Algorithmie de l'image
Filtrage Fréquentiel

Christophe Tilmant - Vincent Barra (tilmant@isima.fr)

ISIMA - Université Blaise Pascal

ZZ3 F2-F4

$$\forall k, h[k] = (f * g)[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_\infty[i] g_\infty[k-i]$$

Définition

La transformée de Fourier permet la décomposition d'une image I en sinusoïdes complexes.

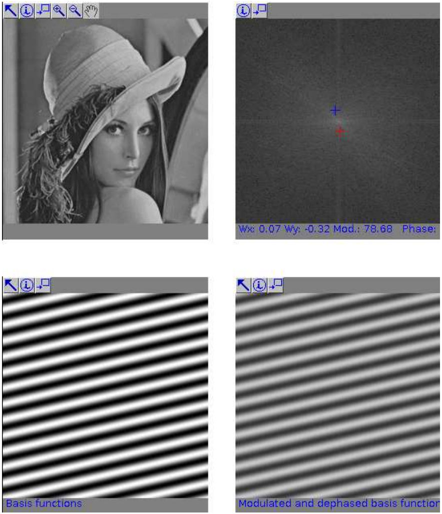
$$\boxed{I(\mathbf{p}) \overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{p}) \cdot e^{-i2\pi \mathbf{f}\cdot\mathbf{p}} d\mathbf{p}} \text{ où } \mathbf{f} = (f_x, f_y)$$

$$\hat{I}(\mathbf{f}) \overset{TF^{-1}}{\leftrightarrow} I(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(\mathbf{f}) \cdot e^{i2\pi \mathbf{f}\cdot\mathbf{p}} d\mathbf{f}$$

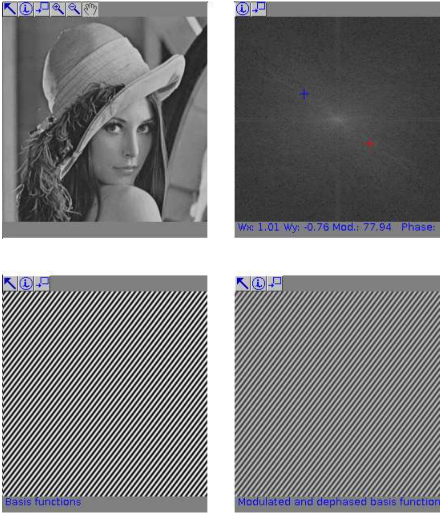
Dans le cas discret, on a la transformée de Fourier discrète :

$$\boxed{I[\mathbf{m}] \overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}[\mathbf{v}] = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} I[i,j] \cdot e^{-i2\pi(\frac{k}{M}i + \frac{l}{N}j)}} \text{ où } \mathbf{v} = [k, l]$$

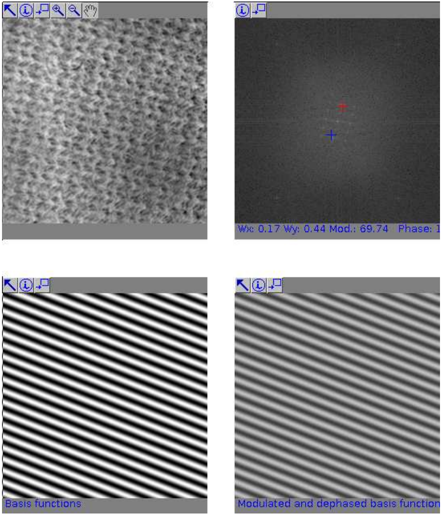
Interprétation



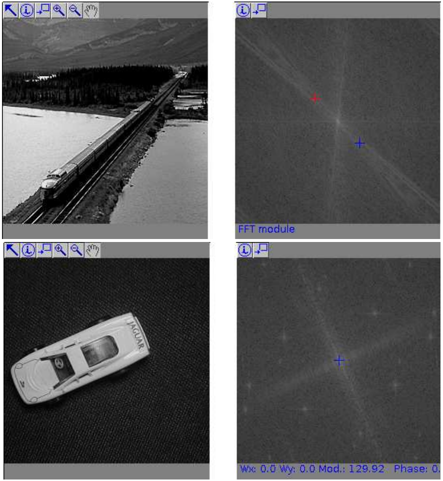
Interprétation



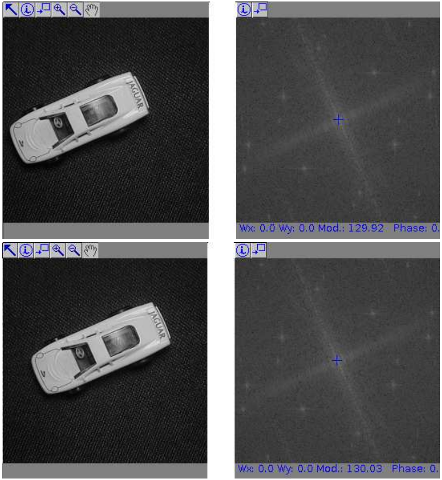
Interprétation



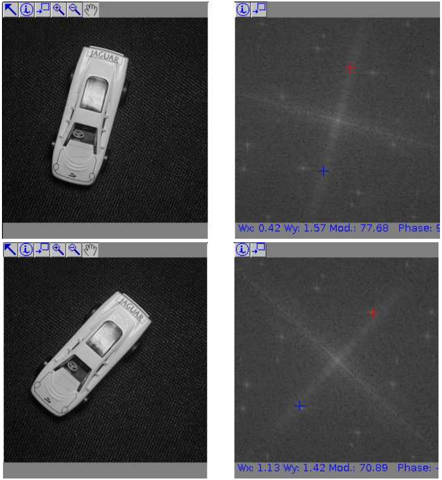
Interprétation



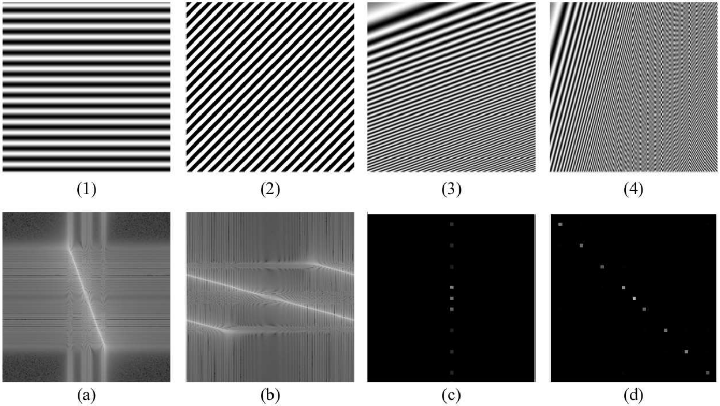
Interprétation



Interprétation



Exercice : Retrouver le spectre de Fourier de chaque image



Propriétés

$$
\begin{aligned}
\alpha I_1(\mathbf{p}) + \beta I_2(\mathbf{p}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \alpha \hat{I}_1(\mathbf{f}) + \beta \hat{I}_2(\mathbf{f}); \\
I(\mathbf{p}+\mathbf{t}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}(\mathbf{f}) \times e^{j2\pi \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}}; \\
I(\mathbf{R}_{\theta_0} \cdot \mathbf{p}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}(\mathbf{R}_{\theta_0} \cdot \mathbf{f}) \qquad \text{où } \mathbf{R}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix}; \\
I(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{|\det(\mathbf{S})|} \hat{I}(\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{f}) \qquad \text{où } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \\
I_1(\mathbf{p}) \times I_2(\mathbf{p}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}_1 * \hat{I}_2(\mathbf{f}); \\
I_1 * I_2(\mathbf{p}) &\overset{TF}{\leftrightarrow} \hat{I}_1(\mathbf{p}) \times \hat{I}_2(\mathbf{f}).
\end{aligned}
$$

Cette liste n'est pas exhaustive.

Filtrage Fréquentiel : Théorie

Domaine fréquentiel

On rappelle que la réponse fréquentielle $\hat{H}(\mathbf{f})$ d'un système linéaire invariant par translation est liée aux transformées de Fourier des images :

$$\boxed{\hat{I}_f(\mathbf{f}) = \hat{H}(\mathbf{f}) \times \hat{I}(\mathbf{f})}$$

Les répartitions fréquentielles de l'amplitude et de la phase de l'image $I(\mathbf{m})$ sont modifiées par le système, selon la forme de la fonction complexe $\hat{H}(\mathbf{f})$: atténuations et amplifications des composantes des diverses fréquences.

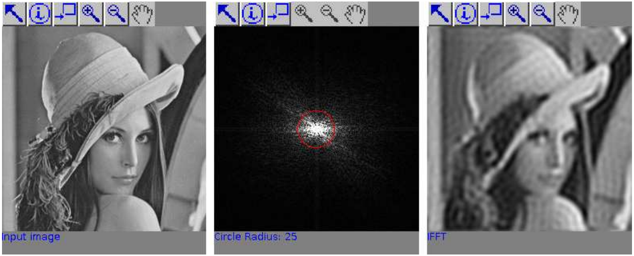
Le système correspondant est appelé *filtre*

Filtrage Fréquentiel : Réalisation

1. Calculer la TFD de l'image $I[\mathbf{m}]$: $\hat{I}[\mathbf{v}]$;
2. Calculer la réponse en fréquence du filtre : $\hat{R}[\mathbf{v}]$;
3. Réaliser le filtrage dans le domaine fréquentiel : $\hat{I}_f[\mathbf{v}] = \hat{H}[\mathbf{v}] \times \hat{I}[\mathbf{v}]$;
4. Calculer la TFD inverse de $\hat{I}_f[\mathbf{v}]$ pour obtenir l'image : $I_f[\mathbf{v}]$.

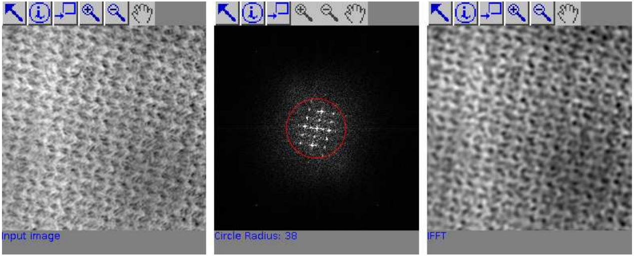
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- **Passe-bas** : Lisser l'image, réduction de bruit ;



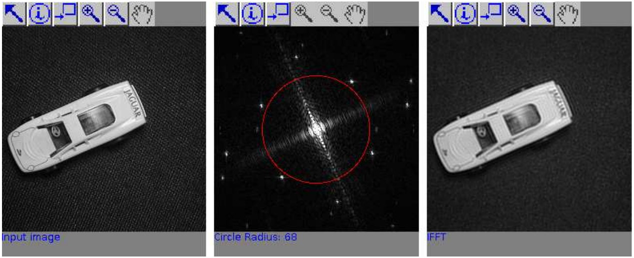
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- <u>Passe-bas</u> : Lisser l'image, réduction de bruit ;



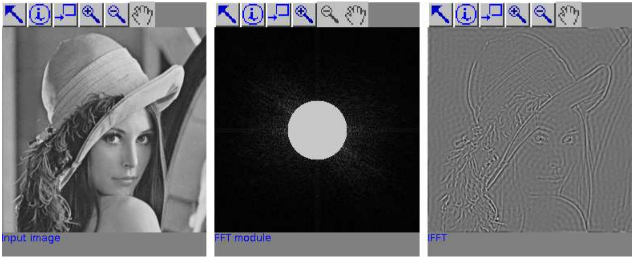
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- **Passe-bas** : Lisser l'image, réduction de bruit ;



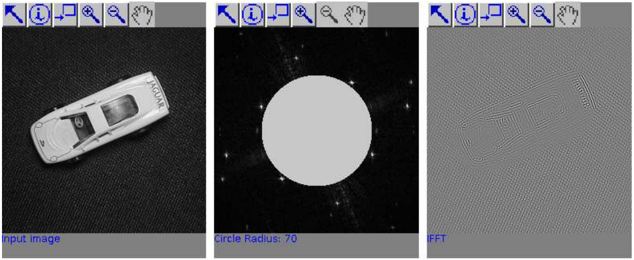
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- **Passe-haut** : Détection de contour, Séparation ;



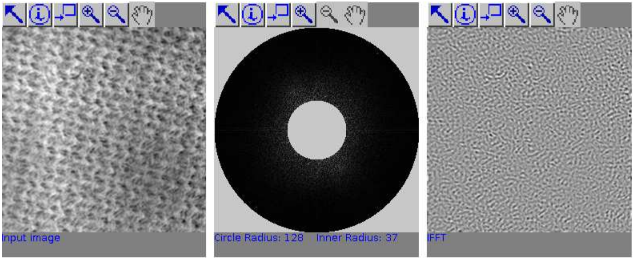
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- **Passe-haut** : Détection de contour, Séparation ;



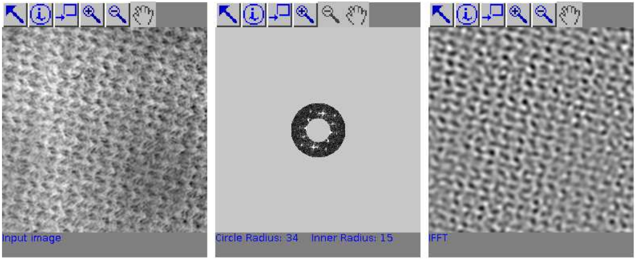
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- Passe-haut : Détection de contour, Séparation ;
- **Passe-bande/Coupe-bande** : Sélection des textures à une échelle donnée ;



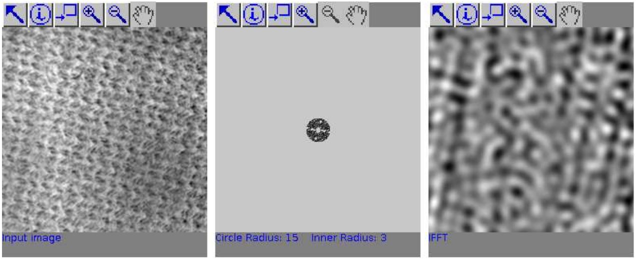
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- Passe-haut : Détection de contour, Séparation ;
- **Passe-bande/Coupe-bande** : Sélection des textures à une échelle donnée ;



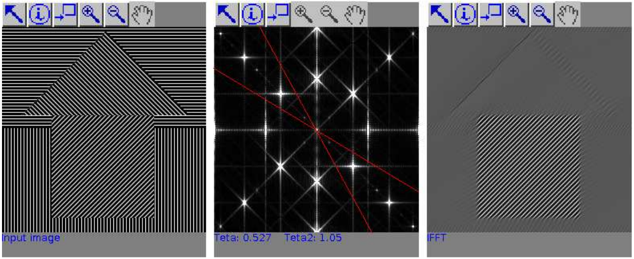
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- Passe-haut : Détection de contour, Séparation ;
- **Passe-bande/Coupe-bande** : Sélection des textures à une échelle donnée ;



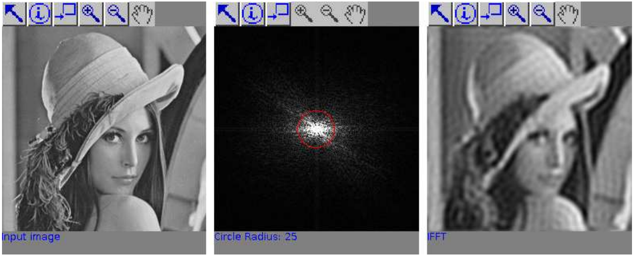
Filtrage Fréquentiel : Type de filtre

- Passe-bas : Lisser l'image, réduction de bruit ;
- Passe-haut : Détection de contour, Séparation ;
- Passe-bande/Coupe-bande : Sélection des textures à une échelle donnée ;
- **Filtre directionnel** : Sélection des textures à une orientation donnée.



Filtrage Fréquentiel : Phénomène de Gibbs

Généralement, on préfère utiliser des réponses en fréquence "soft" (Butterworth par exemple) pour éviter le phénomène de Gibbs (cf. théorème de Gabor).



Exemple d'utilisation : Recalage par corrélation de phase

Cas de la translation

Dans le cas de deux images I_1 et I_2 qui vérifie la relation suivante $I_2(\mathbf{m}) = I_1(\mathbf{m} + \mathbf{t_0})$, leurs spectres ont le même module, mais surtout une différence de phase directement liée à la translation.
Soit le spectre de puissance croisée (*cross-power spectrum*) :

$$\boxed{\hat{R}(\mathbf{f}) = \frac{\hat{I}_1(\mathbf{f})\hat{I}_2^*(\mathbf{f})}{|\hat{I}_1(\mathbf{f})\hat{I}_2^*(\mathbf{f})|}}$$

alors

$$\hat{R}(\mathbf{f}) = \frac{\hat{I}_1(\mathbf{f})\hat{I}_1^*(\mathbf{f})e^{-j2\pi\mathbf{f}\cdot\mathbf{t_0}}}{|\hat{I}_1(\mathbf{f})\hat{I}_1^*(\mathbf{f})|} = e^{-j2\pi\mathbf{f}\cdot\mathbf{t_0}}$$

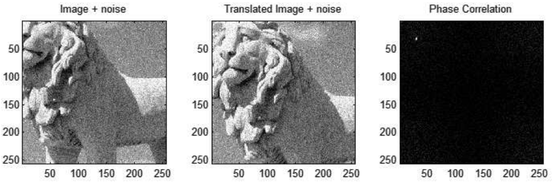
$$\text{donc } \hat{R}(\mathbf{f}) \overset{TF^{-1}}{\leftrightarrow} R(\mathbf{t}) = \delta(\mathbf{t} - \mathbf{t_0})$$

Exemple d'utilisation : Recalage par corrélation de phase
Cas de la translation

Le recalage entre les deux images (c'est-à-dire l'estimation de la translation) se réalise en recherchant le maximum de la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance croisée :

$$\tilde{\mathbf{t}} = \arg\max_{\mathbf{t}} R(\mathbf{t}) \simeq \mathbf{t_0}$$

Robuste sur des images avec différentes conditions d'éclairage => Corrélation de phase est invariante aux changements linéaires des intensités lumineuses.



Exemple d'utilisation : Recalage par corrélation de phase

Cas des similitudes

Les différentes extensions cherchent à se ramener au cas précédent de l'estimation de la translation.

- **Rotation** : changement de variable en allant vers un système de coordonnées polaire alors $\hat{I}_2(f_x, f_y)$ devient $\hat{I}_2(\rho, \theta) = \hat{I}_1(\rho, \theta - \theta_0)$;
- **Similitude** : on se ramène à un problème de translation en travaillant avec des axes logarithmiques, en effet $\hat{I}_2(f_x, f_y)$ devient $\hat{I}_2(\log(f_x), \log(f_y)) \propto \hat{I}_1(\log(f_x) - \log(s_x), \log(f_y) - \log(s_y))$.