Algorithmie de l'image
Filtrage Spatial

Christophe Tilmant - Vincent Barra (tilmant@isima.fr)

Institut Pascal/ISIMA - Université Blaise Pascal

ZZ3 F2-F4

Filtrage Fréquentiel : Théorie

Domaine fréquentiel

On rappelle que la réponse fréquentielle $\hat{H}(\mathbf{f})$ d'un système linéaire invariant par translation est liée aux transformées de Fourier des images :

$$\boxed{\hat{I}_f(\mathbf{f}) = \hat{H}(\mathbf{f}) \times \hat{I}(\mathbf{f})}$$

Les répartitions fréquentielles de l'amplitude et de la phase de l'image $I(\mathbf{m})$ sont modifiées par le système, selon la forme de la fonction complexe $\hat{H}(\mathbf{f})$: atténuations et amplifications des composantes de diverses fréquences.

Le système correspondant est appelé *filtre*

Filtrage Linéaire Spatial : Théorie

Domaine temporel continu

Dans le domaine spatial la relation précécente (dans le continu) correspond au produit de convolution :

$$I_f(\mathbf{p}) = H * I(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{q})\, H(\mathbf{p}-\mathbf{q})\, d\mathbf{q}$$

où $H(\mathbf{p})$ est la réponse impulsionnelle du filtre.

Domaine temporel discret

Dans le domaine temporel la relation précécente (dans le discret) correspond au produit de convolution discrète :

$$I_f[\mathbf{m}] = H * I[\mathbf{m}] = \sum\sum I[\mathbf{n}]\, H[\mathbf{m}-\mathbf{n}]$$

Filtrage Linéaire Spatial : Réalisation

En pratique, il faut rendre fini la réponse impulsionnelle du filtre pour pouvoir calculer la convolution, donc on va travailler avec un noyau de convolution de taille $N \times N$:

$$I_f[\mathbf{m}] = H * I[\mathbf{m}] = \sum_{-N/2}^{N/2} \sum_{-N/2}^{N/2} I[\mathbf{n}]\, H[\mathbf{m}-\mathbf{n}]$$

Exemple : filtre moyenneur

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$*$

$=$

Filtrage Linéaire Spatial : Réalisation

Remarque : Il existe les filtres séparables tels que :

$$H[\mathbf{m}] = H_R[m_x] \times H_C[m_y] \text{ où } \mathbf{m} = (m_x, m_y)$$

donc

$$\begin{aligned} I_f[\mathbf{n}] &= \sum_{m_x} \sum_{m_y} H[\mathbf{m}]\, I[\mathbf{n} - \mathbf{m}] \\ &= \sum_{m_x} H_R[m_x] \sum_{m_y} H_C[m_y]\, I[n_x - m_x, n_y - m_y] \\ &= \sum_{m_x} H_R[m_x] I_C[n_x - m_x, n_y] \end{aligned}$$

Cela correspond à un traitement de l'image d'abord par colonnes, puis par lignes. Cela permet de gagner en temps de calcul.

Filtrage Linéaire Lissant

Les filtres lissants sont équivalents à des filtres passe-bas :

- Filtre moyenneur :

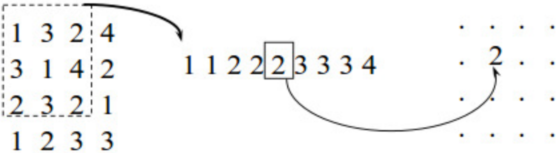
$$H_R[m_x] = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}} \quad H_C[m_y] = \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{3} \\ \hline \end{array} \quad H[\mathbf{m}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \end{array}$$

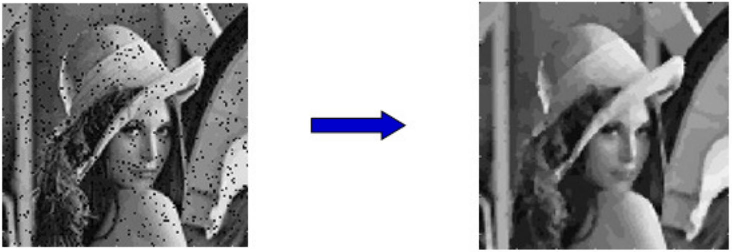
- Filtre gaussien :

$$H_R[m_x] = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}} \quad H_C[m_y] = \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \quad H[\mathbf{m}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \hline \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \hline \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \hline \end{array}$$

Filtre médian

Remplacer le pixel central par la valeur médiane du voisinage :





Utilisation du gradient

On définit le gradient comme une grandeur vectorielle qui indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace. On utilise cet opérateur vectoriel en imagerie pour localiser les contours.

$$\nabla I(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \partial_x I \\ \partial_y I \end{pmatrix}$$

En effet, en considérant un contour comme un front, la position du contour peut s'estimer en localiser les maximas locaux de la norme du gradient ou bien les passages par zéro de la dérivée seconde, c'est-à-dire le Laplacien :

$$\mathbf{m_0} = \text{"Contour"} \Leftrightarrow \mathbf{m_0} = \arg\max_{\mathbf{m}} \nabla I(\mathbf{m}) \Leftrightarrow \Delta I(\mathbf{m_0}) = 0$$

Filtres dérivateurs

Un façon classique de calculer la dérivée est d'utiliser les différences finies :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} I(x,y) = I_x(x,y) &\approx \frac{I[k+1,l]-I[k-1,l]}{2} \\
\frac{\partial}{\partial y} I(x,y) = I_y(x,y) &\approx \frac{I[k,l+1]-I[k,l-1]}{2}
\end{aligned}$$

Cette opération peut s'écrire comme une convolution discrète avec les noyaux de convolution suivants :

$$\begin{aligned}
H_x[\mathbf{p}] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
H_y[\mathbf{p}] &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Filtres dérivateurs

Opérateur de Prewitt

En pratique l'opération de dérivée est une opération numérique bruitée, donc elle est généralement couplée à un filtrage passe-bas (par exemple moyenneur) : Opérateur de Prewitt.

$$H_x[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \text{ et } H_y[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Le noyau de Prewitt peut-être décomposé par le produit d'un noyau lissant et d'un noyau dérivatif :

$$H_x[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtres dérivateurs

Opérateur de Sobel

En pratique l'opération de dérivée est une opération numérique bruitée, donc elle est généralement couplée à un filtrage passe-bas (par exemple gaussien) : Opérateur de Sobel

$$H_x[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \text{ et } H_y[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 \end{bmatrix}$$

Le noyau de Sobel peut-être décomposé par le produit d'un noyau lissant et d'un noyau dérivatif :

$$H_x[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtres dérivateurs
Opérateurs de Prewitt et Sobel

Passages par zéro du Laplacien

Il est possible d'exploiter la dérivée secondaire, car les passages par zéro sont plus faciles à estimer que des max locaux.

$$\Delta I(\mathbf{m}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} I(x,y)$$

De la même façon, on peut utiliser les différences finies :

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x,y) = I_{xx}(x,y) & \approx & I[k+1,l] - 2I[k,l] + I[k-1,l] \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} I(x,y) = I_{yy}(x,y) & \approx & I[k,l+1] - 2I[k,l] + I[k,l-1] \end{array}$$

Cette opération peut s'écrire comme une convolution discrète avec le noyau de convolution suivant :

$$H_L[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Passages par zéro du Laplacien