MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 5 – Systèmes autonomes de dimension 2 (corrections)

Exercice 54. (Applications directes du cours) I. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

avec une donnée initiale $(0, (x_0, y_0))$, avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution du système et qu'elle est globale. Vérifier que cette solution satisfait $\ddot{x} + x = 0$ et $\ddot{y} + y = 0$ sur $\mathbf{R}$ et en déduire qu'elle admet une formule explicite.

Pour un résultat abstrait d'existence et unicité, voir l'exercice 1 (b) i) de la feuille d'exercices du cours 4. On remarque que $\ddot{x} = \dot{y} = -x$, et de même $\ddot{y} = -y$. On remarque également que

$$\dot{x}(0) = y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = -x(0) = -x_0.$$

La solution est donc explicite, donnée par la formule

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t.$$

(b) Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre du système et qu'il est stable. Est-il asymptotiquement stable ?

Par définition, les équilibres du système sont les (x_0, y_0) tels que

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ -x_0 = 0, \end{cases}$$

donc $(0, 0)$ est bien l'unique équilibre. Il est stable car pour tout $\delta > 0$, si $|x_0| + |y_0| \leq \delta$, la solution explicite trouvée dans la question précdente permet de montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$|x(t)| \leq |x_0| + |y_0| \leq \delta, \quad |y(t)| \leq \delta.$$

L'équilibre $(0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable. En effet, soit $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$; supposons par exemple que $x_0 \neq 0$. On voit à nouveau grace à la formule explicite que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$x(2k\pi) = x_0,$$

ce qui montre que $x(t)$ ne tend pas vers 0 lors que $t \to \infty$. (Plus directement, on voit que toute solution est périodique.) Dans le cours, un tel point d'équilibre est appelé un centre.

II. On considère maintenant le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3, \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

avec une donnée initiale $(0, (x_0, y_0))$, avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale $(I, (x, y))$ du système.

L'application $(x, y) \mapsto (y^3, -x^3)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et le résultat sur les solutions maximales, ce qui donne l'existence d'une unique solution maximale $(I, (x(t), y(t))$.

(b) On introduit la fonctionnelle

$$E(t) = x(t)^4 + y(t)^4.$$

Vérifier que pour tout $t \in I$, on a $E(t) = E(0)$. En déduire que la solution est globale, c'est-à-dire $I = \mathbf{R}$.

On calcule, pour tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt}E(t) = 4\dot{x}(t)x(t)^3 + 4\dot{y}(t)y(t)^3 = 4\left(y(t)^3x(t)^3 - x(t)^3y(t)^3\right) = 0,$$

ce qui entraine que pour tout $t \in I$, $E(t) = E(0)$. En écrivant $I =]T_\star, T^\star[$, on remarque que

$$\lim_{t\to T^\star} |x(t)| + |y(t)| = +\infty \implies \lim_{t\to T^\star} E(t) = +\infty.$$

C'est impossible donc par l'alternative d'explosion (Théorème 3.2 du Cours 4), on doit avoir $T^\star = +\infty$. De même, on montre que $T_\star = -\infty$. La solution est donc globale.

(c) Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre du système et qu'il est stable. Est-il asymptotiquement stable ?

Par définition, les équilibres du système sont les (x_0, y_0) tels que

$$\begin{cases} y_0^3 = 0, \\ -x_0^3 = 0, \end{cases}$$

donc $(0, 0)$ est bien l'unique point équilibre. Il est stable car pour tout $\delta > 0$, si $|x_0|+|y_0| \leq \delta$, alors en utilisant la conservation de $E(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$x(t)^4 + y(t)^4 = x_0^4 + y_0^4 \leq \delta^4.$$

En revanche, $(0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable. C'est à nouveau une conséquence de la conservation de $E(t)$. On ne peut en effet pas avoir $\lim_{t\to\pm\infty} E(t) = 0$, à moins d'avoir $E(0) = 0$, c'est-à-dire $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercice 55. (Résolution explicite d'une équation différentielle autonome non linéaire et discussion du comportement des solutions maximales en fonction d'un paramètre) Pour $\alpha > 0$, on considère l'équation différentielle à variables séparées

$$\dot{x} = x^\alpha + 1, \quad x(0) = x_0 \geqslant 0.$$

(a) Exprimer la solution générale de l'équation en introduisant la fonction

$$G(y) = \int_0^y \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha + 1}.$$

Soit x solution de $\dot{x} = x^\alpha + 1$ (supposée positive) avec donnée initiale $(0, x_0)$, où $x_0 \geqslant 0$. Par la formule de dérivation d'une fonction composée, comme $G'(y) = \frac{1}{y^\alpha+1}$, on a

$$\frac{d}{dt}(G \circ x) = \dot{x}\,(G' \circ x) = 1.$$

On en déduit par intégration sur $[0, t]$: $G(x(t)) = t + G(x_0)$. La fonction

$$G : [0, \infty[\to \left[0, \int_0^\infty \frac{dy}{y^\alpha + 1}\right[$$

est strictement croissante sur $[0, \int_0^\infty \frac{dy}{y^\alpha+1}[$.

En particulier, elle est bijective, et son inverse G^{-1} est une fonction strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$,

$$G^{-1} : \left[0, \int_0^\infty \frac{dy}{y^\alpha + 1}\right[\to [0, \infty[.$$

La formule $G(x(t)) = t + G(x_0)$ est donc équivalente à $x(t) = G^{-1}(t + G(x_0))$.

(b) Dans les deux cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, résoudre explicitement les équations.

Pour $\alpha = 1$, $G(y) = \ln(y + 1)$ et $x(t) = (x_0 + 1)e^t - 1$. Les solutions sont globales.

Pour $\alpha = 2$, $G(y) = \arctan(y)$ et $x(t) = \tan(t + \arctan x_0) = \frac{\tan t + x_0}{1 - x_0 \tan t}$. Les solutions explosent en temps fini au temps $T^\star$ tel que $\tan T^\star = \frac{1}{x_0}$ si $x_0 \neq 0$ et $T^\star = \frac{\pi}{2}$ sinon.

(c) Discuter le comportement de G sur $[0, \infty[$ en fonction de α. Déterminer quand les solutions maximales positives de l'équation sont globales ou explosent en temps fini en fonction de α.

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on a $\int_0^\infty \frac{dy}{y^\alpha+1} = \infty$ et toutes les solutions sont globales.

Pour $\alpha > 1$, on a $\int_0^\infty \frac{dy}{y^\alpha+1} < \infty$ et toutes les solutions explosent en temps fini.

Exercice 56. (Convergence vers un équilibre pour les équations différentielles autonomes)
Soit $z : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) On suppose que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = z_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \dot z(t) = \ell$$

pour $z_0, \ell \in \mathbf{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe $t_n \in]n, n+1[$ tel que $z(n+1) - z(n) = \dot z(t_n)$. Comme $\lim_{n\to\infty} z(n+1) - z(n) = z_0 - z_0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \dot z(t_n) = \ell$, on obtient bien $\ell = 0$.

(b) Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit X une solution du système $\dot X = F(X)$ qui existe sur $[0, \infty[$. Montrer que si X satisfait $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_\infty$ où $X_\infty \in \mathbf{R}^2$, alors X_∞ est un point d'équilibre du système.

Le fait que $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_\infty$ pour $X(t) = (x(t), y(t))$, $X_\infty = (x_\infty, y_\infty)$ est équivalent à : $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty$ et $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty$. Comme la fonction $F = (f, g)$ est continue, on obtient $\lim_{t\to\infty} \dot x(t) = f(x_\infty, y_\infty)$ et $\lim_{t\to\infty} \dot y(t) = g(x_\infty, y_\infty)$. Par la question précédente, on a $f(x_\infty, y_\infty) = g(x_\infty, y_\infty) = 0$, ce qui signifie que X_∞ est un point d'équilibre.

Exercice 57. (Explosion en temps fini ou solution globale : exemples d'études qualitatives)
On considère les trois systèmes

$$(\mathrm{E}_1) : \begin{cases} \dot x = y^2 \\ \dot y = 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{E}_2) : \begin{cases} \dot x = -1 \\ \dot y = -x^2 \end{cases} \qquad (\mathrm{E}_3) : \begin{cases} \dot x = y^2 - 1 \\ \dot y = 1 - x^2 \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les solutions maximales de (E_1) et (E_2) sont globales.

Pour le système (E_1), avec une condition initiale (x_0, y_0) en $t = 0$, on a explicitement $y(t) = y_0 + t$ et ensuite $\dot x(t) = (y_0 + t)^2$ et donc $x(t) = \frac{1}{3}(y_0 + t)^3 - \frac{1}{3}y_0^3 + x_0$. Toutes les solutions sont globales.

Pour le système (E_2), $x(t) = x_0 - t$ et $\dot y(t) = -(x_0 - t)^2$ donne $y(t) = y_0 + \frac{1}{3}(x_0 - t)^3 - \frac{1}{3}x_0^3$.

(b) Montrer que (E_3) a des solutions qui explosent en temps fini.

Soit (x, y) une solution maximale du système (E_3). On pose $z = x - y$. Alors, $\dot z = x^2 + y^2 - 2 \geqslant \frac{1}{2}z^2 - 2$. On choisit une condition initiale (x_0, y_0) telles que $z(0) = x_0 - y_0 > 2$. *On suppose que la solution est globale en temps positif.* On définit

$$T = \sup\{t \in [0, \infty[\,:\, \forall t' \in [0, t],\ z(t') \geqslant 2\} \in]0, \infty[\,.$$

D'abord, on montre par l'absurde que $T = \infty$. En effet, si $T < \infty$, alors pour tout $t \in [0, T]$, on a $z(t) \geqslant 2$. En particulier, comme $\dot z \geqslant \frac{1}{2}z^2 - 2 \geqslant 0$, on a $z(T) \geqslant z(0) > 2$. Comme z est une fonction continue sur $[0, \infty[$, ceci contredit la définition de T. Ainsi, on a montré que pour tout $t \in [0, \infty[$, $z(t) \geqslant z(0)$. Donc, la fonction $u = z - 2$ vérifie $u > 0$ et $\dot u = \dot z \geqslant \frac{1}{2}(u+2)^2 - 2 \geqslant \frac{1}{2}u^2$ sur $[0, \infty[$. Contradiction car une fonction vérifiant cette inéquation différentielle ne peut pas être définie globalement sur $[0, \infty[$. En effet, la solution est positive et vérifie par intégration sur $[0, t]$, pour t dans son intervalle de définition : $t \leqslant \frac{2}{u(0)} - \frac{2}{u(t)} < \frac{2}{u(0)}$.

Autre idée : considérer des solutions particulières du système qui ont la forme $(x, -x)$ où x résout $\dot x = x^2 - 1$ et montrer l'explosion pour les données $x(0) > 1$.

Exercice 58. (Équation différentielle linéaire d'ordre 2 : résolution explicite) Pour des fonctions p, q et r continues sur $\mathbf{R}$, on considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r. \tag{$\star$}$$

(a) On suppose qu'il existe une solution y de l'équation homogène

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

qui ne s'annule pas. Déterminer en fonction de y la forme générale de la solution de $(\star)$.

Indication : chercher la solution x sous la forme $x = yz$.

On cherche une solution x sous la forme $x = yz$. On a

$$\dot{x} = \dot{y}z + y\dot{z}, \quad \ddot{x} = \ddot{y}z + 2\dot{y}\dot{z} + y\ddot{z}.$$

On observe que x est solution de $(\star)$ si, et seulement si

$$\ddot{y}z + 2\dot{y}\dot{z} + y\ddot{z} + p\left(\dot{y}z + y\dot{z}\right) + qyz = r.$$

En utilisant que y est une solution qui ne s'annule pas, cette équation se simplifie en

$$\ddot{z} + \dot{z}\left(p + 2\frac{\dot{y}}{y}\right) = \frac{r}{y}.$$

C'est une équation linéaire du *premier ordre en* $\dot{z}$, que l'on résout en utilisant la formule du cours

$$\dot{z}(t) = a_0\varphi(t) + \varphi(t)\int_0^t \frac{r(s)}{y(s)\varphi(s)}ds,$$

où

$$\varphi(t) = \exp\left(-\int_0^t \left(p + 2\frac{\dot{y}}{y}\right)(\sigma)d\sigma\right)$$

Finalement, on trouve $z(t) = z_0 + \int_0^t \dot{z}(s)ds$ en remplaçant $\dot{z}$ par l'expression ci-dessus.

(b) Application : résoudre l'équation différentielle

$$(2t+1)\ddot{x} + (4t-2)\dot{x} - 8x = 0.$$

On cherchera d'abord une solution de la forme $y(t) = e^{\alpha t}$.

On voit que $y(t) = e^{-2t}$ est solution sur $\mathbf{R}$. Par la méthode décrite en (a), on trouve la solution générale qui s'écrit

$$x(t) = a(4t^2 + 1) + be^{-2t}.$$

Exercice 59. (Application de l'exercice précédent) Vérifier que l'équation

$$\ddot{x} - 2\dot{x}\tanh(t) + x = 0$$

admet la solution particulière $y(t) = \sinh(t)$. Trouver la solution générale de cette équation.

On vérifie facilement que y est solution. On cherche la solution générale sous la forme $x = yz$. On trouve une équation du premier ordre en $\dot{z}$ (voir aussi l'exercice précédent). La solution générale s'écrit

$$x(t) = a\,[t\sinh(t) - \cosh(t)] + b\sinh(t).$$

Exercice 60. (Portrait de phase dans le cas d'une valeur propre nulle) Étudier le système

$$\dot{X} = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dans le cas où la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ a une valeur propre nulle et une valeur propre λ non nulle. Discuter selon le signe de λ et tracer les portraits de phase correspondant.

Les valeurs propres étant différentes, la matrice A est diagonalisable. Après changement de base, on se ramène au système

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{z} = \lambda z.$$

Les solutions sont $w(t) = w_0$ et $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$. Les points $(w_0, 0)$ sont des points d'équilibre pour tout $w_0 \in \mathbf{R}$. Les autres trajectoires sont des demi-droites parallèles à l'axe $w = 0$.

Exercice 61. (Portrait de phase dans le cas où la matrice A n'est pas diagonale) Étudier le système

$$\dot{X} = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dans le cas où la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ a une valeur propre réelle double λ et A n'est pas diagonale. Commencer par le cas $\lambda = 0$. Ensuite, dans le cas $\lambda \neq 0$, discuter selon le signe de λ et tracer les portraits de phase correspondants.

Exercice non corrigé.

Exercice 62. (Temps de retour) Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(J(X_0), X)$ la solution maximale du système $\dot{X} = F(X)$ avec donnée initiale $(0, X_0)$. On considère l'ensemble

$$G(X_0) = \{t \in J(X_0) : X(t) = X_0\}.$$

Montrer que seuls les cas suivants sont possibles :

- $G(X_0) = \{0\}$;
- $G(X_0) = T\mathbf{Z}$ pour un certain $T > 0$;
- $G(X_0) = \mathbf{R}$.

Le temps 0 appartient bien sûr à $G(X_0)$ et $G(X_0) = \{0\}$ est bien un cas possible. Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in G(X_0)$, $t_0 \neq 0$. D'après la propriété d'invariance par translation du flot des équations autonomes, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$, $X(t+t_0) = X(t)$, ce qui signifie que $G(X_0)$ contient $t_0\mathbf{Z}$.

On va distinguer deux cas selon la valeur de

$$T = \inf \{t \in G(X_0) \cap]0, \infty[\} .$$

Si $T > 0$ alors par définition de la borne inférieure, il existe $t_n \in G(X_0) \cap [T, \infty[$ telle que $t_n \to T$. Comme $X(t_n) = X_0$, par continuité de X, on obtient $X(T) = X_0$. De plus, pour tout $t \in]0, T[$, on a $X(t) \neq X_0$. Ainsi, X est périodique de plus petite période T et $G(X_0) = T\mathbf{Z}$.

Si $T = 0$ alors il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $t_n \in G(X_0) \cap]0, \infty[$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Comme X est dérivable en 0, on a $\dot{X}(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{X(t_n)-X_0}{t_n} = 0$, d'où X_0 est un point d'équilibre et $G(X_0) = \mathbf{R}$.

Exercice 63. (Comparaison d'une équation différentielle non linéaire avec le problème linéaire associé) Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

(a) Déterminer explicitement les solutions en utilisant les coordonnées polaires.

Indication : en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, montrer d'abord les formules générales

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \quad \text{et} \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}.$$

On passe en coordonnées polaires en posant

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

En dérivant la formule $x^2 + y^2 = r^2$, on trouve d'abord

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}.$$

En dérivant la formule $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$, on trouve

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = -\dot{\theta}\,(x\cos\theta + y\sin\theta) = -r\dot{\theta},$$

d'où l'on déduit en multipliant par $-r$: $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$.

En utilisant ces formules, on réécrit le système en (x, y) en un système en (r, θ) :

$$r\dot{r} = x\left[-y - x(x^2 + y^2)\right] + y\left[x - y(x^2 + y^2)\right] = -r^4,$$

$$r^2\dot{\theta} = x\left[x - y(x^2 + y^2)\right] - y\left[-y - x(x^2 + y^2)\right] = r^2.$$

On voit que l'origine est un point d'équilibre pour le système. On considère donc le cas $r \neq 0$. Ainsi, le système en (r, θ) est découplé

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\theta} = 1.$$

On trouve

$$r(t) = \left[\frac{r_0^2}{1 + 2r_0^2 t}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0.$$

(b) Déterminer l'allure des trajectoires et les comparer à celles du problème linéaire associé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Comme $r(t) \to 0$ et $\theta(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$, on voit que toutes les trajectoires du système non linéaire sont des spirales qui convergent vers l'origine (le sens de rotation est anti-trigonométrique). En particulier, l'origine est stable et asymptotiquement stable.

La matrice associée au problème linéaire en $(0, 0)$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $\pm i$. Pour le système linéaire, l'origine est un centre et les orbites sont des cercles centrés en 0.

On voit une différence qualitative en temps grand sur la nature des trajectoires entre le système linéaire et le système nonlinéaire.

Exercice 64. (*Équation de Lotka-Volterra : étude qualitative fine) On considère le système non linéaire
$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-y) \\ \dot{y} = y(x-1) \end{cases}$$

(a) Quels sont les points d'équilibre ? Que dire des solutions telles que $x(0) = 0$? Telles que $y(0) = 0$?

Les points d'équilibre du système sont les points (x, y) tels que $x(1-y) = 0$ et $y(x-1) = 0$, c'est-à-dire les points $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Le système ci-dessus vérifie les conditions d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz, en particulier pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, il existe une solution maximale et une seule du système telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

On observe que pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$, $x(t) = 0$ et $y(t) = y_0 e^{-t}$ est une solution globale. Par unicité, ce sont les solutions telles que $x(0) = 0$.

Ainsi, l'axe $x = 0$ contient trois *trajectoires* : (1) le point d'équilibre $(0, 0)$; (2) la trajectoire correspondant à la solution $(0, e^{-t})$ (et contenant toutes les solutions obtenues à partir de $(0, e^{-t})$ par translation en temps, soit $(0, ae^{-t})$, où $a > 0$) ; (3) la trajectoire correspondant à $(0, -e^{-t})$.

On raisonne de même pour l'axe $y = 0$: pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, $x(t) = x_0 e^t$ et $y(t) = 0$ est une solution globale.

Dans la suite, on étudie le comportement pour tout $t \in \mathbf{R}$ des solutions (x, y) du système telles que $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$.

(b) Montrer que l'on a $x > 0$ et $y > 0$ sur l'intervalle maximal d'existence de la solution.

Comme deux trajectoires différentes ne s'intersectent pas, on déduit de la question précédente que les trajectoires passant par la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ sont entièrement comprises dans cette région. Ainsi, les solutions correspondant à ces trajectoires vérifient $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans leur intervalle maximal d'existence.

(c) Montrer que toute solution (x, y) est globale (c'est-à-dire définie pour tout $t \in \mathbf{R}$).

On considère d'abord les temps positifs. On utilise des majorations sur l'intervalle maximal d'existence. Comme $xy > 0$, on voit que $\dot{x} \leqslant x$. Ainsi $\frac{d}{dt}(e^{-t}x) \leqslant 0$ et par intégration sur $[0, t]$, on trouve $0 < x(t) \leqslant x_0 e^t$. Sur y, on a donc $\dot{y} \leqslant x_0 e^t y$ et $\frac{d}{dt}[e^{-x_0 e^t} y] \leqslant 0$. Ainsi, $y(t) \leqslant y_0 e^{x_0 e^t}$. Ces estimations montrent que les solutions ne deviennent pas infinies en temps fini et donc sont globales par les résultats du cours sur les solutions maximales. On remarque que si $(x(t), y(t))$ est solution, alors $(y(-t), x(-t))$ est solution, ce qui règle le cas $t \leqslant 0$.

On définit les régions
$$A = \{(x, y) : x > 1, y > 1\}, \quad B = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 1\},$$
$$C = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad D = \{(x, y) : x > 1, 0 < y < 1\}.$$

(d) Montrer que si $(x_0, y_0) \in A$, alors il existe $t > 0$ tel que $x(t) = 1$ et $y(t) > 1$.

Dans A, on voit que $\dot{x} < 0$ et $\dot{y} > 0$. Ainsi, tant que la trajectoire reste dans A, pour $t > 0$, on a $y(t) > y_0 > 1$ et $\dot{x} = x(1-y) < 1 - y_0$. Ceci entraîne $x(t) < x_0 - (1 - y_0)t$. En temps fini, $x(t)$ atteint la valeur 1, alors que $y(t) > 1$.

(e) Montrer qu'une trajectoire quelconque non réduite à $(1,1)$ tourne autour de $(1,1)$, dans le sens trigonométrique, en rencontrant une infinité de fois les régions A, B, C et D dans cet ordre.

Reprenons une donnée initiale dans A. D'après la question précédente, il existe un temps $t > 0$ tel que $x(t) = 1$ et $y(t) > 1$. En ce temps t, on voit par le système que $\dot{x} < 0$ et $\dot{y} = 0$. Ainsi, la solution entre immédiatement après le temps t dans la région B. Une fois dans B, et tant que la solution reste dans B, on a $\dot{y} < 0$ et $\dot{x} < 0$. En raisonnant comme précédemment et en utilisant le fait que la trajectoire ne peut pas intersecter l'axe $x = 0$, la solution doit rentrer en temps fini dans C. On utilise le même argument pour dire que la solution rentre dans D, puis revient dans A.

À un certain point, on peut aussi utiliser le fait que si $(x(t), y(t))$ est solution, alors $(y(-t), x(-t))$ est solution.

(f) Montrer qu'il existe une fonction $E :]0,\infty[^2 \to \mathbf{R}$ telle que $t \mapsto E(x(t), y(t))$ soit constante pour chaque solution (x, y) de l'équation différentielle.

Indication : chercher E sous la forme $a(x) + b(y)$.

En déduire que les trajectoires sont périodiques.

On suit l'indication en posant $E(x, y) = a(x) + b(y)$. Alors,

$$\frac{d}{dt}E = \dot{x}a'(x) + \dot{y}b'(y) = x(1-y)a'(x) + y(x-1)b'(y).$$

À partir de la condition $x(y-1)a'(x) = y(x-1)b'(y)$, on obtient en séparant les variables :

$$\frac{x}{x-1}a'(x) = \frac{y}{y-1}b'(y) = C_1.$$

Ainsi, $a'(x) = C_1 - \frac{C_1}{x}$ et $a(x) = C_1\varphi(x) + C_3$ pour $\varphi(x) = x - \ln x$. De même $b(y) = C_1\varphi(y) + C_4$. On obtient une quantité conservée par le flot en posant

$$E(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

(on prend par exemple $C_1 = 1$ et $C_3 = C_4 = 0$).

On note $\varphi_1 :]0,1] \to [1,\infty[$ la restriction de φ à $]0,1]$; φ_1 est strictement décroissante et donc bijective. On note $\varphi_2 : [1,\infty[\to [1,\infty[$ la restriction de φ à $[1,\infty[$; φ_2 est strictement croissante et donc bijective.

Pour toute donnée initiale, on a $E \geqslant 2$ et $E = 2$ si, et seulement si $(x, y) = (1,1)$. On observe que les lignes de niveau $\{(x, y) : E(x, y) = E_0\}$ pour $E_0 > 2$ correspondent à des graphes de fonctions reliées à φ_1 et φ_2, quitte à couper $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ en plusieurs régions. Par exemple, dans la région $\{x > 0, y > 1\}$, on a $y = \varphi_2^{-1}(E_0 - \varphi(x))$ et dans la région $\{x > 1, y > 0\}$, on a $x = \varphi_2^{-1}(E_0 - \varphi(y))$

On en déduit que les courbes de niveau $E(x, y) = E_0$ pour $E_0 > 2$ sont des courbes fermées. Elles sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

D'après la question (e), chaque courbe de niveau correspond à la trajectoire d'une solution périodique. Une fois la courbe de niveau parcourue, les solutions reviennent au même point, et par invariance par translation en temps des solutions, le comportement est périodique.

On peut aussi retrouver le résultat de la question (e) en utilisant l'exercice 3. Les solutions ayant une *dynamique monotone* sur une ligne de niveau donnée, elles ne peuvent pas converger vers un point donné de cette ligne de niveau lorsque $t \to \infty$, car aucun de ces points n'est un point d'équilibre. Ainsi, toutes les solutions parcourent indéfiniment toute la courbe de niveau.

(g) Donner la nature du point d'équilibre $(1, 1)$.

Le point $(1, 1)$ est un point d'équilibre stable, mais non asymptotiquement stable, car les trajectoires proches de $(1, 1)$ tournent autour de $(1, 1)$ sans converger vers $(1, 1)$: si une solution (x, y) a une énergie $E_0 > 2$ proche de 2, alors pour tout t, $\varphi(x(t))$ et $\varphi(y(t))$ sont proches de 1, et donc x et y sont proches de 1. En revanche, supposer $x(t) \to 1$ et $y(t) \to 1$ lorsque $t \to \infty$ contredit la conservation de l'énergie $E(x, y) = E_0 > 2$.

Exercice 65. (*Pendule sans frottement : portrait de phase) On considère le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

(a) Montrer que toute solution maximale est globale (c'est-à-dire définie pour tout $t \in \mathbf{R}$).

(b) Quelles sont les symétries du système ?

On pose

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x.$$

(c) Montrer que $t \mapsto E(x(t), y(t))$ est constant pour une solution $(x(t), y(t))$.

Le calcul est direct :

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \dot{y}y + \dot{x}\sin x = 0.$$

(d) Quels sont les points d'équilibre du système ? Quelle est leur énergie ?

Les points d'équilibre sont les points (x, y) où $y = 0$ et $\sin x = 0$, c'est-à-dire les points de la forme $(k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbf{Z}$. L'énergie des points $(2k\pi, 0)$ est -1 ; l'énergie des points $((2k + 1)\pi, 0)$ est 1. Dans A, on a les points d'équilibre $(0, 0)$ d'énergie -1 et $(\pi, 0)$ d'énergie 1.

(e) Quelle est la forme des trajectoires correspondant à des niveaux d'énergie $-1 < E < 1$?

On a $y^2 = 2(E + \cos x)$. Ainsi, les valeurs de $\cos x$ sont limitées à l'intervalle $[-E, 1]$. On se restreint aux trajectoires telles que $x \in [-\arccos(-E), \arccos(-E)]$. On a alors $y = \pm\sqrt{2(E + \cos x)}$. Ceci donne une courbe fermée centrée en $(0, 0)$ qui est une trajectoire correspondant à des solutions périodiques. Physiquement, c'est l'oscillation du pendule sans frottement (la variable x représente l'angle du pendule par rapport à la position de repos).

(f) Que dire du cas $E = 1$? Dans ce cas, calculer explicitement une solution qui n'est pas un point d'équilibre.

Indication : pour résoudre une équation du type : $\dot{u} = \sin u$, on peut utiliser le changement de variable : $v = \tan \frac{u}{2}$.

On a alors $y = \pm\sqrt{2(1 + \cos x)} = \pm 2\cos(x/2)$. Donnons deux exemples typiques de trajectoires à énergie 1 : (1) le point d'équilibre $(\pi, 0)$ (position d'équilibre instable du pendule) ; (2) la trajectoire $y = 2\cos(x/2)$, correspondant à $-\pi < x < \pi$ et $y > 0$ qui représente le fait de lancer le pendule tel qu'il converge quand $t \to \infty$ vers la position d'équilibre instable (1) (quand $t \to -\infty$ la solution converge la position d'équilibre instable $(-\pi, 0)$).

Calculons explicitement la solution correspondant à cette trajectoire non triviale d'énergie 1. On a alors par le système $\dot{x} = 2\cos(x/2) = 2\sin(\frac{x+\pi}{2})$. On pose $u = \frac{1}{2}(x + \pi)$: u vérifie $\dot{u} = \sin u$. On suit l'indication en posant $v = \tan(u/2)$. Alors, en utilisant $\sin u = \frac{2v}{1+v^2}$, on obtient

$$\dot{v} = \frac{\dot{u}}{2}(1 + \tan^2 \frac{u}{2}) = \frac{1}{2}\frac{2v}{1 + v^2}(1 + v^2) = v.$$

On obtient une solution en choisissant $v(t) = e^t$ et donc $x(t) = 4\arctan(e^t) - \pi$.

(g) Montrer que chaque niveau d'énergie $E > 1$ correspond exactement à deux trajectoires.

Pour $E > 1$, $E + \cos x > 0$ et comme $y^2 = 2(E + \cos x)$, on voit que y ne s'annule pas. En prenant par exemple une trajectoire où $y > 0$, on a $y = \sqrt{2(E + \cos x)}$, une fonction périodique sur $\mathbf{R}$. Ces trajectoires correspondent au cas où le pendule tournoie autour de son axe de façon périodique.

(h) Tracer un portrait de phase.

(i) Dans le cas du pendule avec frottement

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - ky \end{cases}$$

où $k > 0$ est une constante, calculer la dérivée de $E(x(t), y(t))$ pour une solution $(x(t), y(t))$. Existe-t-il des solutions périodiques (autres que les points d'équilibre) ?

Par un calcul direct, on a

$$\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \dot{y}y + \dot{x}\sin x = -ky^2.$$

Soit (x, y) une solution périodique de période T. Alors $E(x(t+T), y(t+T)) = E(x(t), y(t))$. Ainsi, pour tout t, $\int_0^T y^2(s+t) = 0$. On en déduit que $y = 0$ pour tout t. Ainsi, $\dot{x} = \dot{y} = 0$ et il s'agit d'un point d'équilibre. Il n'existe pas de solutions périodiques autres que les points d'équilibre dans ce cas.