MAT361 — Introduction à l'analyse réelle

Contrôle du mardi 28 juin 2022 – Durée : 2 heures

Documents autorisés : Polycopié du cours, feuilles d'exercices avec ou sans solutions et notes personnelles. Dictionnaire papier pour les FUI et FUI-FF.

Documents et matériels interdits : recueils de contrôles des années précédentes, ordinateurs, tablettes, téléphones portables, calculatrices, tout objet connecté.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Pour tous les entiers $n \geq 2$ et $k \geq 1$ vérifiant $1 \leq k \leq n$, on définit les fonctions $f_{n,k} : [0,1] \to \mathbf{R}$ par :

$$\text{si } 1 \leq k \leq n-1, \quad f_{n,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{pour } \frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}, \\ 0 & \text{sinon} ; \end{cases}$$

$$f_{n,n}(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{pour } \frac{n-1}{n} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère l'espace de Hilbert réel $H = L^2(]0,1[;\mathbf{R})$, muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 fg$$

et de la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|\cdot\|$ dans cet exercice.

(a) Pour tous $1 \leq k \leq j \leq n$, calculer $(f_{n,j} \mid f_{n,k})$.

(b) On note E_n le sous-espace vectoriel de H engendré par les fonctions $f_{n,k}$ pour $k = 1, \ldots, n$. Préciser la dimension de E_n, en donner une base et justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel fermé de H.

(c) Pour $n \geq 2$ et pour tout $g \in H$, on note $P_n g$ la projection orthogonale de g sur le sous-espace fermé E_n. Justifier l'inégalité $\|P_n g\| \leq \|g\|$. Déterminer en fonction de g les coefficients réels $c_{n,k}$, pour $1 \leq k \leq n$, tels que

$$P_n g = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} f_{n,k} \, .$$

(d) Montrer que si un entier m est un multiple de n, alors $E_n \subset E_m$ et $P_n(P_m g) = P_n g$.

(e) Calculer explicitement les fonctions $P_2(f_{2,2})$ et $P_2(P_3(f_{2,2}))$.

(f) Soit $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que lorsque $n \to +\infty$ la suite de fonctions $(P_n h)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers h sur l'intervalle $[0,1]$.

(g) En utilisant un argument de densité, montrer que pour tout $g \in H$, la suite $(P_n g)_{n \geq 1}$ converge vers g dans H, c'est-à-dire au sens de la norme $\|\cdot\|$.

Exercice 2. On considère une fonction $V : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive. On s'intéresse à l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\text{(E)} \qquad \ddot{x} + V(t)x = 0, \quad t \geq 0.$$

(a) Montrer que toutes les solutions maximales de (E) sont globales sur $[0, +\infty[$.

(b) Donner un exemple de fonction V satisfaisant les hypothèses ci-dessus et telle que toutes les solutions de (E) s'annulent un nombre infini de fois sur $[0, +\infty[$.

On appelle fonction *non-oscillante* une fonction à valeur réelle, définie et continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$, et qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur son domaine de définition. Le but de cet exercice est de montrer que s'il existe une solution x de l'équation différentielle (E) qui est une fonction non-oscillante, alors $V \in L^1(]0, +\infty[)$.

Pour la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe une fonction x non-oscillante qui est solution de (E).

(c) Montrer que la fonction

$$y = \frac{\dot{x}}{x}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, où $b \geq a$. Calculer $\dot{y}$ et en déduire que y est elle-même une fonction non-oscillante.

(d) Montrer que la fonction

$$z = \frac{1}{y}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$, où $c \geq b$. Calculer $\dot{z}$ et en déduire que $\lim_{t \to +\infty} z(t) = +\infty$.

(e) Montrer que $V \in L^1(]0, +\infty[)$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie l'équation

$$\text{(F)} \qquad \begin{cases} u' = K \star u\,, \\ u : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1,\ u \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}, \\ K : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}. \end{cases}$$

La notation $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u.

Dans les questions (a), (b) et (c), on suppose que u et K sont solutions de (F).

(a) Justifier que $K \star u$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$i\xi\hat{u}(\xi) = \hat{K}(\xi)\hat{u}(\xi).$$

(b) Montrer que si la fonction u est non nulle, alors l'ensemble $\{\xi \in \mathbf{R} : \hat{K}(\xi) = i\xi\}$ contient un intervalle ouvert non vide.

(c) Montrer que $\hat{u}$ est à support compact sur $\mathbf{R}$. Autrement dit, montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $\hat{u}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\xi| \geq R$.

Les questions (d) et (e) servent à préparer la question (f).

(d) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Montrer que si $\hat{f}$ est à support compact, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(e) Montrer que si une fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact sur $\mathbf{R}$, alors il existe $\psi \in L^1(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et qui vérifie $\hat{\psi} = \varphi$.

(f) Construire un exemple de fonctions u et K non nulles vérifiant (F).