Ph Eχ 01

@pochtineploho

Собрано 13.01.2024 в 00:49

Содержание

Предисловие

Вопросы к экзамену по физике 1-й семестр. Механика, электричество. Лектор Зинчик А.А.
Данные материалы основаны на презентациях, 2-летнем ноушене, чьих-то уже расписаных билетах и других интернет-ресурсах.

1. Вопросы к экзамену

1.1. Основные кинематические характеристики криволинейного движения: скорость и ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорение

Def 1.1.1. Траектория [S, м] - линия, вдоль которой движется тело.

Def 1.1.2. Перемещение [$\Delta\vec{r}$, м] - направленный отрезок прямой, соединяющий начальное и последующее/конечное положения тела.

Def 1.1.3. Путь [$S/l/S_0S_{end}$] - скалярная величина, равная длине участка траектории, по которой двигалось тело

Рассмотрим участок траектории, который тело прошло за бесконечно малое время ($\Delta t \to 0$). Тогда и путь будет бесконечно малым, а значит, можно считать, что $\Delta S \to |\Delta\vec{r}|$, или же $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$

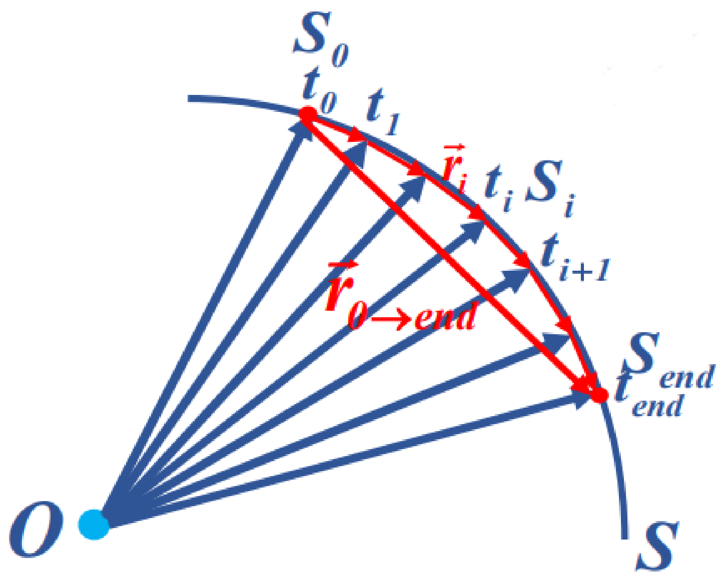


Рис. 1.1.3: Вычисление пути и перемещения

Def 1.1.4. Полный путь тела — сумма всех суммарных (бесконечно малых) "подпутей": $S_0S_{end} = \int\limits_{S_0}^{S_{end}} \mathrm{d}s = \int\limits_{S_0}^{S_{end}} |\mathrm{d}\vec{r}|$

Def 1.1.5. Средняя скорость [vср, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$] — вектор, равный отношению перемещения ко времени пути: $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t}$

Def 1.1.6. Средняя путевая скорость [vср.п., $\frac{\text{м}}{\text{с}}$] — число, равное отношению пути ко времени в пути.

Def 1.1.7. Мгновенная скорость [$\vec{v}$, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$] — предел отношения перемещения ко времени на бесконечно малом промежутке времени: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Def 1.1.8. Скорость — векторная величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве относительно выбранной системы отсчёта

Def 1.1.9. Ускорение [$\vec{a}$, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$] — векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости тела.

Замечание 1.1.10. Ускорение — быстрота изменения вектора скорости.

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \Longrightarrow \vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$$

При равноускоренном движении

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{t_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}$$

$$\vec{a} = \vec{v_t}' = \vec{r_t}''$$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}(t)$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = v_x' = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = x'' \\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = v_y' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = y'' \\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = v_z' = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = z'' \end{cases}$$

Def 1.1.11. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

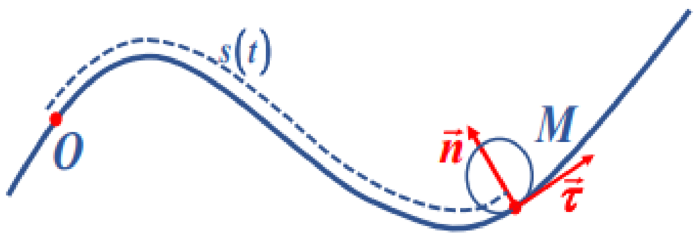
Def 1.1.12. Тангенциальное ускорение $[a_\tau, \text{м}/\text{с}^2]$ — численное значение изменения скорости.

Замечание 1.1.13. Тангенциальное ускорение — составляющая ускорения, которая направлена вдоль скорости. Описывает степень изменения скорости по модулю: $a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

При равномерном движении по окружности, тангенциальное ускорение равно нулю. Если нужно записать в векторном виде, то сонаправлено единичному вектору.

Def 1.1.14. Центростремительное (нормальное) ускорение $[a_n]$ — составляющая ускорения тела, характеризующая быстроту изменения направления вектора скорости: $a_n = \frac{v^2}{r}$, где r - радиус кривизны траектории в заданной точке.

Центростремительное ускорение направлено к центру окружности, против вектора $\vec{r}$. Существует при движении по окружности, даже если линейная скорость константна, так как направление вектора скорости постоянно меняется.



Вектор ускорения при движении по любой траектории можно записать как:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ — единичный касательный к траектории вектор, направленный вдоль скорости;
$\vec{n}$ — единичный вектор, сонаправленный главной нормали к траектории.

1.2. Кинематика вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейной скоростью и ускорением

При движении по окружности аналогом пройденного пути выступает угол φ, на который повернулось тело относительно оси вращения. Измеряется в радианах. $\vec{\varphi}$ направлен вверх при вращении против часовой стрелки (правило правого винта).

Def 1.2.1. Угловая скорость $[\omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}]$ — векторная величина, характеризующая быстроту и направление вращения материальной точки или абсолютно твердого тела относительно центра вращения.

Замечание 1.2.2. Угловая скорость характеризует изменение угла поворота со временем.
Угловая скорость — вектор, направление которого совпадает с осью вращения и определяется по правилу правого винта.
В трёхмерном пространстве вектор угловой скорости по величине равен углу поворота точки вокруг центра вращения за единицу времени.

Def 1.2.3. Мгновенная угловая скорость — предел, к которому стремится средняя угловая скорость при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Def 1.2.4. Период обращения точки $[T, \text{с}]$ — время, за которое точка совершает один полный оборот.

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Def 1.2.5. Частота обращения точки $[\nu, \text{с}^{-1}]$ — величина, равная числу оборотов в единицу времени.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

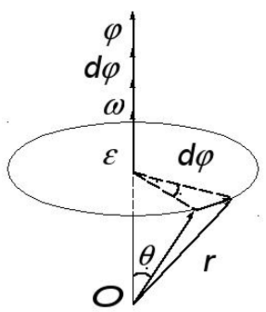
Замечание 1.2.6. Центростремительное ускорение $[a_\text{ц}]$:

$$a_\text{ц} = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2\nu^2 R$$

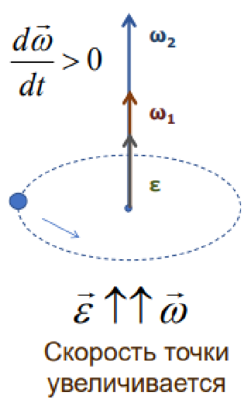
Def 1.2.7. Угловое ускорение $[\varepsilon, \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}]$ — величина, характеризующая изменение угловой скорости с течением времени.

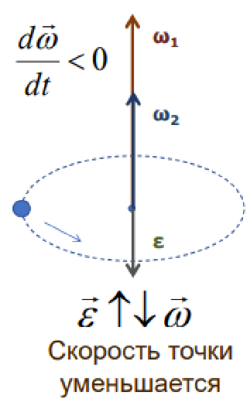
Def 1.2.8. Мгновенное угловое ускорение — предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$



Угол поворота φ.
Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Если $|\vec{\omega}| \uparrow \Rightarrow \ \varepsilon \uparrow\uparrow \omega$,
Если $|\vec{\omega}| \downarrow \Rightarrow \ \varepsilon \downarrow\uparrow \omega$
Если $\varepsilon = const$ (равноускоренное движение), то:
$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$,
$\Delta\vec{\varphi}(t) = \vec{\omega}_0 \cdot t + \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$.





Замечание 1.2.9. Связь линейной скорости с угловой скоростью.

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu \Longrightarrow \upsilon = \omega R$$

Соответственно, чем дальше расположена точка тела от оси вращения, тем больше её линейная скорость.

Замечание 1.2.10. Связь между линейным и угловым ускорениями
$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$ $a_\tau = \dot{v} = R \cdot \dot{\omega}\varepsilon \cdot R$
Полное ускорение $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Физическая величина	Поступательное движение	Движение по окружности	Связь между характеристиками
Перемещение	Линейное Δx	Угловое $\Delta\varphi$	$x = \varphi R$
Скорость	Линейная $\upsilon = \frac{dx}{dt}$	Угловая $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$\upsilon = \omega R$
Ускорение	Линейное $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ $a_\tau = \frac{\Delta\upsilon}{t}$ $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$	Угловое $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$a_\tau = \varepsilon R$ $a_n = \omega^2 R$

Рис. 1.2.10: Аналогии между линейными и угловыми характеристиками движения

Прямолинейное движение	Движение по окружности
Равномерное	
$\upsilon = const$ $x = x_0 + \upsilon t$	$\omega = const$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$
Равнопеременное (равноускоренное)	
$a = const$ $\upsilon = \upsilon_0 + at$ $x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varepsilon = const$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Рис. 1.2.10: Аналогии между законами прямолинейного движения и движения по окружности

1.3. Инерциальные системы отсчета и первый закон Ньютона. Второй закон Ньютона. Масса, импульс, сила

Def 1.3.1. Первый закон Ньютона (закон инерции).
Существуют такие системы отсчёта, в которых свободное движение тел выглядит как прямолинейное и равномерное.

Def 1.3.2. Свободное движение — движение, при котором на тело не действуют другие тела (отсутствует внешнее воздействие)

Def 1.3.3. Равномерное и прямолинейное движение тела при отсутствии внешних воздействий называется движением по инерции (поэтому и закон инерции)

$$\vec{F}_{\text{рез}} = 0 \implies \begin{aligned} \vec{v} &= const, \\ \vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

Def 1.3.4. Система отсчёта — система координат и часы, связанные с телом отсчёта.
Движение тела зависит не только от воздействия на него других тел, но и от свойств системы отсчёта, относительно которой рассматривается поведение этого тела.

Пример 1.3.5. Поведение светофора в системе отсчёта, связанной с Землёй (светофор покоится), и в системе отсчёта, связанной с тормозящим автомобилем (светофор движется с отрицательным ускорением)

Def 1.3.6. Инерциальная система отсчёта — система отсчёта, в которой все тела движутся прямолинейно и равномерно, либо находятся в состоянии покоя, если на них не действуют никакие силы.

Def 1.3.7. Неинерциальная система отсчёта — система отсчёта, которая двигается с ускорением по отношению к инерциальной.

Замечание 1.3.8. Земля — инерциальная система (это на самом деле не так, однако вычисленное ускорение поверхности земли пренебрежительно мало)

Def 1.3.9. Второй закон Ньютона.
В инерциальных системах отсчёта ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению, и обратно пропорционально массе материальной точки.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

, где p - импульс, t - время;

$$a = \frac{v}{t},\ mv = p \Longrightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$$

Замечание 1.3.10. Это основной закон динамики, устанавливающий связь между силой и ускорением.

Def 1.3.11. Сила $[\vec{F}, \text{Н}]$ — мера воздействия одного тела на другое, под действием которой тело получает ускорение или изменяет форму.

Сила — векторная величина, характеризующаяся величиной, направлением и точкой приложения.
Две силы равны, если они равны по величине, имеют одинаковое направление и действуют по одной линии.
Если на тело действует несколько сил, то их можно сложить и заменить одной силой, которую называют равнодействующей. Она находится по правилу сложения векторов:

$$|\vec{F_{\text{р}}}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Или $F_{\text{р}} = \sqrt{F_{\text{р}x}^2 + F_{\text{р}y}^2}$, где $\overrightarrow{F_{\text{р}x}} = \sum \overrightarrow{F_{ix}}$ и $\overrightarrow{F_{\text{р}y}} = \sum \overrightarrow{F_{iy}}$

Def 1.3.12. Инертность — свойство тела "сопротивляться" воздействию (изменению скорости). Мерой инертности является инертная масса.

Def 1.3.13. Масса $[m, \text{кг}]$ — скалярная величина, определяющая инерционные и гравитационные свойства тел в ситуациях, когда их скорость намного меньше скорости света.

Под действием разных сил $\vec{F}_i$ одно и то же тело будет получать разные ускорения $\vec{a}_i$. Однако соотношение $\frac{\vec{F}_i}{\vec{a}_i} = const$.
Именно эта константа принимается за инертную массу тела, она не зависит от сил и ускорения и является свойством самого тела.
Инертная масса является коэффициентом пропорциональности между результирующей силой и ускорением.

$$\vec{F} = m\vec{a},\ m = const$$

Замечание 1.3.14. Ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела

Def 1.3.15. Импульс (количество движения) $[P, \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}]$ — произведение массы тела на его скорость

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{F}\Delta t$$

Изменение импульса в единицу времени равно результирующей силе, которая действует на тело.

$$\overrightarrow{F}_{\text{р}} = \frac{\Delta\overrightarrow{p}}{\Delta t} \Longrightarrow \overrightarrow{F}_{\text{р}} \cdot \Delta t = \Delta\overrightarrow{p}$$

Def 1.3.16. Величину $\overrightarrow{F} \cdot \Delta t$ называют импульсом силы. Импульс силы равен изменению импульса тела.

Замечание 1.3.17. В общем случае ($m \neq const$) 2й закон Ньютона записывается как: $\sum\limits_i \overrightarrow{F}_i = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$

1.4. Закон сохранения импульса. Упругое и неупругое взаимодействие

Def 1.4.1. Закон сохранения импульса — векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю

Выводится из 2-го закона Ньютона в импульсной форме.

Def 1.4.2. Абсолютно упругий удар — модель соударения, при которой полная кинетическая энергия системы сохраняется (шарики сталкиваются и летят в разные стороны), т.е. не было деформации, тела не нагрелись - столкнулись и разлетелись.

$$m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2 = m_1\overrightarrow{v}'_1 + m_2\overrightarrow{v}'_2$$

Замечание 1.4.3. Импульсы складываются векторно (смотреть на направления скоростей)

При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения энергии. Если сталкиваются тела одинаковой массы, они просто обмениваются скоростями.

Def 1.4.4. Абсолютно неупругий удар — удар, в результате которого тела соединяются и продолжают движение как единое тело.

$$m_a\overrightarrow{v}_a + m_b\overrightarrow{v}_b = (m_a + m_b)\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{m_a\overrightarrow{v}_a + m_b\overrightarrow{v}_b}{m_a + m_b}$$

При абсолютно упругом ударе не выполняется закон сохранения энергии.

1.5. Уравнение движения материальной точки. Третий закон Ньютона. Силы трения. Сила упругости

Def 1.5.1. Третий закон Ньютона (закон взаимодействия тел).
Сила действия равна силе противодействия.
Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

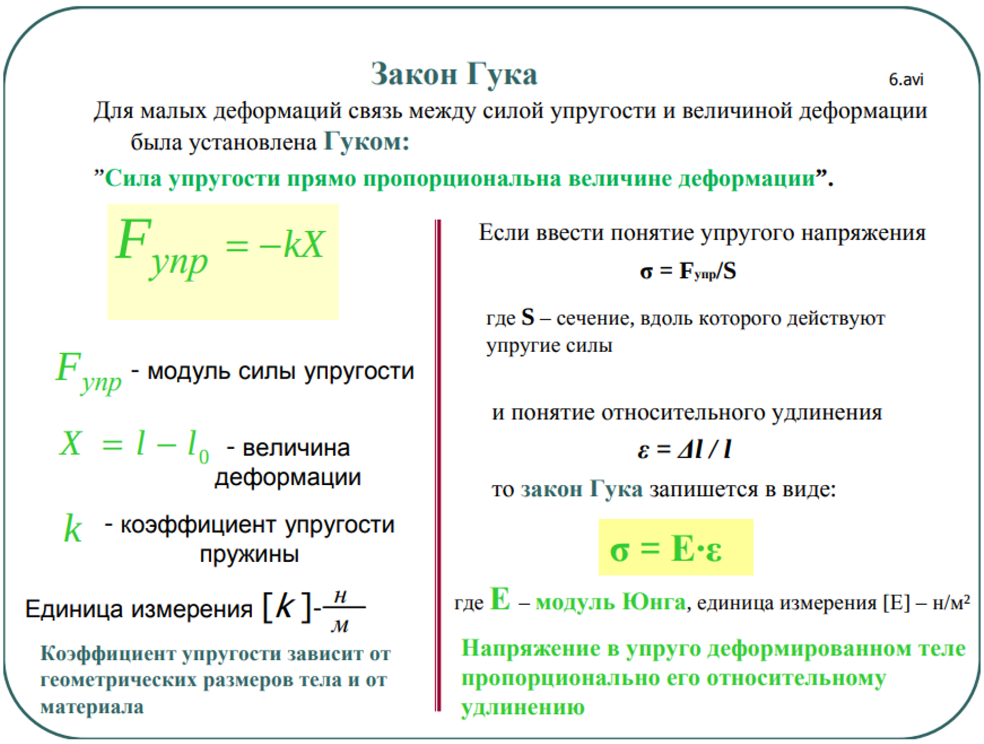
Def 1.5.2. Сила упругости (сила реакции опоры) — сила, направленная против деформации тела, по модулю равная силе, деформирующей это тело.

Виды деформации:

- Упругая: тело принимает первоначальную форму и размеры после того, как сила перестала действовать.
- Пластическая: тело сохраняет те формы и размеры, которое приобрело под действием силы.

Деформация обусловлена электрическим воздействием между атомами. Если атомы удалять друг от друга, то между ними возникает сила притяжения (между ядром и электронной оболочкой). Если приближать атомы друг к другу, то возникает сила отталкивания (между ядрами)

Def 1.5.3. Закон Гука



Кроме продольного растяжения и сжатия существуют деформации сдвига, изгиба и кручения

Эти деформации также подчиняются закону Гука, только меняется смысл входящих в него величин (например, вместо **относительного удлинения – относительный сдвиг**, а вместо **модуля Юнга - модуль сдвига**)

Существует **предельное напряжение $\sigma_{пред}$**, при котором связь между атомами нарушается и образец разрывается.

На свойства материалов влияет как механическая так и тепловая обработка. Если, например, **сталь нагреть до желтого каления, она становится пластичной**, а если **пластичный свинец охладить жидким азотом, он становится упругим**

Очень важно, чтобы материал оказывал упругое сопротивление. Если бы этого не было, мы не смогли бы, например, ходить; не могла бы работать ни одна машина: любое действие тел друг на друга приводило бы к пластическим деформациям, то есть машина теряла бы форму.

С другой стороны, при изготовлении различных деталей используют пластические деформации (ковка, штамповка, прокат и др.)

Def 1.5.4. Силы трения.
Сила трения возникает при непосредственном соприкосновении двух тел и препятствует движению этих тел.
Сила трения, подобно силе упругости, является проявлением электрического взаимодействия атомов.

1. Сила трения покоя — сила, возникающая между двумя неподвижными контактирующими телами и препятствующая возникновению относительного движения.

   Эту силу необходимо преодолеть для того, чтобы привести два контактирующих тела в движение относительно друг друга.

   Предельная сила трения покоя — сила трения, при которой начинается движение.

   Зависит от:

   - упругих свойств материала,
   - обработки поверхностей
   - силы давления (с какой силой друг к другу прижаты поверхности)

   $$\vec{F}_{\text{тр } max} = \mu \vec{N},$$

   , где μ - коэффициент трения покоя (зависит от материала и обработки поверхностей), $\vec{N}$ - нормальная реакция опоры (действует перпендикулярно поверхности)

2. Сила трения скольжения — сила, возникающая между соприкасающимися телами при их относительном движении.

   Сила трения зависит от:

   - силы давления тел друг на друга (силы реакции опоры),
   - материалов трущихся поверхностей,
   - скорости относительного движения (в небольших пределах), но
   - НЕ зависит от площади соприкосновения.

   Численно сила трения скольжения равна максимальному значению силы трения покоя:

   $$\vec{F}_{\text{тр.ск.}} = \mu \vec{N}$$

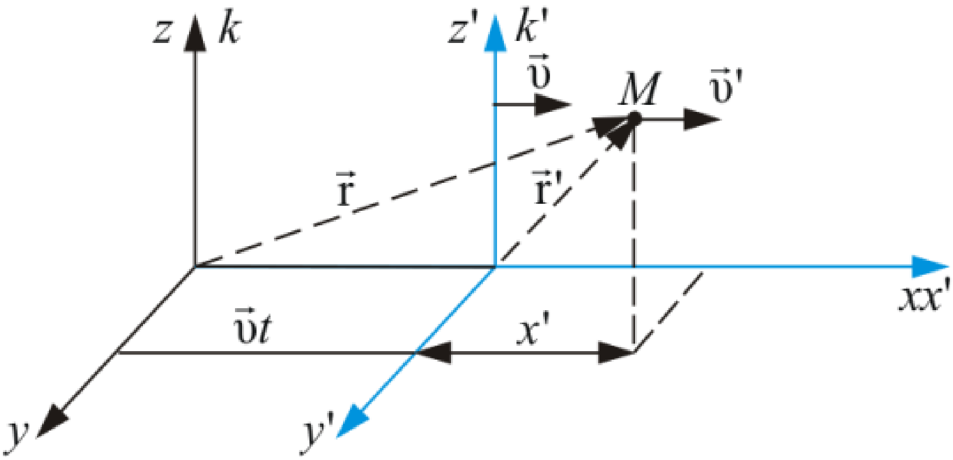
Def 1.5.5. Уравнение движения материальной точки.
Согласно принципу относительности Галилея (механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта):

1. Все инерциальные системы отсчёта эквивалентны (равны).
2. Законы динамики инвариантны (независимы) относительно преобразований Галилея.

Отсюда, само уравнение:

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_u = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}} - m\vec{a}_0$$

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета k и k'. Система k' движется относительно k с постоянной скоростью v вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета:



Найдем связь между координатами точки M в обеих системах отсчета. Отсчет начнем, когда начала координат систем – совпадают, то есть $t = t'$.

Получаем так называемые преобразования Галилея:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

В векторной форме преобразования Галилея можно записать так: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r'} = \vec{r'} + \vec{v}t$

Продифференцируем это выражение по времени, получим: закон сложения скоростей в классической механике:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{v} \Longrightarrow \vec{v_1} = \vec{v'} + \vec{v}$$

Также несложно получить $\vec{a} = \vec{a_0} + \vec{a'}$

1.6. Закон всемирного тяготения. Зависимость ускорения свободного падения от высоты. Первая космическая скорость

Def 1.6.1. Закон всемирного тяготения — сила F гравитационного притяжения между двумя материальными точками с массами m_1 и m_2, разделёнными расстоянием f, действует вдоль соединяющей их прямой, пропорциональна обеим массами и обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Закон всемирного тяготения — любые две точечные массы притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ - гравитационная постоянная

Def 1.6.2. Сила тяжести — сила гравитационного взаимодействия тела с Землёй
Сила тяжести — сила, с которой Земля притягивает к себе тела.

Замечание 1.6.3. $R_З \approx 6,4 \cdot 10^6$м - радиус Земли

Замечание 1.6.4. Сила тяготения вблизи поверхности Земли:

$$\vec{F} = -G\vec{r}\frac{mM}{r^3},$$

значит, сила направлена к центру Земли, а $\vec{r}$ - от центра.
Для тел вблизи земли $r \approx R_З$ ($\vec{g} = -G\dfrac{M}{R_З^2}\vec{l}_r$):

$$\vec{F} = -m\vec{g}$$

Гравитационное ускорение на высоте h над поверхностью космического тела можно вычислить по формуле (M - масса планеты):

$$g(h) = \frac{GM}{(r+h)^2}$$

Сила тяжести на высоте h:

$$F = \frac{GmM}{(r+h)^2}$$

Чем выше тело, тем меньше ускорение свободного падения и тем меньше сила тяжести.

Def 1.6.5. Вес тела — сила, с которой тело давит на опору или подвес.
В инерциальных системах отсчёта вес тела численно равен силе тяжести:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

В неинерциальной системе отсчёта вес зависит от ускорения системы отсчёта, в которой находится тело:

$$\vec{P} = m(\vec{g} \pm \vec{a})$$

Состояние невесомости: $P = 0$

Def 1.6.6. Первая космическая скорость (круговая скорость) — минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты и не начал падать ($7,91\frac{\text{км}}{\text{с}}$ для Земли)

Замечание 1.6.7. Вычисление.
На орбите на объект действует только сила тяготения земли: $G\frac{m \cdot M}{R^2}$, однако тело движется по окружности с постоянной скоростью. Тогда центростремительное ускорение равно $\frac{U^2}{R}$. Подставим его вместо ускорения:

$$m\ \frac{v_1^2}{R+h} = G\ \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$$

Отсюда находим v_1 - первую космическую скорость:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}}$$

Замечание 1.6.8. $h << R_З$, поэтому $v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$

1.7. Сила, работа и потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Работа и кинетическая энергия. Закон сохранения полной механической энергии в поле потенциальных сил

Def 1.7.1. Сила $[F, \text{Н}]$ — векторная величина, являющаяся мерой воздействия на данное тело со стороны других тел или полей

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$
$$F = ma$$

Def 1.7.2. Работа $[A, \text{Дж}]$ — скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело.

$$A = FScos\alpha$$

$$A_{12} = \int\limits_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Def 1.7.3. Потенциальная энергия $[E_\Pi, \text{Дж}]$ — скалярная величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил.

$$E_\Pi = mgh$$

Def 1.7.4. Консервативные силы — силы, работа которых при перемещении тела от точки 1 к точке 2 зависит не от траектории движения этого тела между точками, а только от положения этих точек.

Для консервативных сил можно ввести потенциальную энергию E_Π. В механике до этого уже имеется кинетическая энергия E_K.
Консервативные силы:

- Сила тяжести
$$A = -\int_{h1}^{h2} mg\ dh = mg(h_1 - h_2)$$
- Сила упругости
$$A = -\int_0^x kx\ dx = -\frac{kx^2}{2}$$
- Сила гравитации
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
- Сила электростатического взаимодействия
$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Def 1.7.5. Неконсервативные (диссипативные) силы — все остальные силы, чья работа вычисляется по пути.
Проще говоря, неконсервативные - те, что “тратят” энергию системы на какие-то другие процессы.

Неконсервативные силы:

- Сила трения
$$F = \mu N$$
- Сила сопротивления воздуха
$$F = kv^2$$

Def 1.7.6. Механическая энергия характеризует способность тела совершать работу.
Кинетическая энергия $[E_K, \text{Дж}]$ — энергия движения, которая зависит от массы тела, величины скорости и не зависит от положения тела в пространстве.

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

Def 1.7.7. Работа — это физическая величина, являющаяся скалярной количественной мерой действия силы или сил на тело или систему, зависящая от численной величины, направления силы (сил) и от перемещения точки (точек) тела или системы.

Def 1.7.8. Работа неконсервативной силы — изменение кинетической энергии тела:

$$A = E_{K_2} - E_{K_1} = \Delta E_K$$

Если $A > 0$, то $\Delta E_K > 0$ - кинетическая энергия возрастает Если $A < 0$, то $\Delta E_K < 0$ - кинетическая энергия убывает

Def 1.7.9. Потенциальная энергия — энергия взаимодействия, которая зависит от положения тел или частей тела друг относительно друга.
Если в системе действует консервативные силы, то система обладает потенциальной энергией. Поэтому консервативные силы называют потенциальными.
Если консервативные силы совершают работу, то положение тел в системе меняется и потенциальная энергия системы тоже изменяется.

Def 1.7.10. Работа консервативных сил — убыль потенциальной энергии:

$$A = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} = -\Delta E_{\text{п}}$$

Def 1.7.11. Полная механическая энергия:

$$E = E_{\Pi} + E_K$$

Def 1.7.12. Закон сохранения энергии — в любых явлениях природы энергия не исчезает и не возникает, а только переходит из одного вида в другой в эквивалентных количествах.
Закон сохранения энергии — в замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия остаётся постоянной при любых процессах внутри системы.
Рассмотрим замкнутую систему тел, между которыми действуют только консервативные силы. Соответственно, каждое состояние характеризуется кинетической и потенциальной энергией.
При переходе системы из одного состояния в другое силы, приложенные к телам, совершают работу.

Работа консервативных сил с одной стороны равна увеличению кинетической энергии, а с другой - убыли потенциальной энергии, т.е.:

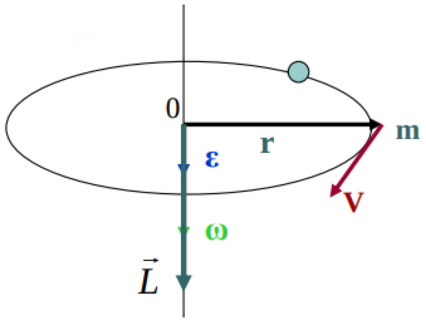
$$-\begin{array}{l} \mathbf{A_{12} = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1}} \\ \mathbf{A_{12} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}} \end{array} \quad \Big| \ \text{Вычтем из второго уравнения первое}$$

$$\mathbf{A_{12} - A_{12} = (E_{\text{п}1} + E_{\text{к}1}) - (E_{\text{п}2} + E_{\text{к}2}) = 0 \Longrightarrow \boxed{E_{\text{к}1} + E_{\text{п}1} = E_{\text{к}2} + E_{\text{п}2}}}$$

$$\text{или} \qquad \boxed{\mathbf{E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = const}} \qquad (7.16)$$

1.8. Момент импульса материальной точки и механической системы. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса механической системы

Def 1.8.1. Момент импульса материальной точки.



Рассмотрим движение материальной точки массой m по окружности радиуса r.

Def 1.8.2. Основное уравнение вращательного движения:

$$I \cdot \varepsilon = M$$

Учитывая, что:

$$I = mr^2$$
$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$$
$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Получаем:

$$M = mr\frac{dv}{dt}$$

Внесём mr под знак дифференциала, т.к. не зависит от t:

$$\frac{d(mrv)}{dt} = M$$

Def 1.8.3. Обозначим момент импульса материальной точки:

$$L = mrv$$

Def 1.8.4. Момент импульса — векторная величина, которая определяется как:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$$

, где $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки, $\vec{r}$ - радиус-вектор
Для движения по окружности, $\vec{r} \perp \vec{p}$, поэтому

$$L = r \cdot p \ sin 90^\circ = r \cdot p = mrv$$

Момент импульса системы точек

$$L = \sum_i [\vec{r_i} \cdot \vec{p_i}]$$

Момент импульса твёрдого тела.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Момент импульса абсолютно твёрдого тела относительно оси вращения равен произведению его момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

Def 1.8.5. Момент силы относительно точки $[M_0, \text{Н} \cdot \text{м}]$ — векторная величина, которая определяется векторным произведением радиуса вектора $\vec{R}$ и силы $\vec{F}$.

$$\vec{M}_0 = [\vec{R}, \vec{F}] = \vec{R} \times \vec{F}$$

Величина момента силы:

$$|\vec{M}_0| = |\vec{R}||\vec{F}| sin\alpha$$

Def 1.8.6. Закон сохранения момента импульса

1. В замкнутой механической системе.

   В замкнутых, изолированных механических системах вектор момента импульса сохраняется, т.е. не меняется с течением времени.

$$\sum_i \vec{L}_i = const$$

2. В частично замкнутой механической системе.

$$\begin{cases} \sum\limits_i \frac{d\overrightarrow{L_{ix}}}{dt} = \overrightarrow{0} \\ \sum\limits_i \frac{d\overrightarrow{L_{iy}}}{dt} = \overrightarrow{0} \\ \sum\limits_i \frac{d\overrightarrow{L_{iz}}}{dt} = \overrightarrow{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \sum\limits_i L_{ix} = const \\ \sum\limits_i L_{iy} \neq const \\ \sum\limits_i L_{iz} \neq const \end{matrix}$$

1.9. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения. Момент импульса тела. Момент инерции

Def 1.9.1. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела с закрепленной осью вращения.

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i$$

Произведение момента инерции твёрдого тела относительно оси вращения на его угловое ускорение равно сумме моментов внешних сил относительно той же оси.

Def 1.9.2. Момент импульса твёрдого тела.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Момент импульса абсолютно твёрдого тела относительно оси вращения равен произведению его момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.

Def 1.9.3. Момент инерции твёрдого тела
Момент инерции зависит от массы тела и от того, как распределена масса относительно оси вращения.
По одной и той же массе тела момент инерции может быть разным.

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i \ r_i^2$$

Для непрерывного распределения массы момент инерции — предел, к которому стремится сумма:

$$I = \int r^2 dm$$

Непрерывное распределение массы в пределах тела характеризуется с помощью величины, которая называется **плотностью массы**

- **линейная плотность** (τ) – ***масса распределена только по длине тела l***

  для однородного распределения $\tau = \dfrac{m}{l} = const$ (5.14)

  из (5.14) видно, что $dm = \tau \cdot dl$ Следовательно, $I = \tau \int\limits_l r^2 dl$

- **поверхностная плотность** (σ) – ***масса распределена только по поверхности S***

  для однородного распределения $\sigma = \dfrac{m}{S} = const$ $I = \sigma \int\limits_S r^2 dS$

- **объёмная плотность** (ρ) – ***масса распределена в объеме тела***

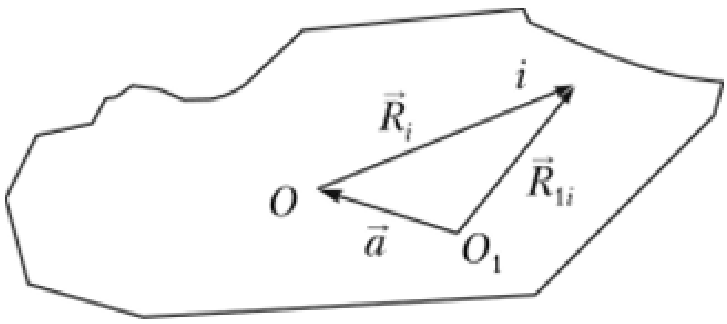
  для однородного распределения $\rho = \dfrac{m}{V} = const$ $I = \rho \int\limits_V r^2 dV$

1.10. Теорема Штейнера. Доказательство. Примеры использования

Теорема 1.10.1. Теорема Штейнера.
Если известен для тела момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, то момент инерции относительно оси параллельной ей определяется по формуле

$$I = I_C + md^2$$

где I_0 - момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести d - расстояние между осями C - центр масс тела



□ Понять то, как меняется момент инерции при параллельном переносе оси, помогает теорема Штейнера. Рассмотрим произвольное твердое тело массы т в проекции, перпендикулярной оси вращения О, проходящей через центр масс тела. Рассмотрим другую произвольную ось вращения O_v параллельную оси О и расположенную на расстоянии а от нее.
Момент инерции относительно оси О равен $J_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i R_i^2$.

Аналогично момент инерции относительно оси О, $J = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i R_{1i}^2$

Воспользовавшись тем, что квадрат вектора равен квадрату его модуля и $\overrightarrow{R_{1i}} = \overrightarrow{R_i} + \vec{a}$, получим:

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i R_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\overrightarrow{R_i} + \vec{a})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \overrightarrow{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{a}^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} m_i \overrightarrow{R_i}\vec{a} =$$

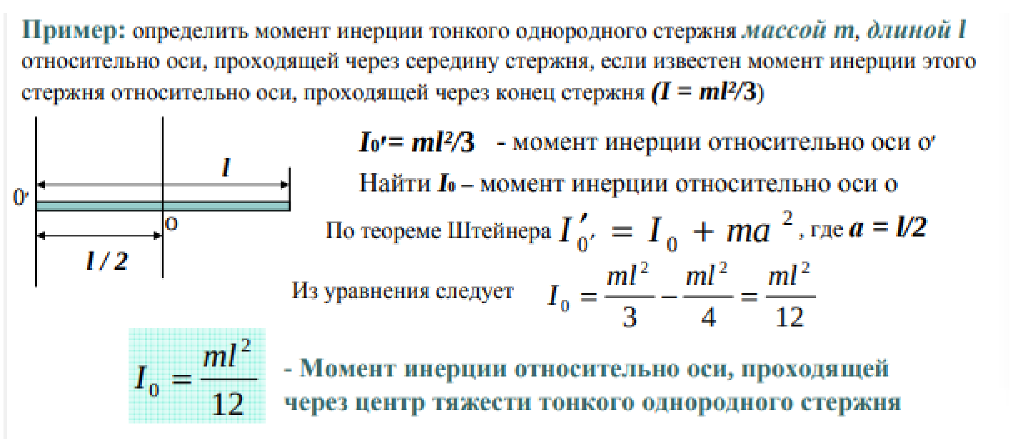
$$= J_0 + \vec{a}^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i + 2\vec{a} \sum_{i=1}^{\infty} m_i \overrightarrow{R_i}$$

По определению центра масс последняя сумма равна нулю, откуда следует:

$$J = J_0 + ma^2$$

Таким образом, доказана следующая теорема.
Теорема Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции этого тела, взятого относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. ■

Пример 1.10.2. Примеры использования



1.11. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Def 1.11.1. Кинетическая энергия вращающегося тела — алгебраическая сумма кинетических энергий отдельных точек тела, масса которых Δm_i

Def 1.11.2. Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить.

$$E_K = \sum_i E_{Ki} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \upsilon_i^2$$

Учитывая, что $\upsilon_i = \omega \cdot r_i$:

$$E_K = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

, где $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ - момент инерции твёрдого тела. Следовательно,

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2}$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\overline{\omega}$, то линейная скорость i-й точки равна

$$\overline{\upsilon}_i = \overline{\omega} R_i$$

Def 1.11.3. Общий случай движения твёрдого тела.
Можно представить в виде суммы поступательного движения со скоростью υ_c и вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции.

Полная кинетическая энергия этого тела:

$$E_{K \text{ полн}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

, где I_c - момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

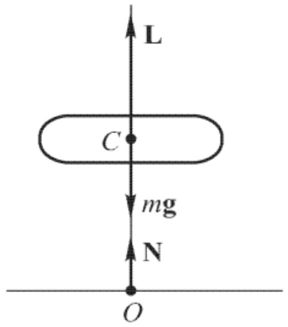
1.12. Гироскоп. Прецессия гироскопа

Def 1.12.1. Гироскопом называется массивное аксиально-симметричное твердое тело, способное вращаться вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью. Ось симметрии гироскопа называют собственной осью гироскопа или просто осью гироскопа. Она может менять свое положение в пространстве.

Пример 1.12.2. Юла, маховики гироскопических компасов, роторы турбин различного назначения и пр.

Def 1.12.3. Движение гироскопа с необходимостью представляет собой движение твердого тела с одной неподвижной точкой, которая называется точкой опоры гироскопа. В случае, если неподвижная точка отсутствует, быстро вращающееся аксиально-симметричное тело называют волчком.

Def 1.12.4. Уравновешенным или ненагруженным называется гироскоп, ось вращения которого вертикальна и момент M всех внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа равен нулю: M=0.



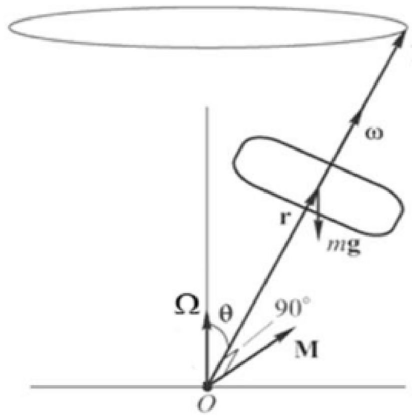
В этом случае поведение гироскопа совпадает со свободным вращением вокруг оси симметрии – центральной главной оси:

$$L(t) = L(0)$$

Ось гироскопа все время сохраняет свое направление.
Если ось гироскопа находится в вертикальном положении, то гироскоп может вращаться в этом положении довольно долго.

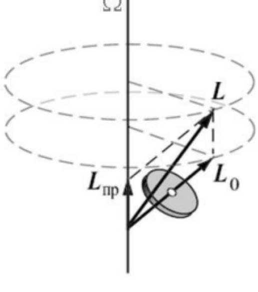
Def 1.12.5. Прецессия нагруженного гироскопа
Если ось быстро вращающегося гироскопа слегка отклонить от вертикали, то она начнет прецессировать вокруг вертикального положения, т.е. совершать вращательное движение по поверхности конуса.

Прецессию гироскопа можно представить как суперпозицию вращений вокруг двух осей: быстрого вращение вокруг собственной оси и относительно медленного вращения вокруг вертикали. Пересечение этих осей вращения дает неподвижную точку гироскопа. Угловая скорость ω вращения вокруг собственной оси называется собственной угловой скоростью гироскопа.
Угловая скорость Ω вращения вокруг вертикальной оси называется угловой скоростью прецессии гироскопа: $\Omega << \omega$
Чем больше собственная частота вращения тем меньше частота прецессии $\Omega \sim 1/\omega$



Приближенная теория гироскопа

$$\frac{dL}{dt} = M$$



В приближенной теории полагается, что вектор момента импульса L гироскопа все время ориентирован вдоль оси гироскопа и равен моменту импульса собственного вращения: $L \cong L_0 = I\omega$
I - момент инерции гироскопа относительно своей оси: $I = I_{||}$
Если скорость прецессии много ниже собственной скорости вращения $\Omega << \omega$, то отклонение вектора L от оси гироскопа незначительно, и им можно пренебречь.

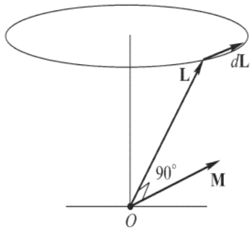
Ось гироскопа отклонена от вертикали на угол Θ
Момент внешних сил относительно неподвижной точки создает только сила тяжести гироскопа, приложенная к его центру масс, расположенному на оси гироскопа и удаленному от его неподвижной тоски на расстояние r

$$M = r \times mg$$

r - радиус вектор, проведенный из неподвижной точки О в центр масс гироскопа

Расчет угловой частоты вынужденной прецессии гироскопа

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{M} \perp \mathbf{r} \\ \mathbf{L} \parallel \mathbf{r}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}|\mathbf{L}| = const \\ d\mathbf{L} \perp \mathbf{L}\end{matrix}\right.$$



$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} = -m\mathbf{g} \times \mathbf{r}$$

$$\Omega I \omega \sin\theta = rmg \sin\theta;$$

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{rm}{I\omega}\mathbf{g}$$

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}$ прецессии не зависит от угла наклона θ оси гироскопа с вертикалью и обратно пропорциональна собственной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$

Направление вращения оси гироскопа при вынужденной регулярной прецессии, обусловленной силой тяжести гироскопа

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} = -m\mathbf{g} \times \mathbf{r}$$

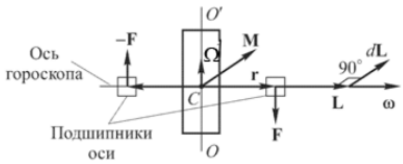
$$\mathbf{\Omega} \times I\boldsymbol{\omega} = -m\mathbf{g} \times \mathbf{r}, \quad I\omega\mathbf{\Omega} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = -mr\mathbf{g} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{\Omega} = -\mathbf{g}\frac{m}{I\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\omega} \uparrow\uparrow \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Omega} \uparrow\downarrow \mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\omega} \uparrow\downarrow \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Omega} \uparrow\uparrow \mathbf{g}$$

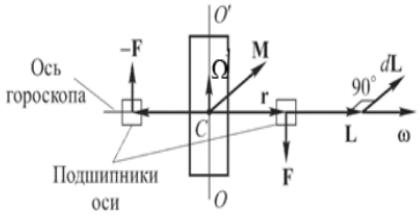
Гироскопические силы и моменты сил



При повороте оси гироскопа вокруг вертикальной оси OO' **на ось гироскопа** будут действовать дополнительные ***гироскопические*** силы, создающие вращательные момент $\boldsymbol{M}$ - «***гироскопический момент***» - вдоль направления поворота оси гироскопа: $\boldsymbol{M} \| d\boldsymbol{L}$. Этим силам, в соответствие с третьим законом Ньютона, отвечает противоположно направленная пара сил, действующая на держатели оси - например, подшипники.

Гироскопический эффект - это появление дополнительного давления в подшипниках, обусловленного гироскопическими силами и связанными с ними гироскопическими моментами. Это явление широко распространено в технике. Оно наблюдается у роторов турбин на кораблях при поворотах и качке, на вертолетах при выполнении виражей и т.п. Гироскопический эффект имеет негативные последствия, поскольку приводит к дополнительному изнашиванию подшипников, а при достаточной силе может привести и в разрушению механизма. 30

Расчет величины гироскопических сил



$$\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}=\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M}=2(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$

$\boldsymbol{r}$ - вектор, проведенный из неподвижного центра масс $\boldsymbol{C}$ к точке приложения силы

$$\mathbf{\Omega}\times I\boldsymbol{\omega}=2(\mathbf{r}\times\mathbf{F})$$

$$I\omega\Omega=2rF \quad\Rightarrow\quad F=\frac{I\omega\Omega}{2r}$$

33

1.13. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы

Состояние данной массы газа полностью определено, если известны его давление, температура и объем. Эти величины называют параметрами состояния газа. Уравнение, связывающее параметры состояния, называют уравнением состояния.

Def 1.13.1. Для произвольной массы газа состояние газа описывается уравнением Менделеева—Клапейрона:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT$$

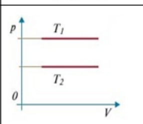
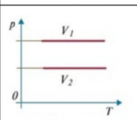
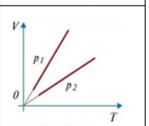
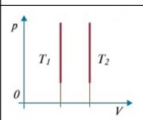
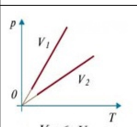
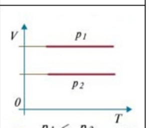
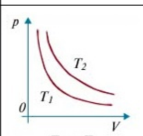
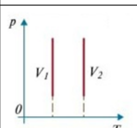
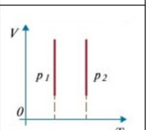
, где p - давление, V - объём, m - масса, M - молярная масса, R - универсальная газовая постоянная ($R=8,31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$). Физический смысл универсальной газовой постоянной в том, что она показывает, какую работу совершает один моль идеального газа при изобарном расширении при нагревании на 1 K.
Уравнение Менделеева—Клапейрона показывает, что возможно одновременное изменение трех параметров, характеризующих состояние идеального газа. Однако многие процессы в газах, происходящие в природе и осуществляемые в технике, можно рассматривать приближенно как процессы, в которых изменяются лишь два параметра. Особую роль в физике и технике играют три процесса: изотермический, изохорный и изобарный.

Def 1.13.2. Изопроцессом называют процесс, происходящий с постоянной массой газа при одном постоянном параметре — температуре, давлении или объеме. Из уравнения состояния как частные случаи получаются законы для изопроцессов.

Def 1.13.3. Изотермическим называют процесс, протекающий при постоянной температуре: $T=const$. Он описывается законом Бойля—Мариотта: $pV=const$.

Def 1.13.4. Изохорным называют процесс, протекающий при постоянном объеме: $V=const$. Для него справедлив закон Шарля: $\frac{p}{T}=const$.

Def 1.13.5. Изобарным называют процесс, протекающий при постоянном давлении. Уравнение этого процесса имеет вид $\frac{V}{T}=const$ при $p=const$ и называется законом Гей-Люссака.

	$p(V)$	$p(T)$	$V(T)$
изобарный $p=const$, $\frac{V}{T}=const$	 $T_1<T_2$	 $V_1<V_2$	 $p_1<p_2$
изохорный $V=const$, $\frac{p}{T}=const$	 $T_1<T_2$	 $V_1<V_2$	 $p_1<p_2$
изотермический $T=const$, $pV=const$	 $T_1<T_2$	 $V_1<V_2$	 $p_1<p_2$

Примечание: можно посмотреть МКТ

1.14. Первое начало термодинамики. Работа. Теплота. Теплоемкость. Внутренняя энергия идеального газа

Def 1.14.1. Внутренней энергией системы называется сумма кинетических энергий хаотического движения всех молекул и потенциальных энергий взаимодействия всех молекул друг с другом.

Def 1.14.2. Вся внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию теплового движения (потенциальная энергия взаимодействия молекул для идеального газа равна нулю). Внутренняя энергия одноатомного газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре, массе газа, и обратно пропорциональна его молекулярному весу.

$$U = \overline{E} \cdot N = \frac{3}{2}kT \cdot \frac{m}{\mu}N_A = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT$$

Для многоатомного газа: $U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. (i - количество степеней свободы молекулы)

Def 1.14.3. Процесс, при котором система возвращается в исходное положение, называется круговым, или циклом. Если система совершает круговой процесс (цикл), то ее внутренняя энергия возвращается в исходное состояние. $\Delta U = 0$

Изменение внутренней энергии системы в термодинамике может происходить двумя способами:

1. за счет передачи системе тепла от окружающих ее тел;

2. за счет совершения этими телами работы над системой.

Def 1.14.4. Работой в термодинамике называется процесс обмена энергией между системой и окружающими ее телами вследствие изменения взаимного расположения взаимодействующих тел. $A > 0$, если тело совершает работу над окружающими телами, и $A < 0$, если тела совершают работу над системой.

Работа при расширении газа
Газ в сосуде с поршнем, расширившись и сдвинув поршень, совершит работу:

$$dA = Fdx = pSdx = pdV \Longrightarrow A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$$

$V = const \Longrightarrow A = 0$
$p = const \Longrightarrow A = p(V_2 - V_1)$
$pV = \frac{m}{\mu}RT \Longrightarrow A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1)$

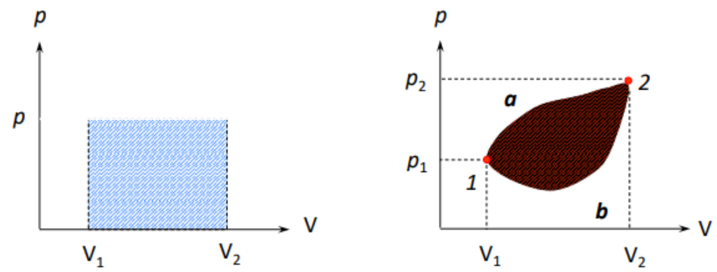


Рис. 1.14.4: Графическое изображение работы

Работа зависит от пути перехода системы из состояния 1 в состояние 2.
Работа при круговом процессе (цикле):
Работа внешних сил по возвращению системы в исходное состояние может быть меньше работы, совершенной системой, т.е. в цикле иметь выигрыш работы.

Def 1.14.5. Теплоотдачей или теплообменом называется процесс обмена энергией между системой и окружающими ее телами без совершения работы только вследствие изменения внутренней энергии этих других тел.

Def 1.14.6. Энергия, отдаваемая или получаемая системой в процессе теплообмена, называется количеством тепла (теплотой). $\Delta Q > 0$, если система получает тепло (нагревается), и $\Delta Q < 0$, если система отдает тепло (охлаждается).

Def 1.14.7. Калория — внесистемная единица тепла, численно равная количеству тепла, необходимого чтобы нагреть 1 г воды на 1 °C (от 19,5 °C до 20,5 °C).
1 кал = 4,18 Дж.

Def 1.14.8. Теплоемкостью тела называют скалярную физическую величину, характеризующую связь между количеством сообщаемого системе тепла и изменением ее температуры.
Различают полную, удельную и молярную теплоемкость.

Def 1.14.9. Полная теплоемкость тела численно равна количеству тепла, необходимого для повышения температуры тела на 1 градус.

$$C_{\text{полн}} = \frac{dQ}{dT} \Longrightarrow dQ = C_{\text{полн}} dT$$

Def 1.14.10. Удельная теплоемкость вещества численно равна количеству тепла, необходимого для повышения температуры единицы массы вещества на 1 градус.

$$c = \frac{dQ}{mdt} \Longrightarrow dQ = cmdT$$

Def 1.14.11. Молярная теплоемкость вещества численно равна количеству тепла, необходимого для повышения температуры 1 моля вещества на 1 градус.

$$C = \frac{dQ}{vdT} = \frac{dQ}{\frac{m}{\mu} dT} = \mu c$$

Замечание 1.14.12. Теплоемкость газов зависит от характера процесса, при котором система получает тепло. Различают:

- теплоемкость при постоянном давлении C_p
- теплоемкость при постоянном объеме C_V

Замечание 1.14.13. Теплоемкость жидкостей и твердых тел
Жидкие и твердые тела расширяются при нагревании незначительно, поэтому их C_p и C_V практически не различаются.

Def 1.14.14. Первым началом термодинамики называется закон сохранения энергии, распространенный на тепловые явления. Изменение внутренней энергии системы при переходе ее из одного состояния в другое равно сумме работ внешних сил и количества теплоты, переданного системе.

$$\Delta U = \Delta Q - A = \Delta Q + A'$$
$$\Delta Q = \Delta U + A$$

A - работа внешних сил, A' - работа газа

Замечание 1.14.15. Следствия из первого начала термодинамики:

1. Изолированная система

   Если система изолирована (теплота ей не передается и работа над ней не совершается), то ее внутренняя энергия остается неизменной (сохраняется). $\Delta Q = 0\,, A = 0 \Longrightarrow \Delta U = 0$

2. Принцип эквивалентности тепла и работы

   При круговом процессе система не может совершать работу без подвода тепла извне, или совершать работу большую, чем подводимое к ней тепло. $\Delta U = 0 \Longrightarrow A = \Delta Q$

3. Вечный двигатель первого рода

   Если тепло к системе не подводится, то работа может быть совершена только за счет убыли внутренней энергии $\Delta Q = 0 \Longrightarrow A = -\Delta U$

   Невозможен вечный двигатель первого рода, т.е. устройство, которое совершало бы работу без подвода энергии извне!

4. Замкнутой системой тел называется такая система, которая не обменивается ни энергией, ни веществом с окружающей средой.

   Внутренняя энергия замкнутой системы изменится не может! $\Delta U = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta U_i = 0$

Def 1.14.16. Уравнение теплового баланса
Алгебраическая сумма количеств теплоты, отданных и полученных в замкнутой системе участвующими в теплообмене неподвижными телами, равна нулю.

$$\Delta Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i c_i (\Theta - t_i) = 0$$

Θ - температура, установившаяся после наступления теплового равновесия.

1.15. Электрическое (ЭС) поле. Силовое и энергетическое описание. Закон Кулона

Def 1.15.1. Электрическое поле — вид материи, посредством которого осуществляется силовое воздействие на электрические заряды, находящиеся в этом поле.

Def 1.15.2. Электростатическое поле — электрическое поле, созданное системой неподвижных зарядов (частный случай электрического)

Электростатическое поле не изменяется во времени.

Def 1.15.3. Основное свойство электрического поля: на всякий заряд, помещённый в это поле, действует сила.

Def 1.15.4. Силовой характеристикой электрического поля является напряжённость.
Напряжённость электрического поля в данной точке $[E, \frac{\text{В}}{\text{м}}]$ — векторная величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Def 1.15.5. Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал.
Потенциал $[\varphi, \text{В}]$ — скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии, которой обладает электрический заряд в данной точке электрического поля, к величине этого заряда.

$$\varphi = \frac{E_{\text{пот}.q}}{q}$$

где $E_{\text{пот}.q}$ - потенциальная энергия заряда в данной точке поля.

Def 1.15.6. Закон Кулона.
Два точечных заряда действуют друг на друга с силой, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна произведению их зарядов (без учета знаков зарядов):

$$F = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ — постоянная Больцмана
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ — электрическая постоянная

1.16. Напряженность электростатического поля. Поток напряженности ЭС поля. Теорема Гаусса в интегральной форме

Def 1.16.1. Пусть E_i - напряжённость электрического поля, создаваемая зарядом q_i в точке с радиус-вектором r_i, проведенным из этого заряда. Тогда, из принципа суперпозиции электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

1. Напряжённость электрического поля пространственно распределённого заряда

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r}$$

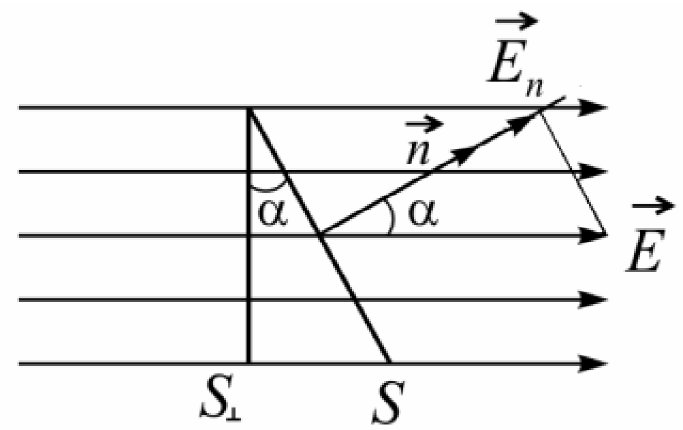
2. Напряжённость электрического поля распределённого по поверхности или линии заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r}$$

Def 1.16.2. Поток напряжённости ЭС поля.
Скалярная величина:

$$\Phi_E = \int_S E \cos\alpha \; dS = \int_S E_{\text{п}} \; dS$$



Рассмотрим площадку $S_\perp$, через которую проходит N силовых линий:

$$E = \frac{N}{S_\perp}$$

Очевидно, столько же силовых линий проходит и через площадку S, расположенную под произвольным углом α к направлению силовых линий. $S_\perp = S\cos\alpha$

$$E = \frac{N}{S\cos\alpha}$$

$E\cos\alpha = E_{\text{п}}$ — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке S. В таком случае число силовых линий, пронизывающих произвольную площадку, размещенную в электрическом поле равно

$$N = ES\cos\alpha = E_{\text{п}} S$$

Если поле неоднородное, всегда можно выбрать элементарную площадку dS, которую можно считать плоской, а поле в ее окрестностях — однородным:

$$N = \int_S E_{\text{п}} dS$$

Правую часть уравнения выше называют потоком вектора $\vec{E}$ через поверхность S:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha \; dS = \int_S E_{\text{п}} \; dS$$

или как скалярное произведение двух векторов, если поверхность замкнутая (за положительное направление нормали берем её внешнюю нормаль):

$$\Phi_A^{\circ} = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS$$

Теорема Гаусса.
Поток вектора напряжённости электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью, делённой на ε_0:

$$\Phi_A^{\circ} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Интегральная форма:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_V \rho \; dV$$

1. Теорема Гаусса устанавливает фундаментальное свойство ЭП — наличие у него источников (положительные заряды) и стоков (отрицательные заряды) линий поля.
2. Теорема Гаусса позволяет вычислять напряженность поля систем дискретно и непрерывно распределенных зарядов, т.е. выступает аналогом закона Кулона и принципа суперпозиции.

Если заряд неравномерно распределён по объему.

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Если электрические заряды распределены в разных местах пространства с некоторой объемной плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$, тогда суммарный заряд объема dV будет равен $\sum q_i = \int p dV$.
Тогда:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_V \rho \; dV$$

1.17. Применение теоремы Гаусса. Сферически симметричное поле. Поле системы точечных зарядов, нити, плоскости

Примечание: на самом деле информации сверхмного

TODO

1.18. Линейный интеграл электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности ЭС поля. Потенциальность ЭС поля. Электрический потенциал

Def 1.18.1. Работа поля при перемещении зарядов.
Линейный интеграл ЭС поля — работа, совершенная этим полем, по перемещению заряда из точки 1 в точку 2.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

или

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{r^2}dr = kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Работа сил электрического поля по перемещению электрического заряда не зависит от траектории заряда. Она зависит только от его начального и конечного положений.

Def 1.18.2. Электрический потенциал (также называемый потенциалом электрического поля, падением потенциала, электростатическим потенциалом) определяется как количество работы энергии, необходимое на единицу электрического заряда для перемещения заряда из контрольной точки в определенную точку электрического поля.
Численно потенциал равен потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд.

$$\varphi = k\frac{Q}{r}$$

Def 1.18.3. Циркуляция вектора напряженности электрического поля.
Если траектория движения заряда замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и соответственно работа по его перемещению равна нулю. Тогда:

$$A = \oint_l qE_l dl = q\oint_k E_l dl = 0$$

Поскольку $q \neq 0$, то $E_l dl = 0$.

Работа сил поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна 0,
Циркуляция вектора его напряженности по любому замкнутому контуру равна 0,
$\Longrightarrow$ это потенциальное (консервативное) поле. Тогда:

$$A_{12} = W_{P1} - W_{P2}$$

1.19. Градиент скалярной функции. Связь между напряженностью и потенциалом. Расчет напряженности по заданному распределению потенциалов

Def 1.19.1. Градиент — вектор, своим направлением указывающий направление возрастания некоторой скалярной величины

$$grad\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial z})$$

Def 1.19.2. Связь между напряжённостью и потенциалом.
Напряжённость электрического поля равна градиенту его электрического потенциала, взятого с обратным знаком:

$$E = -grad\varphi$$

Зависимость электрического потенциала можно записать уравнением $\varphi = f(x, y, z)$, тогда проекции вектора напряженности на оси координат имеют вид:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

Сам вектор можно представить в виде

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right)$$

, что является градиентом функции φ:

$$E = -grad\varphi$$

1.20. Электрический диполь. Распределение напряженности и потенциала. Дипольный момент. силы, действующие на диполь во внешнем поле

Def 1.20.1. Электрический диполь — система двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$.

Def 1.20.2. Точечный диполь — если расстояние l между зарядами значительно меньше расстояния r до точки, где рассматривается поле, создаваемое этими зарядами.

Def 1.20.3. Плечо диполя — вектор $\overrightarrow{l}$, направленный от отрицательного заряда к положительному

Def 1.20.4. Дипольный момент — вектор $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{l}$

$$\varphi = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

где r_1 - расстояние от положительного заряда до точки наблюдения, r_2 - расстояние от отрицательного заряда до точки наблюдения, k - постоянная Больцмана.

Замечание 1.20.5. Потенциал через момент:

$$\varphi = k\frac{qd\cos\alpha}{r^2} = k\frac{p\cos\alpha}{r^2}$$

Замечание 1.20.6. Потенциал через вектора:

$$\varphi = k\frac{pr\cos\alpha}{r^3} = k\frac{(\overrightarrow{p}, \ \overrightarrow{r})}{r^3}$$

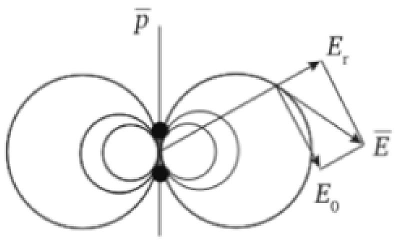
По формуле $E = -grad\varphi$ можно определить поле диполя E, пользуясь сферической системой координат:

$$\overline{E} = -grad\varphi = -\left(\overline{r}_0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \overline{\theta}_0\frac{\partial\varphi}{r\ \partial\theta} + \overline{\alpha}_0\frac{\partial\varphi}{r\sin\theta\ \partial\alpha}\right)$$

получаем

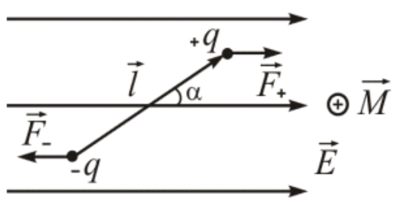
$$\overline{E} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon r^3}(\overline{r}_0 2\cos\theta + \overline{\theta}_0\sin\theta)$$

Поле диполя симметрично относительно его оси. Силовые линии поля в меридиональной плоскости:



б

Диполь во внешнем электрическом поле.



В однородном электрическом поле вектор напряженности имеет одно и то же направление в любой точке, и на диполь будут действовать силы F_+ и F_-. Эти силы равны по модулю: $F_+ = F_- = qE$ и противоположны по направлению. Они образуют пару сил, плечо которой равно $l\sin\alpha$.
Модуль момента этой пары сил равен произведению силы и плеча: $M = qEl\sin\alpha = PE\sin\alpha$ или в векторном виде $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{E}$.
При повороте на угол α энергия диполя изменится на величину:

$$W = \int PE\sin\alpha\ d\alpha = -PE\cos\alpha$$

1.21. Энергия системы зарядов. Поле объемного заряда. Энергия и плотность энергии ЭС поля

Def 1.21.1. Энергия системы зарядов.
Для образования любой системы заряженных тел необходимо совершить работу, т.к. заряды взаимодействуют между собой по закону Кулона. Установим работу по перемещению заряда из бесконечности в заданную точку пространства. Работа по переносу заряда q_1 из бесконечности в точку 1 будет равняться нулю, т.к. на данный момент электрическое поле в выбранной точке пространства отсутствует:

$$A_1 = 0$$

Работа по перемещению заряда q_2 равна произведению его величины на разность потенциалов в точке 1 и точке 2. Потенциал в точке 1 ($= \infty$) равен нулю, тогда:

$$A_2 = q_2(\varphi_2 - \varphi_\infty) = q_2\varphi_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Для переноса заряда q_3 в точку 3 необходимо выполнить работу против сил поля, созданного уже двумя зарядами q_1 и q_2:

$$A_3 = q_3(\varphi_3 - \varphi_\infty) = q_3\varphi_3 = q_3\left(k\frac{q_1}{r_{13}} + k\frac{q_2}{r_{23}}\right) = k\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

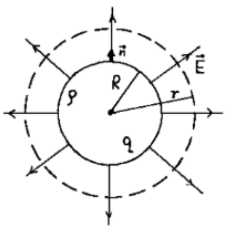
тогда
Энергия системы — сумма этих работ:

$$W = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

для системы из n точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i$$

Поле объемных зарядов.



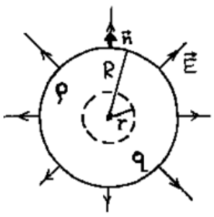
$$\underline{r \ge R} \Rightarrow \quad q(r) = q_0 \Rightarrow \quad \oint_S E_r(r)dS = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2}}.$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty k\frac{q_0}{r^2}dr; \quad \varphi(\infty) = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi(r) = kq_0\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = kq_0\left(-\frac{1}{r}\right)_r^\infty = \frac{kq_0}{r}.$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{kq_0}{r}}.$$



$$\underline{r < R} \Rightarrow q(r) = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{E}d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_S E_r(r)dS = 0$$

$$E_r(r) = const \Rightarrow \quad E_r(r)\oint_S dS = 0 \qquad \boxed{E_r(r) = 0}.$$

$$\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R E_r(r)dr = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \varphi(R) = \varphi_0}.$$

Энергия ЭС поля.
Энергия поля конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 SdE^2,$$

где $Sd = V$ — объем пространства, в котором сосредоточено поле

Плотность энергии ЭС поля — физическая величина, численно равная энергии ЭС поля, сосредоточенного в единице объема пространства:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{ED}{2},$$

где $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ — вектор напряженности электрического поля

1.22. Дивергенция векторной функции. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

Теорема Гаусса выражает замечательное свойство электрического поля, которое позволяет представить эту теорему в иной форме, расширяющей ее возможности как инструмента исследования и расчета. Найдем дифференциальную форму теоремы Гаусса, в которой устанавливается связь между объемной плотностью заряда р и *изменениями напряженности* (E) *в окрестности данной точки пространства.*
Пусть имеем заряд q в объеме V, охватываемом замкнутой поверхностью S, представим его как $q_{\text{внут}} =< \rho > V$, где $< \rho >$ — среднее по объему V значение объемной плотности заряда.

Теорема 1.22.1. Теорема Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Подставим его в уравнение заряда и разделим на V:

$$\frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{< \rho >}{\varepsilon_0}$$

Устремим объем к 0, стягивая к интересующей нас точке поля, тогда $< \rho >$ будет стремиться к значению ρ в данной точке поля, а левая часть будет стремиться к $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.
Величина, являющаяся таким пределом отношения называется дивергенцией поля и обозначается как:

$$div\vec{E} = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} \right)$$

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

оно и выражает теорему Гаусса в дифференциальной форме.

1.23. Дивергенция градиента. Оператор Лапласа. Уравнения Пуассона и Лапласа для ЭС поля

Def 1.23.1. Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$div\ grad\varphi = \nabla^2\varphi$$

Оператор Лапласа (Лапласиан):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)F$$

Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме.

Def 1.23.2. Уравнение Лапласа (частный вид ур-я Пуассона).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V \frac{pdV}{r}$$

является решением уравнения Пуассона в случае, когда заряды распределены в конечной области пространства.
Если рассматриваемой области пространства отсутствуют объемные электрические заряды¸ то уравнение Пуассона станет уравнением Лапласа.
Даёт возможность определить потенциал поля объемных зарядов, если известно их расположение:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R}$$

1.24. Ротор векторной функции. Физический смысл ротора. Теорема Стокса

Def 1.24.1. Ротор векторного поля — вектор, проекция которого rot_n на каждое направление n есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру L, являющемуся краем плоской площадки ΔS, перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки (площади), когда размеры площадки стремятся к 0, а сама площадка стягивается в точку:

$$rot_n a = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L a \cdot dr}{\Delta S}$$

Замечание 1.24.2. Физический смысл.
Поверхностная плотность циркуляции поля по бесконечно малой окружности равна проекции ротора на нормаль к данной окружности.
Указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

Теорема 1.24.3. Теорема Стокса.
Циркуляция вектора $\overline{a}(\text{т}.M) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, ограниченную этим контуром (натянутую на этот контур)

$$(rotF \cdot n)(M) = \lim_{\Gamma \to M} \frac{\oint_{\partial\Gamma} F \ dl}{S(\Gamma)}$$

где Γ — кусок поверхности, стягивающийся к точке M, $S(\Gamma)$ — площадь Γ, n — единичный вектор нормали к поверхности Γ, определяющий её ориентацию.

1.25. Проводники в электрическом поле. Основная задача электростатики. Теорема единственности

Def 1.25.1. Проводник — вещество или материальное тело, В котором имеются заряды, способные переносить электрический ток, называется проводником. В металлах переносчиками тока служат свободные (не привязанные к атомам) электроны, в электролитах - ионы, в плазме - и электроны, и ионы. Для электростатических явлений поле внутри проводника равно нулю.

Механизм исчезновения электрического поля в проводниках связан со смещением свободных зарядов ровно настолько, чтобы как раз компенсировать внешнее электрическое поле, если таковое имеется. При изменении внешнего поля свободные заряды в проводнике перераспределяются, а в момент перераспределения в проводнике течет ток.

Замечание 1.25.2. Основная задача электростатики.
Общей задачей расчета электростатического поля является определение напряженности поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел.
Для электростатического поля задача полностью решается отысканием потенциала как функции координат. Обратная задача отыскания распределения зарядов по заданному распределению зарядов решается с помощью уравнения Пуассона или с помощью уравнения Лапласа и граничного условия у поверхности заряженных проводящих тел. Это наиболее простой тип задач.
Однако большей частью задача оказывается значительно сложнее. Обычно рассматривается система заряженных проводящих тел с известной геометрией, окруженных диэлектриком, в котором отсутствуют объемные заряды. Заданы либо потенциалы тел, либо полные заряды. Распределение же зарядов по поверхности каждого тела неизвестно и подлежит определению. В этом и заключается основная трудность задачи. Также неизвестным является и распределение потенциала в пространстве.

Теорема 1.25.3. Теорема единственности.
Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом.
Иначе говоря, для любой поверхности S, ограничивающей пространственную область V, существует единственная функция $\sigma(X)$, выражающая зависимость поверхностей плотности заряда σ от точки $X \in S$, при которой напряженность поля в любой точке области V обращается в 0.

Доказательство. Предположим, что заряд q может распределиться по поверхности проводника двумя способами: $\sigma(X)$ и $\sigma'(X)$. Тогда для заряда −q также имеются два возможных распределения: $-\sigma(X)$ и $-\sigma'(X)$.

Рассмотрим функцию $\sigma''(X) = \sigma(X) - \sigma'(X)$. Она отвечает распределению по поверхности проводника нулевого заряда ($0 = q + (-q)$). Если $\sigma(X) \neq \sigma'(X)$, то поверхностная плотность$\sigma''(X)$ не во всех точках обращается в нуль; стало быть, на поверхности проводника возникают заряды: в одних местах — положительные, в других — отрицательные (ведь суммарный заряд проводника равен нулю). Внутри проводника поля нет, а снаружи оно появляется, и линии электрического поля, начинающиеся на положительных зарядах поверхности проводника, вы- нуждены заканчиваться на отрицательных зарядах этой же поверхности (а куда им деваться — ведь проводник уединённый, и никаких других зарядов вне проводника у нас нет).

И тут мы приходим к противоречию. С одной стороны, как нам хорошо известно, поверх- ность проводника является эквипотенциальной. Но с другой стороны, если перемещать проб- ный заряд вдоль линии поля, начинающейся на положительном заряде в точке A поверхности проводника и заканчивающейся на отрицательном заряде в точке B той же поверхности, то поле совершит ненулевую работу, и тогда потенциал в точке B будет отличаться от потенциала в точке A. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\sigma(X) = \sigma'(X)$, то есть распределение заряда по поверхности проводника единственно. Теорема доказана.

1.26. Диэлектрики в электрическом поле. Полярные и неполярные диэлектрики. Индуцированный дипольный момент. Поляризация

Def 1.26.1. Диэлектрики — вещества, не способные проводить электрический ток.
В отличие от проводников, в идеальных диэлектриках отсутствуют свободные заряды. Заряды, входящие в состав диэлектрика тесно связаны между собой и могут освободиться только под действием очень сильных полей. Такие заряды называются связанными.
Внесённые во внешнее электрическое поле, диэлектрики испытывают изменение, называемое поляризацией

Def 1.26.2. Поляризация диэлектрика — явление возникновения зарядов противоположного знака на противоположных концах диэлектрика при внесении его во внешнее электрическое поле.

Замечание 1.26.3. Механизм поляризации диэлектриков определяется строением их молекул. Известно, что атом или молекула любого вещества являются электрически нейтральными. Однако центры распределения положительных и отрицательных зарядов в них могут или совпадать, или не совпадать. В первом случае молекулы называются неполярными, а во втором — полярными.
Полярные диэлектрики состоят из молекул, в которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Такие молекулы можно представить в виде двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, называемых диполем.
Неполярные диэлектрики состоят из атомов и молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов совпадают.

Def 1.26.4. Индуцированный дипольный момент.
Векторная величина, характеризующая, наряду с суммарным зарядом, электрические свойства системы заряженных частиц (распределения зарядов) в смысле создаваемого ими поля и действия на неё внешних полей.

$$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{l}$$

где q - величина положительного заряда, l - вектор с началом в отрицательном заряде и концом в положительном.

Для системы из n частиц:

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \overrightarrow{r}_i$$

где q_i - заряд частицы с номером i, r_i - её радиус-вектор.
Или, если суммировать отдельно по положительным и отрицательным зарядам:

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N^+} q_i^+ \overrightarrow{r}_i - \sum_{i=1}^{N^-} |q_i^-| \overrightarrow{r}_i = Q^+ \overrightarrow{R}^+ - |Q^-| \overrightarrow{R}^-$$

где $N^{\pm}$ - число положительно/отрицательно заряженных частиц

Def 1.26.5. Поляризованность — векторная величина, равная отношению суммы электрических моментов молекул, заключенных в физически малом элементе диэлектрика, содержащем данную точку, к объему этого элемента:

$$\overline{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \overline{p}_i}{\Delta V}$$

где $\overline{p}_i$ - дипольный момент i-той молекулы.

1.27. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость. Вектор электрического смещения

Def 1.27.1. Диэлектрическая проницаемость $[\varepsilon]$ — физическая величина, которая показывает, во сколько раз увеличивается емкость конденсатора при заполнении пространства между его обкладками диэлектриком
Показывает, во сколько раз напряженность одного и того же поля в вакууме больше, чем в диэлектрике.
Для всех без исключения веществ, $\varepsilon > 1$. Для вакуума $\varepsilon = 1$.

Ёмкость плоского конденсатора в вакууме:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

а при внесении в пространство между его обкладками диэлектрика:

$$C\varepsilon C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

при этом заряд на обкладках конденсатора не меняется.

Def 1.27.2. Диэлектрическая восприимчивость
И для полярных, и для неполярных диэлектриков, которые находятся в не слишком сильных электрических полях, выполняется условие:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

где коэффициент пропорциональности χ называется электрической восприимчивостью диэлектрика.
(P - поляризация диэлектрика, E - внешнее электрическое поле)

Замечание 1.27.3. Связь между диэлектрической проницаемостью и электрической восприимчивостью диэлектрика:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{R} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \Longrightarrow \varepsilon = 1 + \chi$$

В случае вакуума, $\chi = 0$.
Электрическая восприимчивость, как и диэлектрическая проницаемость — величина безразмерная.
Главная задача электростатики – расчет электрических полей, то есть $\vec{E}_0$ в различных электрических аппаратах, кабелях, конденсаторах, и т.д. Эти расчеты сами по себе не просты, да еще наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще более усложняют задачу.
Для упрощения расчётов была введена новая векторная величина — вектор электрического смещения (электрическая индукция)

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

Для точечного заряда в вакууме:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

1.28. Электроемкость. Поля плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора

Def 1.28.1. Электроёмкость $[C, \Phi_{\text{фарады}}]$ — характеристика проводника, мера его способности накапливать электрический заряд.

$$q = C\varphi$$

Ёмкость уединенного проводника зависит от его формы, размеров и диэлектрических свойств среды, в которой находится проводник, а также электрических свойств, расположения, форм и размеров окружающих тел.

Def 1.28.2. Конденсатор — система проводников, электростатическое поле которых полностью сосредоточено в объеме, занимаемом этой системой.
Формула заряда на одной из обкладок конденсатора:

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU$$

Def 1.28.3. Энергия заряженного конденсатора
Процесс возникновения на обкладках конденсатора зарядов $+q$ и $-q$ можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимаются малые порции заряда Δq и перемещаются на другую обкладку.

Работа переноса очередной порции заряда:

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U$$

Тогда энергия:

$$dW = dA = Udq = \frac{q}{C}dq$$

Интегрируя, получаем формулу энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

1.29. Понятия проводимости и сопротивления. Теория электропроводности Друда-Лоренца, ее ограничения

Def 1.29.1. Электропроводность или электрическая проводимость — способность тела/среды проводить электрический ток.

Def 1.29.2. Электропроводность — свойство тела/среды, определяющее возникновение в них электрического тока под действием электрического поля.

$$G = \frac{I}{U}$$

или (ρ, Ом $\cdot$ м - удельное электрическое сопротивление):

$$\lambda = \frac{1}{\rho}$$

Def 1.29.3. Электрическое сопротивление [R, Ом] — физическая величина, характеризующая свойство проводника препятствовать прохождению эл. тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему.

$$I = \frac{U}{R}$$

где R - электрическое сопротивление проводника

Для однородного линейного проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S (ρ, Ом $\cdot$ м - удельное электрическое сопротивление):

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

Теорема 1.29.4. Теория электропроводности Друда-Лоренца.

1. Электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа.
2. Между соударениями электроны движутся свободно, пробегая в среднем путь.
3. Электроны сталкиваются в основном с ионами, образующими кристаллическую решетку, а не между собой.
4. Столкновения электронов с ионами приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой

Ограничения:

- Взаимодействие электрона с другими электронами и ионами не учитывается между столкновениями.
- Столкновения являются мгновенными событиями, внезапно меняющими скорость электрона
- Вероятность для электрона испытать столкновение за единицу времени равна $\frac{1}{r}$
- Состояние термодинамического равновесия достигается благодаря столкновениям.

1.30. Закон Ома в интегральной и дифференциальной формах

Предположения:

1. После соударения с кристаллической решеткой скорость упорядоченного движения электрона равна 0
2. Пусть напряженность поля не меняется

Со стороны поля заряд e испытывает действие силы $F = eE$ и приобретает ускорение $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$. Во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость $\langle v_{max} = \frac{eE}{m}\tau\rangle$:

$$\langle u_{\max}\rangle = \frac{eE}{m}\tau$$

где τ — время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

$$\tau = \frac{\lambda}{\upsilon} \qquad \langle u_{\max}\rangle = \frac{eE}{m}\frac{\lambda}{\upsilon} \qquad \langle u\rangle = \frac{1}{2}\langle u_{\max}\rangle = \frac{eE}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}$$

$$j = ne\langle u\rangle \qquad \boxed{j = \frac{ne^2}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}E}$$

Закон Ома

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}} \qquad \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2}{2m}\frac{\lambda}{\upsilon}}$$

где j - плотность тока,
λ - электрическая проводимость,
E - напряжённость,
ρ - удельное электрическое сопротивление,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ - элементарный заряд,
n - концентрация электронов.

Def 1.30.1. Закон Ома — физический закон, определяющий связь электродвижущей силы источника (или электрического напряжения) с силой тока, протекающего в проводнике, и сопротивлением проводника.

Def 1.30.2. Закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}$$

При $\varepsilon_{12} = 0 \quad I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$ — однородный участок цепи
При $\varphi_1 = \varphi_2 \quad I = \frac{\varepsilon}{R}$ — замкнутая цепь

Def 1.30.3. В дифференциальной форме при наличии сторонних сил:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}})$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \lambda\vec{E}$$

Связывает плотность тока j в любой точке внутри проводника с напряженностью E электрического поля в этой же точке.

1.31. Закон Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах

Def 1.31.1. Закон Джоуля-Ленца.
При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Количество тепла, выделяющегося в проводнике пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени прохождения тока.

$$Q = RI^2 t$$

Def 1.31.2. Интегральная форма:
Если сила тока изменяется со временем:

$$Q = \int_0^t RI^2 dt$$

При этом силы поля совершают работу: $dA = U dq = U_i dt = RI^2 dt$
таким образом, нагревание проводника происходит за счёт работы, совершаемой силами поля над носителями заряда.

Def 1.31.3. Дифференциальная форма:

$$w = \rho j^2 = \lambda E^2$$

По закону Джоуля — Ленца, за время dt в этом объеме выделится теплота:

$$dQ = RI^2 dt$$

$$R = p\frac{dl}{dS} \qquad dl = jdS \qquad dQ = \frac{pdl}{dS}(jdS)^2 dt = pj^2 dl dS dt$$

$$dQ = pj^2 dV dt$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется удельной тепловой мощностью тока.

Используя дифференциальную форму закона Ома $(j = \lambda E)$ и соотношение $p = \frac{1}{\lambda}$, получим.

Формулы $\boxed{w = \rho j^2}$ $\boxed{w = \lambda E^2}$ являются обобщенным выражением закона Джоуля—Ленца в дифференциальной форме.

11.1. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля–Ленца

При прохождении электрического тока в цепи за время dt через каждое сечение любого проводника, включенного в эту цепь, переносится заряд $dq = I\,dt$ (I – сила тока в цепи). Силы электростатического поля и сторонние силы, если они есть на выбранном участке, совершают работу

$$dA = U\,dq = UI\,dt,$$

где U – разность потенциалов между началом и концом выбранного участка цепи. За конечный промежуток времени t совершается работа

$$A = \int_0^t U\,dq = UI\int_0^t dt = UIt. \qquad (11.1)$$

Величина, выраженная формулой (11.1), называется работой постоянного тока. Как и любая работа, она измеряется в джоулях:

$$[\grave{A}] = 1\,\text{Äæ} = 1\,\text{Â·À·ñ}.$$

Разделив работу на время, за которое она совершается, получим выражение для мощности, развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = \frac{A}{t} = UI. \qquad (11.2)$$

$$[P] = 1\,\text{Âò} = 1\,\text{Â·À}.$$

Эта мощность в общем случае расходуется на совершение рассматриваемым участком цепи механической работы над внешними телами (если участок перемещается в пространстве; см. работу электродвигателя), на протекание химических реакций и на нагревание самого участка цепи.

В проводниках первого рода, к которым относятся в первую очередь, все металлы, если они неподвижны, механическая работа не выполняется, и химические процессы не происходят. Следовательно, вся работа электрического тока расходуется на выделение теплоты в проводнике, т. е. на его нагревание. В рамках классической физики объяснить это можно тем, что строение металла можно представить, как кристаллическую решетку, состоящую из положительных ионов. Свободные электроны, которые движутся в электрическом поле, сталкиваются с узлами этих решеток и отдают им свою энергию, нагревая проводник. Выделяющаяся в проводнике теплота определяется соотношением (11.1):

$$Q = UIt. \tag{11.2}$$

Выражение (11.2), используя закон Ома, можно представить в виде:

$$Q = UIt = IR^2 t = \frac{U^2}{R} t. \tag{11.3}$$

Выражение (11.3) называют законом Джоуля–Ленца в интегральной форме, который был установлен в 1841 г. независимо английским ученым Дж. Джоулем (1818–1889) и русским ученым Э.Х. Ленцем (1804–1865).

Введем понятие *удельной тепловой мощности*, которое можно определить, как количество теплоты, выделившееся в единице объема проводника за единицу времени:

$$\omega = \frac{\Delta Q}{\Delta V \, \Delta t}.$$

Учитывая (11.3), (10.8) и то, что объем проводника $\Delta V = S\,\Delta l$, получим:

$$\omega = \frac{I^2 \rho \Delta l \, \Delta t}{S S \, \Delta l \, \Delta t} = \frac{I^2}{S^2} \rho = j^2 \rho, \tag{11.4}$$

где $j = \frac{I}{S}$ – плотность тока; ρ – удельное сопротивление проводника. Используя закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$ и связь удельной проводимости и удельного сопротивления проводника $\rho = \frac{1}{\sigma}$, получим математическое выражение для закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = \sigma^2 E^2 \frac{1}{\sigma} = \sigma E^2. \tag{11.5}$$

1.32. Плотность тока. Уравнение непрерывности для плотности тока. Постоянный электрический ток

Def 1.32.1. Электрический ток — упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов

Def 1.32.2. Сила тока $[I, \mathrm{A}]$ — количественная мера электрического тока. Скалярная величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Если в проводнике движутся носители обоих знаков, то:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$$

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

Def 1.32.3. Плотность тока — физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}$$

В общем случае плотность тока не будет одинаковой по всему сечению проводника, поэтому:

$$j = lim_{dS \to 0} \frac{dI}{dS}$$

$$dI = jdS$$

Сила тока сквозь произвольную поверхность S определяется как поток вектора j, т.е.:

$$I = \int_S j_n dS$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется постоянным.

Def 1.32.4. Уравнение непрерывности.
Рассмотрим в некоторой среде, в которой течет ток, некоторую замкнутую поверхность S:
Заряд, выходящий в единицу времени из объема V, ограниченного поверхностью S: $\int_S (\vec{j}, d\vec{S})$.

В силу сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда, содержащегося в данном объеме (уравнение непрерывности):

$$\int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Знак минус означает то, что заряды вытекают из объема V.

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, получим уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$(\vec{\nabla},\ \vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

В точках, являющихся источниками вектора плотности тока, происходит убывание заряда.
Выражает закон сохранения электрического заряда: полный заряд системы не может изменяться, если через ее границу не проходят электрически заряженные частицы.
В случае постоянного тока $(\varphi, \rho = const)$:

$$(\vec{\nabla},\ \vec{j}) = 0$$

- вектор плотности тока не имеет источников в случае постоянного тока
- линии тока нигде не начинаются и не заканчиваются — линии постоянного тока замкнуты

1.33. Электрические цепи постоянного тока. ЭДС. Правила Кирхгофа

1.34. Включение и отключение конденсатора от источника постоянной ЭДС