MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 2 — Compacité, connexité, complétude (corrections)

Exercice 1 (Applications directes du cours)**.** (a) Vérifier que deux normes équivalentes engendrent la même topologie : sur un espace vectoriel normé E, muni de deux normes *équivalentes* $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, montrer que $Y \subset E$ est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_1)$ si, et seulement si, c'est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$.

Comme les normes sont équivalentes il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telle que pour tout $x \in E$,

$$C_1\mathcal{N}_2(x) \leqslant \mathcal{N}_1(x) \leqslant C_2\mathcal{N}_2(x).$$

En particulier, pour $x \in E$ et $r > 0$, on a l'inclusion de boules ouvertes suivante :

$$B_2(x, C_2^{-1}r) \subset B_1(x, r) \subset B_2(x, C_1^{-1}r).$$

où pour $j = 1, 2$, $B_j(x, r)$ désigne la boule ouverte relative à la norme $\mathcal{N}_j$.
Soit U un ouvert pour la topologie définie par la norme $\mathcal{N}_1$. Montrons que c'est également un ouvert pour la topologie définie par la norme $\mathcal{N}_2$. Soit $x \in U$. Il existe par définition $r > 0$ tel que $B_1(x, r) \subset U$. Par la remarque précédente, on $B_2(x, C_2^{-1}r) \subset B_1(x, r) \subset U$, ce qui montre que U est un ouvert de E pour la norme $\mathcal{N}_2$.

(b) Justifier que $\mathbf{R}$ muni de la distance naturelle est connexe.

$\mathbf{R}$ est connexe par arc, donc connexe.

(c) Montrer que toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé est bornée.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On choisit $\varepsilon = 1$ dans la définition. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\|x_n\| \leq \max(\|x_0\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, 1 + \|x_{n_0}\|).$$

(d) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de (X, d). Par la définition de compact, elle admet une sous-suite convergente. Par une propriété du cours, $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc convergente. Ainsi, toute suite de Cauchy de (X, d) converge, ce qui justifie la complétude de (X, d).

Exercice 2 (La notion d'application propre)**.** Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques.

(a) Soient $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite convergente de (Y, d') et y sa limite. Montrer que l'ensemble

$$A = \{y_n, n \geqslant 0\} \cup \{y\}$$

est une partie compacte de Y.

On utilise la caractérisation des compacts par les recouvrements ouverts. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement quelconque de A par des parties ouvertes. Il existe $i_y \in I$ tel que $y \in U_{i_y}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} y_n = y$ et U_{i_y} est un ouvert, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $y_n \in U_{i_y}$. On choisit ensuite n_0 parties U_{i_k}, telles que $y_k \in U_{i_k}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n_0 - 1$. Ainsi, $\left(\cup_{k=0}^{n_0-1} U_{i_k} \right) \cup U_{i_y}$ est un recouvrement fini de A. On a bien prouvé que A est compact.

Dans la suite, f désigne une application de X dans Y. On dit que $f : X \to Y$ est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y. On dit que f est *propre* si f est continue et si l'image réciproque par f de tout compact est compacte.

(b) Montrer qu'une application propre est fermée.

Soient f une application propre et F un fermé de X. Montrons que $f(F)$ est un fermé de Y. Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $f(F)$ qui converge vers $y \in Y$. Il existe $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans F telle que $y_n = f(x_n)$. Par la question précédente, l'ensemble $A = \{y_n, n \geqslant 0\} \cup \{y\}$ est une partie compacte de Y. Comme f est propre, l'image réciproque de A par f est une partie compacte de X. En particulier, comme $\{x_n, n \geqslant 0\} \subset f^{-1}(A)$, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \geqslant 0}$ qui converge dans X vers $x \in X$. Comme l'application f est continue, $y = f(x)$, ce qui prouve que $y \in f(F)$, et donc $f(F)$ est un fermé de Y.

Dans la suite, on suppose que $(X, \| \cdot \|_X)$ et $(Y, \| \cdot \|_Y)$ sont des espaces vectoriels normés.

(c) On suppose que X et Y sont de dimension finie et que l'application f est continue. Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

En dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées. Soit K une partie fermée et bornée de Y. Son image réciproque est un fermé de X car f est continue. De plus, si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, son image réciproque est également bornée. Inversement, supposons que f est propre. L'image réciproque de $B_f^Y(0, R)$, la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$ de Y est un compact de X. Ainsi, il existe $A(R) > 0$ tel que $f^{-1}(B_f^Y(0, R)) \subset B_f^X(0, A)$. Ceci entraîne que pour tout $R > 0$, il existe $A(R) > 0$ tel que pour tout $x \in X$, si $\|x\|_X > A$, alors $\|f(x)\|_Y > R$.

Exercice 3 (Une caractérisation très utile des espaces connexes)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'un espace métrique (X, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue sur X à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.

(a) Supposons qu'il existe une application continue $f : X \to \mathbf{R}$, non constante et qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. En considérant les images réciproques $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$, montrer que X n'est pas connexe.

> Comme images réciproques d'ouverts de $\mathbf{R}$ par une application continue, $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$ sont des ouverts de X. De plus, ils sont non vides par hypothèse et complémentaires l'un de l'autre. Cela contredit la définition de la connexité pour X.

(b) Supposons que X n'est pas connexe. Il existe alors deux ouverts disjoints non vides U et V tels que $X = U \cup V$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbf{R}$ qui associe la valeur 1 à tout élément de U et 0 à tout élément de V est continue sur X. Conclure.

> On sait d'après le cours que f est continue si et seulement si l'image réciproque par f tout ouvert de $\mathbf{R}$ est un ouvert de (X, d). Ici, l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbf{R}$ est soit l'ensemble vide, soit égale à U ou V, soit égale à X tout entier. Ce sont tous des ouverts de X. Donc, $f : X \to \mathbf{R}$ est continue sur X et n'est pas constante car U et V sont non vides. L'inexistence d'une telle fonction est donc réservée aux ensembles connexes.

(c) Une application : soit (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X d'intersection non vide. Alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.

> D'après la question (a), une application continue $f : \cup_{i\in I} A_i \to \{0, 1\}$ est nécessairement constante sur chacune des parties A_i. Comme $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, l'application f est constante sur $\cup_{i\in I} A_i$.

Exercice 4 (Espaces de Banach et séries normalement convergentes). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, ses parties fermées et bornées sont complètes.

> Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé dont les parties fermées et bornées sont complètes. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$. Elle est contenue dans une boule fermée – qui est complète par hypothèse : la suite converge dans la boule, et donc dans $(E, \|\cdot\|)$. Ceci prouve la complétude de $(E, \|\cdot\|)$.

On dit qu'une série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est *normalement convergente* si la série numérique de terme général $\|x_n\|_E$ converge.

(b) Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série normalement convergente est convergente.

> On suppose tout d'abord que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach et considère une série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ dans E normalement convergente, c'est-à-dire telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E < \infty$. Alors, la suite numérique $(\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|_E)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \geqslant 0$ tel que pour tout $m \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$ on ait $\sum_{n=m+1}^{m+p} \|x_n\|_E < \varepsilon$, et donc $\| \sum_{n=m+1}^{m+p} x_n \|_E < \varepsilon$. Ainsi, on vient de vérifier que $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est de Cauchy et la complétude de E implique qu'elle converge.
>
> Maintenant, on suppose que toute série normalement convergente dans E converge, et il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy dans E converge. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une telle suite. Par un résultat du cours, il suffit de vérifier que cette suite admet une valeur d'adhérence.
>
> Par la propriété de Cauchy, il existe un rang N_1 tel que pour tous $m, m' \geqslant N_1$ on a $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant \frac{1}{2}$, un rang $N_2 > N_1$ tel que pour tous $m, m' \geqslant N_2$ on a $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant 2^{-2}$, et par récurrence sur $k \geqslant 0$, des rangs $N_{k+1} > N_k$ tels que pour $m, m' \geqslant N_k$ on a $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant 2^{-k}$. En posant $\varphi(n) = N_n$ on obtient une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout entier n on a $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\|_E \leqslant 2^{-n}$, faisant de la série $\sum_{n\geqslant 0}(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ une série normalement convergente donc convergente dans E par hypothèse sur E. Ainsi $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence, et elle est convergente par un résultat du cours.

Exercice 5 (Un exercice simple sur les espaces vectoriels normés)**.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

et, pour une constante $M > 0$,

$$\forall x \in B_f(0,1), \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

(a) Montrer que f est $\mathbf{Q}$-linéaire.

Tout d'abord, on a $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Il vient ensuite que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, d'où $f(-x) = -f(x)$. On en déduit que $f(px) = pf(x)$ pour tout $x \in E$ et $p \in \mathbf{Z}$. Soit à présent $u = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. On a $f(qux) = qf(ux)$ et d'autre part $f(qux) = f(px) = pf(x)$ d'où l'on déduit que $f(ux) = uf(x)$ pour tout $u \in \mathbf{Q}$ et $x \in E$, comme voulu.

(b) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $\|x\| \leqslant \lambda$, on a : $\|f(x)\| \leqslant |\lambda| M$. En déduire que f est M-lipschitzienne.

On a $\|f(\frac{x}{\lambda})\| \leqslant M$ par hypothèse. Comme f est $\mathbf{Q}$-linéaire, ceci implique que $\|f(x)\| = |\lambda| \cdot \|f(\frac{x}{\lambda})\| \leqslant |\lambda| M$. En faisant tendre λ vers $\|x\|$ on obtient finalement la borne suivante : $\|f(x)\| \leqslant \|x\| \cdot M$. Maintenant, pour tout $x, y \in E$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leqslant \|x - y\| M$, ce qui prouve bien que f est M-Lipschitzienne.

(c) Montrer que f est une application linéaire et continue sur E.

Toute application Lipschitzienne est continue donc f est continue. On sait déjà que f est $\mathbf{Q}$-linéaire. Or une application $\mathbf{Q}$-linéaire et continue est $\mathbf{R}$-linéaire : si $x \in E$ et $u \in \mathbf{R}$ il suffit de prendre une suite u_n de nombres rationnels tendant vers u et d'observer que $f(ux) = \lim_{n\to\infty} f(u_n x) = \lim_{n\to\infty} u_n f(x) = uf(x)$.

Exercice 6 (*Topologie trace)**.** Soit (X, d) un espace métrique, Y une partie de X, et Z une partie de Y. On peut considérer Z comme une partie de (X, d), mais aussi comme une partie de l'espace métrique (Y, d) (ici, d est la restriction de la distance d à Y). Démontrer les assertions suivantes :

(a) Pour que Z soit une partie ouverte de (Y, d), il faut et il suffit qu'il existe une partie U de X ouverte dans (X, d) telle que $Z = U \cap Y$.

On remarque d'abord que pour $x \in Y$, si $B(x, r)$ et $B_Y(x, r)$ désignent les boules ouvertes de centre x et de rayon r, respectivement dans (X, d) et (Y, d) alors

$$B_Y(x, r) = B(x, r) \cap Y.$$

Vérifions en premier que la condition est suffisante. Soit $Z = U \cap Y$ où U est un ouvert de X. Soit $x \in Z$. Comme $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Ainsi, $B_Y(x, r) = B(x, r) \cap Y \subset U \cap Y = Z$. Donc, Z est un ouvert de (Y, d).

Inversement, si Z est un ouvert de (Y, d), alors pour tout $x \in Z$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_Y(x, r_x) \subset Z$. On définit un ouvert de (X, d) en posant

$$U = \bigcup_{x \in Z} B(x, r_x).$$

On voit que $Z \subset U$ et donc $Z \subset U \cap Y$. Par la définition de r_x, on voit aussi que $B(x, r_x) \cap Y \subset Z$, et donc $U \cap Y \subset Z$. Cette double inclusion prouve que $Z = U \cap Y$.

(b) Pour que Z' soit une partie fermée de (Y, d), il faut et il suffit qu'il existe une partie F de X fermée dans (X, d) telle que $Z' = F \cap Y$.

Si F est une partie fermée de X, alors U, le complémentaire de F est une partie ouverte de X et $U \cap Y$ est une partie ouverte de Y d'après la question (a). Ainsi, $F \cap Y$, le complémentaire de $U \cap Y$ dans Y est une partie fermée de Y.

Inversement, soit Z' une partie fermée de Y et Z le complémentaire de Z' dans Y. Comme Z est une partie ouverte de Y, il existe U, partie ouverte de X telle que $Z = U \cap Y$. On pose $F = X \setminus U$, le complémentaire de U dans X. C'est un fermé de X par définition. De plus, on a bien $Z' = F \cap Y$.

Exercice 7 (Compacts et recouvrement par des ouverts)**.** Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement par parties *ouvertes* d'un espace métrique *compact* (X, d). Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'un des U_i.

Si la propriété n'est pas satisfaite, alors il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que pour tout $n \geqslant 1$, la boule B_n de centre x_n et de rayon $1/n$ ne soit contenue dans aucun des U_i. Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$. Par la propriété de recouvrement par des ouverts, il existe un indice $i_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(a, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Pour $n > 2\varepsilon^{-1}$ assez grand, on a aussi $d(a, x_n) \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$B(x_n, 1/n) \subset B(x_n, \varepsilon/2) \subset B(a, \varepsilon) \subset U_{i_0},$$

ce qui est une contradiction.

Exercice 8 (*Une façon abstraite de construire un modèle pour tout espace métrique compact)**.** Rappel : un *homéomorphisme* est une application bijective continue dont l'application réciproque est elle-même continue (ce qui n'est pas automatique).

(a) Montrer que toute application injective continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y est un homéomorphisme de X vers $f(X)$.

Il suffit de montrer que l'application réciproque f^{-1} est continue, par exemple en vérifiant que l'image réciproque de tout fermé (donc compact), disons F, de X par f^{-1} est fermé dans Y. Mais une telle image réciproque, dans ce cas, n'est rien d'autre que $f(F)$, qui est fermé car image continue d'un compact (et un compact d'un espace métrique est fermé).

Sur $[0,1]^{\mathbf{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$) on définit l'application

$$d\Big((x_n)_{n\geqslant 0},(y_n)_{n\geqslant 0}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^{n+1}}.$$

(b) Montrer que d est une distance sur $([0,1]^{\mathbf{N}},d)$.

D'abord, il est clair que la série (à termes positifs) définissant d converge car pour tout $n\geqslant 0$, on a $\frac{|x_n-y_n|}{2^{n+1}}\leq\frac{1}{2^{n+1}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{n+1}}$ converge. Ensuite, on voit que si $d((x_n)_{n\geqslant 0},(y_n)_{n\geqslant 0})=0$, alors pour tout $n\geqslant 0$, $x_n=y_n$. La symétrie est évidente, ainsi que l'inégalité triangulaire.

(c) Montrer qu'une suite $(x^k)_{k\geqslant 0}=\Big((x_n^k)_{n\geqslant 0}\Big)_{k\geqslant 0}$ dans $[0,1]^{\mathbf{N}}$ converge vers une suite $y=(y_n)_{n\geqslant 0}\in[0,1]^{\mathbf{N}}$ au sens de la distance d, si et seulement si elle converge composante par composante, c'est-à-dire :

$$\forall n\geqslant 0,\quad x_n^k\to y_n\quad\text{quand}\quad k\to+\infty\ ;$$

Comme $|x_n^k-y_n|\leqslant 2^{n+1}d(x^k,y)$, si $x^k\to y$ au sens de d, alors pour $n\geqslant 0$ fixé, on a $|x_n^k-y_n|\to 0$ quand $k\to+\infty$. Réciproquement, supposons que chaque composante converge. Donnons-nous $\varepsilon>0$. Soit $N_0\in\mathbf{N}$ tel que

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\varepsilon,$$

puis N_1 tel que pour tout $k\geqslant N_1$ on ait

$$|x_n^k-y_n|\leqslant\varepsilon\quad\text{pour tout}\quad n\leqslant N_0.$$

Alors pour $k\geqslant N_1$, on a

$$\begin{aligned}d(x^k,y)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{|x_n^k-y_n|}{2^{n+1}}&\leqslant\sum_{n=0}^{N_0}\frac{|x_n^k-y_n|}{2^{n+1}}+\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{|x_n^k-y_n|}{2^{n+1}}\\&\leqslant\sum_{n=0}^{N_0}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\sum_{n=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\varepsilon+\varepsilon\leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $x^k\to y$.

(d) Prouver que $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$ est un espace métrique compact (utiliser un argument d'*extraction diagonale*).

Soit $(x^k)_{k\geqslant 0} = ((x_n^k)_{n\geqslant 0})_{k\geqslant 0}$ une suite de $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$. Alors pour tout $n \geqslant 0$, $(x_n^k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de $[0,1]$.

Par la compacité de l'intervalle $[0,1]$, il existe une extraction σ_0 telle que $(x_0^{\sigma_0(k)})_{k\geqslant 0}$ converge dans $[0,1]$, disons vers y_0. Puis, on peut de même extraire de $(x_1^{\sigma_0(k)})_{k\geqslant 0}$ une sous-suite convergente : il existe une extraction σ_1 telle que $(x_1^{\sigma_0\circ\sigma_1(k)})_{k\geqslant 0}$ converge, disons vers $y_1 \in [0,1]$. Remarquer que la suite extraite $(x_0^{\sigma_0\circ\sigma_1(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers y_0. Ainsi, par récurrence, on construit pour tout $m \geqslant 0$ une extraction σ_m telle que

$$\forall n \leqslant m, \quad x_n^{\sigma_0\circ\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_m(k)} \to y_n \in [0,1] \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

On remarque que la fonction $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $\psi(n) = (\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n)(n)$ est une extraction, qui vérifie

$$\forall n \geqslant 0, \quad x_n^{\psi(k)} \to y_n \quad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

Soit $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \in [0,1]^{\mathbf{N}}$, la remarque initiale montre donc que $x^{\psi(k)} \to y$.

Une application f est un *homéomorphisme* si elle est continue, bijective, et l'application réciproque f^{-1} est continue. Deux espaces sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre (le sens n'importe pas dans la formulation : l'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme).

(e) Prouver que tout espace métrique compact est homéomorphe à une *partie* de $[0,1]^{\mathbf{N}}$.

Soit (X, δ) un espace métrique compact. On commence par montrer que X admet une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dense. En effet, pour tout $m \geqslant 0$, il existe par compacité un recouvrement fini de X par des boules de rayon $1/m$, de centre $y_1^m, \dots, y_{k_m}^m$. On définit $Y = \bigcup_{m\geqslant 1}\{y_1^m, \dots, y_{k_m}^m\}$. Alors Y est dense dans (X, δ) : en effet, si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $m \geqslant 1$ tel que $1/m \leqslant \varepsilon$ puis il existe un indice i tel que $x \in B(y_i^m, 1/m)$; et donc $\delta(x, y_i^m) \leqslant \varepsilon$. De plus, Y est un ensemble dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles finis. On peut donc le réarranger en une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dense de (X, δ).

Soit $D = \sup_{x,y\in X} \delta(x,y)$: X étant compact, on vérifie que $D < +\infty$. Définissons maintenant l'application

$$f : (X, \delta) \to ([0,1]^{\mathbf{N}}, d), \quad x \mapsto ((\delta(x, x_n)/D)_{n\geqslant 0}.$$

L'application f est bien définie (car $0 \leqslant \delta(x, x_n)/D \leqslant 1$ pour tout n et x) ; elle est lipschitizenne : pour tout $x, y \in X$, par définition de d, de f et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{|f(x)_n - f(y)_n|}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{D}\sum_{n\geqslant 0} \frac{|\delta(x, x_n) - \delta(y, x_n)|}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{D}\sum_{n\geqslant 0} \frac{\delta(x,y)}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{D}\delta(x,y), \end{aligned}$$

f est donc continue.

Enfin, f est injective : soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$; par densité, il existe une extraction σ telle que $x_{\sigma(n)} \to x$. Mais comme $f(x) = f(y)$, en particulier, pour tout $n \geqslant 0$, $\delta(y, x_{\sigma(n)}) = d(x, x_{\sigma(n)}) \to 0$ et $x_{\sigma(n)} \to y$. Par unicité de la limite, $x = y$.

Ainsi, f est une bijection sur son image. Montrons que $f^{-1} : f(X) \to X$ est continue ; pour cela montrons que l'image réciproque par f^{-1}de tout fermé de X est un fermé de $f(X)$. Soit donc F un fermé de X ; X étant compact, F est compact. Alors

$$(f^{-1})^{-1}(F) = \{y \in f(X) \mid f^{-1}(y) \in F\} = \{y \in f(X) \mid \exists x \in F, f(x) = y\} = f(F)$$

est compact (comme image du compact F par l'application continue f), et est donc fermé : ce qu'il fallait démontrer.

En conclusion, $f : X \to f(X)$ est un homéomorphisme.

Exercice 9 (*Une caractérisation des parties connexes de $\mathbf{R}$). Le but de l'exercice est de montrer que les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$ (sans utiliser le fait que la connexité par arc implique la connexité). On rappelle qu'une partie J de $\mathbf{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tout $x, y \in J$, si $x < y$, alors $[x, y] \subset J$.

(a) On considère une partie J de $\mathbf{R}$ non vide et qui n'est pas un intervalle. Montrer qu'il existe un point $c \in \mathbf{R} \setminus J$ tel que $J \cap]-\infty, c[$ et $J \cap]c, +\infty[$ sont non vides, ouverts dans J et disjoints. Conclure.

Comme J est non vide et n'est pas un intervalle, il existe $c \in \mathbf{R} \setminus J$ tel qu'il existe $a, b \in J$ avec $a < c < b$. Ainsi, les ensembles disjoints $J_- = J \cap]-\infty, c[$ et $J_+ = J \cap]c, +\infty[$ sont non vides. Montrons qu'ils sont ouverts dans J. D'après la notion de topologie induite, il suffit de remarquer que $J_\pm$ sont l'intersection d'un ouvert de $\mathbf{R}$ avec J, ce qui suffit à affirmer que c'est un ouvert de J. On peut aussi le montrer : si $x \in J_-$, alors $x \in J$ et $x < c$. Pour $r < c - x$, la boule $B_J(x, r) = \{y \in J, |x - y| < r\}$ est clairement incluse dans J_-. Voir aussi l'exercice 2. Comme $J = J_- \cap J_+$, on en conclut que J n'est connexe.

(b) Soit un intervalle compact $J = [a, b]$ de $\mathbf{R}$. Supposer que J est la réunion de deux parties fermées disjointes non vides F_0 et F_1. Sans perte de généralité, on suppose que $a \in F_0$. On définit

$$c = \sup\{x \in J \text{ tel que } [a, x] \subset F_0\}.$$

Montrer que $c \in F_0$ et $c \in F_1$ et conclure.

Par définition de c, on a $[a, c[\subset F_0$. Comme F_0 est fermé, on a en fait $[a, c] \subset F_0$. Par ailleurs, $c < b$, sinon F_1 est vide, et pour tout $c < c' < b$, on a $[a, c'] \not\subset F_0$. Cela signifie qu'il existe une suite décroissante dans $]c, b] \cap F_1$ qui converge vers c. Comme F_1 est fermé, cela montre que $c \in F_1$. Contradiction avec le fait que F_0 et F_1 sont disjoints.

(c) Dans le cas d'un intervalle non compact, utiliser l'exercice 3 (c) pour conclure.

Soit J un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, et $a \in J$. Il suffit d'écrire J sous la forme

$$J = \left(\bigcup_{x \geqslant a, x \in J} [a, x] \right) \bigcup \left(\bigcup_{x \leqslant a, x \in J} [x, a] \right)$$

et d'utiliser l'exercice 3 (c) pour en déduire que J est connexe.

Exercice 10 (On s'en doutait...encore faut-il le démontrer !). Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui soit continue, bijective et telle que f^{-1} soit aussi continue.

On raisonne par contradiction. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ un homéomorphisme. Remarquons que $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe, donc son image $f(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ par f continue est également connexe. Mais $f(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) = f(\mathbf{R}^2) \setminus \{f(0)\} = \mathbf{R} \setminus \{f(0)\}$ (la droite privée d'un point) n'est pas connexe : en effet les connexes de $\mathbf{R}$ sont exactement les intervalles.

Exercice 11 (*Une partie de $\mathbf{R}^2$ connexe mais pas connexe par arc).

(a) Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. Montrer que si Y est connexe, alors tout ensemble $B \subset X$ tel que $Y \subset B \subset \bar{Y}$ est également connexe. Indication : on pourra utiliser la définition de connexe et un argument par contradiction.

(b) On note Γ le *graphe* de la fonction défine sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \sin(1/x)$. Déterminer l'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ. Montrer que $\overline{\Gamma}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arc.

Exercice non corrigé

Exercice 12 (Connexe implique connnexe par arc dans les espaces vectoriels normés)**.** Montrer qu'un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^N$ est connexe par arcs. Montrer que l'on peut joindre deux points de U par une ligne polygonale. Plus généralement, montrer qu'un ouvert connexe d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé est connexe par arcs.

On traite le cas général d'un espace vectoriel normé. Soit $x \in U$ et considérons l'ensemble C des $y \in U$ tels que l'on peut joindre x à y par un chemin dans U. La partie C est ouverte (dans U). En effet, si $y \in C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset U$. Les boules étant convexes, pour tout $z \in B(y,\varepsilon)$, le segment $[y,z]$ est un chemin de y à z dans U, et comme la concaténation de deux chemin dans U est encore un chemin dans U, $z \in C$. Ainsi $B(y,\varepsilon) \subset C$.

La partie C est également fermée dans U : si $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de C qui converge vers y dans U, soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset U$. Il existe N tel que $y_N \in B(y,\varepsilon)$, et, par convexité des boules $[y_N, y]$ est un chemin de $B(y,\varepsilon)$, donc de U ; en la concaténant avec un chemin de U reliant x à y_N, on voit que $y \in C$.

La partie C étant non vide, et vu que U est connexe, on a $C = U$. On raisonne de même dans le cas des lignes polygonales, en constatant que la concaténation de deux chemins polygonaux est encore un chemin polygonal.