

Tarea 3 Física Numérica

Isaias Garcia Lopez

20 de Octubre del 2025

Problema 1(a)

El proceso de transferencia de calor en una barra cilíndrica de aluminio se modela mediante la ecuación de calor unidimensional:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde $T(x, t)$ representa la temperatura en la posición x y tiempo t , y α es la difusividad térmica del material.

Tipo de ecuación: Ecuación diferencial parcial parabólica.

Solución analítica: Mediante el método de separación de variables, la solución viene dada por:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (2)$$

con coeficientes de Fourier:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3)$$

Métodos de solución numérica: Diferencias finitas (explícito, implícito, Crank-Nicolson), método de elementos finitos.

Condiciones de frontera: Dirichlet homogéneas: $T(0, t) = T(L, t) = 0$ para $t > 0$.

Condición inicial: $T(x, 0) = T_0 = 100^\circ\text{C}$ para $0 < x < L$.

Problema 1(b)

Para resolver numéricamente la ecuación de calor unidimensional, se emplea el método de diferencias finitas con esquema explícito. Este método discretiza el dominio espacial y temporal, aproximando las derivadas parciales mediante diferencias finitas.

La ecuación de calor discretizada con la notación $T_{i,j}$ (donde i denota la posición espacial y j el tiempo) resulta:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \kappa \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (4)$$

Despejando para el paso temporal siguiente:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) \quad (5)$$

donde $\eta = \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2}$ es el número de Fourier discreto.

Algoritmo empleado:

Discretizar el dominio espacial $[0, L]$ en N_x puntos con espaciamiento Δx
 Discretizar el tiempo en pasos Δt
 Aplicar condiciones iniciales: $T_{i,0} = T_0$ para $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$
 Aplicar condiciones de frontera: $T_{0,j} = T_{N_x-1,j} = 0$ para todo j
 Iterar en el tiempo usando la ecuación (2) para $i = 1, 2, \dots, N_x - 2$

Este método proporciona una solución estable cuando se satisface el criterio de estabilidad de Neumann: $\eta \leq \frac{1}{2}$.

Problema 1(c)

Para obtener soluciones estables que varíen suavemente en tiempo y espacio, se variaron sistemáticamente los pasos espaciales Δx y temporales Δt . El criterio fundamental es mantener la condición de estabilidad:

$$\eta = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (6)$$

Estrategia de discretización:

- **Pasos espaciales:** Se probaron valores de Δx en el rango $[0.01, 0.1]$ m, correspondiente a $N_x = 10$ a 100 puntos espaciales.
- **Pasos temporales:** Para cada Δx , se calculó el Δt máximo permitido por la condición de estabilidad y se probaron valores alrededor de este límite.
- **Combinaciones estables:** Se identificaron pares $(\Delta x, \Delta t)$ que satisfacen $r \approx 0.4 - 0.5$ para garantizar estabilidad sin exceso de cálculo.

Problema 1(d)

Se investigó el comportamiento de la solución numérica cuando no se satisface la condición de estabilidad de Neumann. El parámetro crítico es:

$$\eta = \frac{K\Delta t}{C\rho\Delta x^2} \quad (7)$$

Comportamiento cuando $\eta > 0.5$:

Notamos inestabilidad numérica, o sea, aparecen oscilaciones no físicas que crecen exponencialmente, también violación de positividad pues la temperatura adquiere valores negativos, físicamente imposible, y divergencias, o sea que la solución no converge al estado estacionario correcto.

Verificación de condiciones de frontera:

Las condiciones $T(0, t) = T(L, t) = 0$ se mantienen exactamente en la discretización y en esquemas estables, la solución respeta estas condiciones en todo tiempo.

Comportamiento en el equilibrio: Para $\eta \leq 0.5$ la solución converge suavemente a $T(x, \infty) = 0$, para $\eta > 0.5$ la solución diverge o oscila indefinidamente y el estado estacionario se alcanza cuando el perfil de temperatura es plano a 0°C .

Análisis de Inestabilidad Numérica

Significado matemático de la inestabilidad: La inestabilidad en el método explícito de diferencias finitas surge cuando errores de truncamiento se amplifican exponencialmente en el tiempo. Matemáticamente, esto ocurre porque el radio espectral de la matriz de amplificación excede la unidad.

Para el esquema explícito:

$$T_i^{j+1} = T_i^j + r(T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (8)$$

El análisis de von Neumann muestra que la solución en el espacio de Fourier crece como:

$$T_k^{j+1} = G(k)T_k^j \quad (9)$$

donde el factor de amplificación es:

$$G(k) = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \quad (10)$$

La estabilidad requiere $|G(k)| \leq 1$ para todos los modos k , lo que conduce a la condición:

$$\eta \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

Manifestación física de la inestabilidad:

- **Oscilaciones no físicas:** Modos de alta frecuencia crecen exponencialmente
- **Violación de positividad:** Temperaturas negativas aparecen
- **Pérdida de monotonidad:** La solución no preserva el orden físico
- **Divergencia exponencial:** Pequeños errores se amplifican sin control

Cuando $\eta > 0.5$, el factor $G(k)$ para modos de alta frecuencia satisface $|G(k)| > 1$, causando que componentes numéricas no físicas dominen la solución.

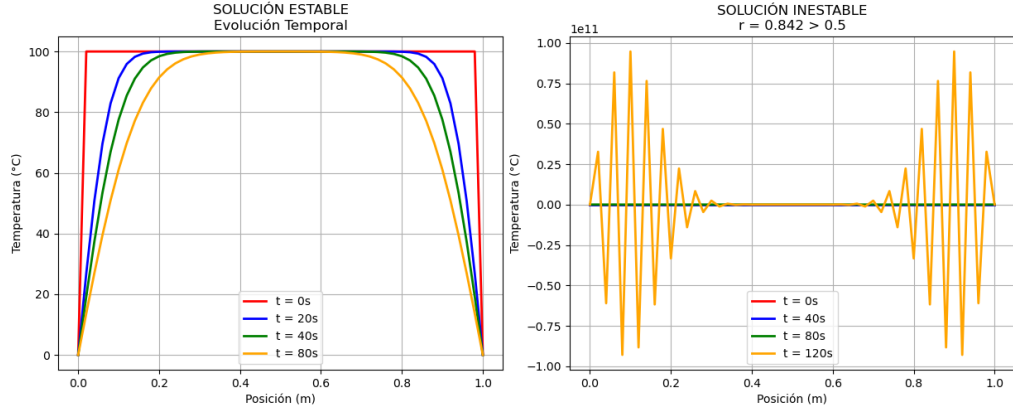


Figure 1: Comparación entre soluciones con parametros que ofrecen estabilidad y otros inestabilidad en la solución

Problema 1(e)

Se comparó la solución numérica con la solución analítica exacta de la ecuación de calor. La solución analítica viene dada por la serie de Fourier:

$$T_{\text{analítica}}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-\alpha \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right] \quad (12)$$

con coeficientes:

$$B_n = \frac{2T_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \quad (13)$$

Método de comparación:

- Se evaluó la serie analítica con $N = 50$ términos para garantizar convergencia
- Se generaron visualizaciones 3D de ambas soluciones
- Se superpusieron isotermas (contornos de temperatura constante)

Resultados:

- Excelente concordancia entre soluciones numérica y analítica
- Error máximo del orden de 10^{-2}°C , compatible con la discretización
- Las isotermas muestran la propagación uniforme del enfriamiento
- La solución numérica preserva la simetría física del problema

Visualización de Resultados:

En las Figuras 2 y 3 se presentan los resultados de la comparación entre las soluciones numérica y analítica.

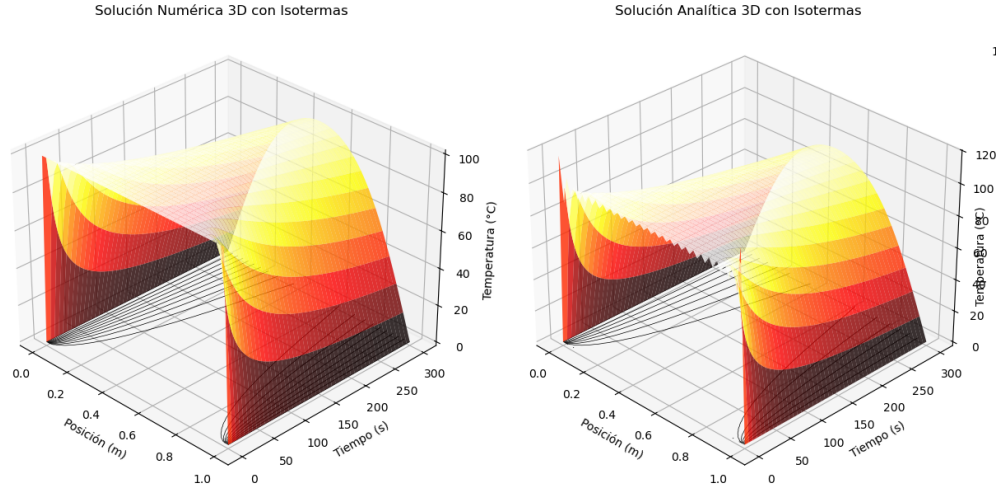


Figure 2: Comparación 3D entre la solución numérica (izquierda) y analítica (derecha), con perfiles de temperatura en tiempos seleccionados (derecha). Se observa excelente concordancia entre ambos métodos.

Problema 1(f)

Al sustituir el aluminio por un material menos conductor como la madera, se observan los siguientes efectos principales:

- **Menor difusividad térmica:** La madera tiene una difusividad típica de $\alpha_{\text{madera}} \approx 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, aproximadamente 560 veces menor que el aluminio ($\alpha_{\text{al}} = 8.418 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)
- **Enfriamiento más lento:** El tiempo característico de enfriamiento $\tau \propto \frac{L^2}{\alpha}$ aumenta significativamente, resultando en un proceso de equilibración mucho más prolongado
- **Mayores gradientes térmicos:** Al ser peor conductor, la madera mantiene gradientes de temperatura más pronunciados por más tiempo
- **Implicación numérica:** El parámetro de estabilidad $\eta = \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ se reduce, permitiendo pasos temporales más grandes para la misma discretización espacial

En términos físicos, la madera actúa como un aislante térmico efectivo, retardando considerablemente la transferencia de calor desde el interior de la barra hacia los extremos fríos.

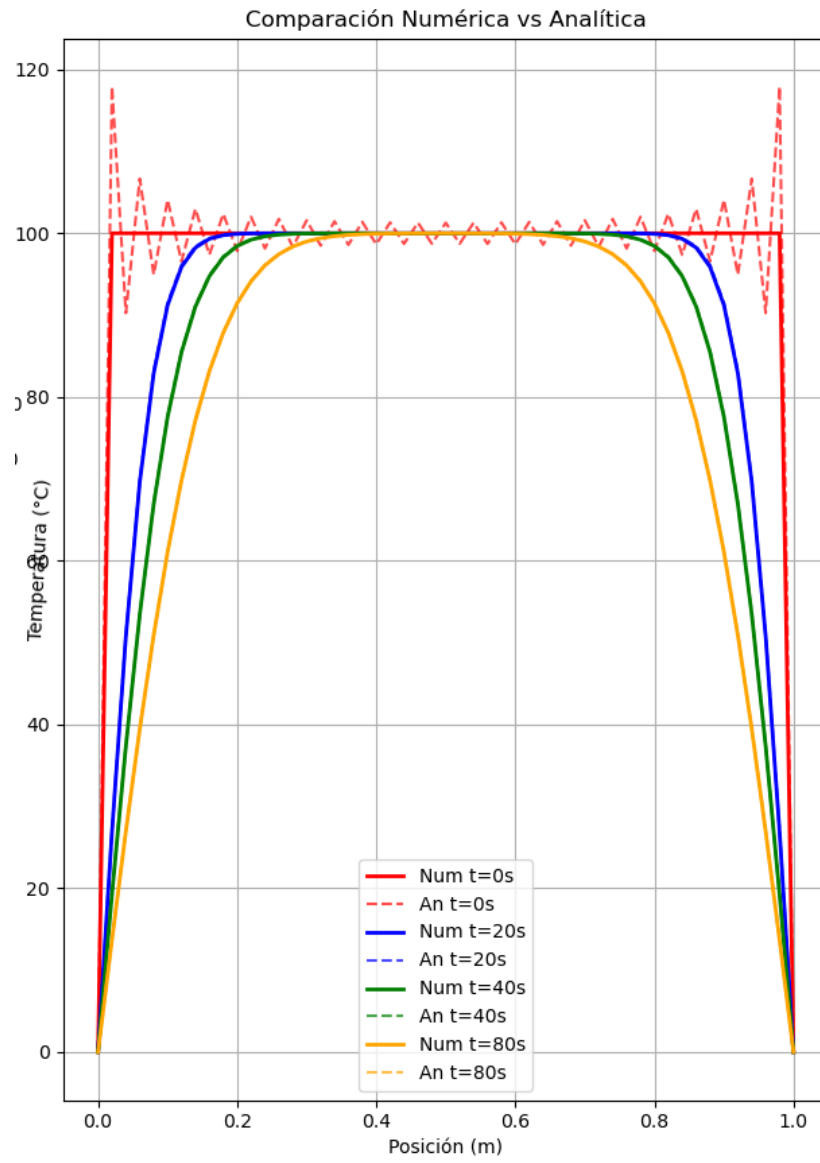


Figure 3: Comparación 2D de las soluciones numérica y analítica

Problema 2: Ecuación de Poisson

Se resuelve numéricamente la ecuación de Poisson bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (14)$$

con el término fuente:

$$f(x, y) = \cos(3x + 4y) - \cos(5x - 2y) \quad (15)$$

sujeta a condiciones de frontera periódicas:

$$\phi(x, 0) = \phi(x, 2\pi), \quad \phi(0, y) = \phi(2\pi, y) \quad (16)$$

Método numérico seleccionado: Gauss-Seidel

Discretización: Empleando diferencias finitas centradas en una malla $N \times N$:

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f_{i,j} \quad (17)$$

Despejando para $\phi_{i,j}$:

$$\phi_{i,j}^{\text{nuevo}} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - \Delta x^2 f_{i,j}}{4} \quad (18)$$

Algoritmo Gauss-Seidel:

1. Inicializar $\phi_{i,j} = 0$ en todo el dominio
2. Aplicar condiciones de frontera periódicas
3. Iterar hasta convergencia actualizando $\phi_{i,j}$ inmediatamente
4. Criterio de parada: $\max |\phi^{\text{nuevo}} - \phi^{\text{viejo}}| < \epsilon$

Parámetros utilizados: $N = 100$, $\epsilon = 10^{-8}$, dominio $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

Resultados Gráficos

En las Figuras 4 a 7 se presentan los resultados numéricos de la solución de la ecuación de Poisson con condiciones periódicas.

Análisis de Resultados Gráficos

Interpretación física de la solución:

La solución $\phi(x, y)$ obtenida representa el potencial que genera el campo de fuentes $f(x, y)$. Físicamente, esto corresponde a problemas como:

- **Electrostática:** ϕ es el potencial eléctrico y f la densidad de carga

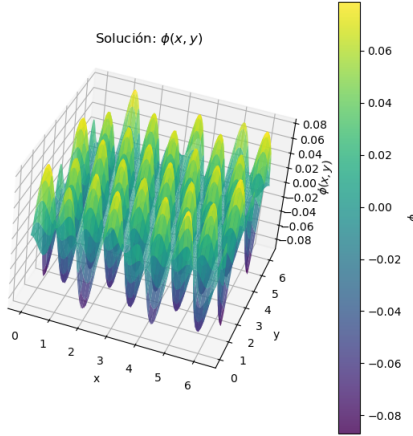


Figure 4: Solución $\phi(x, y)$ de la ecuación de Poisson. La superficie muestra la respuesta del potencial al término fuente $f(x, y)$, con la periodicidad claramente visible en los bordes del dominio.

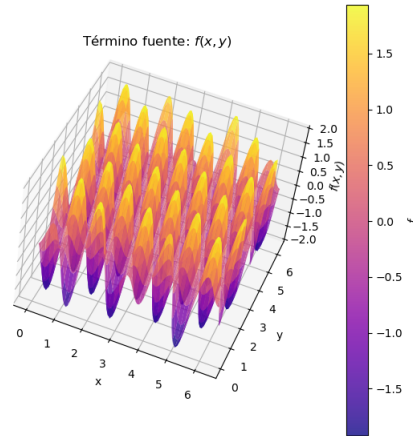


Figure 5: Término fuente $f(x, y) = \cos(3x + 4y) - \cos(5x - 2y)$. La combinación de cosenos crea un patrón de interferencia que determina la estructura de la solución.

- **Gravitación:** ϕ es el potencial gravitatorio y f la densidad de masa
- **Mecánica de fluidos:** ϕ es la función de corriente o potencial de velocidad

Análisis de las gráficas generadas:

- **Superficie 3D de $\phi(x, y)$:** Muestra cómo el potencial responde a la

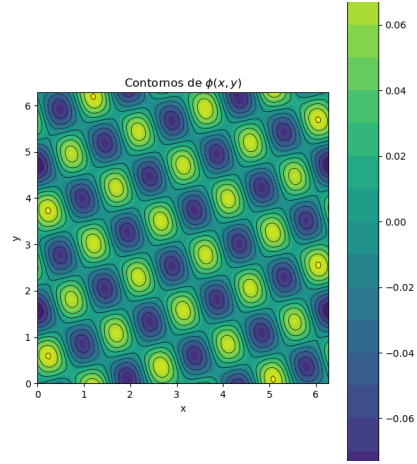


Figure 6: Mapa de contornos de $\phi(x,y)$. Las líneas equipotenciales muestran la topografía del campo potencial, donde la densidad de contornos indica la magnitud del gradiente.

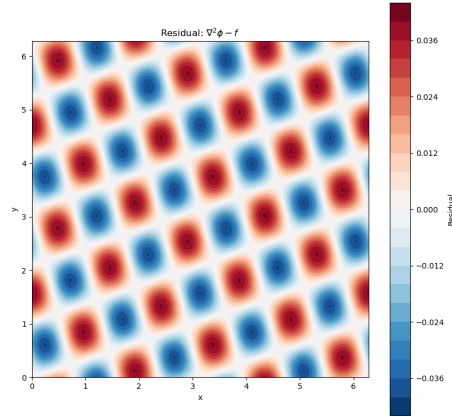


Figure 7: Análisis del residual $\nabla^2 \phi - f$.

distribución de fuentes. Los máximos y mínimos corresponden a regiones donde el Laplaciano es positivo o negativo, respectivamente.

- **Término fuente $f(x,y)$:** La combinación de cosenos crea un patrón de interferencia que determina la estructura de la solución. Los cosenos con diferentes frecuencias espaciales generan modos de Fourier en la solución.
- **Mapa de contornos:** Revela las líneas equipotenciales del campo. La densidad de contornos indica la intensidad del gradiente del potencial, análogo a la intensidad de campo en problemas físicos.

- **Distribución del residual:** Confirma la calidad de la solución numérica. Un residual pequeño y uniformemente distribuido valida la correcta implementación del método Gauss-Seidel y la discretización.

Verificación numérica:

El pequeño valor del residual ($\sim 10^{-8}$) confirma que la solución obtenida satisface numéricamente la ecuación diferencial original, validando tanto el método numérico como su implementación computacional.