Tarea 4 Física Numérica

Isaias Garcia Lopez

03 de Noviembre del 2025

Índice

1. Solución Numérica del Lanzamiento de Martillo

1.1. (a) Resolución de la Ecuación de Movimiento

1.1.1. Formulación Matemática

El movimiento del martillo se describe mediante las ecuaciones de movimiento en dos dimensiones con resistencia del aire:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_D \cos\theta \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - F_D \sin\theta \tag{2}$$

donde la fuerza de arrastre aerodinámico es:

$$F_D = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2 \tag{3}$$

y θ es el ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal.

1.1.2. Transformación a Sistema de Primer Orden

Para resolver numéricamente, transformamos las ecuaciones de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \tag{5}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{F_D}{m}\frac{v_x}{v} \tag{6}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{F_D}{m}\frac{v_y}{v} \tag{7}$$

donde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

1.1.3. Condiciones Iniciales y Parámetros

- Posición inicial: $x_0 = 0$ m, $y_0 = 2$ m
- Ángulo de lanzamiento: $\phi = 45°$
- Masa del martillo: $m = 7{,}26$ kg
- Radio: $R = 0{,}06$ m
- Área transversal: $A = \pi R^2 = 0{,}01131$ m²
- Densidad del aire: $\rho = 1{,}2$ kg/m³
- Coeficientes de arrastre:
  - Sin fricción: $C_D = 0$
  - Flujo laminar: $C_D = 0{,}5$
  - Flujo inestable: $C_D = 0{,}75$

1.1.4. Método de Solución

Utilizamos el método `solve_ivp` de SciPy con algoritmo RK45 para integrar el sistema. Para encontrar la velocidad que produce la distancia del record mundial (86.74 m), implementamos un algoritmo de búsqueda:

1. Estimación inicial: $v_0 = 30$ m/s
2. Resolución del sistema de EDOs
3. Cálculo de la distancia cuando $y = 0$
4. Ajuste iterativo de v_0 hasta alcanzar 86.74 m

1.1.5. Resultados de Velocidades Iniciales

Regimen	Velocidad Inicial (m/s)	Distancia Alcanzada (m)
Sin fricción	29.03	86.74
Flujo laminar	30.85	86.74
Flujo inestable	31.92	86.74

Cuadro 1: Velocidades iniciales requeridas para alcanzar 86.74 m

1.2. (b) Gráficas de Trayectorias y Altitud

1.2.1. Implementación Gráfica

Se generaron dos tipos de gráficas para cada régimen:

1. **Trayectoria** $y = y(x)$: Muestra la forma de la parábola modificada por la resistencia del aire
2. **Altitud vs tiempo**: Muestra la evolución temporal de la altura

1.2.2. Características Observadas

- **Sin fricción**: Trayectoria parabólica simétrica
- **Flujo laminar**: Trayectoria asimétrica con alcance reducido
- **Flujo inestable**: Mayor asimetría y reducción del alcance

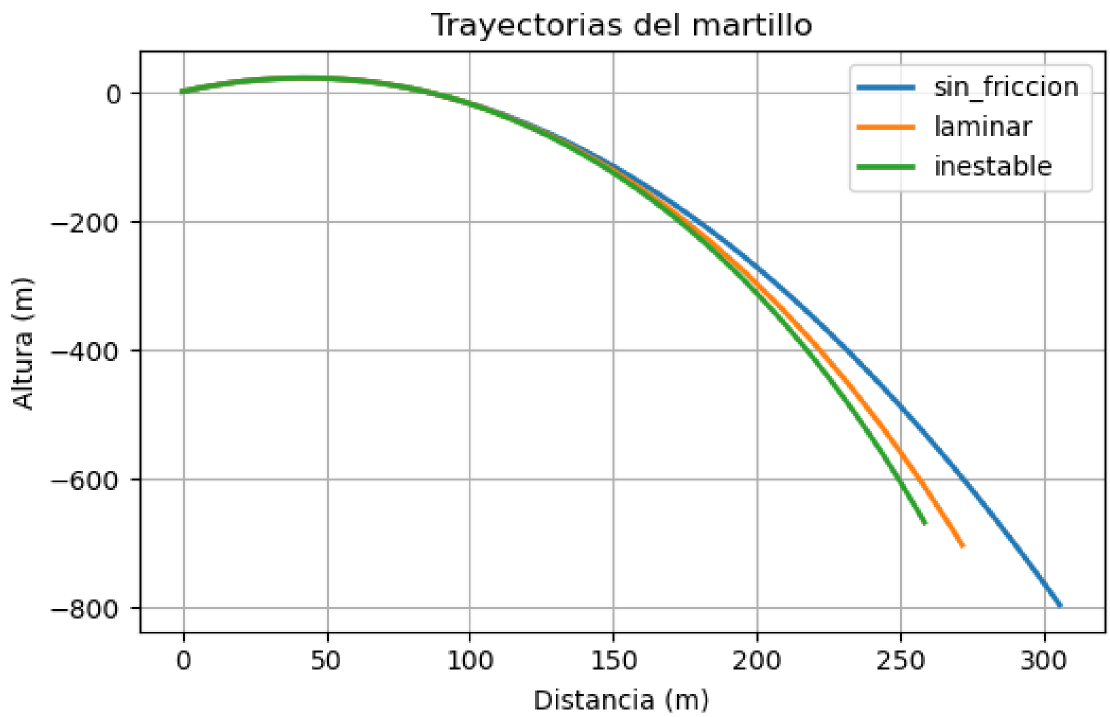

Figura 1: Comparación de trayectorias para los tres regímenes

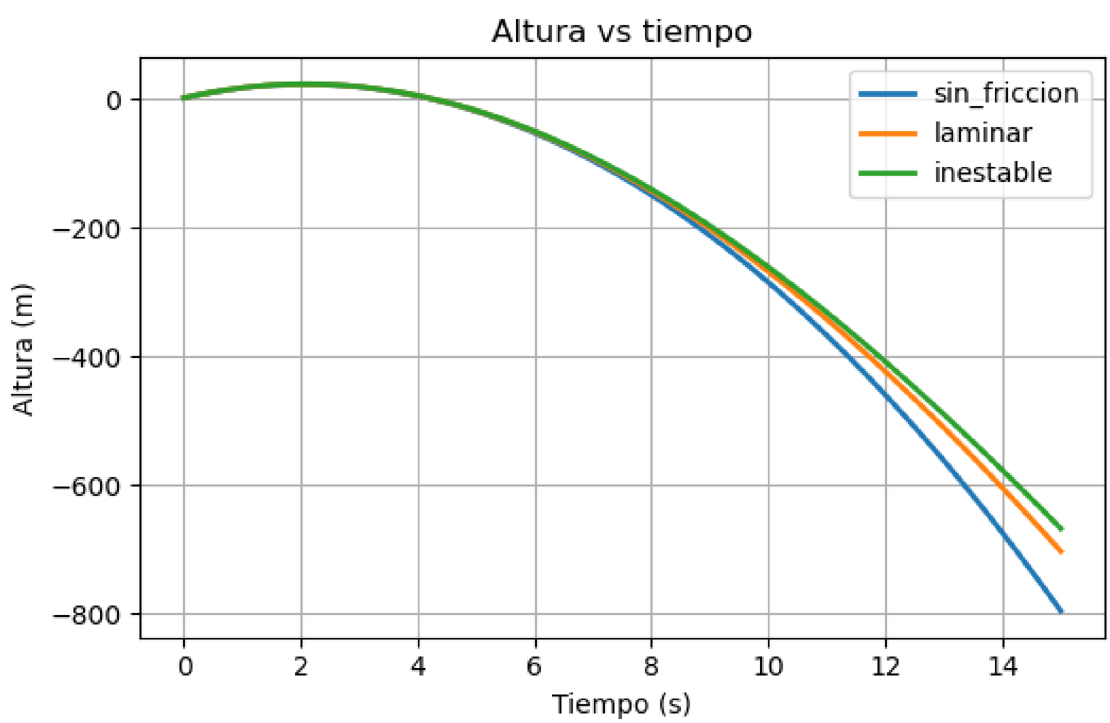

Figura 2: Evolución temporal de la altura

1.3. (c) Influencia de la Fricción en la Distancia

1.3.1. Análisis Cuantitativo

La resistencia del aire afecta significativamente el lanzamiento:

Comparación	Diferencia de Velocidad (m/s)
Laminar vs Sin fricción	+1.82
Inestable vs Sin fricción	+2.89
Inestable vs Laminar	+1.07

Cuadro 2: Incremento de velocidad requerido debido a la fricción

De modo que la resistencia del aire disipa energía cinética durante el vuelo y para alcanzar la misma distancia, se requiere mayor velocidad inicial, por lo cual el efecto es más pronunciado en el flujo inestable ($C_D = 0{,}75$), que provoca una diferencia de 2.89 m/s que representa aproximadamente 10 % de aumento en la velocidad inicial.

2. Solución del Sistema de Masas y Resortes Acoplados

2.1. (a) Ecuaciones de Movimiento

2.1.1. Formulación del Sistema

Consideremos dos masas iguales m conectadas como se muestra en la figura. Cada masa está sujeta a fuerzas de resortes:

- Masa 1: Resorte izquierdo ($-kx_1$) y resorte central ($k(x_2 - x_1)$)
- Masa 2: Resorte derecho ($-kx_2$) y resorte central ($k(x_1 - x_2)$)

2.1.2. Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones de movimiento para el sistema lineal son:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \tag{8}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 + k(x_1 - x_2) = kx_1 - 2kx_2 \tag{9}$$

Para el sistema no lineal con $F = -k(x + 0{,}1x^3)$:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 + 0{,}1x_1^3) - k[(x_1 - x_2) + 0{,}1(x_1 - x_2)^3] \tag{10}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 + 0{,}1x_2^3) - k[(x_2 - x_1) + 0{,}1(x_2 - x_1)^3] \tag{11}$$

2.1.3. Transformación a Sistema de Primer Orden

Convertimos a sistema de 4 ecuaciones:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \tag{12}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \tag{13}$$
$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{m}(-2kx_1 + kx_2) \tag{14}$$
$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{m}(kx_1 - 2kx_2) \tag{15}$$

2.2. (b) Modos Normales de Vibración

2.2.1. Método Matricial

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Buscamos soluciones de la forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2 m\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{A} \tag{17}$$

donde $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{bmatrix}$ es la matriz de rigidez.

2.2.2. Cálculo de Valores Propios

Resolvemos $\det(\mathbf{K} + \omega^2 m\mathbf{I}) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} -2k + \omega^2 m & k \\ k & -2k + \omega^2 m \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

$$(-2k + \omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \tag{19}$$

2.2.3. Frecuencias de Modos Normales

Las soluciones son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Modo simétrico)} \tag{20}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \text{(Modo antisimétrico)} \tag{21}$$

2.2.4. Vectores Propios y Modos

- **Modo 1 (Simétrico):** $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ - Masas se mueven juntas
- **Modo 2 (Antisimétrico):** $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ - Masas se mueven opuestas

2.3. (c) Simulaciones Numéricas

2.3.1. Condiciones Iniciales

Se simularon tres casos:

1. **Caso i:** $x_1(0) = 0{,}5, x_2(0) = 0{,}5, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0$
2. **Caso ii:** $x_1(0) = 0{,}5, x_2(0) = -0{,}5, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0$
3. **Caso iii:** $x_1(0) = 0{,}0, x_2(0) = 0{,}5, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0$

2.3.2. Resultados Observados

- **Caso i:** Excita principalmente el modo simétrico (ω_1)
- **Caso ii:** Excita principalmente el modo antisimétrico (ω_2)
- **Caso iii:** Excita una combinación de ambos modos

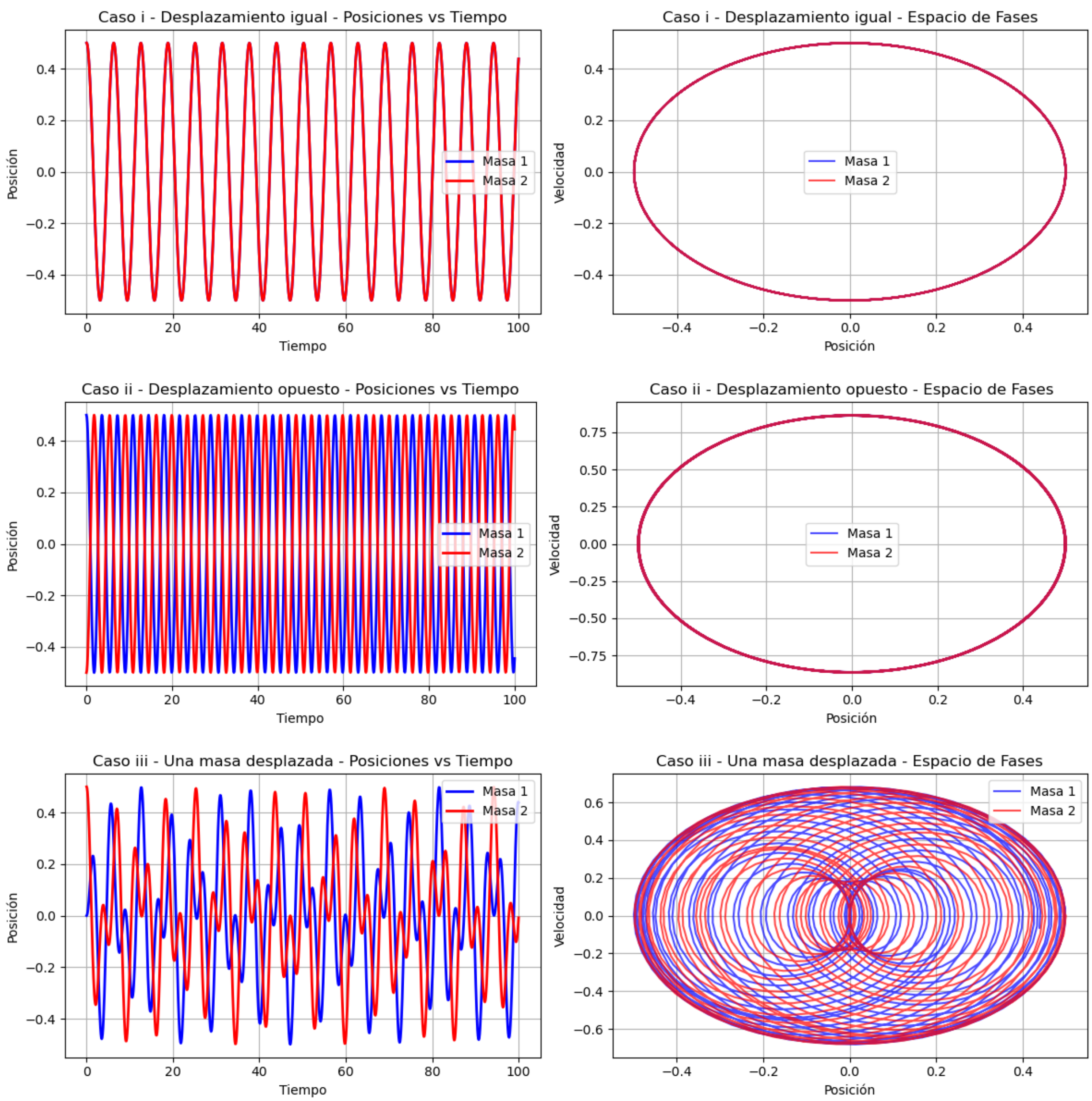

Figura 3: Simulaciones de los tres casos de condiciones iniciales

2.4. (d) Sistema No Lineal vs Lineal

2.4.1. Efectos de la No Linealidad

Para $F = -k(x + 0{,}1x^3)$:

Característica	Sistema Lineal	Sistema No Lineal
Frecuencia	Constante	Depende de amplitud
Modos	Independientes	Acoplados
Energía	Conservada	Conservada
Forma de onda	Sinusoidal	Distorsionada

Cuadro 3: Comparación entre sistemas lineal y no lineal

2.4.2. Implementación Numérica

El código utiliza `solve_ivp` con método RK45 para integrar ambos sistemas. Para el sistema no lineal, las fuerzas se calculan como:

```
F1_left = -k * (x1 + 0.1 * x1**3)
F1_center = -k * ((x2 - x1) + 0.1 * (x2 - x1)**3)
```

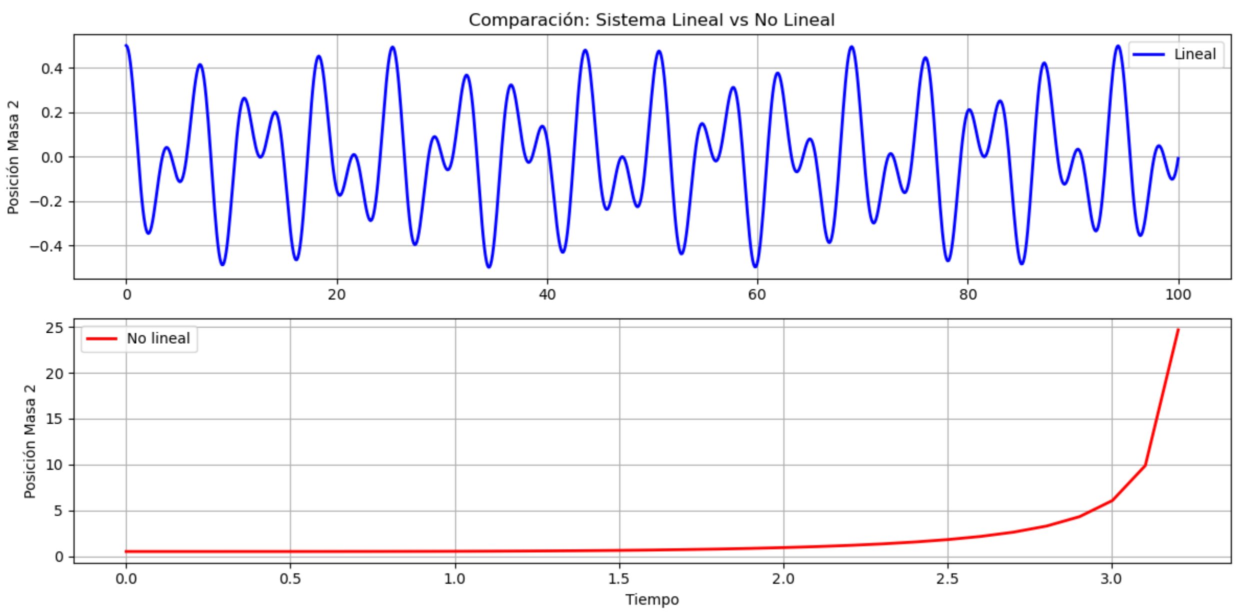

Figura 4: Comparación entre sistema lineal y no lineal

2.4.3. Conclusiones

- El sistema lineal exhibe modos normales perfectamente desacoplados
- El sistema no lineal muestra acoplamiento entre modos y dependencia de amplitud
- La no linealidad introduce distorsión armónica en las oscilaciones
- El método numérico RK45 maneja eficientemente ambos casos

3. Solución de la Ecuación de Onda para una Cuerda Vibrante

3.1. (a) Derivación de la Ecuación de Onda

3.1.1. Análisis de un Elemento Infinitesimal

Consideremos un elemento de cuerda de longitud Δx entre x y $x + \Delta x$. Las fuerzas actuantes son:

- Tensión a la izquierda: $\mathbf{T}(x) = T(x)\hat{\mathbf{t}}(x)$
- Tensión a la derecha: $\mathbf{T}(x + \Delta x) = T(x + \Delta x)\hat{\mathbf{t}}(x + \Delta x)$

3.1.2. Componentes de Fuerza

Para pequeñas oscilaciones ($\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$), las componentes son:

$$F_x = T(x + \Delta x)\cos\theta(x + \Delta x) - T(x)\cos\theta(x) \tag{22}$$
$$F_y = T(x + \Delta x)\sin\theta(x + \Delta x) - T(x)\sin\theta(x) \tag{23}$$

Usando $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$:

$$F_x \approx T(x + \Delta x) - T(x) \approx \frac{dT}{dx}\Delta x \tag{24}$$
$$F_y \approx T(x + \Delta x)\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x}(x) \tag{25}$$

3.1.3. Aplicando la Segunda Ley de Newton

Para la componente vertical:

$$F_y = \rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{26}$$

Sustituyendo:

$$T(x + \Delta x)\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - T(x)\frac{\partial y}{\partial x}(x) = \rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{27}$$

Dividiendo por Δx y tomando límite $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{28}$$

Expandiendo la derivada:

$$\frac{dT}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} + T(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{29}$$

3.2. (b) Condiciones para la Ecuación de Onda Estándar

Para obtener:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{30}$$

Se requiere:

1. **Tensión constante:** $\frac{dT}{dx} = 0$

2. **Densidad constante:** $\rho(x) = \rho$

3. **Pequeñas oscilaciones:** $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$

Bajo estas condiciones, la ecuación se reduce a:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{31}$$

3.3. (c) Condiciones para Solución Única

Para una EDP de segundo orden, necesitamos:

3.3.1. Condiciones de Frontera (Dirichlet)

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0 \quad \forall t \tag{32}$$

3.3.2. Condiciones Iniciales

$$y(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{33}$$

3.4. (d)-(f) Método de Diferencias Finitas

3.4.1. Discretización

Definimos la malla:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \ldots, N_x \tag{34}$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \ldots, N_t \tag{35}$$

$$y_{i,j} = y(i\Delta x, j\Delta t) \tag{36}$$

3.4.2. Aproximación por Diferencias Finitas

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{38}$$

3.4.3. Ecuación en Diferencias

Sustituyendo en la ecuación de onda:

$$\frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{c^2(\Delta t)^2} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{39}$$

Despejando $y_{i,j+1}$:

$$y_{i,j+1} = 2y_{i,j} - y_{i,j-1} + \frac{c^2}{c'^2}(y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}) \tag{40}$$

donde $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ es la velocidad de la malla.

3.5. (g) Condiciones Iniciales y de Frontera

3.5.1. Implementación Numérica

```
# Condiciones de frontera
y[0, :] = 0      # Extremo izquierdo fijo
y[-1, :] = 0     # Extremo derecho fijo

# Condiciones iniciales
y[:, 0] = f(x)   # Desplazamiento inicial
y[:, 1] = y[:, 0] # Para velocidad inicial cero
```

3.6. (h) Condición de Courant

3.6.1. Análisis de Estabilidad

El método es estable si:

$$\frac{c}{c'} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c\Delta t/\Delta x}{\leq} 1 \tag{41}$$

3.6.2. Interpretación Física

La condición significa que la onda física no puede viajar más de un paso espacial Δx en un paso temporal Δt.

3.7. (i)-(j) Implementación y Resultados Numéricos

3.7.1. Parámetros de Simulación

Parámetro	Valor	Unidad
Longitud L	1.0	m
Tensión T	100.0	N
Densidad ρ	1.0	kg/m
Velocidad c	10.0	m/s

3.7.2. Resultados de Estabilidad

Caso	Δx (m)	Δt (s)	$c\Delta t/\Delta x$	Estabilidad
1	0.01	0.005	0.71	Estable
2	0.02	0.015	1.41	Inestable
3	0.01	0.001	0.10	Estable
4	0.005	0.001	2.00	Inestable

Cuadro 4: Resultados de estabilidad numérica para diferentes discretizaciones

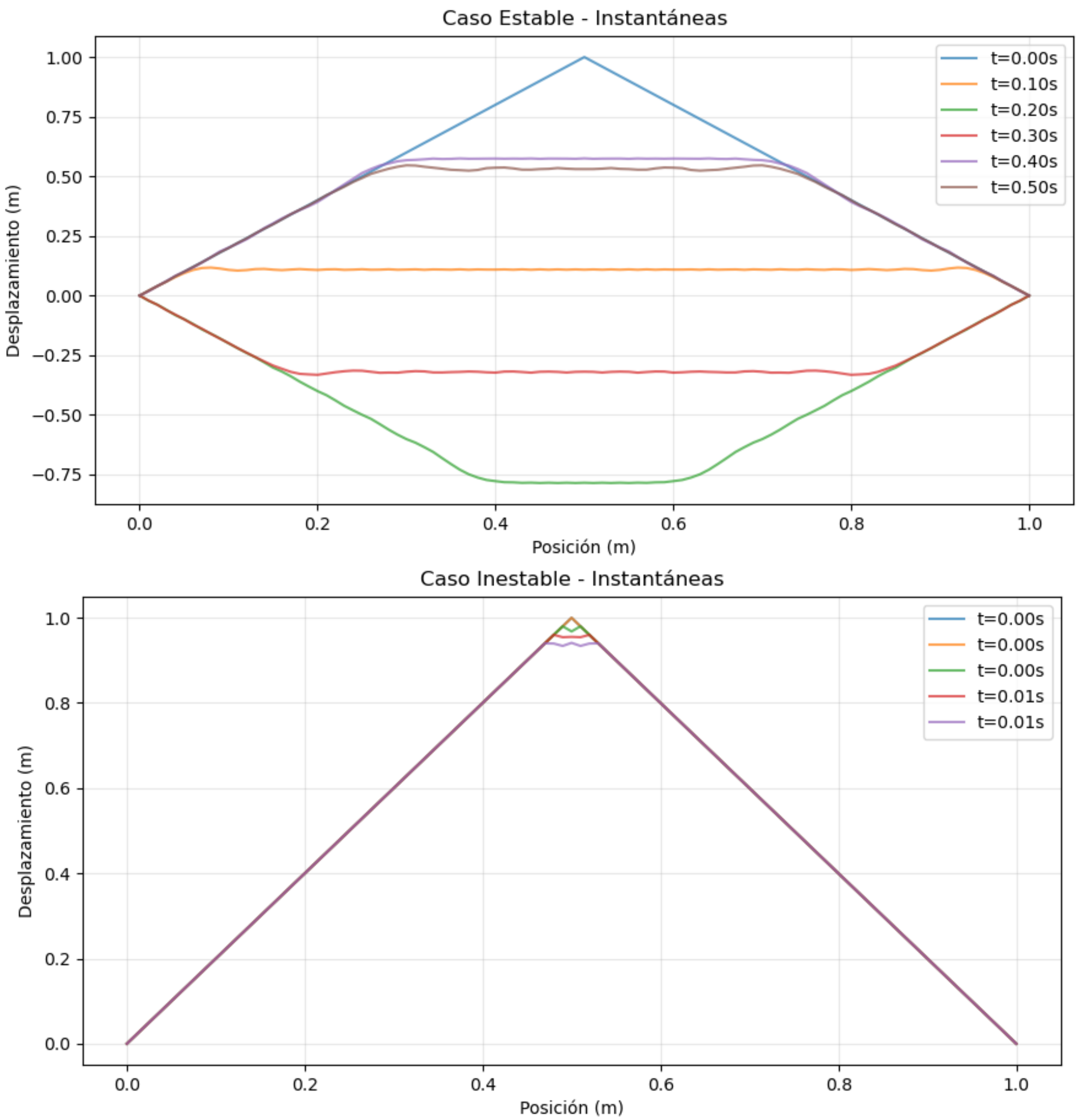

Figura 5: Comparación entre casos estable e inestable

3.7.3. Animaciones

- **Cuerda estable:** Muestra propagación suave de la onda
- **Cuerda inestable:** Exhibe crecimiento exponencial de amplitudes

3.8. Conclusiones

- El método de diferencias finitas es efectivo para resolver la ecuación de onda
- La condición de Courant es crucial para la estabilidad numérica

- Las simulaciones confirman el comportamiento ondulatorio esperado
- El método conserva energía en el régimen estable