MAT361 – Introduction à l'analyse réelle

Devoir personnel obligatoire à rendre en PC le vendredi 16 juin

Exercice 1. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^N$. Pour $X \in \mathbf{R}^N$ et $r \geq 0$, on note $B_f(X, r)$ la boule fermée de centre X et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$.

Considérons l'équation différentielle $\dot{X} = f(X)$, où $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $Z_0 \in \mathbf{R}^N$, on note $T_{\max}(Z_0) > 0$ le temps d'existence maximal de la solution $Z(t)$ de l'équation différentielle $\dot{Z} = f(Z)$ de donnée initiale $Z(0) = Z_0$.

On fixe $X_0 \in \mathbf{R}^N$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout T tel que $0 < T < T_{\max}(X_0)$, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, si Y_0 est au plus à distance ϵ de X_0, alors $T_{\max}(Y_0) > T$.

Soit donc $T \in \mathbf{R}$ tel que $0 < T < T_{\max}(X_0)$.

(a) Montrer l'existence de $R > 1$ tel que $X(t) \in B_f(X_0, R)$ pour tout $t \leq T$.

L'intervale $[0, T]$ est compact et X est continue sur cet intervalle donc son image est aussi compacte donc bornée ce qui donne le résultat.

(b) Montrer l'existence de $k_R > 0$ telle que f soit k_R-lipschitzienne sur $B_f(X_0, 2R)$.

La boule $B_f(X_0, 2R)$ est compacte et f est de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier l'application qui à $X \in \mathbf{R}^N$ associe la matrice Jacobienne $J_f(X)$ de f en X est continue. Il existe donc $k_R \in \mathbf{R}$ tel que $\|J_f(X)\| \leq k_R$ pour tout $X \in B_f(X_0, 2R)$. Par l'inégalité des accroisements finis, on a $\|f(X) - f(X_0)\| \leq k_R\|X - X_0\|$ ce qui donne le résultat.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < R$ et soit $Y_0 \in B_f(X_0, \epsilon)$. On note $Y(t)$ la solution maximale de l'équation $\dot{X} = f(X)$ telle que $Y(0) = Y_0$. Son temps maximal d'existence est $T_{\max}(Y_0)$.

(c) Montrer qu'il existe $T' \in]0, T]$ tel que $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \leq T'$.

Comme Y est continue, il existe $T' > 0$ tel que $\|Y(t) - Y_0\| < R$ pour tout $t \in [0, T']$. De plus, on a $Y_0 \in B_f(X_0, \epsilon)$ donc $\|Y(t) - X_0\| \leq \|Y(t) - Y_0\| + \|Y_0 - X_0\| \leq R + \epsilon \leq 2R$.

(d) Montrer que pour un tel T', on a $\|X(t) - Y(t)\| \leq \epsilon e^{k_R t}$ pour tout $t \in [0, T']$.

Pour $t \in [0, T']$, on a $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ et pour $t \in [0, T]$, on a $X(t) \in B_f(X,R) \subset B_f(X_0, 2R)$. On déduit de (b) que l'on a $\|\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\| = \|f(X(t)) - f(Y(t))\| \leq k_R\|X(t) - Y(t)\|$ pour tout $t \in [0, T']$. Par le Lemme de Grönwall, on obtient que pour $t \in [0, T']$, on a $\|X(t) - Y(t)\| \leq e^{k_R t}\|X_0 - Y_0\| \leq \epsilon e^{k_R t}$.

(e) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $T_{\max}(Y_0) > T$ (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $T_{\max}(Y_0) \leq T$ et que donc Y explose en temps fini).

Par Cauchy-Lipschitz, on sait que si Y est définie pour un temps t alors elle est définie au voisinage de t. En particulier, pour les temps positifs, Y est définie sur l'intervalle $[0, T_{\max}(Y_0)[$. Supposons que $T_{\max}(Y_0) \leq T$, alors Y n'est pas globale et on doit avoir $\lim_{t \to T_{\max}(Y_0)} \|Y(t)\| = +\infty$. On va obtenir une contradiction.

On pose $\epsilon = Re^{-k_R T}$. Soit $\mathcal{T} = \{T' \in [0, T_{\max}(Y_0)[\mid Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \in [0, T']\}$. On sait par (c) que $\mathcal{T}$ est non vide. Pour $T' \in \mathcal{T}$, on sait par (d) (on utilise ici l'hypothèse $T_{\max}(Y_0) \leq T$) que l'on a $\|Y(t) - X_0\| \leq \|Y(t) - X(t)\| + \|X(t) - X_0\| \leq \epsilon e^{k_R t} + R = Re^{k_R(t-T)} + R < 2R$ pour tout $t \in [0, T']$. En particulier, par continuité de Y, on voit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[0, T' + \delta[\subset \mathcal{T}$ donc $\mathcal{T}$ est ouvert. Montrons que $\mathcal{T}$ est fermé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $T' \in \mathbf{R}$. Pour chaque T_n, on a $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \in [0, T_n]$ donc par passage à la limite, on a $Y(t) \in B_f(X_0, 2R)$ pour tout $t \in [0, T'[$. Par l'alternative d'explosion, on a que Y est définie en T' donc $T' < T_{\max}(Y_0)$ et par passage à la limite $Y(T') \in B_f(X_0, 2R)$. On a donc $T' \in \mathcal{T}$ qui est fermé. Par connexité de $[0, T_{\max}(Y_0)[$, on a $\mathcal{T} = [0, T_{\max}(Y_0)[$ et on a vu que pour tout $t \in \mathcal{T}$, on a $\|Y(t)\| \leq \|Y(t) - X_0\| + \|X_0\| < 2R + \|X_0\|$ est bornée donc $T_{\max}(Y_0) = +\infty$ par l'alternative d'explosion, une contradiction.

Définition 1. Soit $\varphi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction. On définit $\liminf_{X\to X_0} \varphi$ par la formule suivante :

$$\liminf_{X\to X_0} \varphi = \sup_{\epsilon>0} \left(\inf_{\|X-X_0\|<\epsilon} \varphi(X) \right).$$

(f) Montrer que $\liminf_{X\to X_0} T_{\max}(X) \geq T_{\max}(X_0)$.

Soit $T < T_{\max}(X_0)$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $\|X - X_0\| < \epsilon$, on ait $T_{\max}(X) > T$. En particulier, on a $\inf_{\|X-X_0\|<\epsilon} T_{\max}(X) \geq T$ et donc $\liminf_{X\to X_0} T_{\max}(X) \geq T$. Ceci étant vrai pour tout $T < T_{\max}(X_0)$, on obtient le résultat.

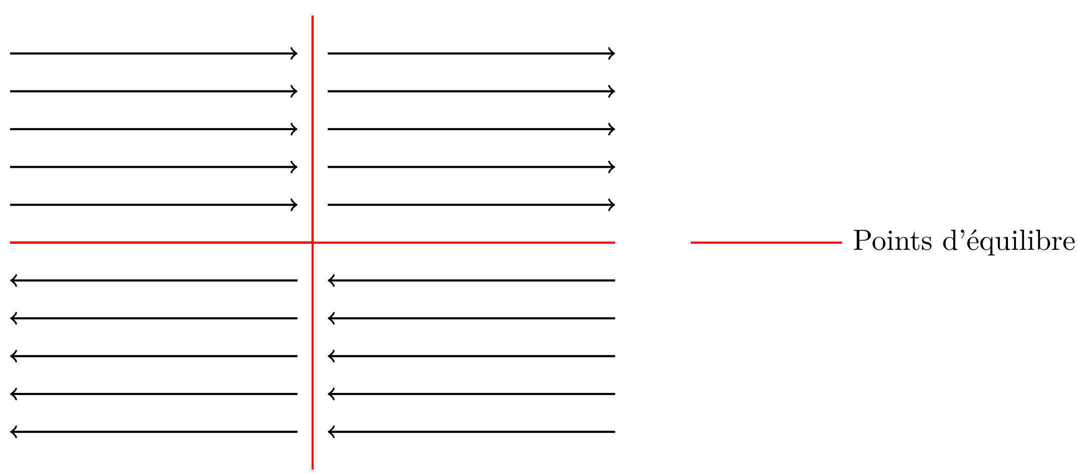
(g) On considère $f(x, y) = (x^2 y, 0)$. Pour une condition initiale $X_0 = (x_0, y_0)$, donner $T_{\max}(X_0)$. En particulier déterminer les conditions initiales X_0 pour lesquelles la solution $X(t)$, telle que $X(0) = X_0$, est globale. Tracer le portrait de phase de cette équation.

Soit $X(t) = (x(t), y(t))$ la solution de condition initiale $X_0 = X(0) = (x_0, y_0)$. Un calcul montre que

$$X(t) = \left(\frac{x_0}{1 - x_0 y_0 t}, y_0 \right)$$

est solution. On a $T_{\max}(X_0) = +\infty$ pour $x_0 y_0 = 0$ (dans ce cas $X(t)$ est constante), on a $T_{\max}(X_0) = +\infty$ si $x_0 y_0 < 0$ ($X(t)$ est globale en temps positif mais pas en temps négatif) et on a $T_{\max}(X_0) = \frac{1}{x_0 y_0}$ pour $x_0 y_0 > 0$ ($X(t)$ est globale en temps négatif mais pas en temps positif).

Le portrait de phase est le suivant.



(h) On considère maintenant $f(x, y) = (x^2 - yx^4, 0)$. Soit $a > 0$, montrer que l'on a $T_{\max}(a, 0) < +\infty$ alors que pour tout ϵ tel que $\epsilon a^2 < 1$, on a $T_{\max}(a, \epsilon) = +\infty$ (ceci peut s'écrire $\lim_{\epsilon\to 0} T_{\max}(a, \epsilon) \neq T_{\max}(a, 0)$).

Fixons $a > 0$. On commence par le cas $X_0 = (x_0, 0)$ avec $x_0 = a > 0$. Si $X(t) = (x(t), y(t))$ est la solution telle que $X(0) = X_0$, alors on a $y(t) = 0$ et $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$ donc $T_{\max}(X_0) = \frac{1}{a} < +\infty$.

Soit maintenant $Y_{0,\epsilon} = (x_0, \epsilon)$ avec $x_0 = a > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon a^2 < 1$. Soit $Y_\epsilon(t) = (x(t), y(t))$ la solution telle que $Y_\epsilon(0) = Y_{0,\epsilon}$. On a $y(t) = \epsilon$ pour tout t. Montrons que $x(t) \in [0, a]$ pour tout t. Soit $\mathcal{T} = \{t \in [0, T_{\max}(Y_{0,\epsilon})[\mid x(t) \in [0, 1 + 1/\sqrt{\epsilon}]\}$. On a $x(0) = a \in [0, 1 + 1/\sqrt{\epsilon}]$. On a $\mathcal{T} = x^{-1}([0, 1 + 1/\sqrt{\epsilon}])$ qui est fermé dans $[0, T_{\max}(Y_{0,\epsilon})[$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Notons que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$, alors $x = 0$ est une solution ayant la même condition en t_0 donc $x(t) = 0$ pour tout t ce qui contredit $x(0) = a > 0$. Ainsi x n'est jamais nulle donc $x(t) > 0$ pour tout t. Pour $t \in \mathcal{T}$, si $x(t) < 1 + 1/\sqrt{\epsilon}$, alors par continuité de x, la même chose est vraie au voisinage de t donc un voisinage de t est encore dans $\mathcal{T}$. Si $x(t) = 1 + 1/\sqrt{\epsilon}$, alors $\dot{x} = x^2 - \epsilon x^4 = x^2(1 - \epsilon x^2) < 0$ donc x est strictement décroissante au voisinage de t donc $\mathcal{T}$ contient encore un voisinage de t (on voit même que $x(t)$ ne peut être égal à $1 + 1/\sqrt{\epsilon}$). L'ensemble $\mathcal{T}$ est donc aussi ouvert. On déduit de la connexité de $[0, T_{\max}(Y_{0,\epsilon})[$ que $\mathcal{T} = [0, T_{\max}(Y_{0,\epsilon})[$ et donc $x(t) \in [0, 1 + 1/\sqrt{\epsilon}]$ pour tout t. Par l'alternative d'explosion, ceci implique que $T_{\max}(Y_{0,\epsilon}) = +\infty$ pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon a^2 < 1$ (on peut donc écrire $\lim_{\epsilon \to 0} T_{\max}(Y_{0,\epsilon}) = +\infty \neq \frac{1}{a} = T_{\max}(X_0)$).

Exercice 2. On rappelle quelques résultats obtenus à l'exercice 35 (feuille d'exercices 3). Pour $A \in M_n(\mathbf{R})$, la suite $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ (avec $A^0 = I_n$ la matrice identité) est une suite de Cauchy et converge vers une matrice notée e^A. Si de plus A et B dans $M_n(\mathbf{R})$ commutent, alors on a $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.

(a) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $f : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ définie par $f(t) = e^{tA}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

On calcule le taux d'acroissement de f. On a

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I_n}{h} e^{tA} = A e^{hA} e^{tA}$$

et par passage à la limite lorsque h tend vers 0, on a bien que f est dérivable. Sa dérivée est donnée par $f'(t) = Ae^{tA} = Af(t)$ qui est elle même dérivable et donc continue.

(b) Soit $f : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(s+t) = f(s)f(t)$ pour tous $s, t \in R$ et telle que $f(0)$ est inversible. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $f(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On commence par déterminer $f(0)$. On a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ et comme $f(0)$ est inversible, on en déduit $f(0) = I_n$ où $I_n \in M_n(\mathbf{R})$ est la matrice identité.

On remarque que $f(s)f(t) = f(s+t) = f(t+s) = f(t)f(s)$ donc ces matrices commutent deux à deux. Par ailleurs, on a $f(0) = f(s-s) = f(s)f(-s) = f(-s)f(s)$ donc $f(s)$ est inversible d'inverse $f(-s)$.

On montre maintenant que f est solution d'une équation différentielle. On a $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) = \frac{1}{h}(f(h) - f(0))f(t)$ et par passage à la limite quand h tend vers 0, on a $f'(t) = f'(0)f(t)$.

On pose $A = f'(0)$. On voit alors que e^{At} est solution de l'équation différentielle. Le résultat découle de l'unicité des solutions.