Delta x)) + o(\Delta u) \end{aligned} \tag{1}$$

Также заметим, что

$$u = g(x) \in C_1(x) \Longrightarrow g(x) \in C_0(x) \Longleftrightarrow \Delta x \to 0 \Longrightarrow \Delta u \to 0 \tag{2}$$

Напишем определение производной для исходной функции.

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(u)g'(x) + f'(u)\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta x} \tag{3}$$

Второе и третье слагаемые в дают ноль в пределе, как отношение б.м. функции более высокого порядка и её аргумента (см. (2)), значит $(f(g(x)))' = f'(g)g'(x)$. ■

Замечание 1.17.2. Если необходимо взять производную от композиции нескольких функций, то можно пользоваться «расширенной» формулой производной композиции функций (правилом цепочки).

$$(f(g(h(\varphi(x)))))' = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(\varphi) \cdot \varphi'(x)$$

Теорема 1.17.3. Первый дифференциал сохраняет инвариантность формы.

□ Рассмотрим $y = f(x)$, пусть $x = u(t)$. Используя определение дифференциала и производную сложной функции получаем

$$\mathrm{d}y = y'_t \mathrm{d}t = y'_x \cdot \underbrace{x'_t \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = y'_x \mathrm{d}x$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. ■

Теорема 1.17.4. (Производная обратной функции)

$$\left.\begin{aligned} & f(x) \in C_1(x_0) \\ & f'(x_0) \neq 0 \\ & \exists g(y) = f^{-1}(y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

□ Раскроем производную по определению и преобразуем.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{1}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f(x) \in C_1(x_0) \Longrightarrow f(x) \in C_0(x_0) \Longleftrightarrow \Delta x \to 0 \Longrightarrow \Delta y \to 0 \\ \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \end{aligned} \tag{2}$$

Выражение в знаменателе это и есть производная обратной функции. Таким образом из (1) и (2) следует, что

$$f'(x) = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y)} \Longrightarrow \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

■

Теорема 1.17.5. (Производная параметрически заданной функции)

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t) \in C_1(t_0) \\ y = b(t) \in C_1(t_0) \\ \exists a^{-1}(t) \\ a'(t_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(x) = \frac{b'(t_0)}{a'(t_0)}$$

□ Т.к. $a(t)$ обратима, то $t = A(x)$, тогда по формуле производной сложной функции получаем

$$(b(A(x)))'_x = b'_A \cdot A'_x \tag{1}$$

По формуле производной обратной функции $A'_x = \dfrac{1}{x'_A}$. Учитывая, что $A(x) = t$ и $b(t) = y$, подставим это в (1).

$$b(t)'_x = b'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Longrightarrow y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{2}$$

■

1.18. Производные элементарных функций: константа, степенная функция.

Теорема 1.18.1.

$$f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Т.к. $f(x) = c$, то $\Delta y = 0$, а значит

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

■

Теорема 1.18.2.

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Воспользуемся биномом Ньютона и вычислим полученную дробь.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \\ \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} &= \\ \frac{x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} &= \\ \frac{nx_0^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x} &= \\ nx_0^{n-1} + \ldots + (\Delta x)^{n-1} & \end{aligned}$$

Заметим, что все слагаемые, кроме первого содержат Δx, причем мы рассматриваем предел при $\Delta x \to 0$. Это значит, что в пределе все слагаемые кроме первого обнулятся и получится

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (nx_0^{n-1} + \ldots + (\Delta x)^{n-1}) = nx_0^{n-1}$$

■

1.19. Производные элементарных функций: показательная, логарифмическая функции.

Теорема 1.19.1.

$$f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычислим значение числителя.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$$

Вернёмся к пределу и заменим скобку в числителе на эквивалент.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0} \Delta x \ln a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^{x_0} \ln a = a^{x_0} \ln a$$

■

Замечание 1.19.2. Частный случай производной показательной функции $a = e$, тогда $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

Теорема 1.19.3.

$$f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычислим значение числителя, для этого воспользуемся свойствами логарифмов.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a(x_0) = \log_a \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

Вернёмся к пределу и заменим логарифм в числителе на эквивалент.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x_0} \cdot \frac{1}{\ln a}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x_0 \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}$$

■

Замечание 1.19.4. Частный случай производной логарифмической функции $a = e$, тогда $(\log_e x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$.

1.20. Производные элементарных функций: синус и косинус.

Теорема 1.20.1.

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычислим значение числителя полученной дроби, для этого воспользуемся некоторыми тригонометрическими формулами.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \\ \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 &= \\ \sin x_0 \cos(\Delta x) + \cos x_0 \sin(\Delta x) - \sin x_0 &= \\ \sin x_0 (\cos(\Delta x) - 1) + \cos x_0 \sin(\Delta x) &= \\ -\sin x_0 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \cos x_0 \sin(\Delta x) \end{aligned}$$

Вернёмся к пределу и заменим синусы на эквивалентные степенные функции.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x_0 \cdot 0.5 \cdot (\Delta x)^2 + \cos x_0 \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-0.5 \sin x_0 \Delta x + \cos x_0) = \cos x_0$$

■

Теорема 1.20.2.

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$$

□ По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычислим значение числителя полученной дроби, для этого воспользуемся некоторыми тригонометрическими формулами.

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\
\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = \\
\cos x_0 \cos(\Delta x) - \sin x_0 \sin(\Delta x) - \cos x_0 = \\
\cos x_0 (\cos(\Delta x) - 1) - \sin x_0 \sin(\Delta x) = \\
-\cos x_0 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - \sin x_0 \sin(\Delta x)
\end{aligned}$$

Вернёмся к пределу и заменим синусы на эквивалентные степенные функции.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x_0 \cdot 0.5 \cdot (\Delta x)^2 - \sin x_0 \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-0.5 \sin x_0 \Delta x - \sin x_0) = -\sin x_0$$

■

1.21. Производные элементарных функций: тангенс и арктангенс.

Теорема 1.21.1.

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□ По определению тангенса

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

Далее пользуемся формулами производной частного, синуса и косинуса, а также основным тригонометрическим тождеством. Итого

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

■

Теорема 1.21.2.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

□ Рассмотрим обратную функцию $x(y) = \operatorname{tg} y$. Её производная будет равна $\frac{1}{\cos^2 y}$. По формуле производной обратной функции получаем, что

$$f'(x) = \frac{1}{1/\cos^2 y}$$

Подставим в это равенство известную тригонометрическую формулу $\frac{1}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1$. Учитывая, что $y = \operatorname{arctg} x$, получаем

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

■

1.22. Производные высших порядков. Дифференциал 2-го порядка.

Def 1.22.1. Если производная функции $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема в этой точке, то говорят, что определена вторая производная $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогичны определены производные и более высоких порядков $f'''(x), f^{(IV)}(x), f^{(V)}(x)\dots$
Данное определение позволяет выделить класс бесконечно дифференцируемых функций в точке, например $\sin x, e^x$ и т.д. Полиномы степени n называют n раз дифференцируемыми (т.к. после n дифференцирований производная будет оставаться равной 0).

Def 1.22.2. Дифференциалом функции второго порядка называется дифференциал дифференциала функции.

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = y''(x)\mathrm{d}x^2$$

Замечание 1.22.3. Дифференциал n–ого порядка определен как $\mathrm{d}^ny = y^{(n)}\mathrm{d}x^n$.

Теорема 1.22.4. Дифференциал второго (и более высокого) порядка не сохраняет инвариантность формы.

□ Рассмотрим $y = f(x)$, пусть $x = u(t)$. По определению второго дифференциала имеем

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(y'_t\mathrm{d}t)$$

Пусть $y'_t\mathrm{d}t = \bigstar$, применим определение первого дифференциала.

$$\mathrm{d}(\bigstar) = (\bigstar)'\mathrm{d}t = (y'_t\mathrm{d}t)'\mathrm{d}t$$

Раскроем полученное выражение по правилу производной произведения.

$$(y''_t\mathrm{d}t + y'_t(\mathrm{d}t)'_t)\mathrm{d}t = y''_t\underbrace{\mathrm{d}t\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}t^2} + y'_t\underbrace{(\mathrm{d}t)'_t\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}(\mathrm{d}t)=\mathrm{d}^2t} = y''_t\mathrm{d}t^2 + y'_t\mathrm{d}^2t$$

При этом по определению второго дифференциала $\mathrm{d}^2y = y''_x\mathrm{d}x^2$. Таким образом дифференциал второго порядка не сохраняет инвариантность формы. ■

1.23. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Ферма.

Теорема 1.23.1. (Ферма)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in C_1(x_0) \\ x_0 \text{ точка гладкого экстремума} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x) = 0$$

Теорема Ферма (чаще ее называют леммой Ферма) является необходимым (но недостаточным!) условием **гладкого** экстремума.

□ Пусть для определённости $f(x)$ достигает максимума в точке x_0 (для минимума доказательство аналогично). Тогда $f(x_0) \geqslant f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Получаем, что $f(x_0) \geqslant f(x) \Longrightarrow f(x) - f(x_0) \leqslant 0$. Заметим, что $f(x) - f(x_0)$ это приращение функции $\Delta y \leqslant 0$, а $x - x_0$ — приращение аргумента Δx. Рассмотрим два случая.

Случай I $x < x_0 \Longrightarrow \Delta x < 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{предельный переход}} f'(x_0 - 0) \geqslant 0$$

Случай II $x > x_0 \Longrightarrow \Delta x > 0$

Аналогично случаю I получаем, что $f'(x_0 + 0) \leqslant 0$.
Т.к. функция дифференцируема в точке x_0, то предел приращений в этой точке существует, а раз он не меньше нуля, но в то же время он не больше нуля, значит он равен нулю. Таким образом производная функции в точке x_0 равна нулю. ■

Замечание 1.23.2. Обратное утверждение в общем случае неверно. Например, $f(x) = x^3, x_0 = 0$, $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$, но при этом в точке $x_0 = 0$ нет экстремума.

Замечание 1.23.3. Теорема Ферма описывает только гладкие экстремумы.

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что в точке экстремума касательная параллельна оси Ox (рис. 1.23.4).

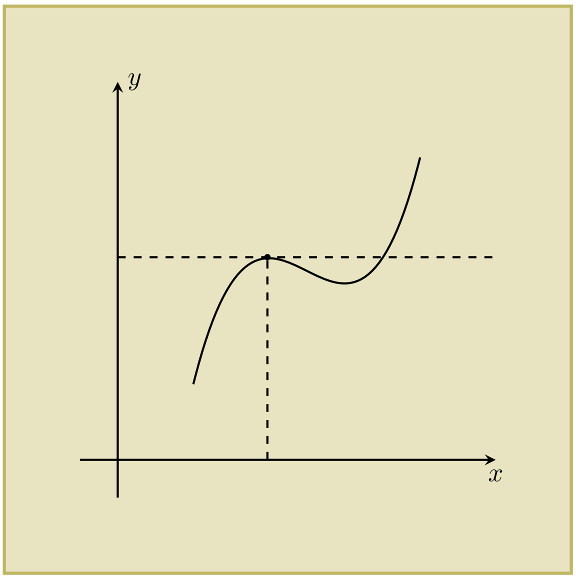

Рис. 1.23.4: Геометрический смысл теоремы Ферма

1.24. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Ролля.

Теорема 1.24.1. (Ролля)

$$\left.\begin{matrix} f(x) \in C_1\,[a;b] \\ f(a) = f(b) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a;b) \,\Big|\, f'(\xi) = 0$$

□ Т.к. функция дифференцируема на отрезке, то она непрерывна на этом отрезке, значит по второй теореме Вейерштрасса она принимает наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке (M и m). Если наибольшее или наименьшее значения достигаются на концах отрезка, то $f(a) = f(b) = M = m$. Значит по второй теореме Больцано-Коши функция принимает все значения от m до M, т.е. является константой. Таким образом её производная равна нулю в любой точке отрезка.
Если наибольшее или наименьшее значения достигаются внутри, то это означает, что внутри отрезка у функции есть экстремум. Таким образом, по лемме Ферма, если функция дифференцируема в точке и при этом в этой точке достигается экстремум, то производная в этой точке равна нулю. В обоих случаях нашлась некоторая точка, производная в которой равна нулю. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что она говорит о смене монотонности функции (рис. 1.24.2).

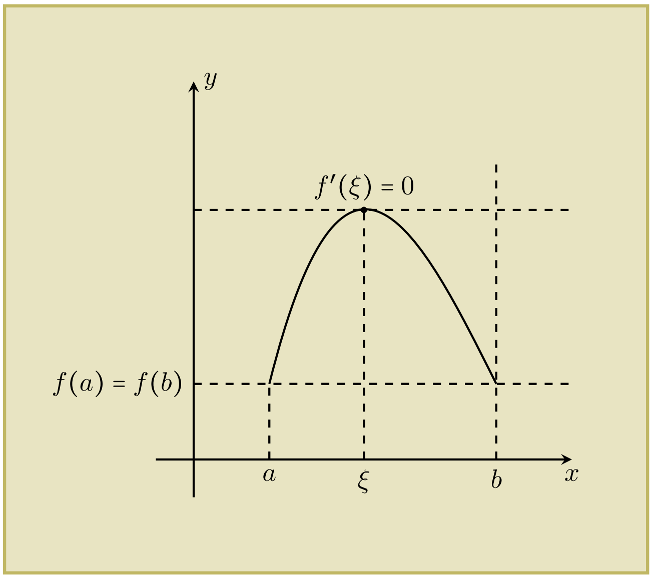

Рис. 1.24.2: Геометрический смысл теоремы Ролля

1.25. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Лагранжа.

Теорема 1.25.1. (Лагранжа)

$$f(x) \in C_1[a;b] \Longrightarrow \exists \xi \in (a;b) \,\Big|\, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

□ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x)(b-a) - x\Big(f(b)-f(a)\Big)$$

которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

1. $\varphi(x) \in C_1[a;b]$ как линейная комбинация функций дифференцируемых на $[a;b]$.
2. Она принимает равные значения на концах отрезка $[a;b]$.
   (a) $\varphi(a) = f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a = f(a)b - f(b)a$
   (b) $\varphi(b) = f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b = f(a)b - f(b)a$

Таким образом по теореме Ролля

$$\exists \xi \in (a;b) \,\Big|\, \varphi'(\xi) = 0$$
$$\varphi'(\xi) = f'(\xi)(b-a) - (f(b)-f(a)) = 0$$
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

■

Замечание 1.25.2. Полученная формула $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ также называется формулой конечных приращений.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что На интервале $(a;b)$ найдется точка ξ, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 1.25.3).
Механический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что если тело двигалось с переменной скоростью и при этом $\vec{v}_{\text{сред}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{B-A}{\Delta t}$, то найдется точка t_0, в которой $\vec{v}_{\text{сред}} = \vec{v}_{\text{мгн}}$ (рис. 1.25.4).

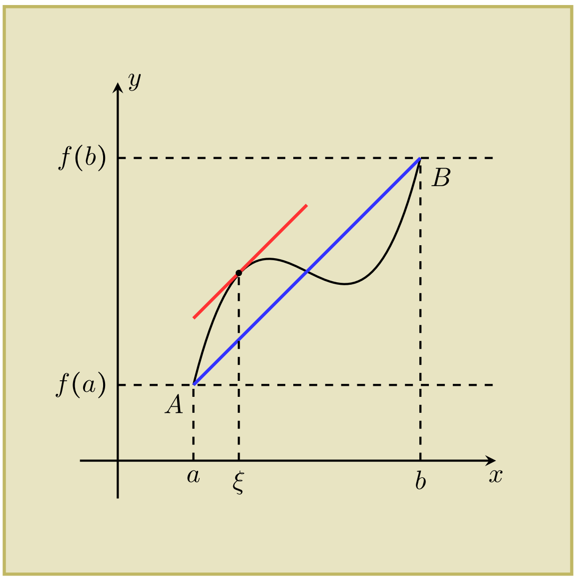

Рис. 1.25.3: Геометрический смысл теоремы Лагранжа

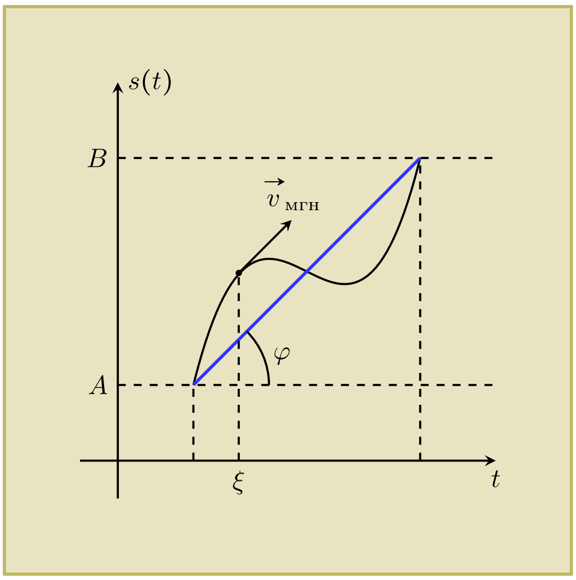

Рис. 1.25.4: Механический смысл теоремы Лагранжа

1.26. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Коши.

Теорема 1.26.1. (Коши)

$$\left.\begin{aligned} f(x), g(x) \in C_1[a;b] \\ \forall x \in [a;b] \,\Big|\, g'(x) \neq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a;b) \,\Big|\, \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

□ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \Big(f(x) - f(a)\Big)\Big(g(b) - g(a)\Big) - \Big(f(b) - f(a)\Big)\Big(g(x) - g(b)\Big)$$

которая удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

1. $\varphi(x) \in C_1[a;b]$ как линейная комбинация функций дифференцируемых на $[a;b]$.
2. Она принимает равные значения на концах отрезка $[a;b]$.
   (a) $\varphi(a) = \Big(f(a) - f(b)\Big)\Big(g(a) - g(b)\Big)$
   (b) $\varphi(b) = \Big(f(b) - f(a)\Big)\Big(g(b) - g(a)\Big) = \Big(f(a) - f(b)\Big)\Big(g(a) - g(b)\Big)$

Таким образом по теореме Ролля

$$\begin{aligned}
\exists \xi \in (a;b) \Big| \varphi'(\xi) = 0 \\
\varphi'(\xi) = f'(\xi)\Big(g(b) - g(a)\Big) - \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(\xi) = 0 \\
f'(\xi)\Big(g(b) - g(a)\Big) = \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(\xi) \\
\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}
\end{aligned}$$

■

Замечание 1.26.2. Если $g'(x) = 0$, то $g = const \Longrightarrow g(b) - g(a) = 0$. При такой ситуации полученная формула не работает.

Замечание 1.26.3. Данная формула применима и к параметрически заданной функции.

1.27. Теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя.

Теорема 1.27.1. При неопределенностях вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

при условии, что

1. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a.
2. $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки a.
3. $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

□ **Шаг I** $\left[\frac{0}{0}\right]$

По теореме Коши

$$\exists \xi \in u_{|x-a|}(a)\colon \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\begin{cases} f(x) \in C_1(a) \Longrightarrow f(x) \in C_0(a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ g(x) \in C_1(a) \Longrightarrow g(x) \in C_0(a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \end{cases} \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \Longrightarrow f(a) = g(a) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, распишем его по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall x\colon 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$$

Однако $\forall x\colon 0 < |x-a| < \delta \Big| \exists \xi$, такая что

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \\ \xi \in u_{|x-a|}(a)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta_\xi > 0\,\Big|\,\forall x\colon 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$$

Это определение предела, значит мы получаем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Шаг II $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Так как f, g б.б функции, то $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$ б.м.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Данный предел имеет неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, как отношение б.м. Применим уже ранее доказанное правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)^2}{g(x)^2} = \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2$$

Итого получаем, что

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 \\ \frac{1}{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}} &= \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)} \\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

■

Замечание 1.27.2. Правило Лопиталя можно применять несколько раз, например

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6} = \infty$$

Замечание 1.27.3. Если после применения правила Лопиталя, получился несуществующий предел, это не значит, что исходный предел не существует, например

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x} &= 1-0 = 1 \\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1} &\to \nexists\end{aligned}$$

В данном случае правило Лопиталя неприменимо.

1.28. Формула Тейлора.

Т.к. исследовать некоторые функции достаточно трудно, мы можем заменить их некоторым многочленом $P_n(x-x_0)$, так чтобы $f(x)\sim P_n(x-x_0)$ при $x\to x_0$.

Теорема 1.28.1. (Формула Тейлора)

$$f(x)\in C_n(x_0) \Longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + r_n(f,x)$$

То, что находится под знаком суммы называется многочленом Тейлора, а $r_n(f,x)$ называется остаточным членом.

□ Предположим, что

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0)^1 + \ldots + c_n(x-x_0)^n$$

Выразим коэффициенты c_i.

$$
\begin{aligned}
c_0 &= P_n(x_0) &&= f(x_0)\\
c_1 &= P_n'(x_0) &&= f'(x_0)\\
2\cdot c_2 &= P_n''(x_0) &&= f''(x_0)\\
&\dots\\
i!\cdot c_i &= P_n^{(i)}(x_0) &&= f^{(i)}(x_0)
\end{aligned}
$$

Таким образом $c_i = \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$, значит получим следующий многочлен

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \dots$$

Т.к. этот многочлен является лишь приближением функции, то добавим к нему остаточный член $r_n(f,x)$, который отвечает за погрешность приближения. ■

Lm 1.28.2.

$$f(x) \in C_1(x_0) \Longrightarrow r_n'(f,x) = r_{n-1}(f',x)$$

□ Выразим остаточный член из формулы Тейлора.

$$r_n(f,x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

Теперь возьмём производную (по x) и упростим.

$$
\begin{aligned}
(r_n(f,x))' &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k\cdot(x-x_0)^{k-1}\\
(r_n(f,x))' &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\cdot(x-x_0)^{k-1}\\
(r_n(f,x))' &= f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^{k}
\end{aligned}
$$

Далее заметим, что $f^{(k+1)} = (f')^{(k)}$, получим

$$(r_n(f,x))' = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^{k}$$

Правая часть является остаточным членом формулы Тейлора для $f'(x)$ значит $(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x)$. ■

Теорема 1.28.3. (Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано)

$$f(x) \in C_{n-1}(x_0) \Longrightarrow r_n(f,x) = o((x-x_0)^n) \qquad (x\to x_0)$$

□ Мат. индукция.

База $n = 1$

При $n = 1$ формула Тейлора имеет вид

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + o(x-x_0)\\
\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\Delta y} &= f'(x)\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x}\underbrace{o(x-x_0)}_{\Delta x}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Это верно по критерию дифференцируемости, т.к. $f(x) \in C_1(x_0)$.

Переход $n-1 \to n$

Если в формуле Тейлора $x = x_0$, то $r_n(f,x_0) = 0$. Значит $r_n(f,x) = r_n(f,x) - 0 = r_n(f,x) - r_n(f,x_0)$. Т.к. $f(x)$ дифференцируема $n-1$ раз в окрестности точки x_0, то по теореме Лагранжа получаем

$$r_n(f,x) - r_n(f,x_0) = (r_n(f,\xi))'(x-x_0) \tag{2}$$

где ξ лежит между x и x_0. Мы не можем сказать, что $\xi \in (x;x_0)$, т.к не знаем, что больше x или x_0. По лемме о производной остаточного члена (1.28.2) получаем

$$(r_n(f,\xi))'(x-x_0) = r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0) \tag{3}$$

Причем если $f(x)$ дифференцируема $n-1$ раз в некоторой окрестности точки x_0, то $f'(x)$ дифференцируема $n-2$ раз в той же окрестности, значит мы можем выполнить индукционный переход.
Т.к. мы предполагали, что $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$, то

$$r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0) = o((\xi-x_0)^{n-1})(x-x_0) \tag{4}$$

Т.к. ξ лежит между x и x_0, то $|\xi - x_0| < |x-x_0|$, значит

$$o((\xi-x_0)^{n-1}) = o((x-x_0)^{n-1}) \tag{5}$$

В итоге получаем равенство

$$r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0) = o((x-x_0)^n) \tag{6}$$

Приравняем (3) и (6) и подставим это в (2), получим искомое равенство $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$. ■

Теорема 1.28.4. (Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа)

$$\left.\begin{matrix} f^{(n)}(x) \in C_0\,[x_0;x] \\ \exists f^{(n+1)} \in (x_0;x) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi \in (x_0;x))$$

□ Мат. индукция.

База $n=0$

При $n=0$ формула Тейлора имеет вид

$$\begin{gathered} f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\cdot(x-x_0) \qquad \xi \in (x_0;x) \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \end{gathered} \tag{1}$$

Это верно по теореме Лагранжа.

Переход $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Пусть формула

$$r_{n-1}(f,x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \tag{2}$$

справедлива для $n-1$. Выразим $\dfrac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}}$. Если в формуле Тейлора $x=x_0$, то $r_n(f,x_0)=0$, значит

$$\frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f,x)-0}{(x-x_0)^{n+1}-0} = \frac{r_n(f,x)-r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} \tag{3}$$

Применяя вначале формулу Коши, а потом лемму о производной остаточного члена (1.28.2) получаем

$$\exists\mu \in (x_0;x) \;\Big|\; \frac{r_n(f,x)-r_n(f,x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{(r_n(f,\mu))'}{(n+1)\cdot(\mu-x_0)^n} = \frac{r_{n-1}(f',\mu)}{(n+1)\cdot(\mu-x_0)^n} \tag{5}$$

Т.к. мы предполагали, что формула (2) истинна то

$$r_{n-1}(f',\mu) = \frac{(f')^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(\mu-x_0)^n \tag{6}$$

Подставим это в (5)

$$\frac{r_{n-1}(f',\mu)}{(n+1)\cdot(\mu-x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(\mu-x_0)^n}{n!\cdot(n+1)\cdot(\mu-x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Значит

$$\begin{gathered} \frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \end{gathered}$$

■

Def 1.28.5. Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $x_0 = 0$ и с остаточным членом в форме Пеано.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + o(x^n)$$

Замечание 1.28.6. Разложения некоторых функций по формуле Маклорена.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

1.29. Исследование функции: Монотонность. Экстремумы. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Def 1.29.1. Функция $f(x)$ называется возрастающей, если

$$\forall x, y \Big| x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \nearrow [a;b]$$

Def 1.29.2. Функция $f(x)$ называется неубывающей, если

$$\forall x, y \Big| x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \curvearrowright [a;b]$$

Def 1.29.3. Функция $f(x)$ называется убывающей, если

$$\forall x, y \Big| x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \searrow [a;b]$$

Def 1.29.4. Функция $f(x)$ называется невозрастающей, если

$$\forall x, y \Big| x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \hookrightarrow [a;b]$$

Def 1.29.5. Функция называется монотонной на отрезке, если она либо невозрастающая, либо неубывающая на этом отрезке.

Def 1.29.6. Если функция возрастает (убывает) на отрезке, то она называется строго монотонной.

Теорема 1.29.7. (Достаточное условие монотонности на интервале)

$$\left.\begin{aligned} &f(x) \in C_1(a;b) \\ &\forall x \in (a;b) \Big| f'(x) > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(x) \nearrow (a;b)$$

$$\left.\begin{aligned} &f(x) \in C_1(a;b) \\ &\forall x \in (a;b) \Big| f'(x) < 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(x) \searrow (a;b)$$

□ Рассмотрим случай строго возрастающей функции (для строго убывающей функции доказательство аналогично). Возьмем две произвольные точки $x_1, x_2 \in (a;b)$ так, чтобы $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа получаем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \qquad (\xi \in (a;b))$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

Далее рассмотрим правую часть.

$$\left.\begin{aligned} &\forall x \in (a;b)\, f'(x) > 0 \text{ (по условию)} \\ &\xi \in (a;b) \text{ (по т. Лагранжа)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f'(\xi) > 0$$

$$\left.\begin{aligned} &f'(\xi) > 0 \\ &x_2 > x_1 \text{ (по предположению)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) > 0$$

$$\forall x_2 > x_1 \Big| f(x_2) - f(x_1) > 0$$

Значит $f(x)$ строго возрастает по определению. ■

Лемма Ферма (1.23.1) это необходимое условие только **гладкого** экстремума.

Теорема 1.29.8. (Необходимое условие экстремума)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in C_1 u_\delta(x_0) \\ f(x) \in C_0 x_0 \\ x_0 \text{ точка экстремума} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(x_0) \in \{0, \pm\infty\} \\ \text{ либо} \\ \nexists f'(x_0) \end{array}\right.$$

Теорема 1.29.9. (Достаточное условие экстремума)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in C_1 u_\delta(x_0) \\ f(x) \in C_0 x_0 \\ f'(x) \text{ меняет свой знак в } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \text{ точка экстремума}$$

□ Рассмотрим случай смены знака производной с «+» на «−» (случай смены «−» на «+» доказывается аналогично).

Слева $x < x_0, f'(x) > 0$

Распишем производную по определению.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Т.к. $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, значит знаменатель меньше нуля, но т.к. вся дробь больше нуля, то числитель тоже должен быть меньше нуля, значит $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$.

Справа $x > x_0, f'(x) < 0$

Распишем производную по определению.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Т.к. $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, значит знаменатель больше нуля, но т.к. вся дробь меньше нуля, то числитель тоже должен быть меньше нуля, значит $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$.
Таким образом $f(x) < f(x_0)$, значит x_0 это точка максимума, т.е. в ней достигается экстремум. ■

Замечание 1.29.10. Для того, чтобы найти точки экстремума сначала с помощью необходимого условия ищем точки, подозрительные на экстремум (точки, в которых производная равна нулю/бесконечности или не существует), а потом проверяем их с помощью достаточного условия.

Теорема 1.29.11. В некоторых случая все производные в точке x_0, кроме $(n+1)$–ой обнуляются, тогда удобно провести исследование функции на экстремум с помощью формулы Тейлора (при условии, что $(n+1)$–ая производная непрерывна).

1. $n+1$ — нечетное число $\Longrightarrow$ нет экстремума.
2. $n+1$ — четное число $\Longrightarrow$ есть экстремум, причем
   (a) $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ это точка минимума.
   (b) $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ это точка максимума.

□ Рассмотрим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Т.к. первые n производных равны нулю, то формула упрощается

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \qquad (\xi \in (x_0; x))$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

$f^{(n+1)}$ непрерывна и $\xi \to x_0$ при $x \to x_0$, значит по теореме о стабилизации знака $f^{(n+1)}(\xi)$ имеет такой же знак, как и $f^{(n+1)}(x_0)$. Рассмотрим два случая.

Случай I $n+1$ нечетное

Тогда $(x - x_0)^{n+1}$ меняет свой знак при переходе через x_0. При этом $f^{(n+1)}(\xi)$ имеет постоянный знак (неважно какой). Значит $f(x) - f(x_0)$ тоже меняет свой знак при переходе через x_0. Таким образом в x_0 нет экстремума.

Случай II $n+1$ четное

Тогда $(x-x_0)^{n+1} > 0$, а это значит что знак $f(x)-f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n+1)}(\xi)$, который (как уже было показано) совпадает со знаком $f^{(n+1)}(x_0)$. Рассмотрим два варианта.

Случай II.a $f^{(n+1)}(x_0) > 0$

Тогда $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$. Таким образом x_0 точка минимума.

Случай II.b $f^{(n+1)}(x_0) < 0$

Тогда $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$. Таким образом x_0 точка максимума. ■

1.30. Исследование функции: Выпуклость функции. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия перегиба.

Def 1.30.1. Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх в точке x_0, если она непрерывна в окрестности этой точки и касательные к графику функции $f(x)$ для любого x из этой окрестности лежат выше графика функции (рис. 1.30.4).

Def 1.30.2. Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз в точке x_0, если она непрерывна в окрестности этой точки и касательные к графику функции $f(x)$ для любого x из этой окрестности лежат ниже графика функции.

Def 1.30.3. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая, задающаяся уравнением $y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

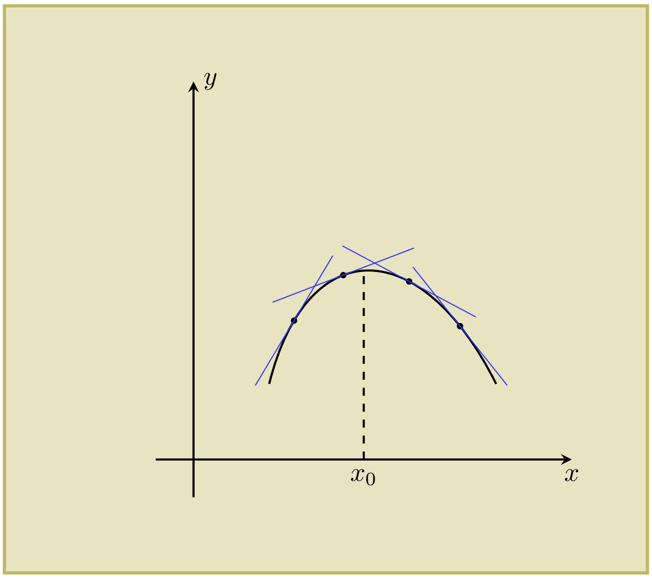

Рис. 1.30.4: Выпуклая вверх функция

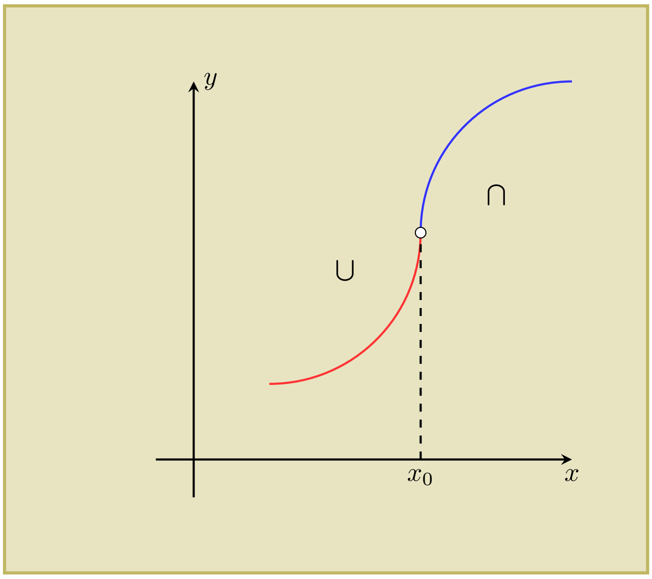

Рис. 1.30.5: Точка перегиба

Def 1.30.6. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и при этом меняет характер выпуклости в этой точке, то точка x_0 называется точкой перегиба (рис. 1.30.5).

Замечание 1.30.7. В малой окрестности точки перегиба график функции становится прямой, т.е. имеет нулевую выпуклость.

Теорема 1.30.8. (Необходимое условие (гладкого?) перегиба) Если $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и при этом x_0 точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

□ Переобозначим $g(x) = f'(x)$, тогда $f''(x) = g'(x)$. Т.к. по определению точки перегиба в x_0 меняется характер выпуклости, то $f''(\xi)$ (где $\xi \in u_x(x_0)$) меняет свой знак, значит (в новых обозначениях) $g'(x)$ меняет свой знак.
Если $g'(x)$ меняет свой знак, то согласно достаточному условию экстремума x_0 это точка (гладкого) экстремума для функции $g(x)$. Таким образом $g'(x_0) = 0 = f''(x_0)$. ■

Теорема 1.30.10. (Достаточное условие перегиба) Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и её вторая производная меняет знак при проходе через эту точку, то x_0 это точка перегиба.
Отдельно стоит рассмотреть случай
Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и её первая производная в этой точке бесконечна, то x_0 это точка перегиба.

□ Сделаем рисунок (рис. 1.30.9), проведем касательную $k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Выпуклость зависит от знака разности $f(x) - k(x)$ в окрестности точки x_0 (по определению выпуклой вверх/вниз функции необходимо проверить,

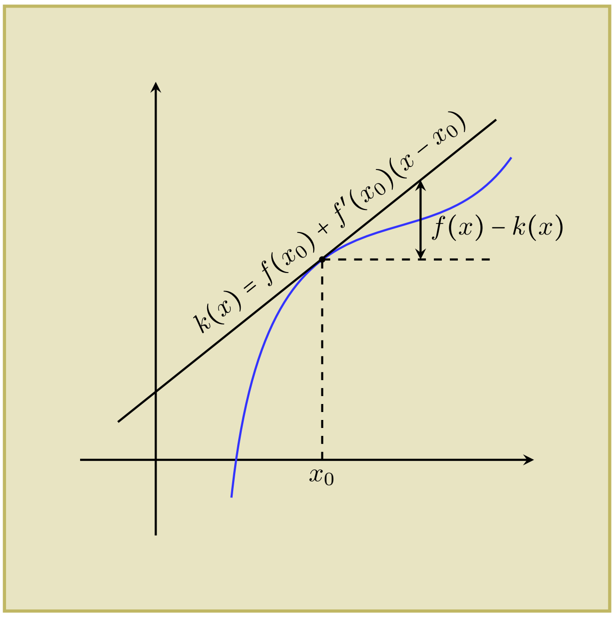

Рис. 1.30.9: Достаточное условие перегиба

лежит ли касательная над или под графиком функции). Распишем $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 до $n = 1$, получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(f, x)$$

Подставим это и уравнение касательной в разность $f(x) - k(x)$, получим

$$f(x) - k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(f, x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x) - k(x) = r_1(f, x)$$

Таким образом, необходимо узнать знак остаточного члена в формуле Тейлора для исследуемой функции. Чтобы это сделать, запишем этот остаток в форме Лагранжа, получим

$$r_1(f, x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 \qquad (\xi \in (x_0; x))$$

Т.к. $(x - x_0)^2 > 0$, то знак остатка (а следовательно и выпуклость) зависит от знака второй производной в окрестности точки x_0. ■

1.31. Определение функции двух переменных. Предел и непрерывность функции.

Def 1.31.1. Функцией двух переменных называется отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такое что

$$\forall M(x, y) \in D \,\Big|\, \exists!\, N(x, y, z(x, y)) \,\Big|\, z = f(M)$$

Def 1.31.2. Областью определения функции двух переменных будет некоторая область $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Def 1.31.3. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса δ будет круг, такой что

$$u_\delta(M_0) = \left\{(x, y) \,\middle|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

Замечание 1.31.4. В дальнейшем данный корень будем обозначать $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Def 1.31.5. Проколотой окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса δ будет называться окрестность точки M_0 без точки M_0.

$$\mathring{u}_\delta(M_0) = u_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$$

Def 1.31.6. Точка M называется точкой сгущения множества D, если пересечение любой её проколотой δ–окрестности с этим множеством не пусто.

Def 1.31.7. Область называется замкнутой, если она содержит все свои (конечные) точки сгущения (рис. 1.31.8). Область называется открытой, если она не замкнута (рис. 1.31.9).

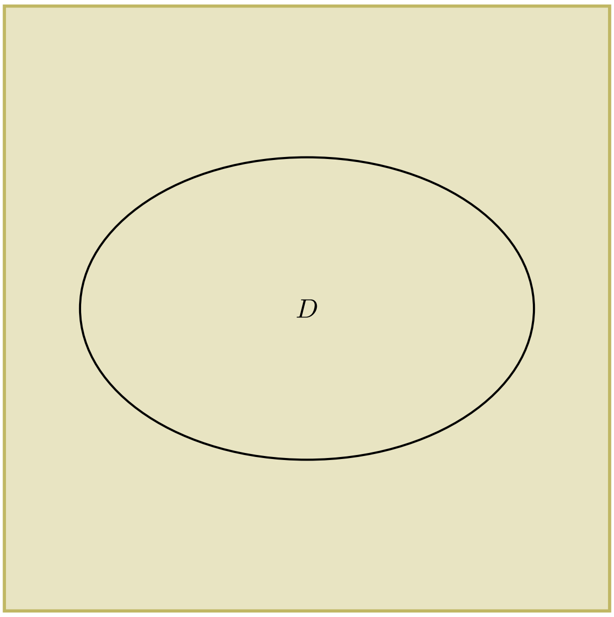

Рис. 1.31.8: Замкнутая область

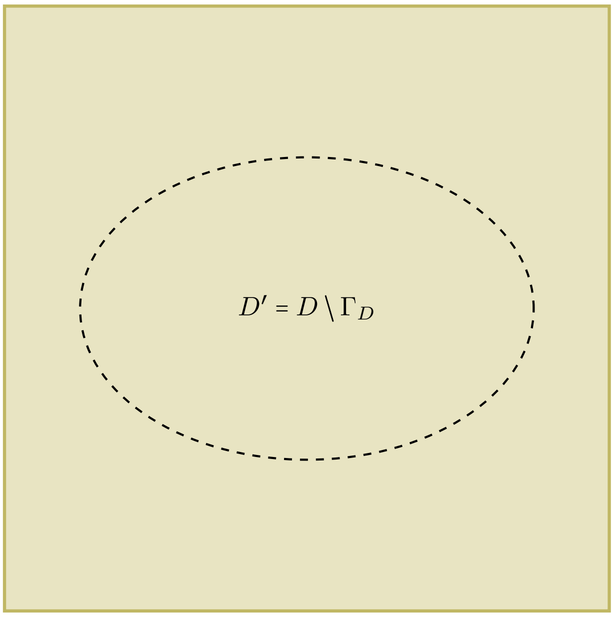

Рис. 1.31.9: Открытая область

Def 1.31.10. Точка сгущения называется граничной точкой множества, если любая её δ–окрестность не полностью лежит в этом множестве.

Def 1.31.11. Множество граничных точек множества называется границей множества Γ_D.

Def 1.31.12. Предел функции двух переменных (в общем смысле) это

$$\lim_{M \to M_0} z(M) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \Big| \forall M \in \mathring{u}_\delta(M_0) \cap D \Longrightarrow z(M) \in u_\varepsilon(L)$$

Замечание 1.31.13. Т.к. на плоскости бесконечно много способов приблизиться к точке, то в некоторых направления предел может существовать, а в некоторых - нет. Предел в общем смысле говорит о том, что при приближении к точке **с любой стороны** значение функции будет приближаться к L.

Пример 1.31.14. Рассмотрим функцию $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(0,0)$.

$$\text{Путь } l_1: \qquad \left.\begin{matrix} x = t \\ y = t \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim_{l_1 : M \to M_0} \frac{t^2 - t^2}{t^2 + t^2} = 0$$

$$\text{Путь } l_2: \qquad \left.\begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim_{l_2 : M \to M_0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

Таким образом мы видим, что при приближении к точке M_0 по разным направлениям получаются разные пределы, значит предела в общем смысле не существует.

Def 1.31.15. Если сначала взять предел в сечении $x = const$ рассматривая $z(x, y)$ как функцию одной переменной, а потом взять предел по y, то получится повторный предел, который обозначается **(порядок важен!)** следующим образом

$$L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} z(x, y)$$

Если же сначала взять предел по y, а потом по x, то получится **другой** повторный предел.

$$L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} z(x, y)$$

Если один из пределов в составе повторного не существует, то и сам повторный предел не существует.

Замечание 1.31.16 (О порядке переменных в повторных пределах). Снова рассмотрим функцию $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(0,0)$. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

Таким образом порядок переменных в повторных пределах важен.

Замечание 1.31.17. Существование повторных пределов никак не связано с существованием предела в общем смысле. Предел в общем смысле может существовать, а повторные пределы — нет или наоборот.

Def 1.31.18.

$$z(x,y) \in C_0(M_0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{M \to M_0} z(x,y) = z(M_0)$$

Def 1.31.19. Функция нескольких переменных непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Замечание 1.31.20. Все свойства непрерывных функций одной переменных, описанные ранее (1.12.), справедливы и для непрерывной функции нескольких переменных.

1. Функция, непрерывная в области, ограничена на ней.
2. Функция, непрерывная в области, принимает на ней наибольшее и наименьшее значения.
3. Если функция, непрерывная в области, принимает на ней значения разных знаков, то найдется точка, принадлежащая этой области, где значение функции равно нулю.
4. Функция, непрерывная в области, принимает на ней все значения от наименьшего до наибольшего.

1.32. Частные производные функции двух переменных.

Def 1.32.1. Частным приращением функции двух переменных называется

1. по переменной $x \Big| \Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x,y)$
2. по переменной $y \Big| \Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x,y)$

Т.е. одна из переменных изменяется, а вторая остается константной.

Def 1.32.2. Полным приращение функции двух переменных называется $\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x,y)$.

Замечание 1.32.3. Полное приращение **НЕ равно** сумме частных приращений.

Def 1.32.4. Частной производной функции двух переменных называют

1. по переменной $x \Big| \dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$
2. по переменной $y \Big| \dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$

Замечание 1.32.5. При нахождении частной производной можно использовать все свойства производной функции одной переменной: другие переменные в этом случае рассматриваются как константы. Таким образом частная производная функции нескольких переменных определяется также, как и для функции одной переменной, только вместо полного приращения функции берется частное приращение по этой переменной. Например, частные производные функции $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y$ будут равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^2x + 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^2 + 5$$

1.33. Производная сложной функции. Полная производная.

Теорема 1.33.1. Пусть дана функция двух переменных $z = f(u,v)$, причем $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, т.е. $f(u,v)$ это сложная функция двух переменных. Тогда справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

□ Т.к. функция $z = f(u,v)$ дифференцируема, то её полное приращение представимо в виде

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v + o(\rho) \\
\frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x} \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta x} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим последний предел в полученной сумме и докажем, что он равен нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho}{\Delta x} \tag{2}$$

Первый из полученных пределов равен нулю по определению бесконечно малой более высокого порядка. Раскроем второй предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{(u'_x)^2 + (v'_x)^2} \tag{3}$$

Т.к. функции u и v дифференцируемы, то они имеет конечную производную, другими словами полученных предел конечен. Вернёмся к (2), т.к. первый равен нулю, а второй конечен, значит их произведение равно нулю. Таким образом исходный предел (2) также равен нулю. Подставим это в (1) и получим искомую формулу.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

■

Пример 1.33.2. Найдем частную производную по x функции $z(u, v) = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$ где $u = y + \sin x$ и $v = x^2 y$. Сначала найдем частные производные функции z по u и по v.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}$$

Далее найдем частные производные функций u и v по x.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 2xy$$

Подставим все полученное в итоговую формулу и получим

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}\right)\cos x + \left(-\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}\right)2xy$$

Ответ желательно оставить в таком виде, но можно и заменить u на $y + \sin x$ и v на $x^2 y$.

Теорема 1.33.3. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, причем $x = x(t)$ и $y = y(t)$, т.е. $z(x, y)$ это фактически функция одной переменной t. Тогда справедлива следующая формула

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Стоит обратить внимание на то, что где-то стоят полные производные (символ d), а где-то частные (символ ∂).

□ Доказательство аналогично доказательству предыдущей формулы (1.33.1). ■

Замечание 1.33.4. Можно рассмотреть частный случай для формулы описанной выше. Пусть $x = t$, т.е. $z = f(x, y(x))$. Формулой полной производной называется формула

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Пример 1.33.5. Найдем полную производную функции $z = xy^2 - x^2 y$, где $y = x \sin x$. Для этого сначала частные производные функции z по x и по y.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - 2xy \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - x^2$$

Найдём полную производную функции y по x (производная функции одной переменной).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin x + x \cos x$$

Подставим все полученное в итоговую формулу и получим

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (y^2 - 2xy) + (2xy - x^2) \cdot (\sin x + x \cos x)$$

Ответ желательно оставить в таком виде, но можно и заменить y на $x \sin x$.

1.34. Полный дифференциал функции двух переменных. Инвариантность формы.

Def 1.34.1. Частным дифференциалом функции двух переменных называется произведение соответствующей частной производной на частное приращение. Например, частный дифференциал по x имеет вид $\mathrm{d}_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x$.

Def 1.34.2. Функция двух переменных $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$, если ей полное приращение представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

Def 1.34.3. Функция двух переменных называется дифференцируемой на множестве D, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Теорема 1.34.4. Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то у нее существуют частные производные z'_x и z'_y в этой точке.

□ Т.к. $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то её полное приращение представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

Зафиксируем $y = const$, тогда $\Delta y = 0$, получим $\Delta z = A\Delta x + o(\Delta x)$. Из этого по критерию дифференцируемости функции одной переменной следует, что существует производная $z'_x = A$. Аналогично рассматривая y, получим что существует $z'_y = B$. ■

Следствие 1.34.5. Таким образом мы доказали, что дифференцируемая функция представима в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \qquad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

Def 1.34.6. Полным дифференциалом функции двух переменных называется линейная относительно Δx и Δy часть её полного приращения.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Замечание 1.34.7. Полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов.

Теорема 1.34.8. (Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных) Если функция $z = f(x,y)$ в точке M_0 имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y, то она дифференцируема в этой точке.

□ Рассмотрим полное приращение функции $z = f(x,y)$.

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)$$
$$\Delta z = \Big(z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y+\Delta y)\Big) + \Big(z(x, y+\Delta y) - z(x,y)\Big)$$

В каждой из скобок мы можем рассматривать функцию $z(x,y)$ как функцию одной переменной в плоскостях $y+\Delta y$ и x соответственно. Применим формулу Лагранжа к каждой из скобок, получим

$$\Delta z = z'_x(\xi, y+\Delta y)\Delta x + z'_y(x,\mu)\Delta y \qquad \begin{cases} \xi \in (x, x+\Delta x) \\ \mu \in (y, y+\Delta y) \end{cases}$$

Введем следующие обозначения

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \rho \to 0 \Longrightarrow \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

Т.к. по условию теоремы частные производные непрерывны, то

$$\left.\begin{matrix} \xi \in (x, x+\Delta x) \\ \Delta x \to 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim_{\rho\to 0} z'_x(\xi, y+\Delta y) = z'_x(x,y)$$
$$\left.\begin{matrix} \mu \in (y, y+\Delta y) \\ \Delta y \to 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \lim_{\rho\to 0} z'_y(x,\mu) = z'_y(x,y)$$

Воспользуемся представлением функции пределом.

$$z'_x(\xi, y+\Delta y) = z'_x(x,y) + \alpha(\rho)$$
$$z'_y(x,\mu) = z'_y(x,y) + \beta(\rho)$$

Значит полное приращение функции $f(x,y)$ можно представить в виде

$$\Delta z = (z'_x(x,y) + \alpha(\rho))\Delta x + (z'_y(x,y) + \beta(\rho))\Delta y$$
$$\Delta z = z'_x(x,y)\Delta x + z'_y(x,y)\Delta y + \alpha(\rho)\Delta x + \beta(\rho)\Delta y$$

Докажем, что $\alpha(\rho)\Delta x + \beta(\rho)\Delta y = o(\rho)$. Для этого рассмотрим предел

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\rho)\Delta x + \beta(\rho)\Delta y}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\left(\alpha(\rho)\frac{\Delta x}{\rho}\right) + \lim_{\rho\to 0}\left(\beta(\rho)\frac{\Delta y}{\rho}\right)$$

Заметим, что $\sqrt{\dfrac{(\Delta x)^2}{\rho^2} + \dfrac{(\Delta y)^2}{\rho^2}} = 1$. Из этого следует, что функции $\dfrac{\Delta x}{\rho}$ и $\dfrac{\Delta y}{\rho}$ ограничены (если быть точным, то каждая из них не превышает единицу). По свойству бесконечно малых получаем

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\alpha(\rho)\frac{\Delta x}{\rho}\right) + \lim_{\rho\to 0}\left(\beta(\rho)\frac{\Delta y}{\rho}\right) = \lim_{\rho\to 0}\alpha(\rho) + \lim_{\rho\to 0}\beta(\rho) = 0$$

Значит $\alpha(\rho)\Delta x + \beta(\rho)\Delta y = o(\rho)$ по определению бесконечно малой функции более высокого порядка. В итоге получаем, что полное приращение функции $z = f(x,y)$ представимо в виде $\Delta z = z'_x\Delta x + z'_y\Delta y + o(\rho)$. Таким образом функция $z = f(x,y)$ дифференцируема по определению. ■

Теорема 1.34.9. Первый полный дифференциал сохраняет инвариантность формы.

□ Рассмотрим $z = f(u,v)$, пусть $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$. По определению полного дифференциала получаем

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$
$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

Таким образом, форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента. ■

Замечание 1.34.10. С помощью дифференциала функции двух переменных можно искать дифференциал функции одной переменной, заданной неявно.

Пример 1.34.11. Пусть $F(x,y(x)) = 0$. Рассмотрим её как функцию двух независимых переменных и вычислим дифференциал.

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Этот дифференциал будет равен нулю (т.к. исходная функция равна нулю), значит

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

1.35. Вторые производные функции двух переменных. Равенство смешанных производных.

Def 1.35.1. Если первые производные функции двух переменных дифференцируемы, то определены вторые производные.

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$
$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Производные z''_{xx} и z''_{yy} называются чистыми производными. Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными производными.

Теорема 1.35.2. (Шварца) Если смешанные производные непрерывны, то они равны.

□ Рассмотрим две вспомогательные функции.

$$W = \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)}{\Delta x \Delta y}$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

Выразим W с помощью функции $\varphi(x)$, получим $W = \dfrac{\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}$. Т.к. функция $\varphi(x)$ дифференцируема (как разность дифференцируемых функций), значит можно воспользоваться теоремой Лагранжа, т.е.

$$W = \varphi'(\xi_1) = \frac{f'_x(\xi_1, y_0+\Delta y) - f'_x(\xi_1, y_0)}{\Delta y} \qquad (\xi_1 \in (x_0; x_0+\Delta x))$$

Введём вспомогательную функцию $h(y) = f'_x(\xi_1, y)$ и еще раз применим теорему Лагранжа.

$$W = \frac{h(y_0+\Delta y) - h(y_0)}{\Delta y}$$

$$W = h'(\zeta_1) = f''_{xy}(\xi_1, \zeta_1) \qquad (\zeta_1 \in (y_0; y_0+\Delta y))$$

Аналогично можно рассмотреть вспомогательную функцию $\psi(y) = \dfrac{f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)}{\Delta x}$ и в итоге получить, что

$$W = f''_{yx}(\xi_2, \zeta_2) \qquad (\xi_2 \in (x_0; x_0+\Delta x), \zeta_2 \in (y_0; y_0+\Delta y))$$

В итоге, применяя предельный переход при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ имеем

$$W = f''_{xy}(\xi_1, \zeta_1) = f''_{yx}(\xi_2, \zeta_2)$$

$$\lim_{\rho \to 0} f''_{xy}(\xi_1, \zeta_1) = \lim_{\rho \to 0} f''_{xy}(\xi_2, \zeta_2) \qquad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

В таком случае $\xi_1 \to x_0$, $\xi_2 \to x_0$, $\zeta_1 \to y_0$ и $\zeta_2 \to y_0$. По условию теоремы вторые производные непрерывны, значит $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. ■

Def 1.35.3. Вторым дифференциалом функции двух переменных называется дифференциал дифференциала функции двух переменных.

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Вывод формулы для второго дифференциала

По определению второй дифференциал равен $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z)$. Подставим первый дифференциал, получим

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

Еще раз применяем определение первого дифференциала.

1. Берем производную по x от того, что в скобках.
2. Умножаем её на $\mathrm{d}x$.
3. Берем производную по y от того, что в скобках.
4. Умножаем её на $\mathrm{d}y$.
5. Ответом будет сумма того, что получилось на шагах 2 и 4.

Итого имеем

$$\mathrm{d}^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)'_x \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)'_y \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

Теорема 1.35.4. Дифференциал второго (и более высокого) порядка функции двух переменных не сохраняет инвариантность формы в общем случае.

□ Рассмотрим $z = f(u, v)$, пусть $u = u(t)$ и $v = v(t)$. По определению второго дифференциала получаем

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\left(z'_u \mathrm{d}u + z'_v \mathrm{d}v\right) = \left(z'_u \underbrace{\mathrm{d}u}_{u'_t \mathrm{d}t} + z'_v \underbrace{\mathrm{d}v}_{v'_t \mathrm{d}t}\right)'_t \mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 z = (z'_u u'_t \mathrm{d}t + z'_v v'_t \mathrm{d}t)'_t \mathrm{d}t$$

Вынесем $\mathrm{d}t$ за скобки и возьмём производную

$$\mathrm{d}^2 z = \Big((z'_u)'_t \cdot u'_t + z'_u u''_{tt} + (z'_v)'_t \cdot v'_t + z'_v v''_{tt}\Big)\mathrm{d}t^2$$

Рассмотрим $(z'_u)'_t$, это производная сложной функции нескольких двух переменных, поэтому $(z'_u)'_t = z''_{uu} u'_t + z''_{uv} v'_t$. Аналогично $(z'_v)'_t = z''_{vu} u'_t + z''_{vv} v'_t$. Подставляем это в формулу, получаем

$$\mathrm{d}^2 z = \left(z''_{uu}(u'_t)^2 + z''_{uv} v'_t u'_t + z'_u u''_{tt} + z''_{uv} u'_t v'_t + z''_{uu}(u'_t)^2 + z'_v v''_{tt}\right)\mathrm{d}t^2$$

$$\mathrm{d}^2 z = \Big(\Big(z''_{uu}(u'_t)^2 + 2 \cdot z''_{uv} v'_t u'_t + z''_{uu}(u'_t)^2\Big) + z'_u u''_{tt} + z'_v v''_{tt}\Big)\mathrm{d}t^2$$

Скобка с тремя слагаемыми, умноженная на $\mathrm{d}t^2$, это дифференциал функции двух переменных второго порядка, а оставшиеся два слагаемых дают дифференциалы второго порядка функции одной переменной, значит $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^2 z + z'_u \mathrm{d}^2 u + z'_v \mathrm{d}^2 v$. Противоречие, значит дифференциал второго порядка функции нескольких переменных не сохраняет инвариантность формы в общем случае. ■

Def 1.35.5. Линейной параметризацией называется параметризация функции $z = f(u, v)$ с помощью линейной замены $u = at + b$ и $v = ct + d$.

Теорема 1.35.6. Дифференциал второго порядка функции двух переменных сохраняет инвариантность формы в случае линейной параметризации.

□ В ходе доказательства неинвариантности формы второго дифференциала функции двух переменных было получено следующее равенство

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^2 z + z'_u \mathrm{d}^2 u + z'_v \mathrm{d}^2 v$$

Однако т.к. u и v это линейные функции, то их второй дифференциал будет равен нулю, значит

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^2 z + z'_u \cdot 0 + z'_v \cdot 0 \Longrightarrow \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^2 z$$

Получили верное равенство, значит второй дифференциал сохраняет инвариантность формы при линейной параметризации. ■

1.36. Формула Тейлора.

Теорема 1.36.1. Формулу Тейлора можно обобщить на случай функции нескольких переменных, тогда она будет иметь вид

$$z(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + r_n(z, x, y)$$

□ Пусть есть функция $z = f(x, y)$, которая дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Возьмем точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ из этой окрестности. Выполним линейную параметризацию $x = x_0 + t\Delta x$ и $y = y_0 + t\Delta y$, причем $t \in [0; 1]$, получим функцию $g(t) = f(x(t), y(t))$. При линейной параметризации дифференциал сохраняет инвариантность формы, а значит $\mathrm{d}^n g(t) = \mathrm{d}^n z(x, y)$.

В параметризированных уравнениях возьмем производную по t и умножим на соответствующее приращение, чтобы вычислить первые дифференциалы функций одной переменной. Получим

$$\mathrm{d}x = \Delta x \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}y = \Delta y \mathrm{d}t \tag{1}$$

Запишем формулу Тейлора для функции $g(t)$ при $t = t + \Delta t$ и $t_0 = t$.

$$\begin{gathered} g(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} \cdot (\Delta t)^k + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (\Delta t)^{n+1} \qquad (\xi \in (t; t + \Delta t)) \\ g(t + \Delta t) - g(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k g(t)}{k!} + \frac{d^{(n+1)} g(t + \theta \Delta t)}{(n+1)!} \qquad (0 < \theta < 1) \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $t = 0$, а $\Delta t = 1$, тогда

$$\left.\begin{aligned} g(t+\Delta t) = g(1) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ g(t) = g(0) = f(x,y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + \frac{d^{(n+1)} f(x_0+\theta\Delta t, y_0+\theta\Delta t)}{(n+1)!} \quad (2)$$

Причем т.к. $\Delta t = 1$, то выведенным ранее формулам (1) получаем $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $\mathrm{d}y = \Delta y$. Значит дифференциалы совпали с зафиксированными вначале приращениями Δx и Δy, т.е. в этой формуле стоят полные дифференциалы функции $z(x,y)$. Переписав эту формулу в других обозначениях можно получить искомое равенство

$$z(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + r_n(z,x,y)$$

■

1.37. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия.

Def 1.37.1. Точка M_0 называется точкой минимума функции $z = f(x,y)$, если в некоторой проколотой окрестности точки M_0 верно $z(M) > z(M_0)$.

Def 1.37.2. Точка M_0 называется точкой максимума функции $z = f(x,y)$, если в некоторой проколотой окрестности точки M_0 верно $z(M) < z(M_0)$.

Теорема 1.37.3. (Необходимое условие экстремума функции двух переменных) Если функция $z = f(x,y)$ имеет **гладкий** экстремум в точке M_0, то все её первые частные производные в этой точке равны нулю.

□ Допустим, функция $z = f(x,y)$ достигает максимума в точке $M_0(x_0,y_0)$ (для минимума доказательство аналогично), тогда

$$\forall (x,y) \in \mathring{u}_\delta(M_0) \,\Big|\, z(x,y) < z(x_0,y_0)$$

При этом в плоскости $y = y_0$ будет выполняться $z(x,y_0) < z(x_0,y_0)$. Т.е. функция одной переменной $z(x,y_0)$ имеет максимум в точке x_0, значит $z'_x(x_0,y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что $z'_y(x_0,y_0) = 0$. ■

Теорема 1.37.4. (Достаточное условие экстремума функции двух переменных) Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке M_0 дважды, и при этом M_0 точка подозрительная на экстремум (в ней выполнено необходимое условие экстремума). Введем следующие обозначения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2$, тогда

1. $\Delta < 0 \Longrightarrow$ нет экстремума. В таком случае функция имеет минимакс в данной точке.
2. $\Delta = 0 \Longrightarrow$ требует дополнительное исследование.
3. $\Delta > 0 \Longrightarrow$ есть экстремум. Причем при $A < 0$ это максимум, а при $A > 0$ минимум.

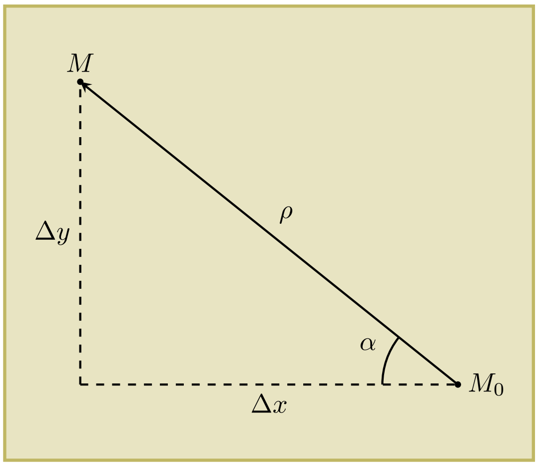

Рис. 1.37.5: Достаточное условие экстремума функции двух переменных

□ Запишем формулу Тейлора в точке $M \in u_\delta(M_0)$ до $n = 2$.

$$z(M) = z(M_0) + \mathrm{d}z(M_0) + \frac{\mathrm{d}^2 z(M_0)}{2} + o(\rho^2) \qquad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \tag{1}$$

Т.к. M_0 это точка подозрительная на экстремум, то её первые частные производные равны нулю, а значит и первый полный дифференциал равен нулю

Пусть $\Delta x = z(M) - z(M_0)$, а $o(\rho^2) = k\rho^3 \Big| k \in \mathbb{R}$. Домножим на два, распишем второй дифференциал и получим

$$\begin{gathered} 2\Delta z = \underbrace{\tfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}_{A}\mathrm{d}x^2 + 2\underbrace{\tfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y}}_{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underbrace{\tfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}_{C}\mathrm{d}y^2 + k\rho^3 \\ 2\Delta z = A(\Delta x)^2 + 2B\cdot\Delta x\cdot\Delta y + C(\Delta y)^2 + k\rho^3 \\ \Delta z = \frac{\rho^2}{2}\cdot\left(A\cdot\frac{(\Delta x)^2}{\rho^2} + 2B\cdot\frac{\Delta x}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho} + C\frac{(\Delta y)^2}{\rho^2} + k\rho\right) \end{gathered} \tag{2}$$

Заменим $\dfrac{\Delta x}{\rho} = \cos\alpha$ и $\dfrac{\Delta y}{\rho} = \sin\alpha$ согласно иллюстрации (рис. 1.37.5).

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2}\cdot\left(A\cdot\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + k\rho\right) \tag{3}$$

Исследуем знак Δz. Т.к. $\dfrac{\rho^2}{2} > 0$, то будем работать только с большой скобкой. Приведем первые три слагаемых в скобке к общему знаменателю A и соберем в числителе полный квадрат.

$$\begin{gathered} \frac{A^2\cdot\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\sin\alpha + AC\sin^2\alpha}{A} + k\rho \\ \frac{(A\cdot\cos\alpha + B\cdot\sin\alpha)^2 - B^2\sin^2\alpha + AC\sin^2\alpha}{A} + k\rho \\ \frac{(A\cdot\cos\alpha + B\cdot\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} + k\rho \end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим случаи.

Случай I $AC - B^2 > 0$

Тогда $A \neq 0$ (в противном случае $-B^2 > 0 \Longrightarrow$ противоречие). Рассмотрим числитель дроби (обозначим его Q).

1. Если $\cos\beta = 0$, то $\cos\alpha = 1$ и т.к. $A \neq 0$, то $Q > 0$.
2. Если $\cos\beta \neq 0$, то т.к. $AC - B^2 > 0$, то $Q > 0$.

Таким образом получили, что знак дроби зависит только от A. При достаточно малых ρ множитель $k\rho$ не будет вносить вклада в знак Δz, значит Δz будет иметь тот же знак, что и A.

1. $A < 0 \Longrightarrow \Delta z <$, значит любой «шаг» из точки M_0 уменьшит координату по z, т.е. M_0 это точка максимума.
2. $A > 0 \Longrightarrow \Delta z > 0$, аналогично получаем, что M_0 это точка минимума.

Случай II $AC - B^2 = 0$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B}$, тогда

$$A\cdot\cos\alpha + B\cdot\sin\alpha = \cos\alpha(A + B\operatorname{tg}\alpha) = 0 \tag{5}$$

Таким образом числитель дроби полностью обнуляется, а значит $\Delta z = \dfrac{k\rho^3}{2}$ и необходимо дополнительное исследование.

Случай III $AC - B^2 < 0$

Покажем, что в таком случае при подходе к M_0 разными путями Δz меняет свой знак, т.е. в точке M_0 нет экстремума. Пусть $A > 0$, тогда рассмотрим направления

1. $\alpha = 0$, тогда вся дробь сокращается до A. Таким образом, т.к. $A > 0$, то и $\Delta z > 0$.
2. $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{A}{B}$, в таком случае первая скобка в числителе обнуляется (также как это было в случае II). Значит весь числитель отрицателен (т.к. $AC - B^2 < 0$). Т.к. $A > 0$, то вся дробь будет отрицательна, т.к. $\Delta z < 0$

При $A < 0$ случаи рассматриваются аналогично. При $A = 0$ вернёмся к (3) (т.к. при $A = 0$ мы не можем привести к общему знаменателю A).

$$\Delta z = \frac{\rho^2}{2} \cdot \left(A \cdot \cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + k\rho \right) \tag{6}$$

Выберем направление $\alpha = 0$ и получим, что $\Delta z = \dfrac{k\rho^3}{2}$, т.е. знак Δz нельзя точно определить без дополнительного исследования. Таким образом мы получили, что при любом A приращение Δz меняет свой знак при переходе через точку M_0, значит в этой точке нет экстремума. ■

1.38. Приложения: касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Def 1.38.1. Точка M поверхности $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание поверхности) называется обыкновенной, если существуют все первые частные производные и при этом они не равны нулю одновременно.

Def 1.38.2. Точка M поверхности $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание поверхности) называется особой, если все первые частные производные равны нулю или одна из них не существует.

Def 1.38.3. Прямая называется касательной к поверхности в точке M_0, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей в данной поверхности и проходящей через точку M_0.

Замечание 1.38.4. Касательных прямых в точке может быть бесконечно много, а может быть несколько или вообще не быть.

Теорема 1.38.5. Все касательные к поверхности в обыкновенной точке образуют плоскость.

□ Пусть уравнение поверхности, задано неявно $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Возьмём обыкновенную точку на поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и сделаем из неё «небольшой шаг» по поверхности в точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$. Тогда $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ это вектор по направлению касательной. Проведем через точку M_0 кривую l (лежащую в исследуемой поверхности) и параметризуем её

$$l\colon \quad \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ z = \gamma(t) \end{cases} \tag{1}$$

Точка M_0 обыкновенная, значит исследуемая функция дифференцируема в этой точке. Учитывая, что $F(x, y, z(x, y)) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$ по формуле производной сложной функции получаем

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим каноническое уравнение касательной в точке M_0 с направляющим вектором $\vec{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

$$\begin{gathered} \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z} \\ \frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \\ \frac{x - x_0}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}} \end{gathered} \tag{3}$$

Это значит, что вектор $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right)$ является направляющим вектор для касательной, т.е. он сонаправлен с $\vec{s}$. Обозначим его $\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}$.

Вернёмся к (2), обозначим $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z} \right)$ и получим $\vec{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = 0$. Причем т.к. M_0 это обыкновенная точка, то оба эти вектора ненулевые, таким образом они перпендикулярны. В итоге имеем вектор $\vec{n}$, который перпендикулярен вектору по направлению любой касательной, т.е. $\vec{n}$ перпендикулярен любой касательной. Если $\vec{n}$ перпендикулярен любой касательной, то он является вектором нормали для плоскости этих касательных. ■

Def 1.38.6. Плоскость, содержащая все касательные к поверхности в данной точке, называет касательной плоскостью в этой точке.

Def 1.38.7. Прямая перпендикулярная касательной плоскости в точке касания называется нормалью к поверхности в данной точке.

Замечание 1.38.8. Существуют два **вектора** нормали: «положительный» и «отрицательный». У положительного вектора нормали $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$ коэффициент $z > 0$, т.е. он образует острый угол о осью Oz. Соответственно, у отрицательного вектора нормали $z < 0$, и он образует тупой угол с осью Oz.

Нахождение уравнения касательной плоскости к поверхности

1. Вычислим $z_0 = f(x_0, y_0)$. Если z_0 уже дано, т.е. дана точка поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то этот шаг можно пропустить.

2. Запишем данную функцию в неявном виде $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Если уравнение поверхности уже дано в неявном виде, то этот шаг можно пропустить.

3. Возьмем частные производные по каждой из трёх переменных в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Здесь $F(x, y, z)$ рассматривает как функция трех переменных, а не как функция двух переменных заданная неявно, поэтому и производные нужно вычислять как производные функции трех переменных, а не как производные функции двух переменных.

4. Искомое уравнение плоскости будет иметь вид

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

Пример 1.38.9. Пусть требуется найти уравнение касательной плоскости функции к поверхности $6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0$ в точке $M_0(1, 2, 3)$.
Т.к. z_0 дано и уравнение уже приведено к неявному виду, то вычислим частные производные по трём переменных в точке M_0.

$$\begin{aligned} F'_x = 6y - 4x - y^2 &\Longrightarrow F'_x(1,2,3) = 12 - 4 - 4 = 4 \\ F'_y = 6x - 2xy &\Longrightarrow F'_y(1,2,3) = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \\ F'_z = -2z &\Longrightarrow F'_z(1,2,3) = -2 \cdot 3 = -6 \end{aligned}$$

Запишем уравнение касательной плоскости и упростим его.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) - 6 \cdot (z - 3) &= 0 \\ 2x + y - 3z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Нахождение уравнения нормали к поверхности

Для того, чтобы составить уравнение нормали, нужна точка (она дана по условию) и вектор по направлению. Вектор по направлению можно получить из уравнения касательной плоскости: вектор нормали к касательной плоскости будет вектором по направлению для искомой прямой. Т.к. коэффициенты A, B, C в уравнении плоскости это частные производные (это видно из уравнения касательной плоскости), то уравнение нормали будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

Пример 1.38.10. Найдем уравнение нормали в той же точке и к той же поверхности, к которой искали уравнение касательной плоскости. Т.к. частные производные уже вычислены, то по формуле получаем

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{-6}$$

1.39. Приложения: градиент, производная по направлению.

Def 1.39.1. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, тогда если $z = const$, то на поверхности будет отсечена линия уровня.

Def 1.39.2. Производной функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\overrightarrow{s}$ называют **число**, равное

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \overrightarrow{s}_0$$

где $\overrightarrow{s}_0$ это нормированный вектор $\overrightarrow{s}$.

Пусть есть функция $z = f(x, y)$. Т.к. функция дифференцируема, то её приращение представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \qquad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \tag{1}$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{s} = (\Delta x, \Delta y)$, обозначим $\Delta s = \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Вернемся к (1) и разделим все на Δs.

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{o(s)}{s} \tag{2}$$

Заметим, что (рис. 1.39.3)

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha \qquad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\beta \tag{3}$$

как направляющие вектора $\vec{s}$. Перейдем к пределу при $\Delta s \to 0$, тогда получим

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha\right) + \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta\right) + \lim_{\Delta s\to 0}\frac{o(s)}{s}\\ \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta\\ \frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta)\end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая, что вектор из направляющих это нормированный вектор, в итоге получаем искомую формулу

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\vec{s}_0 \tag{5}$$

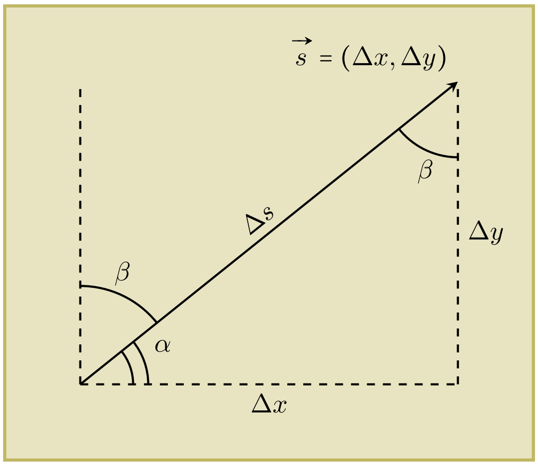

Рис. 1.39.3: Производная по направлению

Замечание 1.39.4. Производная по направлению определена и для функций с бóльшим число аргументов. Например, производная по направлению $\vec{s}$ для функции $u = f(x,y,z)$ будет вычисляться по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\vec{s}_0$$

Замечание 1.39.5. Производные по направлению осей будут являться соответствующими частными производными. Например, если $\vec{s} = (1,0)$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot(1,0) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Def 1.39.6. Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке M_0 называется **вектор**, показывающий направление наискорейшего подъема функции.

$$\overrightarrow{\nabla_{M_0}} z(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\vec{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\vec{\jmath}$$

Замечание 1.39.7. Также градиент можно определить как вектор, составленный из частных производных.

$$\nabla = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

где ∇ (читается «набла») это другое обозначение градиента.

Замечание 1.39.8. Градиент показывает направление наибольшего значения производной по направлению.

Теорема 1.39.9. Производная по направлению вектора $\vec{s}$ это проекция градиента на этот вектор.

□ По определению производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\vec{s}_0 = \nabla\cdot\vec{s}_0$$

Раскроем скалярное произведение по геометрического определению. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = |\nabla| \cdot \underbrace{\left|\vec{s}_0\right|}_{=1} \cdot \cos\varphi$$

где φ это угол между $\vec{s}$ и градиентом. Значит $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}$ это проекция градиента на вектор $\vec{s}$ по определению. ■

Замечание 1.39.10. Если вектор перпендикулярен градиенту, то производная по направлению равна нулю и её проекция на градиент это точка.

$$\vec{s} \perp \nabla \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = 0$$

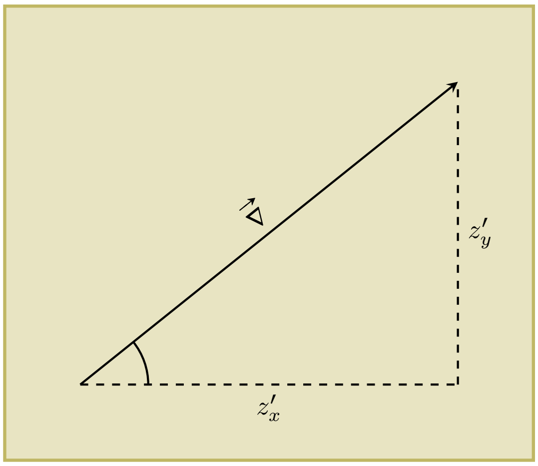

Рис. 1.39.11: Наклон градиента

Теорема 1.39.12. Градиент в точке M_0 перпендикулярен линии уровня, проведенной через эту точку.

□ Пусть есть функция $z = f(x, y)$, точка M_0 и линия уровня $l : z = c$. Найдем наклон касательной l (обозначим его k). Рассмотрим $z - c = 0$ как неявную функцию $F(x, y) = 0$. По формуле, выведенной ранее, получаем, что

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{z'_x}{z'_y}$$

Найдем наклон градиента (обозначим его k^*). Из определения градиента (рис. 1.39.11) получаем

$$k^* = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{z'_y}{z'_x}$$

Т.к. произведение наклона касательной l и наклона градиента равно минус единице, то они перпендикулярны. ■

1.40. Условный экстремум функции двух переменных.

Def 1.40.1. Условным экстремумом функции двух переменных называется экстремум не на всей области определения, а только на её части, которая описывается некоторым правилом (которое обычно описывается уравнением условия).

Метод множителей Лагранжа для нахождения условного экстремума

Пусть необходимо найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$. Введём вспомогательную функцию $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$. Тогда для нахождения условного экстремума необходимо решить следующую систему

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{JLL}$$

После этого все точки (x, y), являющиеся решением данной системы, **необходимо проверить на экстремум** (например с помощью достаточного условия экстремума функции нескольких переменных).

Замечание 1.40.2. λ называют множителем Лагранжа, а $\varphi(x, y) = 0$ — уравнением связи. Если оно задано явно, то его необходимо привести к неявному виду.

Замечание 1.40.3. Система (JLL) имеет три уравнения и три неизвестных, так что решение (в общем случае) должно найтись, но это не обязательно.

□ Покажем, что данный метод действительно работает. Пусть точка M_0 точка условного экстремума функции $z = f(x, y)$ Тогда первые частные производные в этой точке равны нулю, а значит и полный первый дифференциал в этой точке равен нулю

$$\mathrm{d}z = z'_x(x, y)\mathrm{d}x + z'_y(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

Продифференцируем уравнение связи, получим

$$\mathrm{d}\varphi = \varphi'_x(x, y)\mathrm{d}x + \varphi'_y(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

Умножим (2) на некоторое число λ и прибавим его к (1).

$$\mathrm{d}z = \left(z'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y)\right)\mathrm{d}x + \left(z'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y)\right)\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$

Т.к. $\varphi(x, y)$ неявно заданная функция, то $\varphi'_x(x, y) \neq 0$. Найдём такое λ, чтобы первая скобка обнулилась, тогда т.к. сумма равна нулю, то и вторая скобка обнулится, значит мы нашли такое λ, что выполняются два равенства

$$\begin{cases} z'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Равенства (4) дают нам необходимое (но не достаточное!) условие экстремума функции $L(x, y)$ в точке (x, y). Таким образом имеем $L'_x = 0$ и $L'_y = 0$. Т.к. у нас есть только необходимое, а не достаточное условие, то не все найденные точки будут являться точками экстремума, поэтому необходима дополнительная проверка. ■

Замечание 1.40.4. Этот метод может быть применен и к функциям с бóльшим числом аргументов, например для функции $u = f(x, y, z)$ и уравнения связи $\varphi(x, y, z) = 0$ составим вспомогательную функцию $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z)$. Тогда для нахождения условного экстремума необходимо решить следующую систему

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$