Introduction à l'analyse réelle – MAT361

Nicolas Perrin

École polytechnique 2022-2023

Table des matières

Introduction

Le cours MAT361 est destiné à compléter la formation des élèves de l'École polytechnique en analyse et décomposé en quatre volets successifs :

A. Topologie des espaces vectoriels normés (Chapitres 1, 2 et 3)

B. Équations différentielles (Chapitres 4 et 5)

C. Compléments d'intégration (Chapitre 6)

D. Espaces de Hilbert et applications (Chapitres 7, 8 et 9)

Les sujets ci-dessus présentent un intérêt pour d'autres enseignements (notamment en physique, en mathématiques appliquées, en mécanique). Les quatre volets s'enchaînent de la façon suivante.

On commencera par discuter la topologie dans les espaces métriques, spécialement dans les espaces vectoriels munis d'une norme. Les notions-clés seront ici celle de densité ainsi que celles de compacité et de complétude, toutes deux fortement liées à la convergence des suites et des séries. Ces idées seront mises en pratique sur des espaces de fonctions. Ceci conduira à formuler des théorèmes fondamentaux en analyse fonctionnelle. Par exemple, alors que certains énoncés permettront d'approcher des fonctions assez générales par des fonctions beaucoup plus familières (en particulier, régulières), certains autres seront à la base de la résolution des équations différentielles.

Les équations différentielles seront abordées sur plusieurs angles complémentaires. Comme application du théorème du point fixe, on donnera la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence locale de solutions. Ensuite, on discutera le prolongement des solutions. Après avoir rappelé quelques méthodes habituelles de résolution explicite, on verra sur des exemples comment décrire globalement certaines solutions dans des situations où elles ne sont pas déterminées explicitement.

La théorie de la mesure et de l'intégration aura été vue de façon parallèle dans le cours de Tronc Commun de mathématiques appliquées. Nous rappellerons, dans le vocabulaire de l'analyse, les résultats essentiels de cette théorie. L'intégrabilité au sens de Lebesgue définit de nouvelles classes d'espaces de fonctions pour lesquels les résultats du premier volet sont pertinents.

La dernière partie portera sur l'analyse des espaces de Hilbert. L'analyse de Fourier (séries de Fourier et transformation de Fourier) occupe une large place dans cette partie.

Ce texte ne prétend à aucune originalité et contient de larges emprunts à des cours précédents enseignés à l'École polytechnique. Il a également été inspiré par d'autres ouvrages (voir la bibliographie en fin de volume). Les exercices et leurs résolutions (disponibles au fur et à mesure sur le site moodle du cours) ont été en partie réalisés par les chargés de petites classes des années précédentes.

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Distances et normes

1.1.1 Distances et espaces métriques

Soit X un ensemble et $d : X \times X \to [0, +\infty[$ une application.

Définition 1.1.1. *On dit que d est une* distance *sur X si pour tous $x, y, z \in X$:*
- *Séparation : $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$;*
- *Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$;*
- *Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.*

On dit alors que (X, d) est un espace métrique.

Exemple : sur tout ensemble non vide X, on peut définir la *distance discrète* par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1.1.2 Normes et espaces vectoriels normés

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désigne le corps des réels $\mathbf{R}$ ou le corps des complexes $\mathbf{C}$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{N} : E \to [0, +\infty[$ une application.

Définition 1.1.2. *On dit que $\mathcal{N}$ est une* norme *sur E si pour tous vecteurs x, y de E et tout scalaire λ de $\mathbf{K}$:*
- *Séparation : $\mathcal{N}(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$;*
- *Homogénéité : $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$;*
- *Inégalité triangulaire : $\mathcal{N}(x + y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.*

On dit alors que $(E, \mathcal{N})$ est un espace vectoriel normé.

Lien avec ce qui précède. Un espace vectoriel normé $(E, \mathcal{N})$ est un espace métrique pour la distance d définie à partir de la norme $d : E \times E \to [0, +\infty[$, $(x, y) \mapsto d(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$.

1.1.3 Normes équivalentes

Définition 1.1.3. *On dit que deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, définies sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, sont* équivalentes *s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $x \in E$,*

$$\mathcal{N}_1(x) \leqslant C_1 \mathcal{N}_2(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(x) \leqslant C_2 \mathcal{N}_1(x).$$

Dans un cadre métrique, on dit que deux distances d_1 et d_2, définies sur X, sont *Lipschitz-équivalentes* s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$d_1(x,y) \leqslant C_1\, d_2(x,y) \qquad \text{et} \qquad d_2(x,y) \leqslant C_2\, d_1(x,y),$$

pour tous $x, y \in X$.

Si $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont des normes équivalentes sur un même $\mathbf{K}$-espace vectoriel, alors les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.

1.1.4 Normes standard sur $\mathbf{K}^N$

- Sur $\mathbf{K}^N$, les applications qui associent à $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ les nombres réels :

  $$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^N |x_i|, \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

  ou encore

  $$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,N} |x_i|$$

  sont des normes (nous allons le vérifier pour $\|\cdot\|_2$).
- Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni de différentes normes, et peut donc être vu (de plusieurs façons différentes) comme un espace métrique.
- Nous verrons par la suite que ces normes se généralisent à des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de *dimension infinie* (espaces de suites, espaces de fonctions) : faire des raisonnements de topologie sur des espaces fonctionnels est le point de départ de l'analyse avancée.

1.1.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Revenons à l'affirmation : « $\|\cdot\|_2$ est une norme » , afin de la démontrer.

Supposons pour simplifier que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Nous allons utiliser l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left|\sum_{i=1}^N x_i\, y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On la démontre en observant que la fonction polynomiale de degré 2 en $t \in \mathbf{R}$ donnée par

$$t \mapsto \sum_{i=1}^N |x_i + t\, y_i|^2 = \sum_{i=1}^N |x_i|^2 + 2\,t \sum_{i=1}^N x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^N |y_i|^2,$$

ne change pas de signe ; par conséquent, son discriminant est négatif ou nul.

1.1.6 L'application $\| \cdot \|_2$ est une norme

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 .\end{aligned}$$

Ceci démontre l'inégalité triangulaire pour $\| \cdot \|_2$.

Les deux autres axiomes de la définition d'une norme : séparation et homogénéité, sont faciles à vérifier.

1.1.7 Normes matricielles standard

Les espaces de matrices (ou d'applications linéaires) sont des exemples d'espaces vectoriels, sur lesquels les normes précédentes sont bien définies.

Plus précisément, pour tout entier $N \geqslant 1$, l'espace vectoriel $M_N(\mathbf{K})$ des matrices $N \times N$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ admet les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ définies par :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j=1,\ldots,N} |a_{ij}|,$$

où A désigne la matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$.

1.1.8 Normes matricielles subordonnées

Dans le cas d'applications linéaires ou de matrices, il existe un autre procédé de fabrication de normes, à partir d'une norme pré-existante sur l'espace vectoriel sous-jacent.

Plus précisément : pour tout entier $N \geqslant 1$, étant donnée une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{K}^N$, on peut définir sur $M_N(\mathbf{K})$ la *norme matricielle subordonnée à* $\mathcal{N}$ par

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbf{K}^N \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{N}(Ax)}{\mathcal{N}(x)} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{K}^N \\ \mathcal{N}(x)=1}} \mathcal{N}(Ax)$$

Remarque : Les bornes supérieures ci-dessus sont bien définies car en *dimension finie les applications linéaires sont automatiquement continues*. Ce point sera vu dans le chapitre suivant. En dimension quelconque, chercher à donner un sens à la notion de norme subordonnée pour des applications linéaires entre espaces vectoriels normés conduit à introduire la condition de continuité pour ces applications.

1.1.9 Normes sur des espaces de suites

Par analogie avec le cas de dimension finie, on définit des normes sur différents espaces de suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.

— Sur $\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$
— Sur $\ell^1(\mathbf{N};\mathbf{K})$, l'espace des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série de terme général $|x_n|$ converge, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|.$$
— Sur $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{K})$, l'espace des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour lesquelles la série de terme général $|x_n|^2$ converge, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.1.10 Normes sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$

Sur $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{K})$, on définit les normes
$$\|v\|_1 := \int_0^1 |v(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad \|v\|_2 := \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$
et
$$\|v\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |v(x)| \quad \text{(norme de la convergence uniforme).}$$

Preuve. Pour vérifier que $\|\cdot\|_2$ est une norme, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'exprime cette fois-ci sous la forme
$$\left|\int_0^1 u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_0^1 |u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Ensuite, la démonstration est identique à celle pour les normes standard sur $\mathbf{K}^N$.

1.2 Topologie des espaces métriques

1.2.1 Boules ouvertes et boules fermées

Définition 1.2.1. *Si (X,d) est un espace métrique, pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$, on note*
$$B(x,r) := \{y \in X \,:\, d(x,y) < r\} \quad \text{la boule ouverte,}$$
et
$$B_f(x,r) := \{y \in X \,:\, d(x,y) \leqslant r\} \quad \text{la boule fermée,}$$
de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$.

1.2.2 Définition des ouverts

Définition 1.2.2. *On dit que $U \subset X$ est un* ouvert *de (X, d) si*

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset U.$$

On appelle topologie associée à la métrique *d, l'ensemble de parties de X constitué des ouverts de X.*

- Les parties $\varnothing$, X sont des ouverts de (X, d).
- Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, la boule $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d). En effet, pour tout $y \in B(x, r)$, il découle de l'inégalité triangulaire que $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$.

1.2.3 Notion de voisinage

Définition 1.2.3. *On appelle* voisinage *d'un point $x \in X$ (ou d'un ensemble $Y \subset X$) tout ensemble V qui contient un ouvert de (X, d) qui lui-même contient le point x (ou l'ensemble Y).*

Autrement dit, un voisinage d'un point $x \in X$ est une partie de X qui contient une boule ouverte centrée en x.

Exemple : Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.

1.2.4 Réunions quelconques d'ouverts

Proposition 1.2.1. *Une* réunion quelconque *d'ouverts est un ouvert de (X, d).*

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de (X, d) et $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

Il existe $j \in I$ tel que $x \in O_j$, qui est un ouvert. Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i,$$

ce qui montre que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.

1.2.5 Intersections finies d'ouverts

Proposition 1.2.2. *Une* intersection finie *d'ouverts est un ouvert de (X, d).*

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts de (X, d) et $x \in \bigcap_{i \in I} O_i$.

Pour tout $j \in I$, il existe $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j$. Notons $r := \inf_{i \in I} r_i$. La famille I est finie, donc $r > 0$.

Par construction $B(x, r) \subset O_i$ pour tout $i \in I$. Donc

$$B(x, r) \subset \bigcap_{i \in I} O_i,$$

ce qui montre que $\bigcap_{i \in I} O_i$ est un ouvert.

1.2.6 Définition et propriétés des fermés

Définition 1.2.4. *On dit que $F \subset X$ est un* fermé *de (X,d) si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de (X,d).*

Propriétés des fermés :

— Les parties $\varnothing$ et X sont des fermés de (X,d).

— Une *réunion finie* de fermés est un fermé de (X,d).

— Une *intersection quelconque* de fermés est un fermé de (X,d).

— Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, la boule fermée $B_f(x,r)$ est un fermé de (X,d) : ceci se voit en utilisant l'inégalité triangulaire dans le complémentaire de la boule.

1.2.7 Intérieur, adhérence, densité

Soit (X,d) un espace métrique et soit Y une partie de X.

Définition 1.2.5. L'intérieur *de Y, noté $\mathring{Y}$, est le plus grand ouvert contenu dans Y, soit : $\mathring{Y} := \bigcup\limits_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset Y}} U$.*

L'adhérence *de Y, notée $\overline{Y}$, est le plus petit fermé contenant Y, soit : $\overline{Y} := \bigcap\limits_{\substack{F \text{ fermé} \\ Y \subset F}} F$.*

On dit que Y est dense *dans X si son adhérence est X.*

Exemple : Dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ on vérifie que

$$\overline{\mathbf{R} \setminus \{0\}} = \mathbf{R}, \qquad \overline{\{x\}} = \{x\}, \qquad \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}.$$

$$\overbrace{\mathbf{R} \setminus \{0\}}^{\circ} = \mathbf{R} \setminus \{0\}, \qquad \overbrace{\{x\}}^{\circ} = \varnothing, \qquad \mathring{\mathbf{Q}} = \varnothing.$$

1.2.8 Topologie usuelle sur un intervalle réel

Sur l'ensemble $[0,1[$ muni de la distance $d(x,y) = |y-x|$, on vérifie, pour $a, b \in]0,1[$ tels que $a < b$, les propriétés suivantes :

— les ensembles $[0,a[$, $]a,b[$ et $[0,1[$ sont des ouverts ;

— les ensembles $[0,a]$, $[a,b]$, $[0,1[$ et $\{a\}$ sont des fermés ;

— l'ensemble $[a,b[$ n'est ni un ouvert, ni un fermé.

C'est un exemple de *topologie induite* : les ouverts de $([0,1[, d)$ sont les *traces* des ouverts de $(\mathbf{R}, d)$, c'est-à-dire que $V \subset [0,1[$ est un ouvert de $([0,1[, d)$ si et seulement s'il existe $U \subset \mathbf{R}$ ouvert de $(\mathbf{R}, d)$ tel que $V = U \cap [0,1[$.

1.3 Suites dans un espace métrique

1.3.1 Suites convergentes

Définition 1.3.1. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *d'un espace métrique* (X,d) *est* convergente, *de limite* $x \in X$, *si* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Dans un espace métrique, la limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Si une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans (X,d) vers x, on notera

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{ou} \qquad x_n \to x.$$

En général, s'il n'y a pas d'ambiguïté, la distance utilisée n'est pas mentionnée.

1.3.2 Caractérisation séquentielle des fermés

Proposition 1.3.1. *Un sous-ensemble* $F \subset X$ *est fermé si, et seulement si, la limite de toute suite d'éléments de* F*, qui converge dans* X*, appartient à* F.

Preuve. Supposons que F est un fermé et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in X$.

Supposons que $x \notin F$. L'ensemble $X \setminus F$ est un ouvert. Donc, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset X \setminus F$. Or, pour tout n assez grand, $d(x, x_n) < r$, donc

$$x_n \in B(x,r) \subset X \setminus F,$$

ce qui contredit le fait que $x_n \in F$. Conclusion, $x \in F$.

Réciproquement, supposons que la limite de toute suite d'éléments de F qui converge dans X, appartient à F et prouvons que F est fermé.

Supposons le contraire. Alors $X \setminus F$ n'est pas un ouvert et il existe $x \in X \setminus F$ tel que, pour tout $r > 0$,

$$B(x,r) \cap F \neq \varnothing.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, choisissons $x_n \in F \cap B(x, 1/n)$.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers x et $x \notin F$. Ce qui constitue une contradiction.

1.3.3 Suites et adhérence

Proposition 1.3.2. *L'adhérence d'un ensemble* $Y \subset X$ *dans* (X,d) *est égale à l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de* Y*. Ainsi,* Y *est dense dans* X *si tout élément de* X *est limite d'une suite de points de* Y.

Preuve. On note $\tilde{Y}$ l'ensemble des limites de suites d'éléments de Y ; déjà $Y \subset \tilde{Y}$.

Soit $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ et F un fermé qui contient Y. Il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de Y qui converge vers $\tilde{y}$, donc $\tilde{y} \in F$. On conclut que $\tilde{Y} \subset F$ et par conséquent que $\tilde{Y} \subset \overline{Y}$.

Montrons que $\tilde{Y}$ est un fermé, ce qui montrera que $\overline{Y} \subset \tilde{Y}$.

Soit $(\tilde{y}_n)_{n\geqslant 1}$, une suite d'éléments de $\tilde{Y}$ qui converge vers $\tilde{y} \in X$. Pour tout $n \geqslant 1$, le point $\tilde{y}_n \in \tilde{Y}$ est la limite d'une suite d'éléments de Y, donc il existe $y_n \in Y$ tel que $d(y_n, \tilde{y}_n) \leqslant 1/n$. La suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$, qui est une suite d'éléments de Y, converge vers $\tilde{y}$. Par définition de $\tilde{Y}$, ceci prouve que $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, et donc que $\tilde{Y}$ est un fermé.

1.3.4 Voisinages des points adhérents

Proposition 1.3.3. *L'adhérence d'un ensemble $Y \subset X$ dans (X, d) est égale à l'ensemble des $x \in X$ tels que, $Y \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Preuve. Soit $\hat{Y}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing$, pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \hat{Y}$. Pour tout $n \geqslant 1$, choisissons $x_n \in Y \cap B(x, 1/n)$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de Y qui converge vers x, donc $x \in \overline{Y}$.

Inversement, tout élément $x \in \overline{Y}$ est la limite d'une suite d'éléments de Y. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(x, \varepsilon)$ contient des éléments de cette suite, donc des éléments de Y. Donc $x \in \hat{Y}$.

1.3.5 Valeurs d'adhérence et suites extraites

Définition 1.3.2. *Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de (X, d). Un point $a \in X$ est une* valeur d'adhérence *de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si a est limite d'une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.*

Rappel : On dit que $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une *suite extraite* (ou une *sous-suite*) de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, s'il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, strictement croissante, telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exemple : Dans $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle, la suite

$$((-1)^n)_{n\geqslant 0}$$

ne converge pas mais admet deux valeurs d'adhérence.

1.4 Applications continues

1.4.1 Définition et caractérisation topologique de la continuité

Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques et soit $f : X \to Y$ une application.

Définition 1.4.1. *On dit que f est* continue en $x_0 \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X,\ d(x_0, x) < \delta \implies d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur X *si f est continue en tout point de X.*

Proposition 1.4.1. *On a équivalence entre :*

- *L'application f est continue sur X.*
- *L'image réciproque par f de* tout ouvert *de (Y, d') est un ouvert de (X, d).*
- *L'image réciproque par f de* tout fermé *de (Y, d') est un fermé de (X, d).*

Preuve. Supposons que f est continue sur X et donnons-nous un ouvert U de Y.

Soit $x \in f^{-1}(U)$. Par définition, $y = f(x) \in U$ qui est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(y, \varepsilon) \subset U$. La continuité de f en x nous assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(y, \varepsilon) \subset U,$$

ce qui montre que

$$B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(U).$$

Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Inversement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'image réciproque de $B_Y(f(x), \varepsilon)$ par f est un ouvert de X qui contient x, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)).$$

Autrement dit, l'image de $B_X(x, \delta)$ par f est incluse dans $B_Y(f(x), \varepsilon)$, ce qui démontre la continuité de f au point x.

L'équivalence entre les deux dernières propriétés est une conséquence du fait que l'image réciproque du complémentaire d'une partie A dans Y est égale au complémentaire dans X de l'image réciproque de A, i.e.

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

1.4.2 Stabilités de la continuité

- La composée d'applications continues est aussi une application continue : si $f : X \to Y$ est continue au point $x \in X$ et si $g : Y \to Z$ est continue au point $f(x) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue au point x.
- Si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont deux applications continues en $x \in X$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ et si $\alpha, \beta : X \to \mathbf{K}$ sont deux fonctions continues en $x \in X$, alors $\alpha\, f + \beta\, g$ est continue en $x \in X$.

1.4.3 Continuité uniforme

Définition 1.4.2. *Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite* uniformément continue sur X *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, \forall x, x' \in X,\, d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Remarque. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ en vertu de l'inégalité

$$\text{pour tous } x, x' > 0, \quad \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|x' - x|},$$

La fonction continue $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

1.4.4 Applications lipschitziennes

Définition 1.4.3. *On dit qu'une application $f : X \to Y$ définie entre deux espaces métriques, est* lipschitzienne *de rapport $k > 0$ (ou encore k-lipschitzienne) si, pour tous $x, y \in X$,*

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y).$$

Une application lipschitzienne est uniformément continue car la distance entre deux points images est dans ce cas majorée par une fonction linéaire de la distance des points à la source.

1.4.5 La fonction distance est 1-lipschitzienne

Soit (X, d) un espace métrique et $x_0 \in X$. On a

$$d(x, x_0) - d(y, x_0) \leqslant d(x, y),$$

et en échangeant le rôle de x et de y, on conclut que

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leqslant d(x, y).$$

Donc l'application $d(\cdot, x_0) : X \to \mathbf{R}$ est 1-lipschitzienne.

Cas particulier : dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, pour tous $x, y \in E$,

$$\big| \|y\| - \|x\| \big| \leqslant \|y - x\|.$$

1.4.6 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 1.4.2. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $x \in X$. Une application $f : X \to Y$ est continue au point x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ qui converge vers x dans X, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x).$$

Preuve. Supposons que f est continue en x et soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers x.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $d(x_n, x) < \delta$, et donc pour de tels n, $d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. On a bien montré que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$.

Supposons que f n'est pas continue en x.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $y \in X$ tel que

$$d(y, x) < \delta \qquad \text{et} \qquad d'(f(y), f(x)) \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\delta = 1/n$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant

$$d(x_n, x) < 1/n \qquad \text{et} \qquad d'(f(x_n), f(x)) \geqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers x et la suite $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ ne converge pas vers $f(x)$.

1.4.7 Applications linéaires continues

Proposition 1.4.3. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $L : E \to F$ une application linéaire. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

— *l'application linéaire L est continue sur E ;*

— *l'application linéaire L est continue en 0 ;*

— *il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$,*

$$\|L(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E.$$

Remarque. Le dernier critère est à rapprocher de la définition de norme subordonnée.

Preuve. On suppose L continue en 0 (ce qui est l'assertion la plus faible des trois). Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait :

$$\|x\|_E \leqslant \delta \implies \|L(x)\|_F \leqslant 1.$$

Par homogénéité, si $x \neq 0$ on a :

$$\|L(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\delta} \cdot \left\| L\left(\frac{\delta}{\|x\|_E} x\right)\right\|_F \leqslant \frac{1}{\delta} \cdot \|x\|_E.$$

Ensuite, L étant linéaire, on peut écrire :

$$\|L(x) - L(y)\|_F = \|L(x-y)\|_F \leqslant \frac{1}{\delta} \cdot \|x - y\|_E,$$

ce qui montre que L est lipschitzienne.

1.4.8 Espaces des applications linéaires continues

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires *continues* de E dans F.

Pour tout $L \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F.$$

En particulier, pour tout $x \in E$,

$$\|L\,(x)\|_F \leqslant \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,\|x\|_E.$$

On vérifie que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

1.5 Exercices du Chapitre 1

Exercice 1 (Définitions de distance et de fermé)**.** (a) Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que les applications $\delta_1 : (x,y) \in E \times E \to \delta_1(x,y) = \log(1 + d(x,y))$ et $\delta_2 : (x,y) \in E \times E \to \delta_2(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ sont des distances sur E.

Indication : on pourra au préalable vérifier les inégalités suivantes : pour tout $a, b \geq 0$, $\log(1+a+b) \leq \log(1+a) + \log(1+b)$ et $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) Sur $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, l'ensemble suivant est-il fermé

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \{1,2,\ldots\}\right\}?$$

Exercice 2 (Prolongement des égalités)**.** Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique (E,d) dans $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle.

(a) Montrer que l'ensemble Z des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E.

(b) Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout x d'un sous-ensemble B dense dans E, alors $f = g$ sur E.

Exercice 3 (Forme linéaire continue sur un espace de fonctions)**.** On considère $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme. Montrer que l'application $L : f \in C([0,1]) \to f(0) \in (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est une forme linéaire continue.

Exercice 4 (Normes de matrices)**.** Sur $M_N(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on définit l'application $\|\cdot\|$ par :

$$\|A\| := \max_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \quad \text{où } A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}.$$

(a) Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $M_N(\mathbf{K})$. Prouver que pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

(b) Prouver que la norme $\|\cdot\|$ ci-dessus est subordonnée à la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$.

(c) Retrouver le résultat de la question (a).

(d) Quelle est la norme sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$?

Exercice 5 (Application distance à une partie non vide)**.** Soient (X,d) un espace métrique et Y une partie non vide de X.

(a) Prouver que l'application $d_Y : X \to \mathbf{R}$ définie par :

$$d_Y(x) := \inf_{y\in Y} d(x,y),$$

est 1-lipschitzienne.

(b) Prouver que x appartient à l'adhérence $\overline{Y}$ de Y si, et seulement si, $d_Y(x) = 0$.

(c) Prouver que les fermés de X sont les ensembles de zéros des fonctions continues sur X à valeurs réelles.

Exercice 6 (Comparaison de quelques normes sur l'espace des fonctions continues ou C^1)**.**

(a) Sur l'espace $C([0,1],\mathbf{R})$, montrer que les applications suivantes sont des normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(b) Les deux normes ci-dessus sont-elles équivalentes ?

(c) Sur l'espace $C^1([0,1],\mathbf{R})$, établir quelques comparaisons parmi les normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty,\ N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f\|_1,\ N_3(f) = \|f'\|_1 + \|f\|_\infty,\ N_4(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Exercice 7 (De façon générale, l'union infinie de fermés n'est pas fermée. Toutefois, ce résultat est vrai moyennant une hypothèse supplémentaire (cas de $\mathbf{R}$))**.** Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on se donne un fermé F_n de $\mathbf{R}$ inclus dans $\mathbf{R} \setminus [-u_n, u_n]$. Montrer que $\cup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est fermé dans $\mathbf{R}$.

Exercice 8 (Variante plus générale de l'exercice 2)**.** Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique (E,d) dans un autre (F,d'). Démontrer que l'ensemble A des points x tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E.

Exercice 9 (Exercice un peu abstrait de topologie des espaces métriques. La question (b) est pertinente en théorie de l'intégration)**.** Soit F un fermé quelconque d'un espace métrique (X,d). À chaque entier positif n, on fait correspondre l'ouvert O_n défini par $O_n = \cup_{x\in F} B_{1/n}(x)$, où $B_{1/n}(x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon $1/n$.

(a) Montrer que $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} O_n$. Démontrer l'inclusion réciproque. On montrera que si $y \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$ alors, pour chaque entier n, il existe $x_n \in F$ tel que $x_n \in B_{1/n}(y)$.

(b) En déduire que tout fermé d'un espace métrique est l'intersection dénombrable d'une famille d'ouverts et que tout ouvert est l'union dénombrable d'une famille de fermés.

Exercice 10 (Utilisation de la partie entière pour un exercice de topologie de $\mathbf{R}$)**.** Let but de l'exercice est de montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$.

(a) Remarquer que D est stable par addition et multiplication.

(b) Posons $u = \sqrt{2} - 1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$. En déduire le résultat.

Exercice 11 (Exercice de topologie de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$)**.** (a) Rappeler la définition des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble borné non vide de nombres réels. Soient A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbf{R}$. Calculer ou comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$, les nombres suivants (s'ils existent) :

$$\sup(A+B), \quad \sup(A\cup B), \quad \sup(A\cap B), \quad \inf(A\cup B), \quad \inf(A\cap B).$$

(b) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$. Dans $\mathbf{R}$, déterminer $d(0, \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$ et $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q})$. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x,y,z)$ est un point de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire (a,b,c).

(c) Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} \|a-b\|$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$ et B une asymptote.

(d) On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} \|a-b\|$, le *diamètre* de A. Que valent les diamètres $\mathrm{diam}(]0,1[\cap \mathbf{Q})$ et $\mathrm{diam}([0,1] \cap \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$?

Exercice 12 (*Application de l'exercice 5)**.** (a) Soient $A, B \subset X$. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

(b) (Lemme d'Urysohn) Soient A et B deux fermés disjoints de X. Prouver qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.

Exercice 13 (*Exercice de topologie dans un espace de suites)**.** On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, et C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, munis de la métrique d définie par $d(x,y) = \sup_{n\geqslant 0} |x_n - y_n|$ où l'on note $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 0}$.

(a) Montrer que C_0 est fermé dans ℓ^∞.

(b) Montrer que l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang est dense dans C_0 mais n'est pas dense dans ℓ^∞.

Exercice 14 (*Un deuxième exercice de topologie dans un espace de suites.)**.** Soit C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère la forme linéaire $\varphi : C_0 \to \mathbf{R}$ définie par

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \varphi((u_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

(a) L'application φ est-elle continue ?

(b) Calculer sa norme.

(c) Cette norme est-elle atteinte sur C_0 ?

Exercice 15 (*Exercice subtil sur les formes linéaires "positives")**.** Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$, et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit φ une forme linéaire sur E qui prend des valeurs positives sur toute fonction dont les valeurs sont toutes positives. Prouver que φ est une forme linéaire continue.

Chapitre 2

Compacité, connexité, complétude

2.1 Compacité

2.1.1 Espaces métriques compacts

Définition 2.1.1. *Un espace métrique* (X, d) *est* compact *si toute suite de points de* X *a au moins une valeur d'adhérence.*

Remarque : Une partie Y d'un espace métrique (X, d) est dite *compacte* si l'espace métrique (Y, d) est compact (ici, d désigne en fait la restriction de d à $Y \times Y$, dont on vérifie aisément qu'elle est une distance sur Y).

À la différence de la propriété d'être un ouvert (ou un fermé) qui dépend de l'espace métrique ambiant X, la propriété de compacité est *intrinsèque*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de (Y, d).

2.1.2 Images continues d'espaces compacts

Proposition 2.1.1. *Soient* (X_1, d_1), (X_2, d_2) *des espaces métriques. Soit* $f : X_1 \to X_2$ *une application continue. Si* X_1 *est compact, alors* $f(X_1)$, l'image de X_1 par f, *est une partie compacte de* X_2.

Preuve. Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de $f(X_1)$: pour tout $n \geqslant 0$, il existe $x_n \in X_1$ tel que $y_n = f(x_n)$. Comme X_1 est compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ qui converge vers une limite $a \in X_1$. Comme f est continue, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant}$ converge vers $f(a) \in f(X_1)$.

On a bien montré la propriété de compacité pour $f(X_1)$.

2.1.3 Parties fermées et compacité

Proposition 2.1.2. *Soit* Y *une partie d'un espace métrique* (X, d).

— *Si* (Y, d) *est compacte, alors* Y *est fermée dans* (X, d).

— *Si* (X, d) *est compact et* Y *est fermée dans* (X, d), *alors* (Y, d) *est compacte.*

Preuve. On utilise la *caractérisation séquentielle des fermés.*

Considérons une suite de points de Y qui converge dans X. Si Y est compacte, cette suite a une valeur d'adhérence dans Y. Ainsi, sa limite est dans Y, ce qui prouve que Y est fermée.

Pour la deuxième propriété, on suppose que X est compact et Y est fermée dans X. Soit $(y_n)_{n\geqslant}$ une suite de points de Y. Comme X est compact, cette suite possède une suite extraite qui converge dans X. Comme Y est fermée, cette suite extraite converge dans Y, ce qui prouve que Y est compacte.

2.1.4 Produit d'espaces métriques compacts

Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces métriques. On munit l'espace produit $X_1 \times X_2$ de la distance somme :

$$D_s\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

ou bien de la distance produit (Lipschitz-équivalente à la précédente) :

$$D_p\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Proposition 2.1.3. *Le* produit $X_1 \times X_2$ *de deux espaces métriques compacts* (X_1, d_1) *et* (X_2, d_2)*, muni de la distance produit ou de la distance somme, est un espace métrique compact.*

Preuve. Soit $((x_1(n), x_2(n))_{n\geqslant 0}$ une suite dans $X_1 \times X_2$.

- La compacité de (X_1, d_1) permet d'extraire une sous-suite $(x_1(\varphi(n)))_{n\geqslant 0}$ de la suite $(x_1(n))_{n\geqslant 0}$, qui converge vers x_1 dans X_1.
- La compacité de (X_2, d_2) permet d'extraire de la suite $(x_2(\varphi(n)))_{n\geqslant 0}$, une sous-suite $(x_2(\varphi(\psi(n))))_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x_2 dans X_2.

En particulier, (x_1, x_2) est une valeur d'adhérence de la suite $((x_1(n), x_2(n)))_{n\geqslant 0}$.

Remarque : Par récurrence, la propriété s'entend au produit de k espaces métriques compacts, pour tout $k \geqslant 2$.

2.1.5 Compacité de $[0, 1]$

Théorème 2.1.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Muni de la topologie usuelle,* l'intervalle $[0, 1]$ est compact.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $[0, 1]$. On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et ensuite par récurrence sur $n \geq 0$:

- Si l'ensemble des $k \geq 0$ tels que $a_n \leq x_k \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ est infini, alors on choisit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.
- Sinon, on choisit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$.

On observe que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont *adjacentes*. En effet, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et on a $b_n - a_n = 2^{-n}$.

Par le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une même limite $x \in [0, 1]$.

Il nous reste à montrer que x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Par construction des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$, l'ensemble des indices k tels que $a_n \leqslant x_k \leqslant b_n$ est infini. Par récurrence sur n, on peut donc construire une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, strictement croissante, telle que pour tout $n \geqslant 0$, $a_n \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b_n$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que $x - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant x + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Ainsi, pour de tels n, $x - \varepsilon \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant x + \varepsilon$, ce qui prouve la convergence de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ vers x.

2.1.6 Compacts de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$

Proposition 2.1.4. *On munit $\mathbf{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Une partie de $\mathbf{R}^N$ est compacte si, et seulement si, elle est* fermée et bornée.

Remarque : Une partie Y d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est *bornée*, s'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$, $\|y\| \leq R$.

Preuve. Soit Y une partie compacte de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Alors, on sait que Y est fermée par les résultats précédents.

Si Y n'était pas bornée, on pourrait construire une suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de Y telle que $\|y_n\| \geqslant n$. Or une telle suite ne peut pas admettre de sous-suite convergente dans $\mathbf{R}^N$.

Réciproquement, commençons par remarquer que pour tout $R > 0$ l'intervalle $[-R, R]$ est compact, comme image de $[0, 1]$ par une fonction affine. De plus, le pavé $[-R, R]^N$ est un compact comme produit d'espaces compacts.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, une partie Y de $\mathbf{R}^N$ est bornée si elle est incluse dans le pavé $[-R, R]^N$, pour un certain $R > 0$. Si de plus Y est fermée dans $\mathbf{R}^N$, c'est aussi une partie fermée du compact $[-R, R]^N$, et donc Y est compacte.

2.1.7 Bornes supérieure et inférieure d'une fonction continue

Théorème 2.1.2. *Une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un espace métrique compact (X, d), est* bornée et atteint ses bornes*, c'est-à-dire qu'il existe a, b dans X tels que, pour tout $x \in X$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Preuve. L'image d'un compact X par une application continue est une partie compacte de $\mathbf{R}$, donc une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}$.

En particulier, l'image étant fermée, $\inf_X f$ et $\sup_X f$ appartiennent à l'image de X par f.

2.1.8 Équivalence des normes sur $\mathbf{R}^N$

Théorème 2.1.3. *Toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes.*

Preuve. Il suffit de montrer que toute norme sur $\mathbf{R}^N$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $(e_1, \ldots, e_N)$ la base canonique de $\mathbf{R}^N$ et $S := \{x \in \mathbf{R}^N : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbf{R}^N$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\mathcal{N}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i| \mathcal{N}(e_i) \leqslant C\|x\|_\infty,$$

avec $C = \sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i)$. Ainsi, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^N$,

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leqslant \mathcal{N}(x-y) \leqslant C\|x-y\|_\infty,$$

ce qui prouve que $\mathcal{N} : (\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est C-lipschitzienne donc continue.

Comme image réciproque de $\{1\}$, fermé de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ par l'application continue $\|\cdot\|_\infty$, S est une partie fermée de $\mathbf{R}^N$. Par définition, S est aussi une partie bornée, donc c'est une partie compacte.

Par le théorème qui précède, $\mathcal{N}$ atteint ses bornes sur S : il existe donc $a \in S$ tel que pour tout $x \in S$, $\mathcal{N}(x) \geqslant \mathcal{N}(a) > 0$.

Pour tout x non nul dans $\mathbf{R}^N$, par homogénéité de la norme et $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, on a

$$\mathcal{N}(x) = \|x\|_\infty \mathcal{N}\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geqslant \mathcal{N}(a)\|x\|_\infty.$$

On a bien prouvé que les normes $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

2.1.9 Les parties compactes de $\mathbf{R}^N$

On peut vérifier de façon générale que *deux normes équivalentes donnent lieu à la même topologie* : cela signifie que sur un espace vectoriel normé E, muni de deux normes *équivalentes* $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, $Y \subset E$ est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_1)$, si et seulement si, c'est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$.

En outre, par définition, les parties bornées dans $\mathbf{R}^N$ sont les mêmes pour deux normes équivalentes.

Par conséquent, l'équivalence de toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ implique que le fait d'être fermé ou compact ne dépend pas non plus de la norme choisie.

Corollaire 2.1.1. *Pour toute norme, les parties compactes de $\mathbf{R}^N$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbf{R}^N$.*

2.1.10 Équivalence des normes et parties compactes en dimension finie

Ces résultats se généralisent de la façon suivante :

— *sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes* ;

— *dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.* (Il n'est pas utile de préciser la norme utilisée.)

Remarque. *Ces propriétés ne sont pas vraies en dimension infinie.* Par exemple, on vérifie que la boule unité fermée de $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit la suite $\mathbf{x}^n := (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, avec 1 seule valeur non nulle, pour l'indice n exactement. On a alors :

$$\|\mathbf{x}^n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_\infty = 1 \text{ si } n \neq m.$$

La suite $(\mathbf{x}^n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de sous-suite convergente.

2.1.11 Continuité automatique d'applications linéaires

Proposition 2.1.5. *Si E est un espace vectoriel normé de* dimension finie *et F est un espace vectoriel normé, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Preuve. Soit $(e_1,\ldots,e_N)$ une base de E. On définit la norme suivante sur E : pour $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$,

$$\|x\|_E := \sup_{i=1,\ldots,N} |x_i|.$$

L'inégalité triangulaire et la linéarité de L impliquent :

$$\|L(x)\|_F \leqslant \sum_{i=1}^N |x_i|\,\|L(e_i)\|_F \leqslant \left(\sum_{i=1}^N \|L(e_i)\|_F\right)\|x\|_E,$$

d'où la continuité de L.

2.1.12 Compacité et recouvrements

Définition 2.1.2. *Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble X est un* recouvrement *de X si $\cup_{i\in I} A_i = X$.*

Un sous-recouvrement *est une sous-famille $(A_j)_{j\in J}$, $J\subset I$ telle que $\cup_{j\in J} A_j = X$.*

Théorème 2.1.4 (La preuve est laissée en exercice)**.** *Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par parties* ouvertes *d'un espace métrique* compact *(X,d). Alors, il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'un des U_i.*

Proposition 2.1.6. *Soient (X,d) un espace métrique compact, et $r > 0$. Il existe un recouvrement* fini *de X par des boules ouvertes de rayon r.*

Preuve. Sinon, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de X tel que $d(x_n,x_m) \geqslant r$ pour tout $n \neq m$. Une telle suite ne possède pas de valeur d'adhérence.

Théorème 2.1.5. *Un espace métrique (X,d) est compact si, et seulement si tout recouvrement de X par* parties ouvertes *possède un sous-recouvrement* fini.

Preuve. Soit (X,d) un espace métrique compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par parties ouvertes de X. Soit $r > 0$ donné par le théorème précédent et $B_1,\ldots,B_K$ des boules de rayon r telles que $X = \cup_{k=1}^K B_k$. Chacune des boules B_k étant incluse dans l'un des ouverts (U_{i_k}), on a $X = \cup_{k=1}^K U_{i_k}$.

Inversement, si (X,d) n'est pas compact, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans X sans valeur d'adhérence. Cela signifie que pour tout $x \in X$, il existe une boule ouverte B_x centrée en x et ne contenant au plus qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. La famille $(B_x)_{x\in X}$ est un recouvrement de X par parties ouvertes, mais l'union de toute sous-famille finie ne peut contenir qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

2.1.13 Théorème de Heine

Théorème 2.1.6. *Soit f une application continue d'un espace métrique* compact (X_1,d_1) *dans un espace métrique (X_2,d_2). Alors, f est* uniformément continue.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe, en tout point $x \in X_1$, une boule ouverte B_x centrée en x, dont l'image est contenue dans $B(f(x),\varepsilon/2)$.

On a $X_1 = \cup_{x\in X_1} B_x$, et X_1 étant compact, par un résultat précédent, il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r est contenue dans l'une des boules B_x.

Cela entraîne que si $y,z \in X_1$ vérifient $d_1(y,z) < r$, alors par l'inégalité triangulaire $d_2(f(y),f(z)) < \varepsilon$. Ainsi, f est uniformément continue.

2.2 Connexité

2.2.1 Notion de connexité

Définition 2.2.1. *On dit qu'un espace métrique (X,d) est* connexe *s'il n'existe pas de partie de X autre que la partie vide $\varnothing$ et la partie totale X qui soit à la fois ouverte et fermée.*

Remarque : Une partie Y d'un espace métrique (X,d) est *connexe* si l'espace métrique (Y,d) est connexe. Comme la compacité, la connexité est une propriété intrinsèque.

Méthodologie : Supposons qu'on ait à vérifier une certaine propriété, disons (P), pour tous les points d'un espace métrique connexe X. Un raisonnement de connexité consiste à montrer que l'ensemble des points de X qui satisfont (P) est à la fois non vide, ouvert et fermé.

Exemple. On peut prouver de cette façon que dans tout *ouvert connexe non vide* de $\mathbf{R}^N$, deux points sont toujours reliés par une ligne polygonale par morceaux.

2.2.2 Connexité et applications continues

Proposition 2.2.1. *Un espace métrique (X,d) est connexe si, et seulement si, toute application continue sur X à valeurs dans $\{0,1\}$ est* constante.

La preuve est laissée en exercice.

Proposition 2.2.2. *Soient (X_1,d_1) et (X_2,d_2) deux espaces métriques. On suppose que (X_1,d_1) est connexe. Soit $f : X_1 \to X_2$ une application continue. Alors, $f(X_1)$ est connexe.*

Preuve. Si $f(X_1)$ n'est pas connexe, il existe une application continue non constante g de $f(X_1)$ dans $\{0,1\}$. L'application composée $g \circ f : X_1 \to \{0,1\}$ est continue et non constante. Ainsi, X_1 n'est pas connexe.

2.2.3 Parties connexes de R et théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 2.2.3. *Les parties connexes de* $\mathbf{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbf{R}$.

La preuve est laissée en exercice.

Corollaire 2.2.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique* connexe *et* $f : X \to \mathbf{R}$ *une application continue. Alors,* $f(X)$ *est un intervalle. En particulier, si* a, b *sont des points de* X, *et* z *est un nombre réel tel que* $f(a) \leqslant z \leqslant f(b)$, *alors il existe un point* c *de* X *tel que* $f(c) = z$.

2.2.4 Notion de connexité par arcs

Définition 2.2.2. *Un espace métrique* (X, d) *est dit* connexe par arcs *si pour tout* $x, y \in X$, *il existe une application continue* $\gamma : [0, 1] \to X$ *telle que* $\gamma(0) = x$ *et* $\gamma(1) = y$, *appelée* chemin de x à y.

Proposition 2.2.4. *Si* (X, d) *est connexe par arcs alors* (X, d) *est connexe.*

Preuve. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application continue. On considère $x, y \in X$ arbitraires. D'après l'hypothèse, x et y sont reliés par un chemin γ. Le théorème des valeurs intermédiaires (ou la connexité de l'intervalle $[0, 1]$) impose à l'application continue $f \circ \gamma : [0, 1] \to \{0, 1\}$ de prendre la même valeur en 0 et 1. Donc $f(x) = f(y)$ et f est constante.

Remarque : Toute partie ouverte connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

2.3 Complétude et espaces de Banach

2.3.1 Notion de suite de Cauchy

Définition 2.3.1. *Une suite* $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *d'un espace métrique* (X, d) *est appelée* suite de Cauchy *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \textit{tel que, } \forall n, m \geqslant n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remarques.

— Toute suite de Cauchy est bornée.

— Soient d_1 et d_2 deux distances Lipschitz-équivalentes sur X. Une suite dans X est de Cauchy pour la distance d_1 si, et seulement si, elle est de Cauchy pour la distance d_2.

— L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.

2.3.2 Les suites convergentes sont de Cauchy

Proposition 2.3.1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers x dans un espace métrique (X,d).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy.

2.3.3 Suites de Cauchy et valeur d'adhérence

Proposition 2.3.2. *Une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est convergente.*

Preuve. Si la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x. Donc, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2.$$

Alors, pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite converge.

2.3.4 Notion d'espace métrique complet

Définition 2.3.2. *Un espace métrique (X,d) est dit* complet *si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

L'intérêt des espaces métriques complets et que l'on peut vérifier la convergence d'une suite sans avoir à connaître *a priori* sa limite.

Exemples.

— Un espace métrique compact est complet.

— $(]0,1], |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet.

— $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet. On peut définir $\mathbf{R}$ comme étant le « complété » de $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$.

Remarque. La complétude est une propriété qui dépend de la distance et pas seulement de la topologie sur l'ensemble X.

2.3.5 Non-exemple d'espace métrique complet

Considérons sur $\mathbf{R}$ la distance

$$d(x,y) := |e^{-x} - e^{-y}|.$$

Alors l'espace $(\mathbf{R}, d)$ n'est pas un espace métrique complet.

Justification. La suite $(n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{R}, d)$, pourtant elle ne converge pas dans $\mathbf{R}$ pour cette distance.

On remarque pourtant que la topologie associée à la distance d est égale à la topologie associée à la distance usuelle

2.3.6 Parties fermées d'un espace métrique complet

Une partie Y de X est dite *complète* si l'espace métrique (Y, d) est complet.

Proposition 2.3.3. *Soit Y une partie d'un espace métrique (X, d).*

— *Si (Y, d) est complète, alors Y est fermée dans (X, d).*

— *Si (X, d) est complet et Y est fermée dans (X, d), alors (Y, d) est complète.*

Preuve. Supposons que (Y, d) est complète. Si $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'éléments de Y qui converge dans (X, d), alors c'est une suite de Cauchy dans (Y, d). Elle converge donc dans Y et par conséquent Y est fermé.

Supposons maintenant que (X, d) est complet et Y fermée. Soit $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans (Y, d). C'est une suite de Cauchy dans (X, d) donc elle converge dans (X, d). Comme Y est fermée, elle converge également dans (Y, d). Donc (Y, d) est complet.

2.3.7 Produit d'espaces métriques complets

Lemme 2.3.1. *Le* produit *de deux espaces métriques complets (X_1, d_1) et (X_2, d_2) muni de la distance somme ou de la distance produit est un espace métrique complet.*

Preuve. Si $((x_1(n), x_2(n)))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(X_1 \times X_2, d_p)$, alors pour $i = 1, 2$, les suites $(x_i(n))_{n\geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy dans (X_i, d_i).

Ces deux suites convergent donc chacune vers des limites notées x_1 et x_2 et on vérifie que la suite $((x_1(n), x_2(n)))_{n\geqslant 0}$ converge vers (x_1, x_2), aussi bien pour la distance somme que pour la distance produit.

2.3.8 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Comme pour la compacité, les espaces vectoriels normés de dimension finie ont un bon comportement ; la nuance est que cette fois, c'est l'espace tout entier, et donc aussi toute partie fermée, qui ont la propriété de complétude.

Théorème 2.3.1. *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de* dimension finie*, muni de la distance associée à la norme, est un espace métrique complet.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy. Cette suite étant bornée, elle est incluse dans un compact (prendre par exemple une boule fermée de rayon assez grand).

On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite qui converge. En particulier, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence, donc elle converge.

2.3.9 Notion d'espace de Banach

Définition 2.3.3. *On dit qu'un espace vectoriel normé est un* espace de Banach *s'il est un espace métrique complet pour la distance issue de la norme.*

Remarques.

— La structure d'un espace de Banach est très riche puisqu'elle cumule de fortes propriétés algébriques et métriques, compatibles entre elles.

— Le théorème précédent affirme que tous les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.

— L'étape suivante consiste à étudier des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie qui sont des espaces de Banach.

2.3.10 L'espace de Banach $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$

L'espace $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve. Soit $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\ell^\infty(\mathbf{N},;\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$. On note

$$\mathbf{x}^m := (x_n^m)_{n\in\mathbf{N}},$$

où $x_n^m \in \mathbf{K}$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, m' \geqslant m_0$,

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon.$$

Donc, pour chaque $n \geqslant 0$, la suite $(x_n^m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{K}, |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $z_n \in \mathbf{K}$.

On note $\mathbf{z} := (z_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifions que $\mathbf{z} \in \ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K})$ et que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbf{x}^m = \mathbf{z}.$$

Pour $m \geqslant m_0$, et à n fixé, en passant à la limite $m' \to +\infty$ dans l'estimation $|x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon$, on trouve

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - z_n| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $m \geqslant m_0$.

En particulier, $|z_n| \leqslant |x_n^{m_0}| + \varepsilon$, ce qui montre la suite $\mathbf{z}$ est bornée et pour tout $m \geqslant m_0$, $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{z}\|_\infty \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ converge vers $\mathbf{z}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.3.11 L'espace de Banach $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$

L'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

est un espace de Banach (exercice).

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 2.3.2. *Soient (X_1, d_1) un espace métrique* compact*, et $(X_2, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Alors, $\mathcal{C}(X_1;X_2)$ muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X_1} \|f(x)\|_{X_2},$$

est un espace de Banach.

2.3.12 L'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet

L'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

n'est pas un espace vectoriel normé complet.

Éléments de preuve. Définissons pour tout $n \geqslant 2$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 1 - n(x-1/2) & \text{si } x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

On vérifie que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, mais qu'elle ne converge pas vers une fonction continue.

2.3.13 Applications linéaires continues dans un Banach

Une autre façon de construire des espaces de Banach consiste à considérer des espaces d'applications linéaires *continues* à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 2.3.4. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de* Banach*. Alors, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est également un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(L_m)_{m\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, n \geqslant n_0$, pour tout $x \in E$,

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon\, \|x\|_E.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \|\ \|_F)$, qui est un espace de Banach, donc elle converge vers une limite que l'on note $L(x) \in F$.

On vérifie que L est linéaire

$$\begin{aligned} L(\lambda\, x + \mu y) &= \lim_{n \to \infty} L_n(\lambda\, x + \mu y) \\ &= \lambda \lim_{n \to \infty} L_n(x) + \mu \lim_{n \to \infty} L_n(y) = \lambda\, L(x) + \mu\, L(y). \end{aligned}$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon\, \|x\|_E.$$

pour $m, n \geqslant n_0$, et tout $x \in E$.

Donc, en passant à la limite $m \to +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L(x)\|_F \leqslant \varepsilon\, \|x\|_E.$$

pour tout $n \geqslant n_0$, et tout $x \in E$.

En particulier,

$$\|L(x)\|_F \leqslant \big(\varepsilon + \|L_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big)\, \|x\|_E,$$

ce qui montre que L est continue et

$$\|L_n - L\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $n \geqslant n_0$, ce qui signifie que la suite $(L_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers L dans $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$.

2.4 Exercices du Chapitre 2

Exercice 16 (Applications directes du cours)**.** (a) L'objet de cette question est de vérifier que deux normes équivalentes engendrent la même topologie. Plus précisément, sur un espace vectoriel normé E, muni de deux normes *équivalentes* $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, montrer que $Y \subset E$ est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_1)$ si, et seulement si, c'est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$.

(b) Justifier que $\mathbf{R}$ muni de la distance naturelle est connexe.

(c) Montrer que toute suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé est bornée.

(d) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 17 (La notion d'application propre)**.** Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques.

(a) Soient $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite convergente de (Y, d') et y sa limite. Montrer que l'ensemble

$$A = \{y_n, n \geqslant 0\} \cup \{y\}$$

est une partie compacte de Y.

Dans la suite, f désigne une application de X dans Y. On dit que $f : X \to Y$ est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y. On dit que f est *propre* si f est continue et si l'image réciproque par f de tout compact est compacte.

(b) Montrer qu'une application propre est fermée.

Dans la suite, on suppose que $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sont des espaces vectoriels normés.

(c) On suppose que X et Y sont de dimension finie et que l'application f est continue. Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

Exercice 18 (Une caractérisation très utile des espaces connexes)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'un espace métrique (X, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue sur X à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.

(a) Supposons qu'il existe une application continue $f : X \to \mathbf{R}$, non constante et qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. En considérant les images réciproques $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[)$ et $f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$, montrer que X n'est pas connexe.

(b) Supposons que X n'est pas connexe. Il existe alors deux ouverts disjoints non vides U et V tels que $X = U \cup V$. Montrer que la fonction $f : X \to \mathbf{R}$ qui associe la valeur 1 à tout élément de U et 0 à tout élément de V est continue sur X. Conclure.

(c) Une application : soit (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X d'intersection non vide. Alors $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Exercice 19 (Espaces de Banach et séries normalement convergentes)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, ses parties fermées et bornées sont complètes.

On dit qu'une série $\sum_{n \geqslant 0} x_n$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est *normalement convergente* si la série numérique de terme général $\|x_n\|_E$ converge.

(b) Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 20 (Un exercice simple sur les espaces vectoriels normés)**.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

et, pour une constante $M > 0$,

$$\forall x \in B_f(0, 1), \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

(a) Montrer que f est $\mathbf{Q}$-linéaire.

(b) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $\|x\| \leqslant \lambda$, on a : $\|f(x)\| \leqslant |\lambda| M$. En déduire que f est M-lipschitzienne.

(c) Montrer que f est une application linéaire et continue sur E.

Exercice 21 (*Topologie trace)**.** Soit (X, d) un espace métrique, Y une partie de X, et Z une partie de Y. On peut considérer Z comme une partie de (X, d), mais aussi comme une partie de l'espace métrique (Y, d) (ici, d est la restriction de la distance d à Y). Démontrer les assertions suivantes :

(a) Pour que Z soit une partie ouverte de (Y,d), il faut et il suffit qu'il existe une partie U de X ouverte dans (X,d) telle que $Z = U \cap Y$.

(b) Pour que Z' soit une partie fermée de (Y,d), il faut et il suffit qu'il existe une partie F de X fermée dans (X,d) telle que $Z' = F \cap Y$.

Exercice 22 (Compacts et recouvrement par des ouverts)**.** Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par parties *ouvertes* d'un espace métrique *compact* (X,d). Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'un des U_i.

Exercice 23 (*Une façon abstraite de construire un modèle pour tout espace métrique compact)**.** Rappel : un *homéomorphisme* est une application bijective continue dont l'application réciproque est elle-même continue (ce qui n'est pas automatique).

(a) Montrer que toute application injective continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y est un homéomorphisme de X vers $f(X)$.

Sur $[0,1]^{\mathbf{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$) on définit l'application

$$d\big((x_n)_{n\geqslant 0},(y_n)_{n\geqslant 0}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}.$$

(b) Montrer que d est une distance sur $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$.

(c) Montrer qu'une suite $(x^k)_{k\geqslant 0} = \big((x^k_n)_{n\geqslant 0}\big)_{k\geqslant 0}$ dans $[0,1]^{\mathbf{N}}$ converge vers une suite $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \in [0,1]^{\mathbf{N}}$ au sens de la distance d, si et seulement si elle converge composante par composante, c'est-à-dire :

$$\forall n \geqslant 0, \quad x^k_n \to y_n \quad \text{quand} \quad k \to +\infty\ ;$$

(d) Prouver que $([0,1]^{\mathbf{N}}, d)$ est un espace métrique compact (utiliser un argument d'*extraction diagonale*).

Une application f est un *homéomorphisme* si elle est continue, bijective, et l'application réciproque f^{-1} est continue. Deux espaces sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre (le sens n'importe pas dans la formulation : l'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme).

(e) Prouver que tout espace métrique compact est homéomorphe à une *partie* de $[0,1]^{\mathbf{N}}$.

Exercice 24 (*Une caractérisation des parties connexes de $\mathbf{R}$)**.** Le but de l'exercice est de montrer que les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$ (sans utiliser le fait que la connexité par arc implique la connexité). On rappelle qu'une partie J de $\mathbf{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tout $x, y \in J$, si $x < y$, alors $[x,y] \subset J$.

(a) On considère une partie J de $\mathbf{R}$ non vide et qui n'est pas un intervalle. Montrer qu'il existe un point $c \in \mathbf{R} \setminus J$ tel que $J \cap]-\infty, c[$ et $J \cap]c, +\infty[$ sont non vides, ouverts dans J et disjoints. Conclure.

(b) Soit un intervalle compact $J = [a,b]$ de $\mathbf{R}$. Supposer que J est la réunion de deux parties fermées disjointes non vides F_0 et F_1. Sans perte de généralité, on suppose que $a \in F_0$. On définit

$$c = \sup\{x \in J \text{ tel que } [a,x] \subset F_0\}.$$

Montrer que $c \in F_0$ et $c \in F_1$ et conclure.

(c) Dans le cas d'un intervalle non compact, utiliser l'exercice 18 (c) pour conclure.

Exercice 25 (On s'en doutait...encore faut-il le démontrer !)**.** Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui soit continue, bijective et telle que f^{-1} soit aussi continue.

Exercice 26 (*Une partie de $\mathbf{R}^2$ connexe mais pas connexe par arc)**.**

(a) Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X. Montrer que si Y est connexe, alors tout ensemble $B \subset X$ tel que $Y \subset B \subset \bar{Y}$ est également connexe. Indication : on pourra utiliser la définition de connexe et un argument par contradiction.

(b) On note Γ le *graphe* de la fonction défine sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \sin(1/x)$. Déterminer l'adhérence $\overline{\Gamma}$ de Γ. Montrer que $\overline{\Gamma}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arc.

Exercice 27 (Connexe implique connnexe par arc dans les espaces vectoriels normés)**.** Montrer qu'un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^N$ est connexe par arcs. Montrer que l'on peut joindre deux points de U par une ligne polygonale. Plus généralement, montrer qu'un ouvert connexe d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Chapitre 3

Topologie et espaces de fonctions

3.1 Compacité en dimension infinie

3.1.1 Théorème de Riesz

Le théorème de Riesz relie une propriété algébrique d'un espace vectoriel normé (la dimension) à une propriété topologique (compacité des parties fermées et bornées).

Théorème 3.1.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. La boule-unité fermée* $B_f(0,1)$ *de* $(E, \|\cdot\|)$ *est* compacte *si, et seulement si,* E *est de* dimension finie.

Remarques :

— En toute dimension, les boules fermées d'un espace vectoriel normé sont bornées (par définition) et fermées.

— En *dimension finie*, nous avons vu dans le cours précédent que les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées ; en particulier, les boules fermées sont compactes.

— Pour prouver le théorème de Riesz, il reste donc à prouver l'implication

$$\dim(E) = \infty \implies B_f(0,1) \text{ est non compacte.}$$

3.1.2 Lemme de Riesz

La démonstration du théorème de Riesz est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Soit* F *un* sous-espace vectoriel fermé *de* E*,* distinct *de* E*. Alors, pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$*, il existe* $x \in E$ *tel que*

$$\|x\| = 1 \quad et \quad \inf_{y \in F} \|x - y\| \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Reformulation : ce lemme énonce que si F est un sous-espace vectoriel fermé *strict* d'un espace vectoriel normé E, alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on peut toujours trouver un vecteur de la sphère unité de E qui est à distance supérieure à $1-\varepsilon$ du sous-espace F.

Preuve. Rappel : pour Y une partie de E et $x \in E$, on note :

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Par définition d'une borne inférieure, on a $d(x, Y) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{Y}$. En effet, ces deux conditions sont équivalentes à l'existence d'une suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ dans Y telle que $\lim_{n \to +\infty} y_n = x$.

Preuve. Soit $a \notin F$. Comme F est fermé, on a $a \notin \overline{F}$ et donc $d(a, F) > 0$; on note $\alpha = d(a, F) > 0$.

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on a $\alpha < \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$ et la définition de $\alpha = d(a, F)$ comme borne inférieure implique qu'il existe $b \in F$ tel que

$$0 < \|a - b\| \leqslant \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

On définit un vecteur de la sphère-unité de E en posant :

$$x = \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Soit $y \in F$ arbitraire. On a :

$$\|x - y\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - y \right\| = \frac{\|a - (b + \|a - b\| y)\|}{\|a - b\|}.$$

Comme $b + \|a - b\| y \in F$, on a $\|a - (b + \|a - b\| y)\| \geqslant \alpha$, et donc :

$$\|x - y\| \geqslant \frac{\alpha}{\|a - b\|}.$$

Finalement, comme

$$\|a - b\| \leqslant \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} \iff \frac{\alpha}{\|a - b\|} \geqslant 1 - \varepsilon,$$

on obtient

$$\|x - y\| \geqslant \frac{\alpha}{\|a - b\|} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Le lemme est démontré.

3.1.3 Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé

On va aussi utiliser le lemme suivant pour prouver l'implication non immédiate du théorème de Riesz.

Lemme 3.1.2. *Dans un espace vectoriel normé, un* sous-espace vectoriel de dimension finie *est fermé.*

Preuve. On utilise le critère séquentiel : soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans F, admettant une limite $x \in E$; il s'agit de montrer que $x \in F$.

La suite convergente $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée : il existe $R > 0$ tel que $\{x_n : n \geqslant 0\} \subset B_f(0, R)$. La partie $B_f(0, R) \cap F$ est une boule fermée de F, donc une partie compacte puisque $\dim(F) < \infty$.

Il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ qui converge dans F. Par unicité, cette limite doit être x, d'où l'on déduit que $x \in F$.

3.1.4 Démonstration du théorème de Riesz

On suppose que E n'est pas de dimension finie. La stratégie est de construire une suite de vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur la sphère-unité $S_E(0,1)$ de E tels que pour tous $m \neq n$ on ait

$$\|e_m - e_n\| \geqslant 1/2.$$

Cette suite ne peut admettre de valeur d'adhérence car, par construction, aucune de ses sous-suites n'est de Cauchy.

On commence par se donner un vecteur arbitraire $e_0 \in S_E(0,1)$. Ensuite, on suppose construite la suite désirée jusqu'au rang n et on note F_n le sous-espace vectoriel engendré par les $n+1$ premiers vecteurs $e_0, \dots, e_n$: il est de dimension finie dans E, donc strictement inclus dans E, et fermé par le lemme précédent. En utilisant le lemme de Riesz pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient un vecteur $e_{n+1} \in S_E(0,1)$ à distance $\geqslant \frac{1}{2}$ de F_n, et donc aussi de tous les vecteurs e_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

La suite ainsi construite par récurrence contredit la compacité de la sphère unité fermée de E et donc la compacité de la boule unité fermée.

3.1.5 Conditions supplémentaires pour la compacité des boules fermées

Le théorème de Riesz peut être vu comme un résultat négatif puisqu'il affirme que les boules fermées dans les espaces vectoriels de dimension infinie *ne sont pas* des parties compactes. Il existe au moins deux façons de contourner cette difficulté.

— La première consiste à munir les espaces vectoriels de topologies « appauvries », différentes de celles obtenues à partir d'une seule norme. C'est une approche largement exploitée en analyse fonctionnelle.

— La seconde consiste à considérer des parties fermées et bornées qui satisfont des hypothèses additionnelles pour assurer la compacité.

Le théorème d'Ascoli est un exemple fondamental et très utile de la seconde approche, dans le cas où l'espace vectoriel normé est l'espace $\mathcal{C}(X;\mathbf{K})$ des fonctions continues d'un espace métrique compact X vers $\mathbf{K}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3.1.6 Équicontinuité de familles de fonctions

Définition 3.1.1. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X;\mathbf{K})$ une famille d'applications continues de X vers $\mathbf{K}$.*

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue au point $x \in X$ *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in X, \quad d(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X *si elle est équicontinue en tout point de $x \in X$.*

Exemple : soit (X,d) un espace métrique compact. Fixons $k>0$ et considérons

$$\mathcal{F}_k = \{f \in \mathcal{C}(X;\mathbf{K}) \ : \ |f(x)-f(y)| \leqslant k\, d(x,y)\}$$

l'ensemble des fonctions k-lipschitziennes définies sur X à valeurs dans $\mathbf{K}$. Cette famille est équicontinue sur X (il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la condition de la définition ci-dessus).

3.1.7 Un exemple de défaut d'équicontinuité

En termes de définition « (ε,δ) » de la continuité des applications, la condition d'équicontinuité en x est une condition d'uniformité de la constante δ par rapport à toutes les fonctions de la famille $\mathcal{F}$ considérée : étant donné $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour toute $f\in\mathcal{F}$ on ait :

$$f\big(B(x,\delta)\big) \subset B_{\mathbf{K}}(f(x),\varepsilon).$$

Non-exemple : dans l'espace $\mathcal{C}([-1,1];\mathbf{R})$, considérons la famille

$$\mathcal{F} = \{s_n : x \mapsto \sin(nx)\}_{n\geqslant 1}.$$

Alors $\mathcal{F}$ n'est pas équicontinue sur $[-1,1]$.

Par exemple, elle n'est pas équicontinue au point 0 car pour tout $\delta>0$ on peut trouver un indice n tel que $s_n\big(]-\delta;\delta[\big) = [-1;1]$. L'équicontinuité est donc contredite avec tout $\varepsilon<1$.

3.1.8 Un exemple non-lipschitzien d'équicontinuité

On considère $X=[0,1]$ muni de la distance usuelle et

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbf{R}) \ : \ \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}.$$

Soit $f\in\mathcal{F}$. Pour $x,y\in[0,1]$, on écrit

$$f(x)-f(y) = \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t;$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \left| \int_y^x |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right|^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}} \leqslant |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

En prenant $\delta=\varepsilon^2$, on voit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

3.1.9 Théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli fournit une condition suffisante de compacité dans l'espace de fonctions $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 3.1.2. *Soit (X, d) un espace métrique* compact*. Soit une famille de fonctions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{K})$ qui vérifie les hypothèses suivantes.*

— *La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X.*

— *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est une partie bornée de $\mathbf{K}$.*

Alors, de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}(X; \mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

La démonstration est admise.

3.1.10 Exemple d'application du théorème d'Ascoli

Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $\mathcal{C}([0,1]; \mathbf{K})$. On fait les hypothèses suivantes.

— Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 0$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \leqslant C.$$

— Il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant k\,|x - y|.$$

Alors, par le théorème d'Ascoli, on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1]; \mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire qui converge uniformément sur $[0,1]$.

Autrement dit, il existe une fonction continue f sur $[0,1]$ qui est limite uniforme d'une sous-suite de $(f_n)_{n \geqslant 0}$.

3.2 Densité et convergence uniforme

3.2.1 Rappel sur la notion de densité

Définition 3.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie Y de X est* dense dans (X, d) *si $\overline{Y} = X$.*

De manière équivalente, $Y \subset X$ est dense dans (X, d) si

— *pour tout $x \in X$, et tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing$;*

— *tout point de X est limite d'une suite d'éléments de Y.*

Exemples.

— Les parties $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.

— On peut voir que l'espace $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ muni de la distance : $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup_{\mathbf{R}} |f - g|)$.

3.2.2 Densité dans les espaces fonctionnels

La notion de densité est spécialement importante dans le cas où les espaces considérés sont des espaces de fonctions (on les appelle désormais *espaces fonctionnels*).

Par exemple, dans le cas $X = \mathbf{R}^N$ (muni de n'importe quelle norme), on verra que l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur X et nulles en dehors d'un compact (non fixé), est dense dans de nombreux espaces fonctionnels.

Ce type de densité d'un espace fonctionnel dans d'autres espaces permet de transférer des définitions et des propriétés d'un espace à un autre (ce sera le cas, par exemple, dans le cours sur la transformation de Fourier).

3.2.3 Rappel : convergences simple et uniforme

Soit (X, d) un espace métrique.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de X dans $\mathbf{K}$ *converge simplement* sur X s'il existe une fonction $f : X \to \mathbf{K}$ telle que pour tout $x \in X$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dans ce cas f est appelée la *limite simple* de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$ *converge uniformément* sur X s'il existe une fonction continue $f : X \to \mathbf{K}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Dans ce cas f est appelée la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

Si f est limite uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$, alors elle est automatiquement limite simple de cette suite.

3.2.4 Théorème de Dini

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de X dans $\mathbf{R}$ est *croissante* (resp. décroissante) si *pour tout* $x \in X$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est *croissante* (resp. décroissante).

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de X dans $\mathbf{R}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 3.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique* compact. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbf{R}$ qui satisfait les hypothèses suivantes :*

— *La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f ;*

— *La fonction f est* continue sur *X.*

— *La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est* monotone.

Alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément *vers f sur X.*

Le théorème de Dini est donc un moyen de déduire la convergence uniforme d'une suite de fonctions qui converge simplement, sous une hypothèse supplémentaire de monotonie et pourvu que la limite soit une fonction continue.

3.2.5 Ensembles de fonctions stables par passage au maximum

Avant de prouver le théorème de Dini, énonçons un lemme dont la preuve permet de comprendre le rôle joué par la compacité de X et la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.

Lemme 3.2.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique* compact. *Soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ *vérifiant :*

$$u_1, u_2 \in \mathcal{H} \implies \max(u_1, u_2) \in \mathcal{H}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}(X; \mathbf{R})$. *On suppose que pour tout* $x \in X$, *il existe* $u_x \in \mathcal{H}$ *telle que* $u_x(x) > f(x)$. *Alors il existe* $v \in \mathcal{H}$ *telle que, pour tout* $x \in X$, $v(x) > f(x)$.

Preuve.

Pour chaque $x \in X$, on considère u_x comme dans l'énoncé, et on note

$$U_x = \{y \in X : u_x(y) > f(y)\}.$$

La partie U_x est ouverte car c'est l'image réciproque de $]0, +\infty[$ par la fonction continue $u_y - f$; en outre $x \in U_x$. Ainsi, $\{U_x : x \in X\}$ est un recouvrement de parties ouvertes de X. Par compacité, X est recouvert par un nombre fini de U_{x_i}, où $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, p$.

On considère la fonction

$$v : x \mapsto \max\{u_{x_1}(x); \ldots u_{x_p}(x)\}$$

Par récurrence finie, on montre que $v \in \mathcal{H}$.

Cette fonction convient car un élément quelconque $x \in X$ est au moins dans un des ouverts U_{x_i} et on peut alors écrire :

$$v(x) \geqslant u_{x_i}(x) > f(x).$$

3.2.6 Preuve du théorème de Dini

Quitte à considérer la suite $(-f_n)_{n\geqslant 0}$ au lieu de $(f_n)_{n\geqslant 0}$, on se ramène sans perte de généralité au cas où la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est *croissante*.

On considère la famille $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$. Par monotonie, $\mathcal{H}$ est bien stable par passage au maximum car pour $m \geqslant n$, on a par monotonie : $\max\{f_n; f_m\} = f_m$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence simple, pour tout $x \in X$, il existe $u_x \in \mathcal{H}$ ($u_x = f_{n_x}$, pour un certain $n_x \geqslant 0$) telle que

$$f(x) - \varepsilon < u_x(x) \leqslant f(x).$$

On applique le lemme précédent à la fonction $x \mapsto f(x) - \varepsilon$: il existe N tel que pour tout $x \in X$, $f(x) - \varepsilon < f_N(x)$.

Finalement, pour tout indice $n \geqslant N$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$f(x) - \varepsilon < f_N(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

ce qui implique $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. La convergence uniforme est donc démontrée.

3.2.7 Approximation uniforme de $|\cdot|$ par des polynômes

Le théorème de Dini a pour conséquence ce premier énoncé, d'apparence anecdotique, mais utile pour prouver le théorème de Weierstrass d'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle compact par des fonctions polynomiales.

Lemme 3.2.2. *Soit $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $p_0(x) = 0$ et pour $n \geqslant 0$,*

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - [p_n(x)]^2\big).$$

Alors les fonctions p_n sont polynomiales et convergent uniformément *vers la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$.*

On utilise le théorème de Dini pour prouver ce lemme.

Preuve du lemme. Pour tout $n \geqslant 0$, un calcul montre que :

$$|x| - p_{n+1}(x) = \big(|x| - p_n(x)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(|x| + p_n(x)\big)\Big),$$

ce qui permet de montrer par récurrence les majorations suivantes :

$$0 \leqslant p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant |x|.$$

Ainsi, à $x \in [-1,1]$ fixé, la suite numérique $(p_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers un réel $g(x) \geqslant 0$ qui satisfait de plus $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - [g(x)]^2\big)$, ce qui entraîne $g(x) = |x|$.

On vient donc de justifier que la fonction continue $|\cdot|$ est la limite *simple* de la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[-1,1]$; la monotonie et le théorème de Dini assurent que la convergence est *uniforme.*

3.2.8 Théorème de Weierstrass

Théorème 3.2.2. *Soient $a < b$ des nombres réels. Alors toute fonction réelle continue sur $[a,b]$ est* limite uniforme *d'une suite de fonctions polynomiales.*

Idée de preuve. Les étapes de la preuve sont les suivantes :

— Le lemme précédent montre que la fonction $|\cdot|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[-1,1]$.

— Par translation et homothétie, toute combinaison linéaire de fonctions $x \mapsto |x-c|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

— Les combinaisons linéaires précédentes reconstituent les fonctions continues affines par morceaux sur $[a,b]$.

— Toute fonction continue sur $[a,b]$ est uniformément continue (par le théorème de Heine) et donc limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

On conclut en utilisant la « transitivité » de l'approximation uniforme.

3.2.9 Ensembles séparants de fonctions

Nous allons maintenant mentionner sans démonstration des généralisations du théorème de Weierstrass classique ci-dessus. Ces résultats sont dus à Stone, qui a élucidé le rôle de la *relation d'ordre* $\leqslant$ de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$ et le rôle de la stabilité par *conjugaison complexe* sur $\mathcal{C}(X;\mathbf{C})$.

Soit (X,d) un espace métrique *compact*. On munit $\mathcal{C}(X;\mathbf{K})$ de la distance associée à la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Définition 3.2.2. *On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X;\mathbf{K})$ est* séparant *si, pour tous $x \neq y \in X$, il existe $f \in \mathcal{H}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

La propriété d'être séparant est une façon pour $\mathcal{H}$ d'être « assez gros » vis-à-vis des points du compact X.

3.2.10 Théorème de Stone-Weierstrass réel

On dit que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X;\mathbf{K})$ est une *sous-algèbre* si $\mathcal{H}$ est stable par combinaison linéaire et par produit (point par point) des fonctions.

Dans le résultat suivant, on suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Théorème 3.2.3. *Soit (X,d) un espace métrique* compact*. Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$ qui contient les fonctions constantes et qui est séparante. Alors $\mathcal{H}$ est* dense *dans $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$ pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.*

Autrement dit, ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques et propriété de séparation) de densité d'une famille de fonctions dans $\big(\mathcal{C}(X;\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

3.2.11 Exemples de densité dans $\mathcal{C}(X;\mathbf{R})$

- On retrouve facilement le théorème de Weiestrass classique (la fonction $x \mapsto x$ suffit à séparer les points).
- Toute fonction numérique continue sur $[0,1]\times[0,1]$ est limite uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$ de sommes finies de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$, où f et g sont continues sur $[0,1]$.
- Le sous-espace de $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ des *fonctions lipschitziennes* sur $[0,1]$ i.e. l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ pour lesquelles, il existe une constante $k>0$ telle que
$$|f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|,$$
est dense dans $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme.

3.2.12 Théorème de Stone-Weierstrass complexe

Pour formuler le critère de densité pour les fonctions à valeurs complexes, on introduit une autre notion de stabilité adaptée à la situation.

Définition 3.2.3. *On dit que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \boldsymbol{C})$ est* auto-conjugué *si $\mathcal{H}$ est stable par conjugaison complexe, i.e. si*

$$f \in \mathcal{H} \implies \overline{f} \in \mathcal{H}.$$

Théorème 3.2.4. *On suppose que X est compact. Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X; \boldsymbol{C})$ qui contient les fonctions constantes, est séparante et* auto-conjuguée. *Alors, $\mathcal{H}$ est* dense *dans $\mathcal{C}(X; \boldsymbol{C})$ pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.*

Ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques, par conjugaison complexe et propriété de séparation) pour être dense dans $\big(\mathcal{C}(X; \mathbf{C}), \| \cdot \|_\infty\big)$.

3.2.13 Exemple fondamental de densité dans $\mathcal{C}(S^1; \mathbf{C})$

Le **C**-espace vectoriel engendré par les fonctions :

$$x \mapsto e^{inx} \quad \text{pour } n \in \mathbf{Z},$$

est dense dans l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π, muni de la norme de la convergence uniforme.

3.2.14 Théorème de Stone-Weierstrass : réduction au cas réel

Preuve. On note

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} := \{f \in \mathcal{H} \,:\, \forall x \in X,\ f(x) \in \mathbf{R}\}.$$

Soient $x \neq y$. Il existe $f \in \mathcal{H}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Quitte à échanger x et y on peut supposer que $f(x) \neq 0$. Définissons $g \in \mathcal{H}$ par

$$g(z) = \frac{f(z) - f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

pour $z \in X$, et

$$h = \frac{1}{2}(g + \overline{g}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{R}}.$$

On vérifie que $h(x) = 1 \neq h(y) = 0$. Ainsi $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$ est une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ qui contient les fonctions constantes. Donc $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$.

De même

$$\mathcal{H}_{i\mathbf{R}} := \{f \in \mathcal{H} : \forall x \in X,\ f(x) \in i\mathbf{R}\},$$

est dense dans $i\,\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$. Finalement, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathcal{H}_{i\mathbf{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$.

3.3 Points fixes

3.3.1 Applications contractantes

Soit f une application d'un espace métrique (X, d) dans un espace métrique (Y, d').

Définition 3.3.1. *On dit que f est* contractante *s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in X$,*

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k\, d(x, y);$$

autrement dit, si f est k-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.

3.3.2 Théorème du point fixe de Banach

Une application importante de la notion d'espace métrique complet est la méthode des *approximations successives*, qui est une méthode générale d'étude d'équations fonctionnelles.

Théorème 3.3.1. *Soient (X, d) un espace métrique* complet *non vide et $f : X \to X$ une application* contractante*. Alors f possède un* unique point fixe dans X*, i.e. il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*

Le théorème du point fixe est à la base de la démonstration de plusieurs théorèmes importants en analyse (voir par exemple la partie « calcul différentiel » du cours MAT431).

Dans ce cours, nous verrons une application essentielle de ce théorème à l'existence et à l'unicité de solutions d'équations différentielles.

3.3.3 Preuve du théorème du point fixe : existence

Soit $x_0 \in X$. Définissons la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.
Pour tous $m \geqslant n \geqslant 1$, en utilisant l'hypothèse sur f, on a

$$d(x_m, x_n) = d(f^n(x_{m-n}), f^n(x_0)) \leqslant k^n d(x_{m-n}, x_0).$$

Par ailleurs, par l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$d(x_n, x_0) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} k^j d(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Donc, pour tous $m \geqslant n \geqslant 1$, on a :

$$d(x_m, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \tag{$\star$}$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc elle converge. On note $x_\infty \in X$ sa limite. Par continuité de f, on a

$$f(x_\infty) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Donc, x_∞ est un point fixe de f.

Remarque : On rappelle que $x_0 \in X$ est arbitraire et que l'on a défini la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. En passant à la limite $m \to +\infty$ dans la majoration $(\star)$, on obtient

$$d(x_\infty, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

D'un point de vue pratique, la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ permet de déterminer le point fixe avec une précision arbitraire, avec un contrôle de l'erreur commise.

3.3.4 Preuve de l'unicité dans le théorème du point fixe

Si x et y sont des points fixes de f alors on a

$$d(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k\, d(x,y);$$

comme $k \in [0,1[$, on a nécessairement $d(x,y) = 0$, *i.e.* $x = y$.

3.4 Exercices du Chapitre 3

Exercice 28. (Applications de théorèmes importants du cours)

(a) (Théorème d'Ascoli et théorème de Riesz) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbf{R})$ et tel qu'il existe une constante $M > 0$ avec : $\forall\, f \in E$, $\|f'\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$.

(i) Montrer que la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, notée B, forme une famille équicontinue en tout point $x \in [0,1]$. En déduire que de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(ii) On suppose de plus que E est fermé dans $(\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que E est de dimension finie.

(b) (Théorème de Weierstrass) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ satisfaisant

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \int_0^1 f(t) t^n \,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.

(c) (Théorème du point fixe) Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ continue. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que f^n soit contractante (la fonction f^n étant définie par la récurrence $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$).

(i) Montrer que si x est un point fixe de f^n, alors $f(x)$ est aussi un point fixe de f^n.

(ii) Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 29. (Espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de différentes normes)

(a) Montrer que $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach.

(b) Montrer que $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

n'est pas un espace de Banach.

Exercice 30. (Convergence de suites de fonctions et équicontinuité)

(a) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction discontinue.

(b) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.

(c) On considère la suite des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. En quels points de $[0,1]$ la famille de fonctions $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est-elle équicontinue ?

Exercice 31. (Une variante du théorème de point fixe de Banach sur un espace métrique compact)
Soit f une application d'un espace métrique compact (X,d) dans lui-même, telle que, pour tout $x \neq y$, $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$.

(a) Montrer que f possède un unique point fixe.

(b) Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace l'hypothèse de compacité de (X,d) par une hypothèse de complétude ?

(c) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(f^n(x))_{n\geqslant 0}$ converge (f^n est défini par la récurrence $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$).

(d) Montrer que la suite d'applications $(f^n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur X.

Exercice 32. (Espace des polynômes à coefficients réels muni de différentes normes)
On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note

$$\mathcal{N}_1(P) := \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_2(P) := \sum_{j\in\mathbf{N}} e^{-j}\,|P(j)|.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit de deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.

(b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

(c) L'espace $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\mathcal{N}_1$, est-il complet ?

Exercice 33. (*Espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ muni de différentes normes)
Pour k un nombre réel strictement positif, on note $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telles que $f(0)=0$ et satisfaisant, pour tous $x,y \in [0,1]$,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$ et pour une fonction donnée $f \in \mathcal{E}$, on note

$$\mathcal{N}(f) = \inf\{k>0 : f \in \mathcal{H}_k\}.$$

(a) Justifier que $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

(b) Prouver que l'on a $\|f\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ mais que $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{N}$ ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{H}_k$.

(c) On fixe $k>0$. Discuter la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans $\big(\mathcal{E},\mathcal{N}\big)$.

Exercice 34. (Séries normalement convergentes dans un Banach)
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach, $K \geqslant 0$ et $\phi \in \mathcal{C}(E;E)$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|\phi(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{C}(E; E)$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \text{et pour tout } x \in E, \ f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

Indication : on pourra utiliser la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^{-n}x),$$

et le fait général que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 35. (*Exponentielle d'application linéaire) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

(a) Soit $L \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < R$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n L^n$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E, E)$.

Indication : on rappelle que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente. On rappelle également que $(E, \|\cdot\|_E)$ étant un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E, E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,E)})$ est également un espace de Banach.

(b) Soit $L \in \mathcal{L}(E, E)$. Montrer que

$$e^L := \sum_{n\geqslant 0} \frac{L^n}{n!}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E, E)$.

(c) Soient $L, M \in \mathcal{L}(E, E)$ tels que $L \circ M = M \circ L$. Montrer que

$$e^L \circ e^M = e^M \circ e^L = e^{L+M}.$$

(d) En déduire que, si $L \in \mathcal{L}(E, E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathcal{L}(E, E)$.

(e) Soit $L \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que

$$V^2 = I_E - L.$$

(I_E désigne l'opérateur identité de E.)

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

Exercice 36. (Autour de l'équicontinuité et de la convergence de suites de fonctions) On considère (X, d_X) et (Y, d) deux espaces métriques.

(a) Étendre la notion d'équicontinuité donnée en cours au cas d'une famille d'applications continues de (X, d_X) dans (Y, d).

(b) Soit $a \in X$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$. On suppose que $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue en a et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Prouver que g est continue en a.

(c) On considère maintenant une partie dense Z de (X, d_X) et on suppose que (Y, d) est complet. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$ telle que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur Z. Prouver que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur X.

Exercice 37. (Suite de l'exercice précédent) On considère (X, d_X) et (Y, d) deux espaces métriques. Dans cette exercice, on suppose que (X, d_X) est compact.
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications continues $(X, d_X) \to (Y, d)$. On suppose que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge *uniformément* vers g.

Exercice 38. (Preuve du théorème de Weierstrass esquissée dans le cours) Démontrer le théorème de Weierstrass classique en suivant les indications données dans le cours (utiliser le fait que sur tout intervalle compact, la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

Exercice 39. (Une autre preuve du théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein)
(a) On pose

$$R_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k R_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) R_{n,k}.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

(c) On pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que ces polynômes convergent uniformément vers f sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 40. (*Une variante du théorème de point fixe de Banach dans un espace compact convexe)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie Y de E est dite *convexe* si pour tout points $x, y \in Y$, et tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in Y$.

Soient K une partie compacte et convexe de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne, *i.e.* telle que pour tous $x, y \in K$, on ait :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

(a) Soit $a \in K$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$f_n(x) = \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\,f(x),$$

admet un point fixe dans K.

(b) En déduire que f admet un point fixe dans K.

Chapitre 4

Équations différentielles, théorie générale

4.1 Généralités sur les équations différentielles

4.1.1 Introduction

On se donne :

— un intervalle I ouvert de $\mathbf{R}$ (éventuellement non borné) ;

— un ouvert U de $\mathbf{R}^N$ où $N \geqslant 1$;

— une fonction (au moins) continue $f : I \times U \to \mathbf{R}^N$.

On s'intéresse aux *équations différentielles* (aussi appelées systèmes différentiels lorsque $N \geqslant 2$) du *premier ordre* de la forme

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

où x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de t à valeurs dans U.

On pourra écrire sous forme réduite $\dot{x} = f(t, x)$.

Remarque : Une généralisation non abordée dans ce cours consiste à considérer des *équations implicites* de la forme $g(t, x, \dot{x}) = 0$.

4.1.2 Systèmes d'ordre $p \geqslant 2$

On peut réécrire une équation ou un système différentiel d'*ordre* $p \geqslant 2$

$$\frac{d^p x}{dt^p}(t) = f\Big(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \ldots, \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}}(t)\Big)$$

sous la forme d'un système d'ordre 1

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt}(t) = x_1(t) \\ \dfrac{dx_1}{dt}(t) = x_2(t) \\ \quad\vdots \quad = \quad \vdots \\ \dfrac{dx_{p-1}}{dt}(t) = f\big(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{p-1}(t)\big) \end{cases}$$

où l'inconnue est une fonction de t à valeurs dans U^p :

$$(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = \left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}}\right).$$

4.1.3 Terminologie

— Une *solution* est un couple (J, x) où J est un intervalle contenu dans I, et x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans U, vérifiant $\dot{x} = f(t, x)$ en tout point de J ; on peut aussi dire que x est *solution sur l'intervalle* J.

— Étant donnée une *condition initiale* $(t_0, x_0) \in I \times U$, résoudre le *problème de Cauchy* consiste à trouver une solution (J, x) telle que $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$;

— Une solution de la forme (I, x) est dite *globale* ;

— On dit qu'une solution (J_2, x_2) *prolonge* une autre solution (J_1, x_1) si $J_1 \subsetneq J_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.

— Une solution est dite *maximale* si elle n'admet aucun prolongement.

4.1.4 Équations différentielles autonomes

Par analogie avec la physique, on appellera en général *temps* la variable $t \in I$.

L'équation est dite *autonome* si l'application $f : U \to \mathbf{R}^N$ ne dépend pas du temps (en particulier, $I = \mathbf{R}$). Une équation différentielle autonome d'ordre 1 s'écrit donc sous la forme

$$\dot{x} = f(x),$$

et on dit qu'elle est définie par le *champ de vecteurs* f.

On étudiera des exemples de telles équations dans le cours suivant pour $N = 2$.

4.1.5 Inégalité des accroissements finis

Dans la suite, $\mathbf{R}$ est muni de la norme de la valeur absolue et $\mathbf{R}^N$ est muni d'une norme quelconque *qui est aussi notée* $|\cdot|$.

Soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note $g'(x) = (g_1'(x), \dots, g_N'(x))$. Alors,

$$|g(b) - g(a)| \leqslant \int_a^b |g'(s)| ds \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |g'|.$$

Cette inégalité se démontre facilement pour les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$. Le cas général est traité en exercice.

Dans le cas plus général où V est un ouvert de $\mathbf{R}^M$ et $G : V \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\mathbf{J}_G$ la matrice Jacobienne de G et on définit la norme subordonnée de $\mathbf{J}_G(X)$ par

$$\|\mathbf{J}_G(X)\| = \sup_{|h|=1} |\mathbf{J}_G(X) \cdot h|.$$

Alors, pour $X, Y \in V$ tels que le segment joignant X à Y est contenu dans V, on a l'inégalité

$$|G(Y) - G(X)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|\mathbf{J}_G(X + \theta(Y - X))\| \cdot |Y - X|.$$

4.2 Théorie locale d'existence et unicité

4.2.1 Objectif de la théorie locale

Le but de la théorie locale est de donner un énoncé le plus général possible (sur la fonction f) d'existence et d'unicité d'une solution. Nous allons procéder en plusieurs temps :

- Nous allons d'abord énoncer un théorème « technique » d'existence et unicité, dont la démonstration découle directement du *théorème du point fixe de Banach* appliqué dans un espace fonctionnel adapté ;
- Ensuite, nous donnerons un corollaire simple à utiliser et à retenir contenant également un renforcement de la notion d'unicité ;
- Finalement, nous énoncerons d'autres résultats plus techniques, mais utiles par la suite pour la notion de solution *maximale*.

4.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz précisé

Soient δ un nombre réel positif et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On pose

$$A = \big\{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \delta\big\}.$$

On suppose que $f : A \to \mathbf{R}^N$ est continue et vérifie :

- Il existe $M > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$,
$$|f(t, x)| \leqslant M;$$
- Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $(t, y) \in A$,
$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant C|x - y|.$$

On dit que f est *continue en* (t, x) et *lipschizienne par rapport à la deuxième variable* sur A.

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une et une seule solution (J, x) de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ telle que*

- *Temps d'existence : $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec*
$$T = \min\Big(\delta, \frac{\delta}{2M}, \frac{1}{2C}\Big);$$
- *Condition initiale : $x(t_0) = x_0$;*
- *Pour tout $t \in J$, $(t, x(t)) \in A$.*

Remarque : Le temps d'existence ne dépend que des constantes δ, M et C. Il ne dépend pas directement de la fonction f ou du point (t_0, x_0). Un énoncé plus précis sera donné plus loin.

On verra en exercice que l'on peut aussi rendre ce temps indépendant de la constante C.

4.2.3 Formulation intégrale d'une équation différentielle

Dans le cadre général, on peut réécrire l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ sous *forme intégrale.*

Lemme 4.2.1. *Soit un intervalle $J \subset I$ contenant t_0, et $x_0 \in U$. Une application continue $x : J \to U$ est solution de $\dot{x} = f(t, x)$ sur J avec condition initiale (t_0, x_0) si, et seulement si, pour tout $t \in J$,*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Preuve. Si x vérifie la formulation intégrale, alors elle est dérivable en tout point $t \in J$, de dérivée $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, elle vérifie bien $x(t_0) = x_0$.

Inversement, la nécessité de la formule intégrale s'obtient en intégrant l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ entre t_0 et $t \in J$.

4.2.4 Écriture sous forme de problème de point fixe

Revenons au théorème à démontrer où $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T = \min\big(\delta, \frac{\delta}{2M}, \frac{1}{2C}\big)$.

On introduit l'espace

$$E = \mathcal{C}(J, B_f(x_0, \delta)).$$

On observe que l'espace métrique $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est *complet*, car $(J, |\cdot|)$ est compact et $B_f(x_0, \delta)$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^N$, donc complète. Ici, $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme pour les fonctions continues sur J à valeurs réelles.

On définit l'application Φ sur E par

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Résoudre le problème sous la forme intégrale consiste à prouver l'existence et l'unicité d'un *point fixe* de Φ dans E.

4.2.5 Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz précisé

Il suffit de vérifier les conditions d'application du théorème du point fixe à l'application Φ sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

— *L'application Φ envoie E dans lui-même* : pour $y \in E$, la fonction $t \in J \mapsto \Phi(y(t))$ est continue. De plus, par la borne sur f, on a, pour tout $t \in J$,

$$|\Phi(y)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| \leqslant MT \leqslant \frac{\delta}{2},$$

ce qui prouve $\Phi \in E$.

— *L'application Φ est contractante* : pour $y, z \in E$, on a, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} |\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds \Big| \\ &\leqslant C \Big| \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds \Big| \\ &\leqslant CT \|y - z\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

4.2.6 Théorème de Cauchy-Lipschitz, énoncé $\mathcal{C}^1$

Nous donnons maintenant un énoncé simplifié qui sera suffisant dans la grande majorité des applications.

Corollaire 4.2.1. *On suppose que la fonction $f : I \times U \to \mathbf{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$ une condition initiale.*

Alors on a :

— *Existence : il existe $T > 0$ et une solution (J, x) de $\dot{x} = f(t, x)$ telle que $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ et $x(t_0) = x_0$.*

— *Unicité : soit $\tilde{J} \subset J$ un intervalle contenant t_0, soit $(\tilde{J}, \tilde{x})$ une solution de $\dot{x} = f(t, x)$ de condition initiale (t_0, x_0), alors $\tilde{x}$ coïncide avec la restriction de x à $\tilde{J}$.*

On rappelle qu'une fonction de $\mathbf{R}^M$ dans $\mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre un existent et sont continues.

4.2.7 Preuve de l'existence

Il suffit de vérifier les conditions d'application du théorème précisé.

Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$. Comme $I \times U$ est un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, il existe $\delta > 0$ tel que le *compact* A défini par

$$A = \big\{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \delta\big\}$$

soit inclus dans $I \times U$.

— L'application f étant continue sur $I \times U$, elle est *bornée sur le compact A*.

— L'application f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times U$, *les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, N$, existent en tout point de $I \times U$ et sont bornées sur le compact A.*

Ainsi, par l'inégalité des accroissement finis (on utilise que $B_f(x_0, \delta)$ est convexe), pour tout $(t, x) \in A$, $(t, y) \in A$, on a

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant \left(\sup_{(t,z) \in A} \|\mathbf{J}_f(t, z)\| \right) |x - y| \leqslant C|x - y|.$$

Ici, à t fixé, $\mathbf{J}_f(t, \cdot)$ est la matrice Jacobienne de f en la variable x.

4.2.8 Preuve de l'unicité

Soient $\tilde{J} = [a, b] \subset J$, tel que $t_0 \in]a, b[$, et $\tilde{x}$ une solution de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ sur $\tilde{J}$, de condition initiale (t_0, x_0).

On définit

$$\gamma = \sup\{t \in [t_0, b] \ : \ \text{pour tout } t' \in [t_0, t], \ \tilde{x}(t') \in B_f(x_0, \delta)\}.$$

Comme $\tilde{x}(t_0) = x_0$ et $\tilde{x}$ est continue, γ est bien défini et vérifie $t_0 < \gamma \leqslant b$.

La solution $\tilde{x}$ satisfait la formulation intégrale sur $[t_0, \gamma]$ et en procédant comme dans la preuve du théorème précisé, pour tout $t \in [t_0, \gamma]$, on obtient

$$|\tilde{x}(t) - x_0| \leqslant \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{x}(t) = x(t).$$

Par la définition de γ et la continuité de $\tilde{x}$, on en déduit que $\gamma = b$. Ainsi, par l'unicité dans le théorème précisé, $\tilde{x}$ et x coïncident sur $[t_0, b]$. On procède de même pour montrer que $\tilde{x}$ et x coïncident sur $[a, t_0]$.

4.2.9 Unicité et prolongement

Proposition 4.2.1. *Soient (J, x) et $(\tilde{J}, \tilde{x})$ deux solutions de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ telles que $J \neq \tilde{J}$. S'il existe $t_0 \in J \cap \tilde{J}$ tel que $x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$, alors les solutions x et $\tilde{x}$* coïncident *sur $J \cap \tilde{J}$. De plus, l'application*

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in J \\ \tilde{x}(t), & t \in \tilde{J} \end{cases}$$

est une solution de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ sur $J \cup \tilde{J}$ qui prolonge *(J, x) et $(\tilde{J}, \tilde{x})$.*

Preuve. On définit l'ensemble J_0 des points t de $J \cap \tilde{J}$ tels que $x(t) = \tilde{x}(t)$.

— L'ensemble J_0 est *non vide* par hypothèse ;

— L'ensemble J_0 est une *partie fermée* de $J \cap \tilde{J}$ car l'application $x - \tilde{x}$ est continue ;

— L'ensemble J_0 est une *partie ouverte* de $J \cap \tilde{J}$ d'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Comme $J \cap \tilde{J}$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, il est *connexe*, et on en déduit que $J_0 = J \cap \tilde{J}$.

4.2.10 Compléments sur l'existence

Le résultat suivant précise que la longueur de l'intervalle d'existence dans le théorème de Cauchy-Lipschitz peut être prise *uniforme* pour des données initiales (t_0, x_0) prises dans un compact de $I \times U$.

Proposition 4.2.2. *Soit K une partie* compacte *de $I \times U$. Il existe $T_K > 0$ tel que, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in K$, l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ admet une solution de condition initiale (t_0, x_0) définie sur l'intervalle $[t_0 - T_K, t_0 - T_K] \subset I$.*

La preuve, basée sur des arguments similaires aux résultats d'existence précédents, est laissée en exercice.

4.2.11 Autres extensions du résultat d'existence

— *Régularité supplémentaire :* on montre aisément par récurrence sur $k \geqslant 1$ que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors la solution x donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

— *Dépendance continue par rapport à des paramètres :* si la fonction f et ses dérivées partielles par rapport aux variables spatiales dépendent de façon continue d'un paramètre additionnel λ, alors la solution x_λ de $\dot{x} = f(t, x; \lambda)$ dépend aussi de façon continue de λ.

— *Affaiblissement des hypothèses :* en utilisant un argument de compacité (construction d'une solution comme limite d'une suite de solutions de problèmes approchés), on montre le théorème d'Arzela-Peano, affirmant l'existence d'une solution sous la seule hypothèse de continuité pour f. L'unicité peut alors être mise en défaut.

4.2.12 Exemple de non-unicité

On remarque que l'affaiblissement des hypothèses sur la fonction f peut conduire à un résultat de *non-unicité*, autrement dit à l'existence de plusieurs solutions de même donnée initiale.

Pour tout $a \geq 0$, on définit les fonctions $x_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$x_a(t) = \begin{cases} (t-a)^2 & \text{pour } t \geqslant a, \\ 0 & \text{pour } t < a. \end{cases}$$

Ces fonctions (ainsi que la fonction nulle) sont des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = 2|x|^{\frac{1}{2}},$$

avec donnée initiale $(0, 0)$.

La fonction f ci-dessus n'est pas lipschitzienne en 0, ce qui explique que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas pour les données initiales du type $(t_0, 0)$.

4.2.13 Exemple de temps de vie fini

On ne peut pas attendre en général qu'une solution d'une équation différentielle non linéaire soit définie pour tout temps.

Exemple. On considère le problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = [x(t)]^2, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Comme $x_0 > 0$ et $\dot{x} \geqslant 0$ par l'équation, on s'attend à une solution positive pour les temps positifs (tant qu'elle existe). L'équation est donc équivalente à

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)(t) = \frac{\dot{x}(t)}{[x(t)]^2} = 1, \quad x(0) = x_0,$$

d'où en intégrant entre 0 et $t \in [0, T(x_0)[$ où $T(x_0) = \frac{1}{x_0}$,

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t \implies x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

On voit que $\lim_{t \uparrow T(x_0)} x(t) = +\infty$, ce qui signifie que le *temps de vie* de cette solution est fini.

4.3 Solutions maximales

4.3.1 Existence de solutions maximales

On rappelle qu'une solution (J, x) est dite *maximale* si elle n'admet aucun prolongement.

Théorème 4.3.1. *On suppose que la fonction $f : I \times U \to \mathbf{R}^N$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t_0, x_0) \in I \times U$ une condition initiale. Il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 et* ouvert dans I, *et une solution x de $\dot{x} = f(t, x)$ sur J de condition initiale (t_0, x_0) qui est* maximale.

Preuve. On considère $\mathcal{J}$ l'ensemble des solutions $(\tilde{J}, \tilde{x})$ de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ de condition initiale (t_0, x_0), et on pose

$$J = \bigcup_{(\tilde{J}, \tilde{x}) \in \mathcal{J}} \tilde{J}.$$

L'intervalle J est inclus dans I et contient t_0.

On définit une application $x : J \to U$ de la façon suivante : pour tout $t \in J$, il existe $(\tilde{J}, \tilde{x}) \in \mathcal{J}$ tel que $t \in \tilde{J}$; on pose alors $x(t) = \tilde{x}(t)$. On vérifie que cette définition ne dépend pas de l'élement $(\tilde{J}, \tilde{x}) \in \mathcal{J}$ considéré : en effet, si $(J_1, x_1) \in \mathcal{J}$ est tel que $t \in J_1$, alors on sait que $\tilde{x}$ et x_1 coïncident en t.

Ainsi, (J, x) est bien une solution, et on ne peut pas la prolonger, par définition de J.

Montrons maintenant que J est un intervalle ouvert. Par exemple, considérons $T^\star$ la *borne supérieure* de l'intervalle J. Si l'on suppose que $T^\star \in J$, alors on peut considérer le problème de Cauchy avec donnée initiale $(T^\star, x(T^\star))$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $T > 0$ et une solution $([T^\star - T, T^\star + T], \hat{x})$ de $\dot{x} = f(x)$.

On voit que l'application qui coïncide avec x sur J et avec $\hat{x}$ sur $[T^\star, T^\star + T]$ *prolonge* la solution (J, x) : contradiction.

4.3.2 Alternative d'explosion

On voudrait comprendre ce qu'il se passe lorsque une solution maximale *cesse d'exister* sur l'intervalle I, c'est-à-dire lorsque l'on ne peut pas prolonger une solution sur tout I.

Pour illustrer le phénomène, on se place dans le cas particulier suivant : $I = \mathbf{R}$, $U = \mathbf{R}^N$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$.

Théorème 4.3.2. *Soit (J, x) une solution* maximale *de $\dot{x} = f(t, x)$, où $J =]T_\star, T^\star[$. Alors, on a l'alternative suivante*

— *ou bien* $T^\star = +\infty$ *:* existence globale dans le sens positif du temps *;*

— *ou bien* $T^\star < +\infty$ *et* $\lim_{t\uparrow T^\star} |x(t)| = +\infty$ *:* explosion.

De même,

— *ou bien* $T_\star = -\infty$ *:* existence globale dans le sens négatif du temps *;*

— *ou bien* $T_\star > -\infty$ *et* $\lim_{t\downarrow T_\star} |x(t)| = +\infty$ *:* explosion.

4.3.3 Preuve de l'alternative d'explosion

On se contente de considérer le sens positif du temps.

Dans le cas $T^\star = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Considérons donc le cas $T^\star < +\infty$ et supposons par contradiction qu'il existe une suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $t_n \uparrow T^\star$ et telle que la suite $(x(t_n))_{n\geqslant 0}$ est bornée.

Tous les termes de la suite $(t_n, x(t_n))_{n\geqslant 0}$ sont donc inclus dans une partie compacte K de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$. D'après le complément sur l'existence, il existe $T > 0$ *indépendent de* n, tel que pour tout $n \geqslant 0$, on peut définir une solution de $\dot{x} = f(t,x)$ de condition initiale $(t_n, x(t_n))$ sur l'intervalle $[t_n - T, t_n + T]$.

On obtient une contradiction en choississant $n \geqslant 0$ assez grand tel que $0 < T^\star - t_n < T$.

En effet, la fonction (J, x) peut être *prolongée* sur l'intervalle $J \cup [t_n, t_n + T]$ qui contient strictement J car $t_n + T > T^\star$ et cela contredit la notion de solution maximale.

4.4 Méthodes de comparaison

4.4.1 Rappel : équations linéaires du premier ordre sur R

Soient p et $q : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On voit que la solution de l'équation différentielle $\dot{\varphi} = p(t)\varphi$, avec condition initiale $(t_0, \varphi_0) \in I \times \mathbf{R}$, est explicitement donnée par

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp\Big(\int_{t_0}^t p(s)ds\Big).$$

Pour résoudre l'équation avec *second membre* :

$$\dot{\psi} = p(t)\psi + q(t),$$

avec condition initiale $(t_0, \psi_0) \in I \times \mathbf{R}$, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{d}{dt}\Big(\psi \exp\Big(-\int_{t_0}^t p(s)ds\Big)\Big) = q(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^t p(s)ds\Big).$$

En intégrant sur $[t_0, t]$, en utilisant les propriétés de l'exponentielle et la relation de Chasles, on trouve

$$\psi(t) = \psi_0 \exp\Big(\int_{t_0}^t p(s)ds\Big) + \int_{t_0}^t q(s)\exp\Big(\int_s^t p(\sigma)d\sigma\Big)ds.$$

4.4.2 Lemme de Grönwall

Lemme 4.4.1. *Soit $p, q : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues.* On suppose que la fonction p est à valeurs positives. *Soit $t_0 \in I$. On considère une application $x : I \to \mathbf{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I$,*

$$|\dot{x}(t)| \leqslant p(t)|x(t)| + q(t).$$

Soit ψ une solution, définie sur $I \cap [t_0, +\infty[$, de l'équation

$$\dot{\psi} = p(t)\psi + q(t)$$

telle que $\psi(t_0) \geqslant |x(t_0)|$. Alors pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I$,

$$|x(t)| \leqslant \psi(t).$$

Remarque : Il existe également des *formes intégrales* du lemme de Grönwall. Voir les exercices.

4.4.3 Preuve du lemme de Grönwall — cas de l'inégalité stricte

On considère d'abord le cas où $|x(t_0)| < \psi(t_0)$.

On raisonne par contradiction. Par continuité, si la majoration $|x(t)| \leqslant \psi(t)$ n'est pas vérifiée pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I$, alors il existe $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, tel que

$$|x(t_1)| = \psi(t_1) \quad \text{et} \quad |x(t)| < \psi(t) \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1[.$$

Ainsi, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$|\dot{x}(t)| \leqslant p(t)|x(t)| + q(t) \leqslant p(t)\psi(t) + q(t) = \dot{\psi}(t).$$

On obtient

$$|x(t) - x(t_0)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\dot{x}(s)| ds \leqslant \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}(s) ds = \psi(t) - \psi(t_0).$$

Par l'inégalité triangulaire, ceci implique pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$|x(t)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0)| < \psi(t);$$

une contradiction en $t = t_1$.

4.4.4 Preuve du lemme de Grönwall — cas général

Pour traiter le cas restant $|x(t_0)| = \psi(t_0)$, on considère, pour tout $\varepsilon \geqslant 0$ la solution ψ_ε de

$$\dot{\psi}_\varepsilon = p(t)\psi_\varepsilon + q(t), \quad \psi_\varepsilon(t_0) = |x(t_0)| + \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il découle du cas précédent que pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I$, $|x(t)| \leqslant \psi_\varepsilon(t)$.

D'après la formule explicite donnant ψ_ε, l'application $(\varepsilon, t) \in [0, +\infty[\times I \mapsto \psi_\varepsilon(t)$ est continue. De plus, $\psi_0 = \psi$.

On en conclut : pour tout $t \geqslant t_0$, $t \in I$, $|x(t)| \leqslant \psi(t)$.

4.4.5 Estimation de la divergence de solutions

On suppose que l'application continue $f : I \times U \to \mathbf{R}^N$, est *C-lipschitzienne en la variable* x *:* pour $C > 0$, pour tout $(t,x) \in I \times U$, $(t,y) \in I \times U$, $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant C|x-y|$.

Proposition 4.4.1 (Preuve laissée en exercice)**.** *Soient deux solutions* (J, x_1)*,* (J, x_2) *de l'équation* $\dot{x} = f(t,x)$ *définies sur un intervalle* compact $J \subset I$ *contenant* t_0*. Alors pour tout* $t \in J$*,*

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant e^{C|t-t_0|} |x_1(t_0) - x_2(t_0)| .$$

Remarque : Cette majoration peut ne pas paraître très bonne pour $|t - t_0|$ grand, mais en général on ne peut pas faire mieux, comme le montre l'exemple $x(t) = e^{Ct}x_0$ qui vérifie $\dot{x} = Cx$.

Conséquence. *Continuité par rapport au temps et à la donnée initiale* : sous les hypothèses de la proposition, il existe $\delta > 0$ tel que l'application qui à $(t, x_0) \in J \times B(x_1(t_0), \delta)$ associe la solution de $\dot{x} = f(t,x)$ de condition initiale (t_0, x_0) au temps t est bien définie et continue.

4.5 Théorie globale

4.5.1 Existence globale versus explosion en temps fini

Munis de la théorie de Cauchy, de l'alternative d'explosion et de méthodes de comparaison (lemme de Grönwall), on peut maintenant s'intéresser au problème délicat du comportement global en temps des solutions.

Par l'alternative d'explosion, il suffit d'obtenir une borne *a priori* sur une solution pour montrer qu'elle est globale : si, tant que la solution existe, elle vérifie certaines majorations qui empêchent sa norme de devenir arbitrairement grande, alors elle est globale.

Au contraire, une méthode possible pour montrer qu'une solution explose en temps fini est de trouver une *obstruction* à l'existence globale, en raisonnant par contradiction.

Au delà des critères généraux présentés ci-dessous, on peut développer des méthodes *ad hoc* pour montrer ces majorations a priori, ou au contraire prouver l'explosion en temps fini.

4.5.2 Critère analytique d'existence globale

On considère le cas $I = \mathbf{R}$ et $U = \mathbf{R}^N$.

Proposition 4.5.1. *Dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose de plus qu'il existe deux fonctions continues* p *et* $q : \mathbf{R} \to [0, +\infty[$ *telles que pour tout* $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$*,*

$$|f(t,x)| \leqslant p(t)|x| + q(t).$$

Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ *est* globale*, c'est-à-dire définie sur* $\mathbf{R}$ *tout entier.*

Remarques : Ce résultat affirme que toutes les solutions sont globales, mais ne donne pas d'information sur le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$, autre que la borne obtenue par le lemme de Grönwall au cours de la démonstration.

Pour la preuve, il suffit de considérer les temps $t \geqslant t_0$.

Preuve.

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$. On considère une solution ψ, définie sur l'intervalle $\mathbf{R}$, de l'équation scalaire

$$\dot{\psi} = p(t)\psi + q(t), \quad \psi(t_0) = |x_0|.$$

Cette solution est donnée explicitement par

$$\psi(t) = |x_0| \exp\Big(\int_{t_0}^t p(s)ds\Big) + \int_{t_0}^t q(s) \exp\Big(\int_s^t p(\sigma)d\sigma\Big)ds.$$

Par hypothèse sur la fonction f, une solution (J, x) de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec condition initiale (t_0, x_0) vérifie, pour tout $t \in J$, $t \geqslant t_0$,

$$|\dot{x}(t)| \leqslant p(t)|x(t)| + q(t).$$

Le lemme de Grönwall implique la majoration suivante, pour tout $t \in J$, $t \geqslant t_0$,

$$|x(t)| \leqslant \psi(t).$$

Cette majoration interdit à $|x(t)|$ de devenir arbitrairement grand sur $J \cap [t_0, +\infty[$. Donc, par *l'alternative d'explosion*, $[t_0, +\infty[\subset J$.

4.5.3 Critère géométrique d'existence globale

On considère le cas $I \supset [t_0, +\infty[$ et $U = \mathbf{R}^N$.

La notation $x \cdot y$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$.

Proposition 4.5.2 (Preuve en exercice)**.** *Soit $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe deux fonctions continues p et $q : I \to [0, +\infty[$ telles que pour tout $(t, x) \in I \times \mathbf{R}^N$,*

$$x \cdot f(t, x) \leqslant p(t)(x \cdot x) + q(t).$$

Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ de condition initiale (t_0, x_0) est globale en temps positif*, c'est-à-dire définie sur un intervalle contenant $[t_0, +\infty[$.*

Remarque. Ce critère géométrique généralise la condition précédente d'existence globale, même dans le cas scalaire. Par exemple, appliqué à l'équation scalaire $\dot{x} = -x^3$, ce critère tient compte du *signe* du terme cubique.

4.5.4 Critère d'explosion en temps fini

On suppose ici que $f : \mathbf{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue vérifiant

$$\int^{+\infty} \frac{dy}{f(y)} < +\infty.$$

Proposition 4.5.3. *La solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(x)$ avec condition initiale (t_0, x_0) explose au temps*

$$T^\star = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)}.$$

Remarque : L'équation $\dot{x} = f(x)$ est autonome et scalaire. C'est un cas particulier d'*équation à variables séparées*, qui peut donc s'intégrer.

4.5.5 Preuve du critère d'explosion

On définit la fonction $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$G(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{d\sigma}{f(\sigma)} \implies G'(y) = \frac{1}{f(y)}, \quad G(x_0) = 0.$$

Si (J, x) est la solution maximale de $\dot{x} = f(x)$ avec donnée initiale (t_0, x_0), par la formule de dérivation d'une fonction composée, on a sur J,

$$\frac{d}{dt}(G \circ x) = \dot{x}\,(G' \circ x) = 1.$$

Comme $G(x_0) = 0$, on en déduit par intégration sur $[t_0, t]$: pour tout $t \in J$, $G(x(t)) = t - t_0$.

On remarque que la fonction

$$G : [x_0, +\infty[\to \left[0, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)}\right[$$

est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

En particulier, elle est bijective, et son inverse G^{-1} est une fonction strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$,

$$G^{-1} : \left[0, \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)}\right[\to [x_0, +\infty[.$$

En particulier, la formule $G(x(t)) = t - t_0$ est équivalente à $x(t) = G^{-1}(t - t_0)$.

On en déduit :

$$\lim_{t \uparrow T^\star} x(t) = +\infty \quad \text{pour} \quad T^\star = t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)}.$$

4.6 Exercices du Chapitre 4

Exercice 41. (Applications directes du cours)

(a) On considère l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$ avec $f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ et $f(t, 0) = 0$. Vérifier que $x(t) = 0$ est solution avec $x_0 = 0$. En déduire que $x(0) > 0$ implique $x(t) > 0$ sur l'intervalle maximal d'existence.

(b) Soit $t \in \mathbf{R} \mapsto A(t) \in M_n(\mathbf{R})$ une application continue à valeur matricielle.

i) Retrouver par les théorèmes du cours que le problème de Cauchy $\dot{x} = A(t)x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ a une unique solution globale.

ii) Supposons $M = \sup_{t\in\mathbf{R}} \|A(t)\|_\infty < +\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme subordonnée à la norme ∞ sur $\mathbf{R}^n$. Donner une estimée $\|x(t)\|_\infty$ en fonction de $\|x_0\|_\infty$.

Exercice 42. (Une application du théorème du point fixe de Banach) On note $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 1 et de norme inférieure ou égale à 1, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |\cdot|$

(a) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{C}_{\text{pér}}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

(b) Montrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad [f(x+\sqrt{3})]^2 + [f(x-\sqrt{2})]^3 + 10f(x) = \sin(2\pi x)$$

admet une solution f continue et périodique de période 1.

Indication : appliquer le théorème du point fixe de Banach à une application $\Phi : \mathcal{C}_{\text{pér}} \to \mathcal{C}_{\text{pér}}$ bien choisie.

Exercice 43. (Version intégrale du lemme de Gronwall) Soient $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T[,\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction continue $v : [0,T[\to [0,+\infty[$ telle que

$$\forall t \in [0,T[, \quad u(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T[, \quad u(t) \leqslant C \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

Exercice 44. (Estimation de la divergence de solutions) Le but de l'exercice est de démontrer un résultat mentionné en cours sur l'estimation de la divergence des solutions, et d'en donner ensuite une généralisation.

On considère une application $f : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continue et C-lipschitzienne en x, pour une constante $C > 0$.

(a) Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ définies sur l'intervalle $[0,T]$, où $T > 0$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant e^{Ct}\,|x_1(0) - x_2(0)|\,.$$

(b) Soit $g : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ une application continue vérifiant, pour $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^N$,

$$|f(t,x) - g(t,x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient x_1 une solution de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ définie sur l'intervalle $[0,T]$, où $T > 0$, et x_2 une solution de l'équation $\dot{x} = g(t,x)$ définie sur l'intervalle $[0,T]$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(0) - x_2(0)|\,e^{Ct} + \frac{\varepsilon}{C}\left(e^{Ct} - 1\right).$$

Exercice 45. (*Inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles) On considère une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur $\mathbf{R}^N$.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_N'(x)).$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $a, b \in I$, $a < b$, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(s)\| ds.$$

(a) Montrer directement l'inégalité dans le cas des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^N$.

(b) Montrer l'inégalité dans le cas de la norme $\|\cdot\|_2$.

Indication. Utiliser la fonction $\psi : I \to \mathbf{R}$ définie par (on peut supposer $f(b) \neq f(a)$)

$$\psi(x) = f(x) \cdot v \quad \text{où} \quad v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|_2}.$$

(On a noté $g \cdot h = \sum_{j=1}^N g_j h_j$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$.)

(c) Montrer l'inégalité pour toute norme $\|\cdot\|$.

Indications : On rappelle que pour tout $x \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| \leqslant \delta$,

$$\|f(x+h) - f(x) - df_x(h)\| \leqslant \varepsilon |h|,$$

ce qui s'écrit également sous la forme $f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(h)$. La notation $h \mapsto df_x(h)$ désigne la différentielle de f au point x. En particulier, on a ici $df_x(h) = hf'(x)$.

Considérer $\varepsilon > 0$ arbitraire et définir l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que la relation

$$\|f(y) - f(a)\| \leqslant \int_a^y \|f'(s)\| ds + 2\varepsilon(y - a) \qquad (\star)$$

est vérifiée pour tout $y \in [a, x]$. Montrer que A est non vide et fermé dans $[a, b]$. Supposer que $b \notin A$ et considérer sa borne supérieure $c \in [a, b]$. Trouver une contradiction en utilisant le rappel ci-dessus. Conclure.

Exercice 46. (*Suite de l'exercice précédent) On s'intéresse maintenant au cas plus général d'une fonction $F : U \to \mathbf{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^M$. On note $\mathbf{J}_F$ la matrice Jacobienne de F, définie par sur U

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_M} \end{pmatrix}$$

Soient deux normes notées $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^M$ et $\mathbf{R}^N$. On définit, pour tout $X \in U$, la norme subordonnée de $\mathbf{J}_F(X)$ comme matrice de taille $N \times M$ par

$$\|\mathbf{J}_F(X)\| = \sup_{\|h\|=1} \|\mathbf{J}_F(X)h\|.$$

Montrer que pour tous $X, Y \in U$ tels que le segment joignant X à Y est contenu dans U,

$$\|F(Y) - F(X)\| \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} \|\mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y)\| \cdot \|Y - X\|.$$

Indication : utiliser l'application f définie par $f(\theta) = F((1-\theta)X + \theta Y)$.

Exercice 47. (*Application de l'exercice précédent)

(a) Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est contractante sur $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|)$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\sup_{\mathbf{R}^N} \|\mathbf{J}_F\| \leqslant k$.

(b) Montrer que si $F(0) = 0$ et $\|\mathbf{J}_F(0)\| < 1$, alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^N$ tel que

$$\text{pour tout } X \in V, \quad \lim_{n \to +\infty} F^n(X) = 0,$$

où $F^n = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 48. (Une variante du théorème du point fixe de Banach) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Soit $f : X \to X$ une application. On suppose que pour un entier $\ell \geqslant 1$, l'application f^ℓ est contractante (on rappelle que $f^\ell = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ fois}}$).

(a) Montrer que f admet un unique point fixe sur X.

(b) Montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge vers le point fixe de f.

Exercice 49. (*Variante du théorème de Cauchy-Lipschitz) Le but de l'exercice est de donner une version raffinée du théorème de Cauchy-Lipschitz vu en cours, en rendant le temps d'existence $T > 0$ indépendant de la constante de Lipschitz C.

Soient δ un nombre réel positif et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On pose

$$A = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \delta\}.$$

On suppose que $f : A \to \mathbf{R}^N$ est continue et vérifie :

— Il existe $M > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $|f(t, x)| \leqslant M$;

— Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $(t, y) \in A$, $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant C|x - y|$.

Sous les hypothèses précédentes, on veut montrer qu'il existe une solution (J, x) de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ et $T > 0$ dépendant de δ et M, mais indépendant de C.

(a) On considère l'application Φ définie sur E par

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Montrer que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, l'application Φ^ℓ est lipschitzienne avec constante de Lipschitz égale à $C^\ell T^\ell / \ell!$

(b) En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que l'existence d'une solution sur un intervalle de temps dont la longueur ne dépend que de M.

Exercice 50. (Critère géométrique d'existence globale) On note $x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant énoncé en cours. *Soit* $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *On suppose qu'il existe deux fonctions continues* p *et* $q : \mathbf{R} \to [0, +\infty[$ *telles que pour tout* $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$,

$$x \cdot f(t, x) \leqslant p(t)(x \cdot x) + q(t).$$

Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ *avec donnée initiale* $(0, x_0)$ *est* globale en temps positif*, c'est-à-dire définie sur un intervalle contenant* $[0, +\infty[$.

(a) On pose $h(t) = x(t) \cdot x(t)$. Calculer $\dot{h}$.

(b) Conclure en utilisant l'hypothèse sur f.

Exercice 51. (Flot de gradient) Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t)), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = x_0,$$

où

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)$$

est le gradient de F.

(a) Soit (J, x) une solution de condition initiale $(0, x_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$,

$$\frac{d}{dt} [F(x)] = -\|\nabla F(x)\|^2,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne. En déduire que pour tout $t \in J$,

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant t^{\frac{1}{2}} (F(x_0) - F(x(t)))^{\frac{1}{2}}.$$

(b) On suppose que $\inf_{x \in \mathbf{R}^N} F(x) > -\infty$. Montrer alors que toute solution maximale est définie sur $J \supset [0, +\infty[$.

(c) Donner un exemple de fonction F telle que la solution explose en temps fini.

Exercice 52. (Sur les équations linéaires scalaires d'ordre 2) Soient p, q et r des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r, \tag{NH}$$

et l'équation homogène associée

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{H}$$

(a) Rappeler la structure de l'ensemble des solutions réelles de (H). Même question pour (NH).

(b) Écrire (NH) sous la forme d'un système d'ordre un en $X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$.

Soient h_1 et h_2 deux solutions de (H). On définit la matrice

$$W = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ \dot{h}_1 & \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\det W(t_0) = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t) = 0$. *Si* $\det W \neq 0$*, on dit que les solutions sont indépendantes.*

(d) On suppose à partir de maintenant que les deux solutions h_1 et h_2 satisfont pour tout temps $\det W \neq 0$. Soit x une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe des fonctions u_1 et u_2 de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$x = u_1 h_1 + u_2 h_2, \quad \dot{x} = u_1 \dot{h}_1 + u_2 \dot{h}_2.$$

Montrer que nécessairement $\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0$.

(e) Calculer $\ddot{x} + p\dot{x} + qx$. En déduire que x est solution de (NH) si, et seulement si

$$\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2 = r.$$

(f) Déduire de la question précédente une expression de $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$ en fonction de r et h_1, h_2.

(g) Conclusion : déduire de ce qui précéde une expression de la solution générale de (NH) en fonction de h_1, h_2 et r.

Exercice 53. (Suite de l'exercice précédent) Soit $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle du second ordre avec second membre

$$\ddot{x} + x = r.$$

(a) Donner deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.

(b) En utilisant la formule obtenue dans l'exercice précédent, calculer la solution générale de l'équation avec second membre r.

(c) On suppose dans cette question que r est périodique de période 2π. Montrer que toute x est périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} r(s) \sin s ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} r(s) \cos s ds = 0.$$

(d) Application : calculer les solutions des équations suivantes et discuter leur comportement

$$\ddot{x} + x = \cos(x) \quad \text{et} \quad \ddot{y} + y = \cos(2x).$$

Chapitre 5

Systèmes autonomes de dimension 2

5.1 Généralités sur les systèmes autonomes

5.1.1 Introduction

On considère dans ce cours les systèmes *autonomes* de dimension 2, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

où les fonctions $f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(X) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

le système se réécrit sous la forme $\dot{X} = F(X)$.

La théorie générale s'applique : pour toute donnée initiale (t_0, X_0) l'existence et unicité d'une solution maximale (globale ou explosant en temps fini) est obtenue par le théorème de Cauchy-Lipschitz et les résultats sur les solutions maximales.

5.1.2 Propriété d'un système autonome

Une propriété fondamentale d'un système autonome est l'*invariance* par translation en temps. Pour $t_0 \in \mathbf{R}$, on note τ_{t_0} la translation : $t \mapsto t + t_0$.

Proposition 5.1.1. *Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Si X est solution de $\dot{X} = F(X)$ sur un intervalle maximal J, alors la fonction $t \in \tau_{t_0}(J) \mapsto X(t - t_0)$ définie sur l'intervalle $\tau_{t_0}(J)$ est aussi une solution maximale.*

Preuve. Pour $t \in \tau_{t_0}(J)$, on pose $Y(t) = X(t - t_0)$. Comme X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tau_{t_0}(J)$. De plus,

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t - t_0) = F(X(t - t_0)) = F(Y(t)).$$

On voit donc que Y est solution sur l'intervalle $\tau_{t_0}(J)$.

Si Y était prolongeable sur un intervalle maximal contenant strictement $\tau_{t_0}(J)$, alors $t \mapsto Y(t+t_0)$ serait solution sur un intervalle contenant strictement J et prolongeant la solution X ; contradiction avec le fait que (J, X) est solution maximale.

5.1.3 Notion de flot

Pour $X_0 \in \mathbf{R}^2$, on note $t \mapsto \Phi(t; X_0)$ la solution de donnée initiale $(0, X_0)$ définie sur l'intervalle maximal $J(X_0)$.

On sait déjà que l'application $(t, X_0) \in V \mapsto \Phi(t; X_0)$ est continue sur son domaine de définition

$$V = \{(t, X_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 : t \in J(X_0)\}.$$

Pour $t \in \mathbf{R}$, on note φ_t l'application $Y \mapsto \Phi(t; Y)$ de domaine de définition

$$U_t = \{Y \in \mathbf{R}^2 : t \in J(Y)\}.$$

La propriété d'invariance par translation a pour conséquence : pour $Y \in \mathbf{R}^2$, $t \in J(Y)$ et $s \in J(\varphi_t(Y))$,

$$\varphi_s(\varphi_t(Y)) = (\varphi_s \circ \varphi_t)(Y) = \varphi_{t+s}(Y).$$

En particulier, pour $t \in J(Y)$, on a $-t \in J(\varphi_t(Y))$ et la propriété $(\varphi_t \circ \varphi_{-t})(Y) = Y$.

Pour $Y \in \mathbf{R}^2$, on appelle *trajectoire passant par* Y la courbe $\{\varphi_t(Y) : t \in J(Y)\}$.

5.1.4 Propriétés des trajectoires

Deux trajectoires ne peuvent avoir d'intersection sauf si elles sont confondues : en effet, si pour certains temps t, s on a $\varphi_t(Y) = \varphi_s(Z)$, alors $\varphi_{t-s}(Y) = Z$ et $\varphi_{t'}(Z) = \varphi_{t'+t-s}(Y)$, ce qui signifie que la trajectoire issue de Z est contenue dans celle issue de Y. Par symétrie, les trajectoires sont confondues.

L'espace $\mathbf{R}^2$ est *partitionné* en trajectoires, dont la représentation est appelée *portrait de phase*. Les trajectoires sont de trois types, selon les propriétés de l'ensemble (exercice)

$$G(X_0) = \{t \in J(X_0) : \varphi_t(X_0) = X_0\}$$

qui, outre 0, contient les éventuels « temps de retour » de la trajectoire au point initial :

- Si $G(X_0) = \mathbf{R}$, alors la solution est globale, constante et X_0 est un *point d'équilibre* ;
- Si $G(X_0) = \{0\}$, alors la trajectoire est l'image de $\mathbf{R}$ par une injection continue ;
- Si $G(X_0) = T\mathbf{Z}$ pour $T > 0$, alors la solution est globale et la trajectoire est périodique, de période T.

5.1.5 Notions de stabilité d'un point d'équilibre

On remarque que pour un point d'équilibre X_0 (aussi appelé *point critique*) du système $\dot{X} = F(X)$, on a $F(X_0) = 0$.

— Un point d'équilibre est *stable* si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si X est une solution du système qui vérifie $|X(0) - X_0| \leqslant \delta$ alors X est définie sur $[0, \infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, $|X(t) - X_0| \leqslant \varepsilon$.

— Un point d'équilibre qui n'est pas stable, est dit *instable*.

— Un point d'équilibre est *asymptotiquement stable* s'il est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution X du système vérifiant $|X(0) - X_0| \leqslant \delta$, X est définie sur $[0, \infty[$ et $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_0$.

5.1.6 Illustration de la stabilité dans le cas scalaire linéaire

Les notions de stabilité, instabilité, stabilité asymptotique ont un sens pour les systèmes de toute dimension.

On peut les illustrer par exemple en dimension 1.

— Les solutions de $\dot{x} = \lambda x$ pour $\lambda < 0$ sont $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ donc 0 est un équilibre stable et asymptotiquement stable.

— Les solutions de $\dot{x} = \lambda x$ pour $\lambda > 0$ sont $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$ donc 0 est un équilibre instable.

— Les solutions de $\dot{x} = 0$ sont $x(t) = x(0)$ donc 0 est un équilibre stable mais pas asymptotiquement stable.

5.2 Systèmes linéaires

5.2.1 Notations

Dans le cas *linéaire*, le système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ sont donnés.

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

le système s'écrit aussi $\dot{X} = AX$.

5.2.2 Étude qualitative d'un système linéaire

Pour étudier l'allure des trajectoires et la stabilité de $(0, 0)$, on va considérer les trois cas possibles :

— **Cas 1 :** A a deux valeurs propres réelles distinctes.

— **Cas 2 :** A a deux valeurs propres non réelles, conjuguées.

— **Cas 3 :** A a une valeur propre réelle double.

Le cas où une valeur propre est nulle est laissé en exercice.

5.2.3 Deux valeurs propres réelles distinctes non nulles

Dans le cas où A a deux valeurs propres réelles λ, μ distinctes, on sait que A est *diagonalisable* dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Deux vecteurs propres associés respectivement à λ et μ forment une base de $\mathbf{R}^2$. On note P la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres. On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D$$

et

$$W = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}X \quad \text{vérifie} \quad \dot{W} = DW.$$

Ainsi, après ce changement de variable, la solution générale est

$$w(t) = w_0 e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad z(t) = z_0 e^{\mu t}.$$

5.2.4 Portrait de phase

Un portrait de phase représente les trajectoires des solutions dans le plan (x, y). Les *flèches représentent le sens du temps* sur chaque trajectoire.

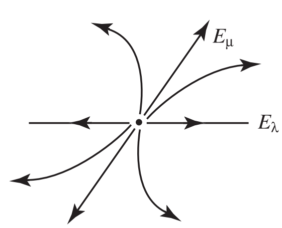
Dans les portraits de phase qui suivent, les axes représentent les directions propres. Ceux-ci ne sont pas représentés orthogonaux car les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes ne sont pas nécessairement orthogonaux.

Deux trajectoires différentes ne s'intersectent pas.

5.2.5 Portrait de phase du nœud

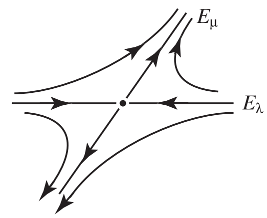
Dans le cas $0 < \mu < \lambda$, comme $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$ et $z(t) = z_0 e^{\mu t}$, on a $|w(t)| = C|z(t)|^{\frac{\lambda}{\mu}}$, d'où la forme « parabolique » des trajectoires non rectilignes.

Le point d'équilibre $(0, 0)$ est une *source* ou *nœud instable*. Si on change le sens du temps, *ce qui revient à considérer le cas* $\lambda < \mu < 0$, on obtient le même portrait de phase avec les flèches représentant le temps *inversées*. Le point d'équilibre $(0, 0)$ est alors asymptotiquement stable ; c'est un *puit* ou *nœud stable*.



5.2.6 Portrait de phase de la selle

Dans le cas $\lambda < 0 < \mu$, comme $w(t) = w_0 e^{\lambda t}$ et $z(t) = z_0 e^{\mu t}$, on a $|w(t)| = C|z(t)|^{-\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|}$, d'où la forme « hyperbolique » des trajectoires non rectilignes. Le point d'équilibre $(0,0)$ est *instable*.



5.2.7 Deux valeurs propres non réelles conjuguées

On considère maintenant le cas où $\lambda = u + iv$ et $\mu = u - iv$ avec $v \neq 0$. On sait que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$: il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D.$$

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix};$$

en posant $R = PQ$, R est une matrice réelle et on obtient

$$R^{-1}AR = Q^{-1}DQ = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

On se ramène ainsi au système

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

5.2.8 Foyer et centre

Ce système se résout facilement en coordonnées polaires $w = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$.

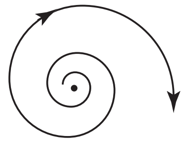
On obtient

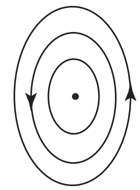
$$\dot{r} = ur, \quad \dot{\theta} = -v.$$

Les solutions sont

$$r(t) = r_0 e^{ut}, \quad \theta(t) = \theta_0 - vt.$$

Les portraits de phase diffèrent selon les valeurs de u et v et sont du type *foyer* ou *centre*. Dans le cas du foyer stable, l'origine est asymptotiquement stable. Dans le cas du centre, l'origine est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.





5.2.9 Cas d'une seule valeur propre double

On considère maintenant le cas où $\lambda \neq 0$ est la seule valeur propre réelle de la matrice A. Ce cas se décompose en deux sous-cas :

— Nœud stable ou instable si la matrice A est diagonale ; les trajectoires sont toutes rectilignes.

— Nœud dégénéré stable ou instable si la matrice A n'est pas diagonale.

5.2.10 Étude du nœud dégénéré

Par changement de variable, on se ramène au système

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix},$$

qui se réécrit

$$\dot{w} = \lambda w + z, \quad \dot{z} = \lambda z.$$

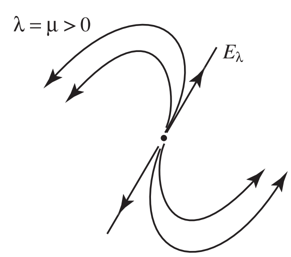
On obtient la solution générale

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t}, \quad w(t) = w_0 e^{\lambda t} + z_0 t e^{\lambda t}.$$

On trouve donc la relation suivante entre z et w (pour $\lambda \neq 0$)

$$w = w_0 \frac{z}{z_0} + \frac{1}{\lambda} \left(\log \frac{z}{z_0} \right) z,$$

ce qui conduit au portrait de phase suivant pour le cas $\lambda > 0$:



5.3 Systèmes non linéaires

5.3.1 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Les systèmes linéaires ont un grand intérêt en eux-mêmes. Il est aussi très important de les étudier en relation avec les systèmes non linéaires pour les solutions petites car les effets nonlinéaires sont alors faibles.

Pour des solutions proches d'un état d'équilibre, il est pertinent de *linéariser* le système et d'étudier dans un premier temps le système linéaire associé.

Dans cette partie, nous étudions ces questions de façon très partielle sur quelques exemples typiques. On prend systématiquement $t_0 = 0$ dans la suite.

5.3.2 Perturbation non linéaire dans le cas scalaire

On considère un cas modèle simple en perturbant le cas linéaire scalaire par une nonlinéarité quadratique :

$$\dot{x} = \lambda x - x^2, \quad \lambda = -1, 0.$$

Pour $\lambda = -1$, les solutions de $-\frac{\dot{x}}{x+x^2} = 1$ sont

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 + x_0(1 - e^{-t})}.$$

Les trajectoires ont la même allure que celles du cas linéaire correspondant aux solutions $x_{\mathrm{L}}(t) = x_0 e^{-t}$.

Pour $\lambda = 0$ et $x_0 > 0$, les solutions de $-\frac{\dot{x}}{x^2} = 1$ s'écrivent

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + t x_0}.$$

Les trajectoires n'ont pas le même comportement qualitatif que celles du cas linéaire correspondant aux solutions constantes $x_{\mathrm{L}}(t) = x_0$.

5.3.3 Perturbation non linéaire d'un puit

Pour $0 < \mu \leqslant \lambda$ et deux fonctions $h, k : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$h(0,0) = k(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla h(0,0) = \nabla k(0,0) = 0,$$

on considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + h(x,y) \\ \dot{y} = -\mu y + k(x,y) \end{cases} \tag{$\star$}$$

L'origine est un point d'équilibre et pour le cas linéaire ($h = k = 0$), c'est un puit. Cette situation persiste dans le cas non linéaire.

Théorème 5.3.1. *Il existe des constantes $\delta > 0$, $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que si $|(x_0, y_0)| \leqslant \delta$, alors la solution maximale $(J, (x, y))$ du système $(\star)$ avec donnée initiale (x_0, y_0) existe pour tout $t \geqslant 0$ et vérifie la majoration, pour tout $t \geqslant 0$,*

$$|(x(t), y(t))| \leqslant C \exp(-\gamma\, t).$$

Preuve. Dans cette preuve, on choisit la norme $|(x, y)|^2 = x^2+y^2$ sans perte de généralité. Soient

$$0 < \gamma < \mu \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mu - \gamma.$$

Par les hypothèses sur h et k, on peut choisir δ tel que pour tout $(x, y) \in B_f(0, 2\delta)$, on ait

$$|(h(x, y), k(x, y))| \leqslant \varepsilon |(x, y)|.$$

On considère une donnée initiale (x_0, y_0) telle que $|(x_0, y_0)| \leqslant \delta$ et la solution maximale $(J, (x, y))$ du système $(\star)$ correspondante. On pose

$$T_{\text{sortie}} = \sup\{T \in [0, T^\star[: \forall t \in [0, T],\ |(x(t), y(t))| \leqslant 2\delta\}.$$

L'ensemble ci-dessus contient le temps 0 et donc n'est pas vide. De plus, par continuité, $0 < T_{\text{sortie}} \leq T^\star$. Dans la suite, on travaille sur l'intervalle de temps $[0, T_{\text{sortie}}]$.

On pose

$$\psi(t) = e^{2\gamma t}|(x(t), y(t))|^2 = e^{2\gamma t}\left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right).$$

Alors, par dérivation et en utilisant le système, on a

$$\dot\psi(t) = 2e^{2\gamma t}\left[\dot x x + \dot y y + \gamma x^2 + \gamma y^2\right]$$
$$= -2e^{2\gamma t}\left[(\lambda - \gamma)x^2 + (\mu - \gamma)y^2 + h(x, y)x + k(x, y)y\right] \leqslant 0.$$

Pour tout $t \in [0, T_{\text{sortie}}]$, par intégration sur $[0, t]$, on obtient

$$\psi(t) \leqslant \psi(0) \quad \text{et} \quad |(x(t), y(t))| \leqslant e^{-\gamma t}|(x_0, y_0)| \leqslant \delta.$$

Ceci nous conduit à trois observations terminant la preuve :

— La majoration $\sup_{[0,T_{\text{sortie}}]} |(x, y)| \leqslant \delta$ et la continuité de (x, y) entraînent $T_{\text{sortie}} = T^\star$;

— La majoration $|(x, y)| \leqslant \delta$ sur $[0, T^\star[$ et l'alternative d'explosion entraînent $T^\star = \infty$;

— La majoration $|(x(t), y(t))| \leqslant e^{-\gamma t}|(x_0, y_0)|$ est donc vérifiée pour tout $t \in [0, \infty[$.

5.3.4 Autres résultats de « robustesse »

Le théorème précédent est un résultat de « robustesse » ou « stabilité structurelle » d'un puit par perturbation non linéaire. Cela se généralise aux cas source et selle (en un sens approprié).

En revanche, dans le cas d'un centre, nous allons illustrer sur deux exemples le fait que le comportement des trajectoires dépend de façon décisive de la forme exacte de la nonlinéarité, même si l'on ne considère que le voisinage de l'origine.

5.3.5 Deux modèles nonlinéaires aux comportements différents

En quoi les deux systèmes ci-dessous différent-ils ?

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases} \qquad\qquad (2) \quad \begin{cases} \dot{w} = -z \\ \dot{z} = w - z^3 \end{cases}$$

Le système linéaire associé est identique, et l'origine est un centre pour ce système.

Cependant, la dynamique de ces deux systèmes est qualitativement différente.

Pour le premier système, on observe que la quantitée

$$E(x,y) = x^2 - \frac{x^4}{2} + y^2$$

est conservée le long de chaque trajectoire. Pour des solutions suffisamment petites, les trajectoires sont périodiques et proches de cercles centrés en zéro.

5.3.6 Exemple de fonctionnelle de Liapunov

Pour le deuxième système, il n'y a pas de quantité conservée. On va démontrer que toutes les solutions convergent vers le point d'équilibre $(0,0)$.

Proposition 5.3.1. *Toutes les solutions du système* (2) *sont globales en temps positif et convergent vers* $(0,0)$ *lorsque* $t \to \infty$.

Preuve. On pose

$$G(w,z) = \frac{1}{2}\left(w^2 + z^2\right).$$

On observe que

$$\frac{d}{dt}G(w,z) = \dot{w}w + \dot{z}z = -z^4. \tag{3}$$

Ainsi, le long des trajectoires, G décroit strictement, et il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $|(w(t), z(t))| \leqslant C_1$. On en déduit que toutes les solutions sont globales en temps positif.

Maintenant, on montre que $|z(t)| \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Supposons au contraire qu'il existe une constante $C_2 > 0$ et une suite $t_n \to \infty$ telle que $|z(t_n)| \geqslant C_2 > 0$. Quite à extraire une sous-suite, on suppose que la suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie $t_{n+1} - t_n \geqslant 1$.

Comme $\dot{z} = w - z^3$ est bornée, il existe $C_3 > 0$ telle que $|\dot{z}| \leqslant C_3$. En posant $\tau = \min(1, C_2/2C_3)$, par l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\inf_{[t_n, t_n+\tau]} |z| \geqslant \frac{C_2}{2}.$$

On obtient alors une contradiction en intégrant (3) sur $[0, t_n]$,

$$G(t_n) - G(0) = -\int_0^{t_n} z^4(t)dt \leqslant -\tau n \left(\frac{C_2}{2}\right)^4.$$

On termine en montrant que $|w(t)| \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Pour cela, il suffit d'utiliser les équations

$$\dot{w} = -z, \quad \dot{z} = w - z^3$$

et l'information déjà connue $\lim_\infty z = 0$.

On raisonne à nouveau par l'absurde. Supposons qu'il existe une constante $0 < C_4 \leqslant 1$ telle que pour une suite $t_n \to \infty$, $|w(t_n)| \geqslant C_4$.

Comme $\lim_\infty z = 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geqslant T$, on ait $|z(t)| \leqslant C_4/8$.

Ainsi, pour n tel que $t_n > T$, par $|\dot{w}| \leqslant |z(t)| \leqslant \frac{C_4}{8}$, pour tout $t \in [t_n, 1 + t_n]$, on a

$$|w(t)| \geqslant |w(t_n)| - \frac{C_4}{8} \geqslant \frac{7}{8}C_4.$$

Mais, par l'équation $\dot{z} = w - z^3$, cela donne, en utilisant l'inégalité des accroissements finis

$$|z(t_n + 1)| \geqslant \frac{7}{8}C_4 - \left(\frac{C_4}{8}\right)^3 - |z(t_n)| \geqslant \frac{C_4}{2},$$

une contradiction avec la majoration précédente sur z.

5.4 Exercices du Chapitre 5

Exercice 54. (Applications directes du cours) I. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

avec une donnée initiale $(0, (x_0, y_0))$, avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution du système et qu'elle est globale. Vérifier que cette solution satisfait $\ddot{x} + x = 0$ et $\ddot{y} + y = 0$ sur $\mathbf{R}$ et en déduire qu'elle admet une formule explicite.

(b) Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre du système et qu'il est stable. Est-il asymptotiquement stable ?

II. On considère maintenant le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3, \\ \dot{y} = -x^3, \end{cases}$$

avec une donnée initiale $(0, (x_0, y_0))$, avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale $(I, (x, y))$ du système.

(b) On introduit la fonctionnelle

$$E(t) = x(t)^4 + y(t)^4.$$

Vérifier que pour tout $t \in I$, on a $E(t) = E(0)$. En déduire que la solution est globale, c'est-à-dire $I = \mathbf{R}$.

(c) Montrer que $(0,0)$ est l'unique équilibre du système et qu'il est stable. Est-il asymptotiquement stable ?

Exercice 55. (Résolution explicite d'une équation différentielle autonome non linéaire et discussion du comportement des solutions maximales en fonction d'un paramètre) Pour $\alpha > 0$, on considère l'équation différentielle à variables séparées

$$\dot{x} = x^\alpha + 1, \quad x(0) = x_0 \geqslant 0.$$

(a) Exprimer la solution générale de l'équation en introduisant la fonction

$$G(y) = \int_0^y \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha + 1}.$$

(b) Dans les deux cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, résoudre explicitement les équations.

(c) Discuter le comportement de G sur $[0, \infty[$ en fonction de α. Déterminer quand les solutions maximales positives de l'équation sont globales ou explosent en temps fini en fonction de α.

Exercice 56. (Convergence vers un équilibre pour les équations différentielles autonomes) Soit $z : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) On suppose que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = z_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \dot{z}(t) = \ell$$

pour $z_0, \ell \in \mathbf{R}$. Montrer que $\ell = 0$.

(b) Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit X une solution du système $\dot{X} = F(X)$ qui existe sur $[0, \infty[$. Montrer que si X satisfait $\lim_{t\to\infty} X(t) = X_\infty$ où $X_\infty \in \mathbf{R}^2$, alors X_∞ est un point d'équilibre du système.

Exercice 57. (Explosion en temps fini ou solution globale : exemples d'études qualitatives) On considère les trois systèmes

$$(\mathrm{E}_1) : \begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{E}_2) : \begin{cases} \dot{x} = -1 \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases} \qquad (\mathrm{E}_3) : \begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les solutions maximales de (E_1) et (E_2) sont globales.

(b) Montrer que (E_3) a des solutions qui explosent en temps fini.

Exercice 58. (Équation différentielle linéaire d'ordre 2 : résolution explicite) Pour des fonctions p, q et r continues sur $\mathbf{R}$, on considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r. \tag{$\star$}$$

(a) On suppose qu'il existe une solution y de l'équation homogène

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$$

qui ne s'annule pas. Déterminer en fonction de y la forme générale de la solution de $(\star)$.

Indication : chercher la solution x sous la forme $x = yz$.

(b) Application : résoudre l'équation différentielle

$$(2t+1)\ddot{x} + (4t-2)\dot{x} - 8x = 0.$$

On cherchera d'abord une solution de la forme $y(t) = e^{\alpha t}$.

Exercice 59. (Application de l'exercice précédent) Vérifier que l'équation

$$\ddot{x} - 2\dot{x}\tanh(t) + x = 0$$

admet la solution particulière $y(t) = \sinh(t)$. Trouver la solution générale de cette équation.

Exercice 60. (Portrait de phase dans le cas d'une valeur propre nulle) Étudier le système

$$\dot{X} = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dans le cas où la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ a une valeur propre nulle et une valeur propre λ non nulle. Discuter selon le signe de λ et tracer les portraits de phase correspondant.

Exercice 61. (Portrait de phase dans le cas où la matrice A n'est pas diagonale) Étudier le système

$$\dot{X} = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dans le cas où la matrice $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ a une valeur propre réelle double λ et A n'est pas diagonale. Commencer par le cas $\lambda = 0$. Ensuite, dans le cas $\lambda \neq 0$, discuter selon le signe de λ et tracer les portraits de phase correspondants.

Exercice 62. (Temps de retour) Soit $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(J(X_0), X)$ la solution maximale du système $\dot{X} = F(X)$ avec donnée initiale $(0, X_0)$. On considère l'ensemble

$$G(X_0) = \{t \in J(X_0) : X(t) = X_0\}.$$

Montrer que seuls les cas suivants sont possibles :

— $G(X_0) = \{0\}$;

— $G(X_0) = T\mathbf{Z}$ pour un certain $T > 0$;

— $G(X_0) = \mathbf{R}$.

Exercice 63. (Comparaison d'une équation différentielle non linéaire avec le problème linéaire associé) Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

(a) Déterminer explicitement les solutions en utilisant les coordonnées polaires.

Indication : en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, montrer d'abord les formules générales

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \quad \text{et} \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}.$$

(b) Déterminer l'allure des trajectoires et les comparer à celles du problème linéaire associé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Exercice 64. (*Équation de Lotka-Volterra : étude qualitative fine) On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-y) \\ \dot{y} = y(x-1) \end{cases}$$

(a) Quels sont les points d'équilibre ? Que dire des solutions telles que $x(0) = 0$? Telles que $y(0) = 0$?

Dans la suite, on étudie le comportement pour tout $t \in \mathbf{R}$ des solutions (x, y) du système telles que $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$.

(b) Montrer que l'on a $x > 0$ et $y > 0$ sur l'intervalle maximal d'existence de la solution.

(c) Montrer que toute solution (x, y) est globale (c'est-à-dire définie pour tout $t \in \mathbf{R}$).

On définit les régions

$$A = \{(x, y) : x > 1, y > 1\}, \quad B = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 1\},$$
$$C = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad D = \{(x, y) : x > 1, 0 < y < 1\}.$$

(d) Montrer que si $(x_0, y_0) \in A$, alors il existe $t > 0$ tel que $x(t) = 1$ et $y(t) > 1$.

(e) Montrer qu'une trajectoire quelconque non réduite à $(1, 1)$ tourne autour de $(1, 1)$, dans le sens trigonométrique, en rencontrant une infinité de fois les régions A, B, C et D dans cet ordre.

(f) Montrer qu'il existe une fonction $E :]0, \infty[^2 \to \mathbf{R}$ telle que $t \mapsto E(x(t), y(t))$ soit constante pour chaque solution (x, y) de l'équation différentielle.

Indication : chercher E sous la forme $a(x) + b(y)$.

En déduire que les trajectoires sont périodiques.

(g) Donner la nature du point d'équilibre $(1, 1)$.

Exercice 65. (*Pendule sans frottement : portrait de phase) On considère le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

(a) Montrer que toute solution maximale est globale (c'est-à-dire définie pour tout $t \in \mathbf{R}$).

(b) Quelles sont les symétries du système ?

On pose

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x.$$

(c) Montrer que $t \mapsto E(x(t), y(t))$ est constant pour une solution $(x(t), y(t))$.

(d) Quels sont les points d'équilibre du système ? Quelle est leur énergie ?

(e) Quelle est la forme des trajectoires correspondant à des niveaux d'énergie $-1 < E < 1$?

(f) Que dire du cas $E = 1$? Dans ce cas, calculer explicitement une solution qui n'est pas un point d'équilibre.

Indication : pour résoudre une équation du type : $\dot{u} = \sin u$, on peut utiliser le changement de variable : $v = \tan \frac{u}{2}$.

(g) Montrer que chaque niveau d'énergie $E > 1$ correspond exactement à deux trajectoires.

(h) Tracer un portrait de phase.

(i) Dans le cas du pendule avec frottement

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - ky \end{cases}$$

où $k > 0$ est une constante, calculer la dérivée de $E(x(t), y(t))$ pour une solution $(x(t), y(t))$. Existe-t-il des solutions périodiques (autres que les points d'équilibre) ?

Chapitre 6

Compléments d'intégration

6.1 Tribu borélienne, mesure de Lebesgue

6.1.1 La demi-droite achevée

On note $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty]$ *la demi-droite achevée*, ensemble constitué de la demi-droite réelle $[0, \infty[$ auquel on adjoint un élément noté ∞. On étend la relation d'ordre et l'addition à cet ensemble, en décidant que pour tout x, on a $x \leqslant \infty$ et $x + \infty = \infty$.

Dans cet ensemble, toute suite croissante converge : si la suite est majorée, on sait qu'elle converge vers un nombre réel, sinon, elle tend vers ∞. Ainsi, la somme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, avec $u_n \in \overline{\mathbf{R}}_+$ *est toujours définie dans* $\overline{\mathbf{R}}_+$: c'est la limite de la suite croissante des sommes partielles $S_K = \sum_{n=1}^{K} u_n$.

6.1.2 Tribus

Soit Ω un ensemble, on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note $A^{\complement}$ le complémentaire de A.

Définition 6.1.1. *On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une* tribu *sur Ω si :*

— *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^{\complement} \in \mathcal{A}$;*

— *l'ensemble vide $\varnothing$, et donc Ω lui-même, appartiennent à $\mathcal{A}$;*

— *$\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable, et donc aussi par intersection dénombrable : pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad et \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est alors appelé espace mesurable.

6.1.3 Tribus engendrées

Définition 6.1.2. *Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble quelconque de parties de Ω. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{E}$ est encore une tribu, appelée* tribu engendrée par $\mathcal{E}$ *; c'est donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$.*

6.1.4 Mesures

Définition 6.1.3. *On appelle* mesure *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *une application* μ *de* $\mathcal{A}$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}_+$, *vérifiant* $\mu(\varnothing) = 0$ *et, pour toute suite* $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$, *deux à deux disjoints,*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est alors appelé* espace mesuré.

6.1.5 Fonctions mesurables

Définition 6.1.4. *Soient* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* f *de* Ω_1 *dans* Ω_2 *est* mesurable *si pour tout* $A_2 \in \mathcal{A}_2$, $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$.

Proposition 6.1.1. *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble de parties de* Ω_2 *tel que* $\mathcal{A}_2$ *soit la tribu engendrée par* $\mathcal{E}$. *Pour qu'une application* f *de* Ω_1 *dans* Ω_2 *soit mesurable il suffit que pour tout* $E \in \mathcal{E}$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$.

6.1.6 Tribu borélienne de $\mathbf{R}^N$

Définition 6.1.5. *La* tribu borélienne *de* $\mathbf{R}^N$, *notée* $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$, *est la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbf{R}^N$. *On dit que* $A \subset \mathbf{R}^N$ *est* borélien *si* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$.

Proposition 6.1.2. *Chacune des familles suivantes engendre* $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ *:*

- *les fermés de* $\mathbf{R}^N$ *;*
- *les pavés de* $\mathbf{R}^N$ *;*
- *pour* $N = 1$, *les intervalles du type* $]-\infty, a[$ *(ou* $]-\infty, a]$*). (On peut aussi se limiter aux* a *rationnels.)*

Un pavé de $\mathbf{R}^N$ est un ensemble de la forme $P = \prod_{i=1}^{N} (a_i, b_i)$ où (a, b) désigne l'intervalle d'extrémités a et b, fermé ou ouvert en a et b. Son *volume* est $\prod_{i=1}^{N} |b_i - a_i|$.

6.1.7 Autres tribus boréliennes

Définition 6.1.6. *Soit* A *un borélien de* $\mathbf{R}^N$. *La* tribu borélienne *de* A, *notée* $\mathcal{B}(A)$, *est l'ensemble des boréliens de* $\mathbf{R}^N$ *contenus dans* A. *Lorsque* A *est ouvert,* $\mathcal{B}(A)$ *est engendrée par les ouverts de* $\mathbf{R}^N$ *inclus dans* A *; lorsque* A *est fermé,* $\mathcal{B}(A)$ *est engendrée par les fermés de* $\mathbf{R}^N$ *inclus dans* A.

Définition 6.1.7. *La* tribu borélienne *de* $\overline{\mathbf{R}}_+$, *notée* $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}_+)$, *est la tribu engendrée par les intervalles de* $\overline{\mathbf{R}}_+$. *Cette tribu est constituée des boréliens de* $[0, \infty[$ *et des ensembles* $A \cup \{\infty\}$ *où* A *est un borélien de* $[0, \infty[$.

6.1.8 Remarques sur la tribu borélienne de $\mathbf{R}^N$

La définition de la tribu borélienne de $\mathbf{R}^N$ est simple, mais elle n'est pas constructive et ne fournit pas une description de tous les boréliens.

En pratique, on démontre assez facilement que les parties de $\mathbf{R}^N$ que l'on rencontre sont boréliennes, en utilisant les axiomes d'une tribu à partir de boréliens « élémentaires » (intervalles, pavés, ouverts, fermés).

On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ a le même cardinal que $\mathbf{R}$, alors que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ est de cardinal strictement supérieur. Toutefois, il est difficile de construire des ensembles non boréliens.

6.1.9 Mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^N$

Théorème 6.1.1. Existence et unicité : *Il existe une unique mesure λ sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$, appelée* mesure de Lebesgue*, telle que pour tout pavé P, son volume soit égal à $\lambda(P)$.*

Invariance : *La mesure de Lebesgue est* invariante par translation *: si A est un borélien, et A' est son image par une translation, alors $\lambda(A) = \lambda(A')$.*

Réciproquement, soit μ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ invariante par translation et finie sur le cube unité C_1. Alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$, $\mu(A) = \mu(C_1)\lambda(A)$.

Régularité : *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert U avec*

$$F \subset A \subset U \quad \text{et} \quad \lambda(U \setminus F) \leqslant \varepsilon.$$

6.1.10 Ensembles de mesure nulle et ensembles négligeables

Définition 6.1.8. — *Les ensembles de mesure nulle de $\mathbf{R}^N$ sont les boréliens de $\mathbf{R}^N$ dont la mesure de Lebesgue est nulle.*

— *Un sous-ensemble de $\mathbf{R}^N$ inclus dans un ensemble de mesure nulle est dit* négligeable.

— *On dit qu'une propriété $P(x)$ dépendant d'un point $x \in \mathbf{R}^N$ est vérifiée* presque partout *si l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^N$ où elle n'est pas vérifiée est un ensemble négligeable.*

Remarque. On peut *compléter* la tribu borélienne pour inclure tous les sous-ensembles de $\mathbf{R}^N$ qui sont négligeables (et tous les sous-ensembles qui en résultent par la notion de tribu engendrée). On obtient la tribu des *ensembles Lebesgue-mesurables.*

6.1.11 Tribu borélienne et mesurabilité

Dans la suite, on s'intéresse à des applications mesurables :

— $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$;

— $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$;

— $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$;

— $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^M$.

Sur $\mathbf{R}^N$, on considère la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$. Les ensembles $\overline{\mathbf{R}}_+$ et $\mathbf{R}$ sont aussi munis de leur tribu borélienne respective $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}_+)$ et $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Une fonction à valeurs complexes est mesurable si, et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables. Une fonction à valeurs vectorielles est mesurable si, et seulement si toutes ses composantes sont mesurables.

Un exemple typique de fonction mesurable est la *fonction indicatrice* d'un borélien A de $\mathbf{R}^N$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \neq A. \end{cases}.$$

6.1.12 Mesurabilité en analyse

On observe facilement que toute fonction continue de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$ est mesurable.

L'ensemble des fonctions mesurables est stable par composition, par addition, produit, quotient, passage au maximum, par limite ponctuelle.

En analyse, pour utiliser le calcul intégral, la vérification de la mesurabilité est presque toujours automatique. Ainsi, toutes les fonctions raisonnablement construites vont être mesurables par rapport à la tribu borélienne.

6.2 Intégrale des fonctions positives

6.2.1 Intégrale des fonctions étagées positives

Définition 6.2.1. *On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est* étagée *si elle ne prend qu'un nombre fini p de* valeurs non nulles *$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et si pour tout k, l'ensemble $\varphi^{-1}(\{\alpha_k\})$ est borélien.*

Définition 6.2.2. *L'intégrale d'une fonction étagée φ à* valeurs positives *est définie par*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \lambda\left(\varphi^{-1}(\{\alpha_k\})\right) \leqslant \infty.$$

L'intégrale des fonctions étagées à valeurs positives est croissante : si $\varphi \leqslant \psi$, alors $\int \varphi \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int \psi \,\mathrm{d}\lambda$ et semi-linéaire : pour $a, b \geqslant 0$, $\int (a\varphi + b\psi)\,\mathrm{d}\lambda = a \int \varphi \,\mathrm{d}\lambda + b \int \psi \,\mathrm{d}\lambda$.

6.2.2 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition 6.2.3. *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. L'*intégrale *de f est l'élément de $\overline{\mathbf{R}}_+$ défini par*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f \,\mathrm{d}\lambda = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \,\mathrm{d}\lambda : \varphi \textit{ est étagée et } 0 \leqslant \varphi \leqslant f \right\}.$$

6.2.3 Théorème de convergence monotone de Beppo Levi

Théorème 6.2.1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Soit $f(x) = \sup_n f_n(x)$. Alors f est mesurable et*

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

Remarque. L'égalité ci-dessus est vraie dans $\overline{\mathbf{R}}_+$: si l'un des membres est infini, l'autre aussi.

Corollaire 6.2.1. *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions étagées positives telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. De plus,*

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

6.2.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ deux fonctions mesurables.

— *Croissance :* si $f \leqslant g$, alors
$$\int f \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int g \,\mathrm{d}\lambda.$$

— *Semi-linéarité :* pour tout $a, b \geqslant 0$,
$$\int (af + bg) \,\mathrm{d}\lambda = a \int f \,\mathrm{d}\lambda + b \int g \,\mathrm{d}\lambda.$$

— *Relation avec le volume :* Pour un pavé $P = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i)$,
$$\int \mathbf{1}_P \,\mathrm{d}\lambda = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

6.2.5 Intégrale et parties négligeables

Proposition 6.2.1. *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable.*

— *L'intégrale $\int f \,\mathrm{d}\lambda$ est nulle si, et seulement si f est nulle presque partout sur $\mathbf{R}^N$.*

— *Si $\int f \,\mathrm{d}\lambda < \infty$, alors l'ensemble $\{x : \ f(x) = \infty\}$ est de mesure nulle.*

— *Deux fonctions mesurables $\mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ égales presque partout ont la même intégrale.*

6.3 Fonctions intégrables

6.3.1 Intégrale des fonctions à valeurs complexes

Définition 6.3.1. *Une fonction f de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{C}$ est* intégrable *si elle est mesurable et si $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} |f| \,\mathrm{d}\lambda < \infty$.*

On note $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, ou $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Cas où f est à valeurs réelles. Les parties positive $f^+ = \sup(f,0)$ et négative $f^- = \sup(-f,0)$, telles que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$, sont intégrables et à valeurs positives. On pose alors

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int f^+ \,\mathrm{d}\lambda - \int f^- \,\mathrm{d}\lambda.$$

Cas où f est à valeurs complexes. Comme $|\Re f| \leqslant |f|$ et $|\Im f| \leqslant |f|$, $\Re f$ et $\Im f$ sont intégrables au sens ci-dessus. On définit alors :

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = \int \Re f \,\mathrm{d}\lambda + \mathrm{i} \int \Im f \,\mathrm{d}\lambda.$$

6.3.2 Propriétés de l'intégrale

— L'ensemble $\mathcal{L}^1$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

— L'application $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\lambda$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1$.

— Pour toute $f \in \mathcal{L}^1$, on a $|f| \in \mathcal{L}^1$ et

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\lambda \right| \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\lambda.$$

— Soient f et g deux fonctions mesurables égales presque partout. Si l'une est intégrable, alors l'autre l'est aussi, et elles ont la même intégrale.

6.3.3 Intégration sur un sous-ensemble

Soient $M \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ et g une fonction de M dans $\mathbf{C}$. On définit la fonction g_M sur $\mathbf{R}^N$, égale à g sur M et égale à 0 sur $\mathbf{R}^N \setminus M$. Alors, g est intégrable sur M si, et seulement si g_M est intégrable sur $\mathbf{R}^N$ et on définit

$$\int_M g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbf{R}^N} g_M \,\mathrm{d}\lambda.$$

Il est équivalent de définir directement l'intégrale de Lebesgue sur M, en considèrant les boréliens de M (intersections des boréliens de $\mathbf{R}^N$ avec M) et la restriction de la mesure de Lebesgue aux boréliens de M.

En général, il est suffisant d'intégrer sur des ouverts de $\mathbf{R}^N$. On note U un ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $\mathcal{L}^1(U)$ les fonctions à valeurs complexes intégrables sur U.

Dans la suite $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1(U)$ où U est un ouvert de $\mathbf{R}^N$.

6.3.4 Lien avec les notions d'intégrale et notations connues

Proposition 6.3.1. *Soit f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$ (ou plus généralement, intégrable au sens de Riemann). Alors f est intégrable (pour la mesure de Lebesgue), et les deux procédés d'intégration donnent la même valeur.*

Notation. On écrira désormais $\mathrm{d}x$ au lieu de $\mathrm{d}\lambda$ pour l'intégrale relative à la mesure de Lebesgue. L'intégrale est notée :

— en dimension 1, $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_{\mathbf{R}} f\,\mathrm{d}x$; on écrira aussi $\int_a^b f\mathrm{d}x$ pour $\int_{]a,b[} f\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}x$.

— en dimension N, $\int_{\mathbf{R}^N} f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N$ ou $\int_{\mathbf{R}^N} f\,\mathrm{d}x$.

6.3.5 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 6.3.1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$. On suppose que :*

— *La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque partout vers une fonction f ;*

— *Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout.*

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}x = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x.$$

Il s'agit d'un énoncé très important, s'appliquant à une vaste classe de fonctions, et utile dans de nombreux calculs de limite impliquant une opération d'intégration.

6.4 Intégrales multiples

6.4.1 Théorème de Tonelli

Dans le cas des fonctions mesurables *positives* on a :

Théorème 6.4.1. *Soient $U_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ et $U_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ deux ouverts non vides et $f : U_1\times U_2 \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors :*

— *Pour tout $x_2 \in U_2$, la fonction $x_1 \in U_1 \mapsto f(x_1,x_2)$ est mesurable ;*

— *La fonction $x_2 \in U_2 \mapsto \int_{U_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1$ est mesurable ;*

— *Dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, on a l'égalité :*

$$\begin{aligned}\iint_{U_1\times U_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{U_1}\left(\int_{U_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\\ &= \int_{U_2}\left(\int_{U_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

En particulier, $f \in \mathcal{L}^1(U_1\times U_2)$ si, et seulement si $x_2 \mapsto \int_{U_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1$ est intégrable sur U_2.

6.4.2 Théorème de Fubini

Dans le cas des fonctions *intégrables* à valeurs réelles ou complexes, on a :

Théorème 6.4.2. *Soient $U_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ et $U_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ deux ouverts non vides et $f \in \mathcal{L}^1(U_1 \times U_2)$. Alors :*

- *Pour presque tout $x_2 \in U_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{L}^1(U_1)$;*
- *La fonction $x_2 \mapsto \int_{U_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1$ définie presque partout sur U_2 appartient à $\mathcal{L}^1(U_2)$;*
- *Dans $\mathbf{C}$, on a l'égalité*

$$\begin{aligned}\iint_{U_1 \times U_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{U_1} \left(\int_{U_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{U_2} \left(\int_{U_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

6.4.3 Mode d'emploi

Lorsque l'on veut permuter l'ordre des intégrations, on procède souvent en deux temps :

- On applique d'abord le théorème de Tonelli à la fonction $|f|$ pour montrer que $f \in \mathcal{L}^1(U_1 \times U_2)$; pour cela, on peut calculer l'intégrale par intégrations successives, dans l'ordre que l'on préfère.
- Une fois que l'on a montré $f \in \mathcal{L}^1(U_1 \times U_2)$, on peut utiliser le théorème de Fubini sur f pour permuter l'ordre des intégrations.

6.5 Intégration et dérivation

6.5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre : continuité

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^N$.

Théorème 6.5.1. *Soit $t_0 \in I$. Soit $f : I \times U \to \mathbf{C}$ vérifiant*

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.*
- *Pour presque tout $x \in U$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue en t_0.*
- *Il existe une fonction positive intégrable h telle que, pour tout $t \in I$, pour presque tout $x \in U$, on ait*

$$|f(t, x)| \leqslant h(x).$$

Alors, la fonction

$$F(t) = \int_U f(t, x)\,\mathrm{d}x.$$

est bien définie sur I et continue en t_0.

Le preuve combine le théorème de convergence dominée et le critère séquentiel de continuité.

6.5.2 Intégrales dépendant d'un paramètre : dérivabilité

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^N$.

Théorème 6.5.2. *Soit $f : I \times U \to \mathbf{C}$. On suppose qu'il existe un ensemble de mesure nulle Z tel que, en posant $V = U \setminus Z$, la fonction f vérifie :*

- *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable.*
- *La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ existe en tout point de $I \times V$.*
- *Il existe une fonction positive intégrable h telle que, pour tout point $(t,x) \in I \times V$,*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leqslant h(x).$$

Alors, la fonction $F : t \mapsto \int_U f(t,x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur I et

$$F'(t) = \int_U \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve. Soit $(t_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers $t \in I$ (avec $t_n \neq t$ pour tout $n \geqslant 0$). Par les hypothèses, il existe $Z \subset U$ de mesure nulle tel que, pour tout $x \in U \setminus Z$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x),$$

et en outre par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\left| \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} \right| \leqslant h(x),$$

pour tout $x \in U \setminus Z$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} &= \lim_{n\to\infty} \int_U \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_U \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

6.5.3 Difféomorphisme et changement de variables

Soient U_1, U_2 des ouverts non vides de $\mathbf{R}^N$ et $\Phi : U_1 \to U_2$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\mathbf{J}_\Phi$ la *matrice jacobienne* de Φ.

Définition 6.5.1. *On dit que Φ est un $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme *de U_1 sur U_2 si les conditions ci-dessous sont satisfaites :*

- *L'application Φ est une bijection de U_1 sur U_2.*
- *L'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_1.*
- *L'application Φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_2.*

6.5.4 Théorème de changement de variables

Théorème 6.5.3. *Soit $\Phi : U_1 \to U_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.*

— *Soit f une fonction mesurable de U_1 dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. Alors,*

$$\int_{U_2} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{U_1} f(\Phi(x))\,|\det \mathbf{J}_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{$\star$}$$

— *Soit f une fonction mesurable de U_2 dans $\mathbf{C}$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1(U_2)$ si, et seulement si $(f \circ \Phi)|\det \mathbf{J}_\Phi| \in \mathcal{L}^1(U_1)$. L'égalité ($\star$) est alors vérifiée.*

6.5.5 Application : changement de variable affine

Soit $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^N$. On pose

$$\Phi(x) = Ax + b.$$

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si de plus $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$ (*i.e.* Φ est une isométrie affine), alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si $A = a\,I$ pour $a \neq 0$ (*i.e.* Φ est une homothétie), alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

6.6 L'espace de Lebesgue L^1

6.6.1 Un problème de non-séparation

Dans l'espace $\mathcal{L}^1$, l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \int |f|\,\mathrm{d}x$ est une *semi-norme* :

— Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$ et $a \in \mathbf{C}$, $\|a\,f\|_1 = |a|\,\|f\|_1$.

— Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^1$, $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Autrement dit, la condition d'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont satisfaites, mais on rappelle que

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \quad \text{presque partout.}$$

Cette propriété est plus faible que la condition de séparation.

Nous allons *modifier* l'espace $\mathcal{L}^1(U)$ de façon à ce que $\|\cdot\|_1$ définisse une norme sur le nouvel espace.

6.6.2 Identification des fonctions égales presque partout

On définit sur $\mathcal{L}^1$ une *relation d'équivalence* (relation binaire réflexive, symétrique et transitive)

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout.}$$

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note $[f]$ la *classe d'équivalence* de f

$$[f] := \left\{ g \in \mathcal{L}^1 : f = g \text{ presque partout} \right\}.$$

Définition 6.6.1. *L'espace de Lebesgue L^1 est défini par $L^1 = \{[f] \, : \, f \in \mathcal{L}^1\}$.*

L'intégrale de Lebesgue de $[f]$ est définie par

$$[f] \mapsto \int [f] \, \mathrm{d}x = \int f \mathrm{d}x,$$

et cette définition est indépendante du représentant f de $[f]$.

6.6.3 Norme sur l'espace de Lebesgue L^1

La semi-norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{L}^1$, définit une *norme* $\|\cdot\|_{L^1}$ sur L^1, par la formule

$$\|[f]\|_{L^1} = \int |f| \, \mathrm{d}x \quad \text{où} \quad f \in [f].$$

En effet,

$$\|[f]\|_{L^1} = 0 \iff \int |f| \, \mathrm{d}x = 0 \iff f = 0 \text{ p.p.} \iff [f] = [0].$$

Dans la suite, on *identifie un élément* $[f] \in L^1$ avec un représentant, noté f, de $[f]$ et on note $\|[f]\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$.

Une façon plus élémentaire de voir l'identification précédente est de dire que nous changeons la signification de l'égalité, en considérant égales deux fonctions qui, en fait, sont seulement égales presque partout.

6.6.4 Remarques sur l'égalité presque partout

(a) Lorsque l'on écrit $f = g$ dans L^1, cela signifie que $f, g \in L^1$ et $f = g$ presque partout : il existe un ensemble négligeable Z tel que pour tout $x \notin Z$, $f(x) = g(x)$;

(b) Si $f \in L^1$, on ne peut pas parler de la valeur de f en un point donné car f n'est définie que presque partout ;

(c) Lorsque l'on considère la classe d'équivalence d'une fonction intégrable et continue, on utilise systématiquement le représentant continu ;

(d) Ne pas confondre les deux énoncés :

- « Être égale presque partout à une fonction continue » : appartenir à la même classe d'équivalence qu'une fonction continue - donc égalité avec notre convention ;
- « Être presque partout continue » : par exemple la fonction discontinue $\mathbf{1}_{[0,1]}$ sur $\mathbf{R}$.

6.6.5 Complétude de L^1

Théorème 6.6.1 (Fischer-Riesz). *L'espace vectoriel L^1, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ est un espace de Banach.*

La démonstration de ce résultat est laissée en exercice. Comme corollaire de la démonstration, on a le résultat suivant.

Corollaire 6.6.1. *Si une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans L^1 alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge presque partout vers f.*

6.6.6 Densité de $\mathcal{C}_c$ dans L^1

On note $\mathcal{C}_c(U)$ l'espace des fonctions continues à *support compact* dans U (c'est-à-dire des fonctions continues qui sont nulles en dehors d'un compact inclus dans U)

Théorème 6.6.2. *L'espace $\mathcal{C}_c(U)$ est dense dans $L^1(U)$: pour toute fonction $f \in L^1(U)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(U)$ telle que*

$$\int_U |f - f_\varepsilon| \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire 6.6.2 (Continuité des translations dans L^1). *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-\tau) - f(x)| \,\mathrm{d}x = 0.$$

6.7 Exercices du Chapitre 6

Exercice 66. (Applications directes du cours)

(a) Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω. Quelle est la tribu engendrée par A ?

(b) (Intégrale de Riemann) On rappelle qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ est *une fonction en escalier* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ et des réels c_1, …, c_n tels que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\phi(x) = c_i$. L'intégrale au sens de Riemann d'une telle fonction est le nombre

$$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i\,.$$

Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* si

$$\sup\left\{\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x \,:\, \phi \text{ en escalier telle que } \phi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \,:\, \psi \text{ en escalier telle que } \psi \geq f\right\},$$

et, dans ce cas, l'intégrale au sens de Riemann de f est ce nombre. On rappelle enfin que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann.

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.

(i) Montrer que f est mesurable.

(ii) Montrer que f est intégrable (au sens de Lebesgue) et que son intégrale (au sens de Lebesgue) est égale à son intégrale au sens de Riemann.

Exercice 67. (Intégrable implique finie presque partout)

(a) Montrer, en revenant à la définition de l'intégrale d'une fonction positive, que si f et $g : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ sont deux fonctions mesurables telles que $f \leqslant g$, alors $\int f dx \leqslant \int g dx$.

(b) En déduire qu'une fonction intégrable est finie presque partout.

Exercice 68. (Une application du théorème de convergence dominée) Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ une fonction à valeurs complexes. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>n} |f(x)|\, dx = 0.$$

Exercice 69. (Intégrale semi-convergente)

(a) Montrer que la limite suivante est finie :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{1+x} dx.$$

(b) Est-ce que la fonction $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$ est intégrable sur $]0,\infty[$?

Exercice 70. (Primitive d'une fonction intégrable) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ une fonction à valeurs complexes.

(a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si A est un borélien de $\mathbf{R}$, alors

$$\lambda(A) < \delta \implies \int_A |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

(b) Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Montrer que la fonction F est uniformément continue sur $[0,\infty[$.

Exercice 71. (Boréliens et mesurabilité)

(a) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs réelles. On note A l'ensemble des x tels que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Montrer que A est borélien.

Indication : Pour des entiers $p \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$, noter

$$C_{p,k} = \left\{ x \in \mathbf{R}^N : |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \text{ pour tout } n \geqslant p \right\},$$

et utiliser la définition de la limite pour écrire A en fonction des $C_{p,k}$.

(b) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs réelles qui converge ponctuellement vers une fonction f. Montrer que f est mesurable.

Indication : comme la tribu borélienne de $\mathbf{R}$ est engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, b[$ où $b \in \mathbf{R}$, il suffit de vérifier que $f^{-1}(]-\infty, b[)$ est un borélien. Utiliser la définition de la limite et la mesurabilité de chaque f_n.

(c) Soif $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa fonction dérivée $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est mesurable.

Exercice 72. (Applications du théorème de convergence monotone)

(a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int u_n dx \right).$$

(b) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour des entiers $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on pose

$$A_{k,n} = \{x \in \mathbf{R}^N : (k-1)2^{-n} \leqslant f(x) < k2^{-n}\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \geqslant n\}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} ((k-1)2^{-n}) \mathbf{1}_{A_{k,n}} + n \mathbf{1}_{B_n}$$

est une suite croissante de fonctions étagées qui converge ponctuellement vers f.

(c) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions étagées positives telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. De plus, $\int f dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dx$.

Exercice 73. (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbf{R}^N$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. La *limite inférieure* de cette suite est la fonction

$$\liminf_{n\to\infty} f_n : x \mapsto \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

(a) Montrer que cette fonction est mesurable et que $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}x$.

(b) En considérant les fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{[n,n+1]}$, montrer que l'inégalité n'est pas vérifiée en général.

Exercice 74. (*Preuve du théorème de convergence dominée)

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$. On suppose que :

— *la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque partout vers une fonction f ;*

— *il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout.*

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}x = 0.$$

(a) Se ramener au cas où la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f et les majorations $|f_n| \leqslant g$ ont lieu en tout point de $\mathbf{R}^N$ en modifiant les fonctions f_n et f sur un ensemble de mesure nulle.

(b) Pour chaque $n \geqslant 0$, poser $h_n = |f_n - f|$, $a_n = \sup_{k\geqslant n} h_k$ et $b_n = 2g - a_n$. Appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions $(b_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 75. (*Théorème de Fischer–Riesz)

Le but de cet exercice est de montrer que l'espace $(L^1(\mathbf{R}^N), \|\cdot\|_{L^1})$ est complet. On rappelle qu'*un espace vectoriel normé est un espace complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

On considère une série de terme général u_n dans L^1, normalement convergente pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

(a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} |u_n(x)|$ est intégrable.

(b) Montrer qu'il existe un borélien A de mesure nulle telle que la série $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ soit convergente pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus A$.

(c) Utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que la série de terme général u_n converge vers S dans L^1.

(d) Déduire des arguments précédents le résultat suivant : *Si une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans L^1 alors il existe une sous-suite qui converge presque partout vers f.*

Indication : on pourra utiliser une sous-suite $(g_k)_{k\geqslant 0}$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\|g_k - f\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$.

Exercice 76. (*Résultats de densité)

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On note $\mathcal{C}_c(U)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans U (c'est-à-dire des fonctions continues qui sont nulles en dehors d'une partie compacte de $\mathbf{R}^N$ incluse dans U).

(a) Montrer que $\mathcal{C}_c(U) \subset L^1(U)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{B}(U)$ de mesure de Lebesgue finie. Montrer qu'il existe une suite $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{C}_c(U)$ qui converge vers la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ dans $L^1(U)$.

Indication : utiliser la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.

(c) Montrer que $\mathcal{C}_c(U)$ est dense dans $(L^1(U), \|\cdot\|_{L^1})$.

Exercice 77. (Continuité des translations dans L^1)

(a) Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ une fonction continue à support compact (voir exercice précédent). Montrer que

$$\lim_{\tau\to 0} \int |g(x-\tau) - g(x)| dx = 0.$$

Indication : utiliser le théorème de Heine.

(b) Montrer le même résultat pour $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Indication : utiliser l'exercice précédent (question (c)).

Exercice 78. (Cas où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas)

Existe-t-il des suites de fonctions intégrables sur $[0,1]$ telles que :

(a) $\displaystyle\int_{[0,1]} |f_n(x)|dx$ ne tend pas vers 0 mais $f_n(x)$ tend vers 0 presque partout ?

(b) $\displaystyle\int_{[0,1]} |g_n(x)|dx$ tend vers 0 mais $g_n(x)$ ne tend pas presque partout vers 0 ?

Exercice 79. (Intégrale à paramètre)

Pour chaque réel $t > 0$, on pose

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

(a) Montrer que F est définie et continue sur $[0,\infty[$. Calculer $\lim_{t\to\infty} F(t)$.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$. Calculer F''.

(c) La fonction F est-elle dérivable à droite en 0 ?

(d) Déduire de (a) et (b) une expression de F.

(e) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

Exercice 80. (Une application du théorème de Tonelli)

Soit $N \geqslant 2$. Soit A le graphe d'une application f de $\mathbf{R}^{N-1}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire

$$A = \left\{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}^{N-1}\right\}.$$

Montrer que A est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^N$.

Exercice 81. (Volume d'un tronc de cône en dimension N)

Soit $N \geqslant 2$. Soit B un borélien de $\mathbf{R}^{N-1}$, dont la mesure de Lebesgue est notée $\mathcal{A}(B)$. Soit $h \geqslant 0$. On considère

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} : 0 < y < h,\ \frac{h}{y} x \in A\right\}.$$

Calculer la mesure de Lebesgue de C (comme borélien de $\mathbf{R}^N$).

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

7.1 Espaces préhilbertiens

7.1.1 Produit scalaire euclidien

Définition 7.1.1. *Un* produit scalaire euclidien *sur un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* E *est une application* $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbf{R}$ *possédant les propriétés suivantes :*

— Bilinéaire : *les applications partielles* $x \mapsto (x \mid y)$ *et* $y \mapsto (x \mid y)$ *sont linéaires ;*

— Symétrique : *pour tous* $x, y \in E$, $(x \mid y) = (y \mid x)$ *;*

— Définie-positive : *pour tout* $x \in E$, $(x \mid x) \geqslant 0$ *et*

$$(x \mid x) = 0 \iff x = 0.$$

Un espace préhilbertien réel *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien.*

7.1.2 Exemples d'espaces préhilbertiens réels

— Sur $\mathbf{R}^N$, on définit le produit scalaire euclidien canonique

$$(x \mid y) = x \cdot y = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j.$$

— Sur $M_N(\mathbf{R})$, on définit le produit scalaire

$$(A \mid B) = \operatorname{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$$

— Sur $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{R}) = \{x = (x_n)_{n \geqslant 0} : \sum_{n \geqslant 0} |x_n|^2 < \infty\}$, on définit le produit scalaire

$$(x \mid y)_{\ell^2} = \sum_{n \geqslant 0} x_n y_n.$$

— Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, on définit sur $\mathcal{C}([a, b]; \mathbf{R})$ le produit scalaire

$$(f \mid g)_2 = \int_a^b fg.$$

7.1.3 Application antilinéaire

Définition 7.1.2. *Soient E et F deux $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Une application $L : E \to F$ est dite* antilinéaire *si pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ et tous $x, y \in E$,*

$$L(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}\, L(x) + \overline{\mu}\, L(y).$$

7.1.4 Produit scalaire hermitien

Définition 7.1.3. *Un* produit scalaire hermitien *sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est une application $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ de $E \times E$ dans $\mathbf{C}$ possédant les propriétés suivantes :*

— Sesquilinéaire : *l'application partielle $x \mapsto (x \mid y)$ est antilinéaire et l'application partielle $y \mapsto (x \mid y)$ est linéaire ;*

— Hermitienne : *pour tous $x, y \in E$, $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$;*

— Définie-positive : *pour tout $x \in E$, $(x \mid x) \geqslant 0$ et*

$$(x \mid x) = 0 \iff x = 0.$$

Un espace préhilbertien complexe *est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.*

7.1.5 Exemples d'espaces préhilbertiens complexes

— Sur $\mathbf{C}^N$, on définit le produit scalaire hermitien canonique :

$$(x \mid y) = \sum_{j=1}^{N} \overline{x}_j y_j.$$

— Sur $M_N(\mathbf{C})$, on définit le produit scalaire hermitien :

$$(A \mid B) = \mathrm{Tr}(\overline{A} B^{\mathrm{T}}).$$

— Sur $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$, on définit le produit scalaire hermitien :

$$(x \mid y)_{\ell^2} = \sum_{n \geqslant 0} \overline{x_n} y_n.$$

— Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, on définit sur $\mathcal{C}([a, b]; \mathbf{C})$ le produit scalaire hermitien

$$(f \mid g)_2 = \int_a^b \overline{f} g.$$

7.1.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Dans la suite, on considère un espace préhilbertien complexe $(E, (\cdot \mid \cdot))$. Pour tout $x \in E$, $(x \mid x)$ est un réel positif et on note $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Proposition 7.1.1. *Pour tous $x, y \in E$,*

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

De plus, $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$ si, et seulement si la famille $\{x, y\}$ est liée.

Proposition 7.1.2. *Pour tous $x, y \in E$,*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

De plus, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si, et seulement si la famille $\{x, y\}$ est positivement liée.

7.1.7 Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$ avec $x \neq 0$. On pose $(x \mid y) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r = |(x \mid y)|$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a

$$\begin{aligned}\|\lambda x + y\|^2 &= (\lambda x + y \mid \lambda x + y) \\ &= |\lambda|^2\|x\|^2 + 2\Re[\overline{\lambda}(x \mid y)] + \|y\|^2.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout réel t,

$$0 \leqslant \|t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2rt + \|y\|^2.$$

Le discriminant de ce polynôme réel du second degré est négatif ou nul, ce qui s'écrit

$$r = |(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Supposons $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$. Il existe $t \in \mathbf{R}$ racine double du polynôme *i.e.* tel que $\|t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x + y\| = 0$ d'où $t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x + y = 0$.

7.1.8 Preuve de l'inégalité triangulaire

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re(x \mid y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2\,.\end{aligned}$$

Supposons $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. L'égalité $\|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ entraîne $\Re(x \mid y) = \|x\|\,\|y\|$ et donc

$$\Re(x \mid y) = |(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|\,.$$

D'après la deuxième égalité, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $y = \lambda x$ et donc $(x \mid y) = \lambda\|x\|^2$.

La première égalité montre alors que λ est un réel positif.

7.1.9 Norme préhilbertienne

Théorème 7.1.1. *L'application $E \to [0, +\infty[$ définie par*

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

est une norme sur E appelée norme associée au produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$.

L'inégalité triangulaire a déjà été vérifiée.
Si $\|x\| = 0$ alors $(x \mid x) = 0$ et donc $x = 0$.
Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x \mid x)} = |\lambda| \|x\|.$$

7.1.10 Propriétés d'une norme préhilbertienne

Proposition 7.1.3. *Pour tous $x, y \in E$, on a*

— Théorème de Pythagore :

$$\Re(x \mid y) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

— Identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

— Formule de polarisation :

$$(x \mid y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} + \mathrm{i} \frac{\|x + \mathrm{i}y\|^2 - \|x - \mathrm{i}y\|^2}{4}.$$

7.1.11 Orthogonalité

Définition 7.1.4. *Deux vecteurs x et y de E sont* orthogonaux *si $(x \mid y) = 0$.*

Remarque. Dans un espace préhilbertien *réel*, x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ce résultat est faux dans un espace préhilbertien complexe car on a alors

$$\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\Re(x \mid y).$$

Par exemple, pour $x \neq 0$, $(x \mid \mathrm{i}x) = \mathrm{i}\|x\|^2 \neq 0$ et $\Re(x \mid \mathrm{i}x) = 0$.

7.1.12 Orthogonal d'une partie

Définition 7.1.5. *L'*orthogonal *d'une partie A non vide de E est définie par*

$$A^\perp = \big\{x \in E : \textit{pour tout } a \in A,\ (x \mid a) = 0\big\}.$$

On voit que $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Proposition 7.1.4. *Soient A et B deux parties de E. Alors :*

— *L'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E ;*

— *Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$;*

— $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\overline{\operatorname{Vect} A})^\perp$.

— $A \subset (A^\perp)^\perp$

7.1.13 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

Il est facile de vérifier que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel. Montrons que c'est une partie fermée de E. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $A^\perp$ qui converge vers $x \in E$. Alors, pour tout $a \in A$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $(x - x_n \mid a)$ implique qu'on a :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (x_n \mid a) = (x \mid a).$$

Il est facile de vérifier que si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Comme $A \subset \overline{A}$, on a $(\overline{A})^\perp \subset A^\perp$. Soient $x \in A^\perp$ et $y \in \overline{A}$. Il existe $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de A telle que $y = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Alors

$$(x \mid y) = \lim_{n\to+\infty} (x \mid a_n) = 0.$$

Donc $x \in (\overline{A})^\perp$.

7.1.14 Orthogonal de l'espace vectoriel engendré

On rappelle que pour toute partie A de E, on note $\operatorname{Vect} A$ *l'espace vectoriel engendré par* A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments y de E qui sont combinaison linéaire (nécessairement finie) d'éléments de A :

$$y = \sum_{j=1}^{J} \lambda_j a_j, \quad J \in \mathbf{N}_{>0},\ \lambda_j \in \mathbf{C},\ a_j \in A.$$

Comme $A \subset \operatorname{Vect} A$, on a d'abord $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$. On vérifie facilement l'inclusion $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$ par la sesquilinéarité du produit scalaire.

7.1.15 Orthogonal d'un sous-espace

Définition 7.1.6. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, la somme $F + F^{\perp}$ est* directe :

$$F + F^{\perp} = F \oplus F^{\perp}.$$

Quand cette somme est égale à E, on dit que $F^{\perp}$ est supplémentaire orthogonal *de F.*

Remarque. En dimension finie, on a $E = F \oplus F^{\perp}$ pour tout sous-espace vectoriel F. Cette propriété permet de montrer que tout espace préhilbertien de dimension finie admet une base orthonormale (en raisonnant par récurrence sur la dimension).

Lorsque F est de dimension finie dans un espace préhilbertien de dimension infinie, la propriété est encore vraie.

En revanche, la propriété est fausse en général si F est de dimension infinie.

Exemple : Dans l'espace ℓ^2, soit F le sous-espace vectoriel des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang ; on vérifie $F^{\perp} = \{0\}$ et donc $F \oplus F^{\perp} \neq \ell^2$.

7.2 Espaces de Hilbert

7.2.1 Définition

Définition 7.2.1. *On dit qu'un espace préhilbertien H, muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)$, est un* espace de Hilbert *si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet.*

Théorème 7.2.1. *Soit H un espace de Hilbert et $(u_j)_{j\geqslant 0}$ une suite dans H.*

— *Si la série de terme général u_j est normalement convergente (c'est-à-dire si $\sum_{j\geqslant 0} \|u_j\| < \infty$), alors la série $\sum_{j\geqslant 0} u_j$ converge dans H.*

— *Supposons que les u_j sont deux à deux orthogonaux. Pour que la série $\sum_{j\geqslant 0} u_j$ soit convergente, il faut et il suffit que la série $\sum_{j\geqslant 0} \|u_j\|^2$ soit convergente. On a alors*

$$\left\| \sum_{j\geqslant 0} u_j \right\|^2 = \sum_{j\geqslant 0} \|u_j\|^2 .$$

7.2.2 Convergence des séries normalement convergentes

Plus généralement, le premier point du théorème est vérifié dans tout espace de Banach.

On note $S_J = \sum_{j=0}^{J} u_j$. Pour $0 \leqslant K \leqslant J$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|S_J - S_K\| = \left\| \sum_{j=K+1}^{J} u_j \right\| \leqslant \sum_{j=K+1}^{J} \|u_j\| \leqslant \sum_{j=K+1}^{\infty} \|u_j\| .$$

Si la série $\sum_{j\geqslant 0} \|u_j\|$ converge, alors le reste de rang K converge vers 0 lorsque $K \to \infty$. Ainsi, $\|S_J - S_K\| \to 0$ lorsque $J, K \to \infty$, ce qui montre que la suite $(S_J)_{J\geqslant 0}$ est de Cauchy. L'espace H étant un espace de Hilbert, la suite $(S_J)_{J\geqslant 0}$ converge.

7.2.3 Convergence de séries à termes orthogonaux

Supposons que la série $S = \sum_{j\geqslant 0} u_j$ est convergente et que les u_j sont deux à deux orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore, on a $\sum_{j=0}^{J} \|u_j\|^2 = \|S_J\|^2$. Comme $\|S_J\|^2$ converge vers $\|S\|^2$ par continuité de la norme, la série numérique $\sum_{j\geqslant 0} \|u_j\|^2$ converge.

Réciproquement, si $\sum_{j\geqslant 0} \|u_j\|^2 < \infty$ alors la majoration

$$\|S_J - S_K\|^2 = \sum_{j=K+1}^{J} \|u_j\|^2 \leqslant \sum_{j=K+1}^{\infty} \|u_j\|^2$$

permet de conclure comme précédemment.

7.2.4 Exemples d'espaces de Hilbert

— L'espace $\mathbf{C}^N$, muni du produit hermitien $(x \mid y) = \sum_{j=1}^{N} \overline{x}_j y_j$, est un espace de Hilbert.

— Plus généralement, *tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*

— L'espace $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$ muni du produit hermitien canonique est un espace de Hilbert.

— Tout sous-espace vectoriel *fermé* d'un espace de Hilbert est lui-même un espace de Hilbert (muni de la restriction du produit hermitien).

7.2.5 Non-exemples d'espaces de Hilbert

— Pour $N \geqslant 2$, l'espace $\mathbf{C}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach, mais n'est pas un espace préhilbertien.
En effet, pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, 1, \ldots, 0)$,

$$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2\left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2\right) = 4,$$

et l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. Cela signifie que la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas associée à un produit hermitien.

— L'espace préhilbertien $\mathcal{C}([a,b];\mathbf{C})$ muni du produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)_2$ n'est pas complet.

7.2.6 Isomorphisme isométrique entre espaces de Hilbert

Définition 7.2.2. *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et soit $L : H_1 \to H_2$ une application linéaire. On dit que L est un* isomorphisme isométrique *de H_1 sur H_2 si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

— *l'application L est bijective.*

— *l'application L est une isométrie, i.e. $\|L(x)\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ pour tout $x \in H_1$.*

Non-exemple : l'application $S : \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C}) \to \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$ (dite de « décalage ») définie par

$$S\big((x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\big) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots),$$

préserve la norme, mais ce n'est pas un isomorphisme (car elle n'est pas surjective).

7.3 Projections

7.3.1 Projection sur un convexe fermé

Définition 7.3.1. *On dit qu'une partie Γ d'un espace vectoriel E est* convexe *si*

$$\text{pour tout } x, y \in \Gamma, \text{ et tout } t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in \Gamma.$$

Théorème 7.3.1. *Soit H un espace de Hilbert et Γ une partie* convexe non vide et fermée *de H.*

- *Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in \Gamma$ tel que*

$$\|x - y\| = d(x, \Gamma) = \inf_{z \in \Gamma} \|x - z\|.$$

- *Si $x \in \Gamma$ alors $y = x$; si $x \notin \Gamma$, alors y est l'unique point de Γ tel que*

$$\text{pour tout } z \in \Gamma, \quad \Re(x - y \mid z - y) \leqslant 0.$$

7.3.2 Projection sur un convexe fermé : existence

Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une *suite minimisante*, c'est-à-dire $y_n \in \Gamma$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = d(x, \Gamma).$$

En utilisant l'identité du parallélogramme

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right).$$

avec $a = x - y_m$ et $b = x - y_n$, on trouve

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2),$$

et

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4[d(x, \Gamma)]^2. \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ est donc de Cauchy dans H. Elle converge vers un élément y de H et, Γ étant fermé, on a $y \in \Gamma$.

7.3.3 Projection sur un convexe fermé : unicité

Si y_1 et y_2 dans Γ sont tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, \Gamma)$ alors

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= 2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 4[d(x, \Gamma)]^2 - 4[d(x, \Gamma)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $y_1 = y_2$.

7.3.4 Projection sur un convexe fermé : caractérisation

Soient $x \notin \Gamma$ et $y \in \Gamma$ tel que $\|x-y\| = d(x,\Gamma)$. Soit $z \in \Gamma$. L'ensemble Γ étant convexe, on a $z_t = (1-t)y + tz \in \Gamma$, pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi,

$$[d(x,\Gamma)]^2 \leqslant \|x-z_t\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\Re(x-y \mid y-z_t) + \|y-z_t\|^2.$$

Comme $\|x-y\|^2 = [d(x,\Gamma)]^2$, on en déduit

$$2\Re(x-y \mid y-z_t) + \|y-z_t\|^2 \geqslant 0.$$

Donc, $2t\Re(x-y \mid z-y) \leqslant t^2\|y-z\|^2$ pour tout $t \in [0,1]$. En divisant par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\Re(x-y \mid z-y) \leqslant 0$.

Pour montrer l'unicité du point y vérifiant $\Re(x-y \mid z-y) \leqslant 0$ pour tout z, on prend $t = 1$ ci dessus :

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\Re(x-y \mid y-z) + \|y-z\|^2,$$

et donc y minimise $\|x-z\|$ pour $z \in \Gamma$.

7.3.5 Projection sur un sous-espace vectoriel fermé

Théorème 7.3.2. *Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un* sous-espace vectoriel fermé*. Il existe une unique application linéaire $P_F : H \to F$ telle que, pour tout $x \in H$*

$$\|x - P_F(x)\| = d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x-z\|.$$

De plus :

- *$P_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant cette égalité.*
- *$x - P_F(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F.*
- *P_F est 1-lipschitzienne (donc continue), i.e.*

$$\textit{pour tout } x \in H, \quad \|P_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Preuve. On note $y = P_F(x)$ la projection de x sur le sous-espace vectoriel F par le résultat précédent. Montrons que $x - y \in F^\perp$. On sait que, pour tout $z \in F$, on a

$$\Re(x-y \mid z-y) \leqslant 0.$$

Donc $\Re(x-y \mid w) \leqslant 0$ pour tout $w \in F$. En remplaçant w par $-w$ puis par $\mathrm{i}w$, on conclut que $(x-y \mid w) = 0$ pour tout $w \in F$. On a par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x-P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geqslant \|P_F(x)\|^2.$$

Exemple : Si F est un sous-espace de dimension finie et si $e_1, \ldots, e_N$ est une base orthonormée de F, on a la formule explicite

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{N} (e_j \mid x) e_j.$$

7.3.6 Projection et orthogonalité

Corollaire 7.3.1. *Soit F un sous-espace* fermé *de H. Alors*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Autrement dit, tout élément x de H se décompose de manière unique sous la forme

$$x = f + g, \quad f \in F, \quad g \in F^{\perp}.$$

Les élements f et g sont les projections de x sur F et $F^{\perp}$ respectivement.

De plus, on a

$$(F^{\perp})^{\perp} = F.$$

Preuve.

Soit $x \in H$. On a

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x)),$$

avec $x - P_F(x) \in F^{\perp}$, ce qui prouve l'existence de la décomposition.

L'unicité de la décomposition est facile à vérifier en utilisant $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

On sait déjà que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Réciproquement, si $y \in (F^{\perp})^{\perp}$, alors sa projection sur $F^{\perp}$ est nulle, d'où $y \in F$, par sa décomposition.

7.3.7 Critère de totalité

Définition 7.3.2. *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est* total *si* $\operatorname{Vect} A$ *est dense dans H.*

Corollaire 7.3.2. *Pour tout sous-ensemble A de H,*

$$A^{\perp} = (\overline{\operatorname{Vect} A})^{\perp} \quad \textit{et} \quad (A^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{Vect} A}.$$

En particulier, un sous-ensemble A est total si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$.

On a déjà vu $A^{\perp} = (\overline{\operatorname{Vect} A})^{\perp}$ et comme $\overline{\operatorname{Vect} A}$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a bien $\overline{\operatorname{Vect} A} = (A^{\perp})^{\perp}$.

Si A est total, alors $\overline{\operatorname{Vect} A} = H$ et $A^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. Inversement, si $A^{\perp} = \{0\}$ alors $\overline{\operatorname{Vect} A} = \{0\}^{\perp} = H$.

7.3.8 Forme linéaire associée à un vecteur

Pour $a \in H$, on note $\Lambda_a : H \to \mathbf{C}$ la *forme linéaire* définie par $\Lambda_a(x) = (a \mid x)$.

Lemme 7.3.1. *La forme linéaire Λ_a est continue de norme $\|\Lambda_a\|_{\mathcal{L}(H;\mathbf{C})} = \|a\|_H$.*

Preuve. Pour $x \in H$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\Lambda_a(x)| = |(a \mid x)| \leqslant \|a\| \|x\|.$$

ce qui montre que Λ_a est continue et

$$\|\Lambda_a\|_{\mathcal{L}(H;\mathbf{C})} = \sup_{\|x\|=1} |\Lambda_a(x)| \leqslant \|a\|.$$

Comme $\Lambda_a(a) = \|a\|^2$, on obtient $\|\Lambda_a\|_{\mathcal{L}(H;\mathbf{C})} = \|a\|$.

7.3.9 Théorème de représentation de Riesz

Théorème 7.3.3. *Soit H un espace de Hilbert et L une* forme linéaire continue *sur H. Il existe un unique $a \in H$ tel que*

$$\textit{pour tout } x \in H, \quad L(x) = \Lambda_a(x).$$

Preuve. Soit L une forme linéaire continue non nulle. On note $F = \operatorname{Ker} L \neq H$. C'est un sous-espace fermé de H car L est continue. On décompose $H = F \oplus F^{\perp}$ avec $F^{\perp} \neq \{0\}$.

Soit $b \in F^{\perp} \setminus \{0\}$. On a $L(b) \neq 0$. Pour tout $x \in H$, on a

$$x = \frac{L(x)}{L(b)} b + x - \frac{L(x)}{L(b)} b \quad \text{avec} \quad L\left(x - \frac{L(x)}{L(b)} b\right) = 0.$$

Par produit scalaire avec b, on trouve $(b \mid x) = \frac{L(x)}{L(b)} \|b\|^2$. Donc,

$$L(x) = (a \mid x) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\overline{L(b)}}{\|b\|^2} b.$$

7.4 Bases hilbertiennes

7.4.1 Espaces de Hilbert séparables

Définition 7.4.1. *On dit qu'un espace de Hilbert H est* séparable*, s'il existe une suite finie ou infinie d'éléments de H qui constitue un sous-ensemble total dans H.*

Remarque : Tous les espaces de Hilbert considérés dans ce cours sont séparables.

7.4.2 Notion de base hilbertienne

Définition 7.4.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit qu'une suite finie ou infinie $(e_j)_{j \in J}$ de H est une* base hilbertienne *si :*

— *Le système $(e_j)_{j \in J}$ est total ;*

— *Le système vérifie les relations d'orthonormalité :*

$$(e_j \mid e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \textit{pour } j = k \\ 0 & \textit{pour } j \neq k. \end{cases}$$

Remarque : En dimension infinie, une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique du terme. Un élément de H ne pourra pas s'écrire, en général, comme combinaison linéaire finie des vecteurs de la base, mais pourra s'écrire sous forme d'une série convergente, comme *limite* de telles combinaisons.

7.4.3 Existence d'une base hilbertienne

Théorème 7.4.1. *Dans tout espace de Hilbert séparable, il existe des bases hilbertiennes.*

Preuve. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Soit $a_1, a_2, \dots$ un ensemble total fini ou dénombrable de H.

On commence par supprimer de la suite tout vecteur qui est combinaison linéaire de ceux qui le précèdent. On obtient ainsi une suite $b_1, b_2, \dots$ telle que l'espace vectoriel E_n engendré par $b_1, \dots, b_n$ est exactement de dimension n, pour tout $n \geqslant 1$.

On pose $e_1 = b_1/\|b_1\|$ et on construit par récurrence une suite orthonormale (e_j) telle que pour tout n, les $e_1, \dots, e_n$ forment une base orthonormale de E_n.

Les (e_j) étant supposés construits jusqu'au rang n, on pose

$$f_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (e_j \mid b_{n+1}) e_j \neq 0, \quad e_{n+1} = f_{n+1}/\|f_{n+1}\|$$

de sorte que le vecteur normalisé e_{n+1} est orthogonal aux vecteurs e_j pour $j = 1, \dots, n$.

7.4.4 Décomposition dans une base hilbertienne

Théorème 7.4.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_j)_{j \in J}$ une base hilbertienne de H.*

- *Étant donnés des scalaires γ_j vérifiant $\sum_j |\gamma_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_j \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme x vérifie pour tout j, $\gamma_j = (e_j \mid x)$.*
- *Tout $x \in H$ s'écrit de façon unique sous forme d'une série convergente dans H*

$$x = \sum_j c_j(x) e_j \quad \text{où} \quad c_j(x) = (e_j \mid x) \in \mathbf{C}.$$

*De plus, on a l'*égalité de Bessel-Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_j |c_j(x)|^2.$$

Preuve. Pour le premier point : comme les vecteurs $\gamma_j e_j$ sont orthogonaux et de norme $|\gamma_j|$, la convergence de la série $\sum_j \gamma_j e_j$ vient du résultat général sur les séries à termes orthogonaux dans un espace de Hilbert.

De plus, si on note $x = \sum_j \gamma_j e_j$, on a bien par continuité du produit scalaire

$$\gamma_k = \lim_{J \to +\infty} \left(e_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{J} \gamma_j e_j \right) = (e_k \mid x).$$

Pour le deuxième point : prenons $x \in H$ et posons

$$c_j(x) = (e_j \mid x), \quad x_J = \sum_{j=1}^{J} c_j(x) e_j.$$

On a

$$(x_J \mid x) = \sum_{j=1}^{J} \overline{c_j(x)}(e_j \mid x) = \sum_{j=1}^{J} |c_j(x)|^2.$$

Par le théorème de Pythagore, $\sum_{j=1}^{J} |c_j(x)|^2 = \|x_J\|^2$ et donc $\|x_J\|^2 = (x_J \mid x) \leqslant \|x_J\|\|x\|$, ce qui prouve que $\|x_J\|$ est majoré par $\|x\|$. La série à termes positifs $\sum_j |c_j(x)|^2$ est donc convergente. Ainsi, la série $\sum_j c_j(x)e_j$ converge vers un élément $y \in H$. On voit que pour tout j, $(e_j \mid x - y) = c_j(x) - c_j(x) = 0$, et $x - y$ qui est orthogonal à un système total est donc nul.

7.4.5 Espaces de Hilbert séparables

Corollaire 7.4.1. *Pour tout espace de Hilbert séparable H de dimension infinie, il existe une bijection isométrique de H sur ℓ^2.*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie. On construit un isomorphisme isométrique de H sur $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$.

Soit $(e_j)_{j \geqslant 0}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $\gamma = (\gamma_j)_{j \geqslant 0} \in \ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$, on note

$$L(\gamma) = \sum_{j \geqslant 0} \gamma_j e_j \in H.$$

Alors $L : \ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C}) \to H$ est linéaire et $\|L(\gamma)\| = \|\gamma\|$. Donc L est continue et injective ; elle est surjective par définition d'une base hilbertienne.

7.5 Définition de l'espace L^2

7.5.1 Espace des fonctions de carré intégrable

Définition 7.5.1. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$. Une fonction f de U dans $\mathbf{C}$ est de* carré intégrable *si elle est mesurable et si $\int_U |f|^2 < \infty$.*

L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur U est stable par multiplication par un scalaire et stable par somme car

$$|f + g|^2 \leqslant 2|f|^2 + 2|g|^2.$$

C'est donc un espace vectoriel.

De plus, si f et g sont de carré intégrable, alors $\overline{f}g$ est intégrable car $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$. On peut donc poser

$$(f \mid g) = \int \overline{f}g$$

et

$$\|f\|_{L^2} = (f \mid f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.5.2 Identification des fonctions égales presque partout

On définit une *relation d'équivalence*

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout.}$$

Pour f de carré intégrable on note $[f]$ la *classe d'équivalence* de f

$$[f] := \{g \text{ de carré intégrable} : f = g \text{ presque partout}\}.$$

Définition 7.5.2. *L'espace de Lebesgue L^2 est défini par*

$$L^2(U; \mathbf{C}) = \{[f] : f \text{ est de carré intégrable sur } U\}.$$

Les mêmes remarques que pour l'espace L^1 s'appliquent en ce qui concerne la signification de l'égalité presque partout.

7.5.3 Complétude de L^2

Théorème 7.5.1. *Pour tout ouvert non vide $U \subset \mathbf{R}^N$, l'espace $L^2(U; \mathbf{C})$ muni du produit scalaire hermitien*

$$(f \mid g)_{L^2} = \int_U \overline{f} g$$

est un espace de Hilbert, de norme associée $\|f\|_{L^2} = (f \mid f)_{L^2}^{\frac{1}{2}}$.

La convergence associée à la norme de ces espaces s'appelle convergence en moyenne quadratique*.*

7.5.4 Propriétés de L^2

Proposition 7.5.1. *Si une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans L^2 alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge presque partout vers f.*

Théorème 7.5.2. *L'espace $\mathcal{C}_c(U)$ est dense dans $L^2(U)$: pour toute fonction $f \in L^2(U)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(U)$ telle que*

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(U)} \leqslant \varepsilon.$$

7.6 Exercices du Chapitre 7

Exercice 82. (Applications directes du cours)

(a) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que pour tout produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension n il existe une base $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ de E telle que

$$(x \mid y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j \quad \text{si} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

(b) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Soit $\{z_l\}_{1\leqslant l\leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans H, et $x \in H$.

i) Montrer qu'il existe une unique famille de scalaires $\{c_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que $x - \sum_{k=1}^n c_k z_k$ et z_l soient orthogonaux pour tout $1 \leqslant l \leqslant n$.

ii) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{z_l\}_{1\leqslant l\leqslant n}$. Justifier l'existence de la projection de x sur F et calculer $d(x, F)$.

Exercice 83. (Distance et projection pour une norme non associée à un produit scalaire) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbf{C})$ muni de la norme

$$\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On définit F l'ensemble des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. Soit f_0 la fonction égale à 1 sur $[0,1]$. Calculer $d(f_0, F)$ où la distance de f_0 à F est définie à partir de la norme ci-dessus. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f_0 - f\| = d(f_0, F)$?

Exercice 84. (Un contre-exemple au théorème de représentation de Riesz dans le cas préhilbertien) On considère l'espace préhilbertien réel $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $p \geqslant 0$ et $a \in]0,1[$ fixés, on définit l'application

$$A(f) = \int_0^a t^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que A est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

(b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $A(f) = (f \mid g)$ pour tout $f \in E$.

Exercice 85. (Polynômes d'Hermite) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$, c'est-à-dire l'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que $\int_{\mathbf{R}} |f|^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x < \infty$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_{\mathbf{R}} \overline{f} g e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

On définit les *polynômes d'Hermite* :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),$$

ainsi que les *fonctions d'Hermite* :

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

(a) Calculer H_0, H_1, H_3 et H_4.

(b) Montrer que H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n, et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace vectoriel engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

(c) Montrer que
$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$
(d) Montrer $H_n' = 2nH_{n-1}$ et $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$.

Exercice 86. (Suite de l'exercice précédent) On reprend les notations de l'exercice précédent.

(a) Montrer que
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1} \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}.$$
En déduire
$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)\psi_n = (2n+1)\psi_n.$$
Retrouver le résultat de la question (c) de l'exercice précédent.

(b) Calculer $\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Que dire de la famille $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$?

Exercice 87. (Un calcul de projection sur un convexe fermé) On considère dans $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ l'ensemble
$$\Gamma = \{(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} : \text{pour tout } n \in \mathbf{Z},\ |x_n| \leqslant 1\}.$$
(a) Montrer que Γ est un convexe fermé.

(b) Déterminer la projection d'un élément de $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ sur Γ.

Exercice 88. (Condition pour qu'une norme soit associée à un produit scalaire) Soit $\|\cdot\|$ une norme définie dans un espace vectoriel réel E. Le but de l'exercice est de montrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire euclidien sur E si, et seulement si, elle vérifie l'identitée du parallélogramme :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
(a) Déterminer la seule forme possible du produit scalaire. On la notera $(\cdot \mid \cdot)$.

(b) Démontrer que, pour tout $x, y, z \in E$,
$$(x+y \mid z) + (x-y \mid z) = 2(x \mid z), \quad (2x \mid z) = 2(x \mid z).$$
(c) En déduire $(u \mid v) + (w \mid v) = (u+w \mid v)$. Conclure.

Exercice 89. (Distance entre deux parties convexes) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert.

(a) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de parties convexes fermées bornées non vides de H. Soit $x_0 \in H \setminus A_1$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ des projections de x_0 sur les $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de H. En déduire que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ n'est pas vide.

(b) Soient A et B deux parties convexes fermées bornées non vides de H disjointes. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que
$$\|a-b\| = \inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\|.$$

Exercice 90. (Une propriété de l'application de projection) Montrer que dans un espace de Hilbert, l'application de projection sur une partie convexe fermée non vide est 1-lipschitzienne.

Exercice 91. (Une relation impliquant la distance à un sous-espace vectoriel) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Soient V un sous-espace vectoriel fermé de H et $x_0 \in H \setminus V$.

(a) Trouver une relation entre $d(x_0, V)$ et la norme de la forme linéaire sur V définie par $v \mapsto (x_0 \mid v)$.

(b) Étudier l'exemple : $H = L^2([0;1], \mathrm{d}t)$,

$$V = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

et x_0 est la fonction identité $t \in [0,1] \mapsto t$.

Exercice 92. (Isométries linéaires entre espaces de Hilbert) Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert complexes (pour lesquels la norme et le produit scalaire sont notés $\|\cdot\|$ et $(\cdot \mid \cdot)$). Soit $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.

(a) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H_1$;

(ii) $(\Phi(x) \mid \Phi(y)) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H_1$.

On dit alors que Φ est une *isométrie linéaire*. Justifier qu'une telle isométrie linéaire est nécessairement injective.

(b) On suppose que $\Phi : H_1 \to H_2$ est une isométrie linéaire. Montrer que :

— L'image de H_1 par Φ, muni de la restriction du produit scalaire de H_2, est un espace de Hilbert.

— Si E_1 est un sous-espace vectoriel dense de H_1, alors $\Phi(E_1)$ est dense dans $\Phi(H_1)$.

— Si (e_j) est une base hilbertienne de H_1, alors son image par Φ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

Exercice 93. (*Convergence faible dans un espace de Hilbert) Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de H *converge faiblement vers* $f \in H$ si

$$\text{pour tout } h \in H, \quad \lim_{n \to +\infty} (h \mid f_n) = (h \mid f).$$

(a) Montrer que si la limite faible d'une suite existe, alors elle est unique.

(b) Montrer que si une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f \in H$, alors elle converge faiblement vers f.

(c) Soit $\{e_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la suite $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0. En déduire que la suite (e_j) n'admet aucune sous-suite convergente.

En déduire que la boule unité de H n'est pas compacte.

(d) On veut maintenant montrer que pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bornée, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers un élément f de H. On va utiliser un argument d'extraction diagonale :

(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de H. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\psi_1(n)})$ telle que $(e_1|f_{\psi_1(n)})$ converge vers un scalaire γ_1 ($\psi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante).

(ii) Montrer ensuite que l'on peut extraire de $(f_{\psi_1(n)})$ une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\psi_2(n)})$ telle que $(e_2|f_{\psi_1\circ\psi_2(n)})$ converge vers un scalaire γ_2. Continuer l'argument et construire ainsi pour tout j une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)})$ extraite des précédentes et telle que $(e_j|f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)})$ converge vers un scalaire γ_j.

(iii) Définir pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(e_j \mid f_{\varphi(n)}) = \gamma_j$, pour tout j. Finalement, montrer que $\sum_j \gamma_j e_j$ définit un élément de H vers lequel la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ converge faiblement.

(e) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui converge faiblement vers $f \in H$. Comparer $\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$ et $\|f\|$. Que se passe-t-il si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|$? (On pourra développer $\|f_n - f\|^2$.)

Chapitre 8

Séries de Fourier

8.1 Méthode de séparation des variables

8.1.1 Equation de la chaleur sur un intervalle

Comme motivation à l'introduction des séries de Fourier, on s'intéresse à l'*équation de la chaleur* sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\\ \qquad u|_{t=0} = g & \text{sur }]0, 2\pi[. \end{cases}$$

Il s'agit d'une *équation aux dérivées partielles* linéaire où la fonction inconnue $u(t, x)$ est une fonction à valeurs réelles de deux variables : le temps t, et la variable d'espace x.

8.1.2 Exemples de conditions aux limites classiques

L'équation étant posée sur un intervalle, il convient de la compléter par des *conditions aux limites*, c'est-à-dire aux extrémités de l'intervalle. Exemples :

— Dirichlet homogène : $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0$

— Neumann homogène :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2\pi) = 0.$$

— *Conditions périodiques :*
$$u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 2\pi).$$

— Conditions mixtes :
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0.$$

8.1.3 Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables

On cherche des solutions particulières de la forme suivante :

$$u(t,x) = v(t)w(x).$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = v'(t)w(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = v(t)w''(x).$$

Par l'équation, en supposant que v et w ne s'annulent pas, on obtient

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

D'où, pour une constante μ,

$$v'(t) = \mu v(t), \quad w''(x) = \mu w(x).$$

On obtient $v(t) = e^{\mu t}$ (à une constante multiplicative près).

8.1.4 Utilisation des conditions aux limites

En considérant le cas de conditions aux limites périodiques, on obtient le système suivant pour w :

$$\begin{cases} w'' = \mu w \quad \text{sur }]0,2\pi[\\ w(0) = w(2\pi) \\ w'(0) = w'(2\pi). \end{cases}$$

— Si $\mu > 0$: $w(x) = c_- e^{-\sqrt{\mu}x} + c_+ e^{\sqrt{\mu}x}$, mais seul le cas $c_- = c_+ = 0$ satisfait les conditions aux limites.

— Si $\mu = 0$: $w(x) = dx + c$, mais seul le cas $d = 0$ satisfait les conditions aux limites.

— Si $\mu < 0$: $w(x) = c_- e^{-\mathrm{i}\sqrt{-\mu}x} + c_+ e^{\mathrm{i}\sqrt{-\mu}x}$; les conditions aux limites imposent alors $\sqrt{-\mu} = k \in \mathbf{Z}$.

8.1.5 Famille de solutions

On vient donc de trouver une *famille* de solutions

$$u(t,x) = c_{-k} e^{-\mathrm{i}kx - k^2 t} + c_k e^{\mathrm{i}kx - k^2 t},$$

où $k \in \mathbf{N}$, et c_{-k}, c_k sont des nombres complexes. Ces solutions correspondent aux données initiales :

$$u(0,x) = c_{-k} e^{-\mathrm{i}kx} + c_k e^{\mathrm{i}kx}.$$

Par ailleurs, l'équation étant *linéaire*, les combinaisons linéaires de ces solutions sont encore solutions. On sait donc trouver une solution de l'équation correspondant à toute donnée initiale du type

$$g(x) = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k \in \mathbf{C}.$$

8.1.6 Décomposition en série de Fourier

Questions naturelles :

— Quel type de donnée initiale g peut-on traiter lorsque $M \to +\infty$?

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k \in \mathbf{C}.$$

— Pour ces données initiales, est-ce que la série

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx - k^2 t}$$

résout bien l'équation de la chaleur ?

8.2 Séries de Fourier dans $L^2(]0,2\pi[)$

8.2.1 Polynômes trigonométriques

On note $I =]0,2\pi[$ et on considère l'espace de Hilbert $L^2(I)$ des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur I, muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_I \overline{f} g, \quad \|f\|_{L^2(I)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 8.2.1. *Les fonctions $e_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbf{Z}$, forment une base hilbertienne de $L^2(I)$.*

Remarque. On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire des fonctions e_k, $k \in \mathbf{Z}$. L'énoncé précédent revient à dire que la famille $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est orthonormale et que les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2(I)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

8.2.2 Caractère orthonormal

Pour $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$(e_k \mid e_k) = \frac{1}{2\pi}\int_I \underbrace{\overline{e}_k e_k}_{1}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $k, j \in \mathbf{Z}$ avec $k \neq j$, on a

$$(e_k \mid e_j) = \frac{1}{2\pi}\int_I \overline{e}_k e_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(j-k)x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

8.2.3 Caractère total

On rappelle d'abord que l'espace des fonctions continues à support compact dans I est dense dans $L^2(I)$: pour toute fonction $f \in L^2(I)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(I)$ telle que

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(I)} \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, $f_\varepsilon(0) = f_\varepsilon(2\pi) = 0$.

On rappelle aussi que par le théorème de Stone-Weierstrass complexe, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions e_k pour $k \in \mathbf{Z}$, est dense dans l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π, muni de la norme de la convergence uniforme.

Cela entraîne qu'il existe g_ε un polynôme trigonométrique tel que $\sup_I |f_\varepsilon - g_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$.

Par la majoration $\|\cdot\|_{L^2(I)} \leqslant \sup_I |\cdot|$, on obtient donc :

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^2(I)} \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_{L^2(I)} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(I)} \leqslant 2\varepsilon.$$

8.2.4 Convergence en moyenne quadratique

On obtient la décomposition en série de Fourier de toute fonction de $L^2(I)$ au sens suivant.

Corollaire 8.2.1. *Tout élément $f \in L^2(I)$ se décompose de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) e^{ikx},$$

la série étant convergente dans $L^2(I)$. *Les composantes $c_k(f)$ sont données par*

$$c_k(f) = (e_k \mid f) = \frac{1}{2\pi} \int_I e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, l'égalité de Bessel-Parseval *est vérifiée :*

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(f)|^2.$$

8.2.5 Lemme de Riemann-Lebesgue

Comme la série $\sum_{k \geqslant 0} |c_k(f)|^2$ converge, le terme général de cette série tend vers 0, ce qui démontre le résultat suivant :

Corollaire 8.2.2. *Soit $f \in L^2(I)$. Les coefficients $c_k(f)$ vérifient*

$$\lim_{|k| \to \infty} c_k(f) = 0.$$

Remarque. Plus généralement, le lemme de Riemann-Lebesgue affirme que pour toute fonction $f \in L^1(I)$,

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_I e^{\mathrm{i}\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

8.3 Propriétés des coefficients de Fourier

8.3.1 Terminologie

Soit $f \in L^2(I)$. On appelle *coefficients de Fourier exponentiels* de f les nombres complexes, pour $k \in \mathbf{Z}$:

$$c_k(f) = (e_k \mid f) = \frac{1}{2\pi} \int_I e^{-\mathrm{i}kx} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

On appelle *coefficients de Fourier trigonométriques* de f les nombres complexes, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_I f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x.$$

On appelle *série de Fourier de f* la série

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f) e^{\mathrm{i}kx} \quad \text{ou} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

8.3.2 Relations entre les coefficients de Fourier

Proposition 8.3.1. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, les coefficients de Fourier sont liés par les relations :*

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad b_n(f) = \mathrm{i}(c_n(f) - c_{-n}(f));$$
$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)}{2}, \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)}{2}.$$

En particulier, $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Proposition 8.3.2. *Si f est à valeurs réelles, alors les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels et $c_{-k}(f) = \overline{c_k(f)}$.*

8.3.3 L'espace $L^2(\mathbf{T})$

On note $L^2(\mathbf{T}; \mathbf{C})$ ou $L^2(\mathbf{T})$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes dont la restriction à I est de carré intégrable et qui sont 2π-périodiques, c'est-à-dire qui vérifient pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_I \overline{f} g$$

l'espace $L^2(\mathbf{T})$ est un espace de Hilbert isométrique à $L^2(I)$.

8.3.4 Utilisation de la périodicité

Lemme 8.3.1. *Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$. Pour tout réel α,*

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

8.3.5 Symétries

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

Proposition 8.3.3. *Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$.*

— *Si f possède la symétrie hermitienne : pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \overline{f(x)}$, alors les c_k sont réels ;*

— *Si f est paire alors les c_k sont pairs : $c_k = c_{-k}$;*

— *Si f est impaire alors les c_k sont impairs : $c_k = -c_{-k}$;*

— *Si f est à valeurs réelles et paire alors les c_k sont réels et pairs.*

— *Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$,*
$$c_k(f(\cdot + \alpha)) = e^{\mathrm{i}k\alpha} c_k(f).$$

8.3.6 Fonctions continues par morceaux

Une fonction f est *continue par morceaux* sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ s'il existe une subdivision $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_J = \beta$ de $[\alpha, \beta]$ telle que pour tout $j = 0, \ldots, J-1$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ est continue et prolongeable par continuité sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$.

Une fonction est *continue par morceaux sur* $\mathbf{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$.

Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodique appartient à $L^2(\mathbf{T})$.

8.3.7 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux

Une fonction f est de *classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux* sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ s'il existe une subdivision $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_J = \beta$ de $[\alpha, \beta]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $j = 0, \ldots, p-1$, f et les dérivées de f d'ordre inférieur ou égal à p ont une limite finie à gauche en α_j et à droite en α_{j+1}.

Une fonction f est de *classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux* sur $\mathbf{R}$ si elle est de *classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux* sur tout segment de $\mathbf{R}$.

8.3.8 Décroissance des coefficients de Fourier

Proposition 8.3.4. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, 2π-périodique.*

— *Si f est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$,*

$$c_k\left(f'\right) = \mathrm{i}k\, c_k(f).$$

— *Si pour $p \geqslant 1$, f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux, alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$,*

$$c_k\left(f^{(p)}\right) = (\mathrm{i}k)^p c_k(f).$$

Conséquences. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, 2π-périodique, continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux :

— Le terme général de la série de Fourier de f' est la dérivée du terme général de la série de Fourier de f.

— On a $c_k(f) = o(|k|^{-1})$ lorsque $|k| \to \infty$.

8.3.9 Preuve de la décroissance des coefficients de Fourier

Soit $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_J = 2\pi$ une subdivision de l'intervalle $[0, 2\pi]$ telle que pour tout $j = 0, \ldots, J-1$ la restriction $f_j = f|_{[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$ est continue sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Par hypothèse, f' a une limite finie à droite en α_j et une limite finie à gauche en α_{j+1}. On pose $f_j'(\alpha_j) = \lim_{\alpha_j^+} f'$ et $f_j'(\alpha_{j+1}) = \lim_{\alpha_{j+1}^-} f'$. Ainsi, f_j est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha_j, \alpha_j + 1]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} e^{-\mathrm{i}kx} f_j'(x)\,\mathrm{d}x = f(\alpha_{j+1})e^{-\mathrm{i}k\alpha_{j+1}} - f(\alpha_j)e^{-\mathrm{i}k\alpha_j} + \mathrm{i}k \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\alpha_0 = 0$, $\alpha_J = 2\pi$, et $f(2\pi) = f(0)$, on obtient en sommant

$$\sum_{j=0}^{J-1} \left[f(\alpha_{j+1})e^{-\mathrm{i}k\alpha_{j+1}} - f(\alpha_j)e^{-\mathrm{i}k\alpha_j}\right] = f(2\pi) - f(0) = 0.$$

D'où

$$2\pi c_k\left(f'\right) = \mathrm{i}k \sum_{j=0}^{J-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}k \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}k\, c_k(f).$$

8.4 Convergence des séries de Fourier

8.4.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 8.4.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On définit les sommes partielles :*

$$S_K(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k(f) e_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

— *En tout point x où f est continue, la suite $(S_K(x))_{K\geqslant 1}$ converge vers $f(x)$;*
— *En tout point x où f est discontinue, la suite $(S_K(x))_{K\geqslant 1}$ converge vers*

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right] \quad \text{où} \quad f(x\pm 0)=\lim_{y\to x^{\pm}} f(y).$$

8.4.2 Convergence uniforme

Corollaire 8.4.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique* continue sur $\mathbf{R}$ *et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, la suite $(S_K)_{K\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.*

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f. De plus, on a pour tout $k \in \mathbf{Z}_{\neq 0}$,

$$|c_k(f)| = \frac{|c_k(f')|}{|k|} \leqslant \frac{1}{k^2} + |c_k(f')|^2.$$

Comme $|c_k(f)e_k| + |c_{-k}(f)e_{-k}| \leqslant |c_k(f)| + |c_{-k}(f)|$, la série de Fourier de f est normalement convergente, ce qui implique que la suite $(S_K)_{K\geqslant 1}$ converge uniformément vers f.

8.4.3 Le noyau de Dirichlet

Pour $K \geqslant 1$, on note $D_K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ le noyau de Dirichlet :

$$D_K : \theta \mapsto 1 + 2\sum_{n=1}^{K} \cos n\theta.$$

Avec $2\sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta = \sin(2n+1)\frac{\theta}{2} - \sin(2n-1)\frac{\theta}{2}$, on obtient

$$D_K(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2K+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{pour } \theta \neq 2l\pi,\ l \in \mathbf{Z}; \\ 2K+1 & \text{pour } \theta = 2l\pi,\ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

De plus, comme $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0$ pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} D_K = \pi$.

8.4.4 Séries partielles et noyau de Dirichlet

Lemme 8.4.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout réel x et tout $K \geqslant 1$, on a*

$$S_K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_K(\theta)\left[f(x+\theta)+f(x-\theta)\right]\mathrm{d}\theta.$$

Preuve. Par périodicité, pour tout x,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t,$$

d'où, en utilisant $\cos nx \cos nt + \sin nx \sin nt = \cos n(x-t)$,

$$S_K(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{K} \cos n(x-t) \right] f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $t = x + \theta$, on trouve

$$S_K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{K} \cos n\theta \right] f(x+\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_K(\theta) f(x+\theta) \, \mathrm{d}\theta.$$

En découpant $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$ et en changeant θ en $-\theta$, on obtient

$$S_K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} D_K(\theta) \left[f(x+\theta) + f(x-\theta) \right] \, \mathrm{d}\theta.$$

8.4.5 Preuve du théorème de Dirichlet

En utilisant $\int_0^\pi D_K = \pi$, on a

$$\begin{aligned} &2S_K(x) - [f(x+0) + f(x-0)] \\ &\qquad = \int_0^\pi \frac{D_K(\theta)}{\pi} \left[f(x+\theta) - f(x+0) + f(x-\theta) - f(x-0) \right] \, \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Le réel x étant fixé, on définit une fonction continue par morceaux $g : [0, \pi] \to \mathbf{C}$ par

$$g(\theta) = \frac{f(x+\theta) - f(x+0) + f(x-\theta) - f(x-0)}{2\pi \sin \frac{\theta}{2}}, \ \ \theta \neq 0,$$

et

$$g(0) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{f(x{+}\theta) - f(x{+}0)}{\pi\theta} + \lim_{\theta \to 0^+} \frac{f(x{-}\theta) - f(x{-}0)}{\pi\theta}$$

Ainsi,

$$2S_K(x) - [f(x+0) + f(x-0)] = \int_0^\pi g(\theta) \sin \left[(2K+1) \frac{\theta}{2} \right] \mathrm{d}\theta.$$

Le résultat s'obtient par le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à l'intégrale ci-dessus.

8.5 Séries de Fourier multi-dimensionnelles

8.5.1 Bases de l'espace $L^2(U \times V)$

Le résultat général suivant est une conséquence du théorème de Fubini.

Proposition 8.5.1. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^{N_1}$ et V un ouvert de $\mathbf{R}^{N_2}$. Soient $(e_j)_{j \in \mathbf{N}}$, $(f_j)_{j \in \mathbf{N}}$ des bases hilbertiennes de $L^2(U)$ et $L^2(V)$, respectivement. Alors*

$$\left\{ \varphi_{jk}, \ (j,k) \in \mathbf{N}^2, \ \text{où } \varphi_{jk}(x,y) = e_j(x) f_k(y) \right\}$$

est une base hilbertienne de $L^2(U \times V)$.

8.5.2 Série de Fourier associée à une fonction sur I^N

Muni du produit scalaire
$$(f \mid g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{I^N} \overline{f} g$$
l'espace $L^2(I^N)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 8.5.1. *Les fonctions $(\mathbf{e}_k)_{k\in\mathbf{Z}^N}$ définies par*
$$\mathbf{e}_k(x) = e^{\mathrm{i}k\cdot x} = e^{\mathrm{i}k_1x_1} \cdots e^{\mathrm{i}k_Nx_N}$$
pour $k \in \mathbf{Z}^N$, forment une base hilbertienne de $L^2(I^N)$.

On note $L^2(\mathbf{T}^N)$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes dont la restriction à I^N est de carré intégrable et qui sont $2\pi\mathbf{Z}$-périodiques, c'est-à-dire qui vérifient pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, et tout $\omega \in \mathbf{Z}^N$, $f(x + 2\pi\omega) = f(x)$.

L'espace $L^2(\mathbf{T}^N)$ muni du produit canonique est isométrique à $L^2(I^N)$.

8.6 Retour à l'équation de la chaleur sur $\mathbf{T}^N$

On considère le problème d'évolution, pour $g \in L^2(\mathbf{T}^N)$:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times\mathbf{R}^N \\ u|_{t=0} = g & \text{sur } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$
où le Laplacien est défini par
$$\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2},$$
avec une condition de $2\pi\mathbf{Z}$-périodicité sur $u(t)$: pour tout $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$ et $\omega \in \mathbf{Z}^N$,
$$u(t, x + 2\pi\omega) = u(t, x).$$

Soit une donnée initiale $g \in L^2(\mathbf{T}^N)$ et sa décomposition dans la base hilbertienne $(\mathbf{e}_k)_{k\in\mathbf{Z}^N}$:
$$g(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} c_k(g) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \quad \text{au sens } L^2$$
On pose pour $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$,
$$u(t, x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} c_k(g) e^{-|k|^2 t} e^{\mathrm{i}k\cdot x} \quad \text{où} \quad |k|^2 = \sum_{j=1}^N k_j^2.$$

Théorème 8.6.1. — Régularité et équation : *La série ci-dessus définit une fonction u de classe $\mathcal{C}^\infty(]0, \infty[\times\mathbf{R}^N)$ vérifiant l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ sur $]0, \infty[\times\mathbf{R}^N$;*
- — Périodicité : *Pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $\omega \in \mathbf{Z}^N$, $u(t, x + 2\pi\omega) = u(t, x)$.*
- — Donnée initiale : $\lim_{t\to 0^+} \|g - u(t, \cdot)\|_{L^2(I^N)} = 0$.

8.6.1 Effet régularisant de l'équation de la chaleur

Une propriété remarquable de l'équation de la chaleur est que la solution est *immédiatement* de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors que la condition initiale est « seulement » de carré sommable dans I.

En particulier, la condition aux limites qui n'a pas de sens en $t = 0$ car la donnée initiale est dans L^2 se déduit de la périodicité pour tout $t > 0$.

En revanche, on voit que pour $t < 0$, la série définissant $u(t, x)$ n'a en général pas de sens. L'équation de la chaleur n'est pas *réversible*.

8.6.2 Convergence normale de la série des dérivées

Pour $k \in \mathbf{Z}^N$, on note :

$$v_k(t, x) = c_k(g)e^{-|k|^2 t}e^{\mathrm{i}k\cdot x}.$$

D'abord, on observe que pour tout $t \geqslant 0$, $|v_k(t, x)| = e^{-|k|^2 t}|c_k(g)| \leqslant |c_k(g)|$ et donc la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est bien définie comme fonction de $L^2(\mathbf{T}^N)$.

Soit $\tau > 0$. Pour tout $(t, x) \in [\tau, \infty[\times \mathbf{R}^N$, on a la majoration

$$|v_k(t, x)| = e^{-|k|^2 t}|c_k(g)| \leqslant e^{-|k|^2 \tau}|c_k(g)|.$$

De même pour tout $q \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}^N$, on a

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}}\cdots\frac{\partial^{p_N}}{\partial_{x_N}^{p_N}}v_k = (-|k|^2)^q(\mathrm{i}k_1)^{p_1}\cdots(\mathrm{i}k_N)^{p_N}v_k,$$

et donc, pour tout $(t, x) \in [\tau, \infty[\times \mathbf{R}^N$,

$$\left|\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}}\cdots\frac{\partial^{p_N}}{\partial_{x_N}^{p_N}}v_k\right| \leqslant |k|^{2q}k_1^{p_1}\cdots k_N^{p_N}e^{-|k|^2\tau}|c_k(g)|.$$

8.6.3 Régularité et périodicité

Ainsi, pour tout $q \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}^N$, la série de terme général

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}}\cdots\frac{\partial^{p_N}}{\partial_{x_N}^{p_N}}v_k$$

converge normalement. Ceci implique que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[\times \mathbf{R}^N$.

De plus, on voit que chaque v_k vérifie l'équation de la chaleur. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que u vérifie l'équation de la chaleur sur $]0, \infty[\times \mathbf{R}^N$.

8.6.4 Condition initiale

Soit $K > 0$. On calcule

$$g(x) - u(t,x) = \sum_{|k|>K} c_k(g) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \left(1 - e^{-|k|^2 t}\right) + \sum_{|k|\leqslant K} c_k(g) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \left(1 - e^{-|k|^2 t}\right) = (1) + (2).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k(g)|^2 < \infty$, il existe $K = K(\varepsilon) > 0$ tel que $\sum_{|k|>K} |c_k(g)|^2 < \varepsilon^2$. Ainsi, $\|(1)\|_{L^2(I)} \leqslant \varepsilon$.

La valeur de K est maintenant fixée. Comme $\lim_{t\to 0^+} e^{-|k|^2 t} = 1$, il existe $\tau > 0$ tel que si $t \in [0, \tau]$,

$$\|(2)\|^2_{L^2(I)} \leqslant \sum_{|k|\leqslant K} |c_k(g)|^2 \left(1 - e^{-|k|^2\tau}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

En conclusion, pour tout $t \in [0,\tau]$, $\|g - u(t,\cdot)\|_{L^2(I^N)} \leqslant 2\varepsilon$, ce qui démontre bien $\lim_{t\to 0^+} \|g - u(t,\cdot)\|_{L^2(I^N)} = 0$.

8.6.5 Autres bases de L^2

En considérant d'autres bases de $L^2(I)$ reliées aux polynômes trigonométriques, on peut résoudre l'équation de la chaleur avec d'autres conditions aux limites (Dirichlet homogène, Neumann homogène, par exemple).

Il existe bien d'autres bases hilbertiennes classiques sur L^2, par exemple : les polynômes de Legendre, les fonctions d'Hermite (reliées à la transformée de Fourier), les fonctions de Laguerre.

8.7 Exercices du Chapitre 8

Exercice 94 (Propriétés des coefficients de Fourier)**.** (a) Soit $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ une fonction à valeurs réelles. On définit les coefficients de Fourier $c_k(f)$

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Montrer que $c_{-k} = \overline{c}_k$. Montrer que si f est paire, alors les c_k sont réels et vérifient $c_k = c_{-k}$. Montrer que si f est impaire, alors les c_k sont imaginaires purs et vérifient $c_k = -c_{-k}$. Traduire ces propriétés sur les coefficients $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

(b) Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos^p x$ et $x \mapsto \sin^p x$ peuvent chacune s'exprimer comme une somme trigonométrique de la forme

$$\sum_{n=0}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{avec des coefficients } a_n \text{ et } b_n \text{ réels.}$$

Exercice 95 (Un exercice calculatoire sur les coefficients de Fourier)**.** Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $[-\pi,\pi]$ par

$$\begin{cases} f(x) = \pi - x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ f(x) = \pi + x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Étudier la convergence de la série de Fourier. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Exercice 96 (Phénomène de Gibbs)**.** On définit la fonction f sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ (pour } n \geq 0), \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \text{ (pour } n \geq 1).$$

(b) On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Justifier que pour tout $x \in]0, \pi[$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$.

(c) Pour $n \geq 1$ et $x \in]0, \pi[$, calculer explicitement $S'_{2n}(x)$ et en déduire que la fonction S_{2n} admet un maximum local au point $\frac{\pi}{2n}$.

(d) En utilisant l'expression trouvée à la question précédente pour $S'_{2n}(x)$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(e) Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ (on rappelle que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$). Interpréter le résultat trouvé à la question précédente.

Exercice 97 (*Noyau de Fejer)**.** Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbf{R}$, dont la restriction au segment $[-\pi, \pi]$ appartient à $L^2(]-\pi, \pi[)$. On note

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

On considère les sommes de Fejer $\Sigma_n(f)$ associées à f définies par

$$\forall (n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}, \quad \Sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x),$$

où pour tous $(k, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$, $S_k(f)(x) = \sum\limits_{\ell=-k}^{k} c_\ell(f) e^{i\ell x}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère le noyau de Fejer K_n d'ordre n défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x} \right).$$

(a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)dt.$$
(b) Montrer que
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad K_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbf{Z}, \\ \dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$
Calculer $\|K_n\|_{L^1(]-\pi,\pi[)}$.

(c) Montrer que pour tout $0 < \delta < \pi$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|x|\leq\pi} |K_n(x)|dx = 0.$$
(d) Dans le cas où f est la restriction au segment $[-\pi,\pi]$ d'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodique, montrer que la suite de fonctions $(\Sigma_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-\pi,\pi]$.

(e) En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

(f) Soit f continue et 2π-périodique. Montrer que si la série de Fourier de f converge simplement, sa limite est nécessairement f.

Exercice 98 (Utilisation des séries de Fourier pour la résolution explicite d'une équation différentielle)**.** Montrer que l'équation différentielle
$$\ddot{x} + xe^{it} = 0$$
admet des solutions à valeurs complexes périodiques de période 2π. Préciser l'ensemble de ces solutions sous forme d'une série convergente.

Exercice 99 (Développement en demi-période et conditions de Dirichlet)**.**

(a) Montrer que les fonctions $(\sin nx)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ forment un système total de $L^2(]0,\pi[;\mathbf{R})$.

(b) Soit $g \in L^2(]0,\pi[)$. Déterminer une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,\infty[\times[0,\pi])$ de l'équation de la chaleur
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t>0,\ x \in]0,\pi[,$$
qui vérifie les conditions de Dirichlet au bord
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t > 0,$$
et la condition initiale
$$\lim_{t\downarrow 0} u(t) = g \quad \text{dans } L^2(]0,\pi[).$$

(c) Rappeler les coefficients $(b_n)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 1 \quad \text{dans } L^2(]0,\pi[).$$

En déduire une expression en série de Fourier de la solution de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet sur le bord et donnée initiale $g \equiv 1$.

Exercice 100 (Equation des ondes périodique)**.** (a) Soit g une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbf{R}$ et h une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$. Déterminer une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, 2π-périodique par rapport à la variable x pour tout $t\in\mathbf{R}$, de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R},$$

et qui vérifie les conditions initiales

$$u(0,x) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = h(x), \quad x\in\mathbf{R}.$$

Indication. Chercher la fonction u sous la forme

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)\Big).$$

(b) La solution $u(t)$ est-elle bornée lorsque $t\to\infty$?

(c) Pourquoi une hypothèse de régularité $\mathcal{C}^p$ sur les fonctions g et h a été faite ? Comparer au cas de l'équation de la chaleur.

Exercice 101 (Contrôle de l'équation des ondes)**.** On considère une équation des ondes qui modélise le comportement d'une corde vibrante fixe à une extrémité et commandée à l'autre extrémité. Le but est d'arrêter les oscillations.

Le problème s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & \text{sur }]0,\infty[\times]0,1[,\\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) = p(t), & \text{pour tout } t\in[0,\infty[,\\ w(0,x) = g(x), \quad \partial_t w(0,x) = h(x), & \text{pour tout } x\in]0,1[\end{cases}$$

où les fonctions g et h, de classe C^4, sont données et où l'on cherche le contrôle $t\mapsto p(t)$ pour avoir

$$\text{pour tout } x\in]0,1[, \quad w(4,x) = \partial_t w(4,x) = 0. \tag{8.1}$$

Pour simplifier, on suppose

$$p(0) = p'(0) = 0 \quad \text{ainsi que} \quad p(4) = p'(4) = 0. \tag{8.2}$$

(a) Préliminaires :

— Soit q une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et $\alpha > 0$. Montrer que la solution de l'équation différentielle

$$b'' + \alpha^2 b = q, \quad b(0) = b_0, \quad b'(0) = \tilde{b}_0.$$

s'écrit

$$b(t) = b_0 \cos \alpha t + \frac{\tilde{b}_0}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sin(\alpha(t-s)) q(s) ds.$$

— Décomposer la fonction $x \mapsto x$ en série de sinus sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire trouver les coefficients $(\beta_k)_{k \geq 1}$ tels que pour $x \in [0, 1[$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi x).$$

(b) Poser $u(t, x) = w(t, x) - xp(t)$ et déterminer l'équation vérifiée par $u(t, x)$ en supposant p de classe C^2 sur $[0, 1]$.

(c) Chercher une solution de l'équation de u sous la forme $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(k\pi x)$ et donner l'équation de b_k. En déduire l'expression de $b_k(t)$ et $b_k'(t)$ en fonction de p et des coefficients de Fourier en séries de sinus des fonctions g et h.

(d) Montrer que (8.1) impose que les quantités suivantes

$$\int_0^4 p''(t) \cos(k\pi t) dt, \ \int_0^4 p''(t) \sin(k\pi t) dt$$

prennent des valeurs à préciser en fonction des coefficients de Fourier de g et h.

(e) On choisit $g(x) = \sin(\pi x)$ et $h(x) = 0$. Trouver une fonction p solution du problème sous la forme

$$p(t) = \delta \sin(\pi t) + \gamma \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

où δ et γ sont à déterminer.

Chapitre 9

Transformée de Fourier

9.1 Convolution

9.1.1 Définition du produit de convolution dans L^1

Théorème 9.1.1. *Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $r : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ définie par $r(x,y) = f(x-y)g(y)$. Alors,*

- *Pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $y \mapsto r(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^N$.*
- *Si on définit pour presque tout x*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} r(x,y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y,$$

  alors $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et

$$\|f \star g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

- *Pour $f, g, h \in L^1(\mathbf{R}^N)$, on a*

$$f \star g = g \star f \quad \text{et} \quad (f \star g) \star h = f \star (g \star h).$$

La fonction $f \star g$ s'appelle le produit de convolution *de f et g.*

9.1.2 Application des théorèmes de Tonelli et Fubini

On applique d'abord le théorème de Tonelli à la fonction mesurable à valeurs positives $(x,y) \mapsto |r(x,y)|$. Le calcul

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |r(x,y)|\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\ \mathrm{d}x \right) |g(y)|\ \mathrm{d}y \\ &= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < \infty,\end{aligned}$$

montre que $r \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Le théorème de Fubini appliqué à la fonction r montre alors que $y \mapsto r(x,y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^N$ pour presque tout x et que la fonction $f \star g : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} r(x,y)\ \mathrm{d}y$ ainsi définie pour presque tout x est intégrable sur $\mathbf{R}^N$.

La commutativité $f \star g = g \star f$ se montre par le changement de variable $z = x - y$ dont le jacobien est $(-1)^N$. L'associativité est laissée en exercice.

9.1.3 Produit de convolution et dérivation

Théorème 9.1.2. *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et soit g une fonction continue et bornée dans $\mathbf{R}^N$. Alors, la fonction $f \star g$ définie en tout point de $\mathbf{R}^N$ par la formule*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y$$

est continue et bornée.

Si de plus pour $p \geqslant 1$, les dérivées partielles de g jusqu'à l'ordre p existent, sont continues et bornées, alors il en est de même pour $f \star g$ et on a

$$\frac{\partial (f\star g)}{\partial x_j} = f \star \frac{\partial g}{\partial x_j},\ \dots\ , \frac{\partial^p (f\star g)}{\partial x_1^{p_1}\cdots \partial_{x_N}^{p_N}} = f \star \frac{\partial^p g}{\partial x_1^{p_1}\cdots \partial_{x_N}^{p_N}}.$$

Preuve. Si g est continue et bornée sur $\mathbf{R}^N$ alors $|f(y)g(x-y)| \leqslant |f(y)|\,\|g\|_\infty$, donc $(f\star g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ et $|(f\star g)(x)| \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_\infty$.

On observe que la majoration $|f(y)g(x-y)| \leqslant |f(y)|\,\|g\|_\infty$ par une fonction intégrable indépendante de x et la continuité de $x \mapsto f(y)g(x-y)$ permettent d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

Finalement, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivées partielles d'ordre 1 bornées alors la fonction $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est dérivable par rapport à x_j et la fonction

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[f(y)g(x-y)] = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x-y)$$

est majorée en module par la fonction $|f(y)|\,\|\partial g/\partial x_j\|_\infty$ intégrable et indépendante de x. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. La continuité de la dérivée partielle de $f\star g$ résulte du théorème de continuité sous le signe somme.

Le cas de dérivées d'ordre supérieur se traite par récurrence.

9.1.4 Produit de convolution dans L^2

Théorème 9.1.3. — *Soient $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Alors $(f\star g)(x)$ est bien définie presque partout. La fonction $f\star g$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^N)$ et*

$$\|f\star g\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}.$$

— *Soient $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Alors $(f\star g)(x)$ est bien définie pour tout x. La fonction $f\star g$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini. De plus,*

$$\|f\star g\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

La preuve est laissée en exercice.

9.1.5 Approximations de l'identité

Théorème 9.1.4. *Soit $h \in L^1(\mathbf{R}^N)$ avec $\int_{\mathbf{R}^N} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On pose*

$$h_n(x) = n^N h(nx) \quad \textit{pour } n \geqslant 1.$$

- *Si $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors $f \star h_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$.*
- *Si $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ alors $f \star h_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$.*

Remarque. On peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $f \star g = g$. En un certain sens, $h_n \to \delta_0 \notin L^1$ (masse de Dirac en 0), « élément neutre » du produit de convolution dans un espace adapté.

Conséquence. Par exemple, on peut considérer sur $\mathbf{R}^N$ la fonction $h(x) = \pi^{-\frac{N}{2}} e^{-|x|^2}$ qui est intégrable, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'intégrale 1. Toute fonction de L^2 est limite dans L^2 de la suite de fonctions $(f \star h_n)_{n \geqslant 1}$ où chaque $f \star h_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par le théorème de dérivation du produit de convolution.

9.1.6 Support et convolution

Définition 9.1.1. *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On appelle* support *de f l'adhérence de l'ouvert $\{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \neq 0\}$. Le support de f est un fermé de $\mathbf{R}^N$ noté* $\operatorname{supp} f$.

Proposition 9.1.1. *Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ deux fonctions continues et intégrables sur $\mathbf{R}^N$. Alors,*

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Conséquence. Si deux fonctions continues f, g sont à support compact, alors $f \star g$ est aussi à support compact.

9.1.7 Convolution et densité : fonctions continues

On rappelle que l'on note $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions continues $\mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ à support compact. Plus généralement, pour tout $p \geqslant 1$, on note $\mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions $\mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^p$ à support compact.

Lemme 9.1.1. *Pour tout $p \geqslant 1$, l'espace $\mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ muni de la norme uniforme.*

Plus précisément : soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$, il existe une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|g - g_n\|_\infty \leqslant 1/n \quad \textit{et} \quad \operatorname{supp} g_n \subset \operatorname{supp} g + B_f(0, 1/n).$$

9.1.8 Une approximation de l'identité de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact

On note $h : \mathbf{R}^N \to [0, +\infty[$ la fonction définie sur $B(0,1)$ par

$$h(x) = \alpha_N \exp\left(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}\right), \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2,$$

et prolongée par 0 en dehors de $B(0,1)$. On choisit la constante $\alpha_N > 0$ de telle sorte que $\|h\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} = 1$. On vérifie que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$h_n(x) = n^N h(nx).$$

La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\operatorname{supp} h_n \subset B_f(0, 1/n)$. De plus, $\|h_n\|_{L^1} = \|h\|_{L^1} = 1$.

9.1.9 Preuve de la densité par convolution dans $\mathcal{C}_c$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$; on pose $g_n = g \star h_n$. Par les propriétés du produit de convolution, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ et $\operatorname{supp} g_n \subset \operatorname{supp} g + B_f(0, 1/n)$.

On remarque en utilisant $\int_{\mathbf{R}^N} h_n = 1$ que

$$g(x) - g_n(x) = \int_{\mathbf{R}^N} [g(x) - g(x-y)] h_n(y) \,\mathrm{d}y$$

donc

$$\begin{aligned} |g(x) - g_n(x)| &\leqslant \left\{ \sup_{|y| \leqslant \frac{1}{n}} |g(x) - g(x-y)| \right\} \|h_n\|_{L^1} \\ &\leqslant \sup_{|y| \leqslant \frac{1}{n}} |g(x) - g(x-y)|. \end{aligned}$$

Le support de g étant compact, par le théorème de Heine, g est uniformément continue. On déduit de la majoration précédente que la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers g.

9.1.10 Densité et convolution : fonctions L^2

Proposition 9.1.2. *Pour tout $p \geqslant 1$, l'espace $\mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $(L^2(\mathbf{R}^N); \|\cdot\|_{L^2})$.*

Preuve. Soit $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^2} \leqslant \varepsilon$.

On note $F = \operatorname{supp} g + B_f(0,1)$; F est un compact de $\mathbf{R}^N$. D'après le résultat précédent, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$, dont le support est contenu dans F, telle que $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon \,[\lambda(F)]^{-1/2}$ où $\lambda(F)$ est la mesure de Lebesgue de F. Ainsi,

$$\|g - g_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|g - g_\varepsilon\|_\infty \|\mathbf{1}_F\|_{L^2} \leqslant \varepsilon.$$

Finalement, $\|f - g_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \|f - g\|_{L^2} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant 2\varepsilon$; ceci prouve que l'espace $\mathcal{C}_c^p(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

9.2 Transformée de Fourier dans L^1

9.2.1 Transformation de Fourier sur L^1

Définition 9.2.1. *Pour $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, la* transformée de Fourier *de f est la fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$ par*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\mathrm{i}\,\xi\cdot x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques. La notation $\xi \cdot x$ désigne le produit scalaire de $\mathbf{R}^N$.

L'intégrale définissant $\widehat{f}$ est bien définie pour tout ξ de $\mathbf{R}^N$ puisque $e^{-\mathrm{i}\,\xi\cdot x}$ est de module 1 et f est intégrable.

9.2.2 Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème 9.2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et soit $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f. Alors :*

— *La fonction $\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbf{R}^N$ et vérifie*

$$\|\widehat{f}\,\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}.$$

— *De plus, $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.*

La continuité de $\widehat{f}$ résulte du théorème de continuité sous le signe somme. La borne en norme $\|\cdot\|_\infty$ est évidente.

Preuve

Montrons que $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Comme $\exp\big(-\mathrm{i}\frac{\pi}{|\xi|^2}\xi\cdot\xi\big) = -1$, on a en utilisant le changement de variable $y = x + \frac{\pi}{|\xi|^2}\xi$, pour $\xi \neq 0$,

$$\widehat{f}(\xi) = -\int \exp\left(-\mathrm{i}\xi\cdot\left(x + \tfrac{\pi}{|\xi|^2}\xi\right)\right) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int e^{-\mathrm{i}\xi\cdot y} f\left(y - \tfrac{\pi}{|\xi|^2}\xi\right)\,\mathrm{d}y.$$

En prenant la moyenne des deux expressions de $\widehat{f}(\xi)$, il vient :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int e^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\left[f(x) - f\left(x - \tfrac{\pi}{|\xi|^2}\xi\right)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\left\|f - f\left(\cdot - \tfrac{\pi}{|\xi|^2}\xi\right)\right\|_{L^1}.$$

Le terme de droite tend vers 0 lorsque $|\xi| \to +\infty$ par la continuité des translations dans L^1.

9.2.3 Théorème d'inversion de Fourier dans L^1

Théorème 9.2.2. *Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, on a :*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Définissons la *transformée de Fourier normalisée* de f par

$$\mathcal{G}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\mathrm{i}\,\xi\cdot x}\, f(x)\, \mathrm{d}x,$$

et la *transformée de Fourier inverse normalisée* de $\widehat{f}$ par

$$\overline{\mathcal{G}}(\widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

9.2.4 Propriétés de la transformée de Fourier

Proposition 9.2.1.
- *Si f est à valeurs réelles alors $\widehat{f}$ possède la symétrie hermitienne : $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.*
  Si f possède la symétrie hermitienne alors $\widehat{f}$ est à valeurs réelles. Plus généralement,

$$\overline{\mathcal{F}(f(x))} = \mathcal{F}\left[\overline{f}\right](-\xi).$$

- *Si f est paire (resp. impaire) alors $\widehat{f}$ est paire (resp. impaire).*
  Si f est réelle et paire alors $\widehat{f}$ est réelle et paire.
- *Translation :*

$$\mathcal{F}\left[f(x-x_0)\right] = e^{-\mathrm{i}x_0\cdot\xi}\widehat{f}(\xi), \mathcal{F}\left[e^{\mathrm{i}x\cdot\xi_0} f(x)\right] = \widehat{f}(\xi-\xi_0).$$

- *Dilatation : pour $\lambda > 0$,*

$$\mathcal{F}\left[f(x/\lambda)\right] = \lambda^N\, \widehat{f}(\lambda\xi).$$

9.2.5 Décroissance à l'infini et régularité de $\widehat{f}$

Théorème 9.2.3. *Si $(1+|x|)\, f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^N)$ et pour tout $j = 1, \ldots, N$,*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -\mathrm{i} \int e^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, x_j\, f(x)\, \mathrm{d}x = -\mathrm{i}\, \mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

Plus généralement, pour $p \geqslant 1$, si $(1+|x|^p) f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^p(\mathbf{R}^N)$.

9.2.6 Régularité et décroissance à l'infini de $\widehat{f}$

Théorème 9.2.4. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^N) \cap L^1(\mathbf{R}^N)$ et pour $j = 1, \ldots, N$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\,\xi_j\,\widehat{f}(\xi).$$

Plus généralement, pour $p \geqslant 1$, si $f \in \mathcal{C}^p(\mathbf{R}^N) \cap L^1(\mathbf{R}^N)$ et toutes les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre p appartiennent à $L^1(\mathbf{R}^N)$ alors

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\xi|^p\,|\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

9.2.7 Convolution et transformée de Fourier dans L^1

Théorème 9.2.5. *Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors*

$$\mathcal{F}(f \star g) = \widehat{f}\,\widehat{g}$$

La preuve est une application du théorème de Fubini.

9.2.8 Quelques transformées de Fourier classiques

— Fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$:

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{1}_{[a,b]}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{a+b}{2}\right).$$

— Gaussiennes : dans $\mathbf{R}^N$, pour $\alpha > 0$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}\right).$$

— Fractions rationnelles : dans $\mathbf{R}$, pour $\alpha > 0$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}\right) = 2\pi\,e^{-\alpha|\xi|}.$$

9.3 Transformée de Fourier dans L^2

9.3.1 Prolongement d'opérateurs

Théorème 9.3.1. *Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert et soit E un sous-espace* dense *de H_1. Soit $A : E \to H_2$ une application linéaire continue telle que*

$$\sup_{x\in E,\,\|x\|=1} \|A(x)\| < \infty.$$

Alors il existe une unique application linéaire continue $\tilde{A} : H_1 \to H_2$ dont la restriction à E coïncide avec A et telle que $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \sup_{x\in E,\,\|x\|=1}\|A(x)\|$. On dit que $\tilde{A}$ prolonge *A.*

Preuve. Soient $x \in H_1$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans E telle que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Par hypothèse et linéarité de A, on a :

$$\|A(x_n) - A(x_m)\| \leqslant C\|x_n - x_m\|.$$

Ainsi, $\big(A(x_n)\big)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans H_2. On définit $\tilde{A}(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) \in H_2$ et on vérifie que la définition de $\tilde{A}(x)$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

9.3.2 Transformée de Fourier dans L^2 : prolongement

Théorème 9.3.2. *Les applications $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ s'étendent en des isométries bijectives de $L^2(\mathbf{R}^N)$ dans lui-même et leurs prolongements, encore notées $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$, vérifient*

$$\mathcal{G} \circ \overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_{L^2}.$$

Preuve. Le fait que $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ sont des isométries signifie que pour toute $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$,

$$\|\mathcal{G}(f)\|_{L^2} = \|\overline{\mathcal{G}}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Pour $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ on note $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\mathcal{G}(f)$ et $\overline{\mathcal{F}}(f) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\overline{\mathcal{G}}(f)$, de sorte que $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = (2\pi)^N \,\mathrm{Id}_{L^2}$.

Soit $f \in \mathcal{C}_c^{N+1}(\mathbf{R}^N)$; on observe par les propriétés de la transformée de Fourier que la fonction

$$\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{N+1}\, \mathcal{G}(f)(\xi)$$

est bornée, et donc $\mathcal{G}(f) \in L^1(\mathbf{R}^N)$. De plus, $(\overline{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G})(f) = f$.

On sait que l'espace $\mathcal{C}_c^{N+1}(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ pour la norme L^2. Le théorème de prolongement d'opérateurs permet donc de prolonger $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ à $L^2(\mathbf{R}^N)$.

Par densité et continuité, on obtient également $(\overline{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G})(f) = f$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$.

Vérifions que $\overline{\mathcal{G}}$ est l'adjoint de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire : pour tout $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ on a

$$(\mathcal{G}(f) \mid g)_{L^2} = (f \mid \overline{\mathcal{G}}(g))_{L^2}.$$

Si $f, g \in \mathcal{C}_c^{N+1}(\mathbf{R}^N)$, alors la fonction $(x, \xi) \mapsto f(x)g(\xi)$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^{2N})$ et par le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}(f) \mid g)_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{\left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}\, g(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix\xi}\overline{f}(x) g(\xi)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} \overline{f}(x) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{ix\xi}\, g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\ \mathrm{d}x = (f \mid \overline{\mathcal{G}}(g))_{L^2},
\end{aligned}$$

d'où le résultat par densité.

Nous venons de voir que

$$(\mathcal{G}(f) \mid g)_{L^2} = (f \mid \overline{\mathcal{G}}(g))_{L^2}.$$

Donc
$$(\mathcal{G}(f) \mid \mathcal{G}(g))_{L^2} = (f \mid (\overline{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G})(g))_{L^2} = (f \mid g)_{L^2}$$
et de même
$$(\overline{\mathcal{G}}(f) \mid \overline{\mathcal{G}}(g))_{L^2} = (f \mid (\mathcal{G} \circ \overline{\mathcal{G}})(g))_{L^2} = (f \mid g)_{L^2}.$$
En conclusion, les extensions de $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ à $L^2(\mathbf{R})$ (encore notées $\mathcal{G}$ et $\overline{\mathcal{G}}$) sont des isométries et vérifient
$$\mathcal{G} \circ \overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}} \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_{L^2}.$$

9.3.3 Extension à L^2 des propriétés de $\mathcal{F}$

Proposition 9.3.1. — *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ est telle que f et ses dérivées partielles premières sont dans L^2, alors pour tout $j = 1, \dots, N$,*
$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \mathrm{i}\,\xi_j\,\widehat{f}(\xi).$$

— *Si $f \in L^1$ et $g \in L^2$, alors*
$$\mathcal{F}(f \star g) = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

— *Si f et $g \in L^2$, alors*
$$\mathcal{F}(f\,g) = (2\pi)^{-N}(\widehat{f} \star \widehat{g}).$$

9.4 Applications de la transformée de Fourier

9.4.1 Équations stationnaires dans $\mathbf{R}^N$

On considère un cas simple d'équation posée dans $\mathbf{R}^N$:
$$-\Delta u + u = f,$$
où f est une fonction donnée et u est à déterminer.

En prenant la transformée de Fourier, comme $\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2\widehat{u}(\xi)$, on trouve l'équation suivante
$$(|\xi|^2 + 1)\widehat{u} = \widehat{f} \quad \text{d'où} \quad \widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{|\xi|^2 + 1}.$$
Finalement,
$$u = (2\pi)^{-N}\,\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\widehat{f}}{|\xi|^2+1}\right) = (2\pi)^{-N}\,\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{|\xi|^2+1}\right) \star f.$$

Dans $\mathbf{R}^3$, on trouve explicitement
$$u = \left(\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\right) \star f.$$

9.4.2 Équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^N$

On considère l'équation de la chaleur linéaire sur $\mathbf{R}^N$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans }]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \\ \quad u|_{t=0} = g & \text{sur } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Résoudre le problème de Cauchy consiste, la fonction g étant fixée, à trouver une solution $u(t,x)$ définie pour $t \geqslant 0$.

On note $\widehat{u}(t,\xi)$ la *transformée de Fourier de u dans la variable x* :

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\mathrm{i}\,x\cdot\xi} u(t,x)\ \mathrm{d}x.$$

9.4.3 Équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^N$ et transformée de Fourier

On a

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(t,\xi) = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,\xi) \quad \text{et} \quad -\widehat{\Delta u}(t,\xi) = |\xi|^2 \widehat{u}(t,\xi),$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + |\xi|^2 \widehat{u} = 0 & \text{dans }]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \\ \quad \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{g} & \text{sur } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

On trouve donc

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{g}(\xi).$$

En définissant la fonction $G_t :]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ par

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

de telle sorte que $\widehat{G}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$, on obtient

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}_t\,\widehat{g}(\xi) \quad \text{et donc} \quad u(t,x) = (G_t \star g)(x).$$

9.4.4 Résolution de l'équation de la chaleur

Théorème 9.4.1. *Soit $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et $u :]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ la fonction définie par*

$$u(t,x) = (G_t \star g)(x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\ \mathrm{d}y$$

pour $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}^N$. Alors :

- *La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]0,\infty[\times \mathbf{R}^N$.*
- *La fonction u vérifie l'équation de la chaleur dans $]0,\infty[\times \mathbf{R}^N$.*
- *La fonction u vérifie la condition initiale au sens suivant*

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - g\|_{L^2} = 0.$$

9.4.5 Remarques sur l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^N$

— Pour $K(t,x) = G_t(x)$, on peut écrire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = 0 \quad \text{dans }]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \\ \qquad K|_{t=0} = \delta_0. \end{cases}$$

La fonction K est appelée *solution fondamentale de l'équation de la chaleur*.

— Comme dans le cas de $\mathbf{T}^N$, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^N$ présente un effet régularisant.

— Si $g \geqslant 0$, alors pour tout $t > 0$, $u(t,x) \geqslant 0$. De plus, si $g \geqslant 0$ et $g \neq 0$, alors pour tout $t > 0$, $u(t,x) > 0$. C'est une illustration de la *vitesse infinie de propagation*.

9.4.6 Preuve abrégée pour l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^N$

La régularité de u dans $]0,\infty[\times \mathbf{R}^N$ est une conséquence de la régularité de G_t et des propriétés générales du produit de convolution.

Le fonction u vérifie l'équation de la chaleur dans $]0,\infty[\times \mathbf{R}^N$ car la fonction $K(t,x) = G_t(x)$ vérifie l'équation de la chaleur et

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left(\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K \right) \star g.$$

Finalement, on remarque que la solution fondamentale $(G_t)_{t>0}$ est une approximation de l'identité quand $t \to 0^+$ ce qui entraîne que la condition initiale est satisfaite au sens suivant : $\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - g\|_{L^2} = 0$.

9.5 Exercices du Chapitre 9

Exercice 102. (Applications directes du cours)

(a) Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. On rappelle que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(b) Soient $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y)dy$ est définie presque partout, de carré sommable et que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|f \star g\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}.$$

Indication : montrer que la fonction $r : (x,y,z) \mapsto \overline{g}(x-y)\overline{f}(y)g(x-z)f(z)$ est intégrable.

Exercice 103. (Support et convolution) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On appelle *support* de f, noté $\operatorname{supp} f$, l'adhérence de l'ouvert $\{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \neq 0\}$.

Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ deux fonctions continues et intégrables sur $\mathbf{R}^N$. Montrer que

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Exercice 104. (Transformées de Fourier classiques) Calculer les transformées de Fourier des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ suivantes :

(a) $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

(b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

(c) Pour $\alpha > 0$, $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$.

(d) $h : x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 105. (Résolution d'équations fonctionnelles)

(a) Pour tout $a > 0$, on pose pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$G_a(x) := \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}.$$

Calculer $G_a \star G_b$ pour tous $a, b > 0$ (utiliser la transformation de Fourier).

(b) Peut-on trouver $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $f \star g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$?

(c) Peut-on trouver $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (dans $L^1(\mathbf{R}^N)$) et $f \star g = 0$?

(d) Résoudre dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ l'équation $f \star f = f$, d'inconnue f.

Exercice 106. (Convolution dans L^2) Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Montrer que la fonction $f \star g$ est définie sur $\mathbf{R}$, continue, bornée, tend vers 0 à l'infini et vérifie de plus :

$$\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Indication : On pourra utiliser un argument de densité.

Exercice 107. (Approximation de l'identité) Soit $h \in L^1(\mathbf{R}^N)$ avec $\int_{\mathbf{R}^N} h(x)dx = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $h_n(x) = n^N h(nx)$. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors la suite $(f \star h_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{R}^N)$.

Indication : commencer par le cas où f est une fonction continue et à support compact et utiliser ensuite un argument de densité.

Exercice 108. (Rappels de topologie)

(a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que si A est compact et B est fermé dans E, alors $A + B$ est fermé.

(b) Donner un exemple de deux parties fermées de $\mathbf{R}^2$ (muni de la topologie habituelle) dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 109. (Existence de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact)

(a) Montrer que la fonction ψ définie par $\psi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $\psi(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Construire une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 110. (Espace de Schwartz) On définit $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire vérifiant

$$\text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^N, \qquad \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

où l'on a adopté les notations suivantes $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$ et $\partial^\beta \phi = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_N}^{\beta_N} \phi$.

Montrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, la transformée de Fourier de f est bien définie et appartient également à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 111. (Transformée de Fourier et symétrie sphérique) Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, on note $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(a) Soit $E(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|}$, montrer que $E \in L^1(\mathbf{R}^3)$.

(b) On dit que $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{C}$ est à symétrie sphérique si la valeur de $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, ou de manière équivalente si pour toute rotation R de $\mathbf{R}^3$, $f(Rx) = f(x)$. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^3)$ est à symétrie sphérique, alors $\widehat{f}$ est aussi à symétrie sphérique.

(c) Calculer $\widehat{E}$.

Indication : faire le calcul en coordonnées sphériques en choisissant $\xi = ae_3$.

Exercice 112. (Densité des translatées dans L^2) Soit f une fonction de $L^2(\mathbf{R}^N)$. Pour chaque x dans $\mathbf{R}^N$, on note τ_x la fonction translation : $\tau_x(y) = y - x$. Montrer que l'espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(f \circ \tau_x)_{x \in \mathbf{R}^N}$ engendré par les translatées de f est dense dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ si et seulement si l'ensemble $\{\xi \in \mathbf{R}^N : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure nulle.

Indication : étudier l'orthogonal dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ de $\mathcal{F}(V)$.

Exercice 113. (*Densité des polynômes dans l'espace L^2 avec une mesure gaussienne) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}dx)$ muni de la forme hermitienne

$$(f \mid g)_H = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, e^{-x^2} dx.$$

Le but de l'exercice est de montrer que les fonctions polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H. Pour $f \in H$, on pose :

$$F(z) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{zt - t^2} dt.$$

(a) Montrer que la fonction F est bien définie et admet un développement en série entière convergeant sur $\mathbf{C}$, à savoir

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{z^j}{j!} \int_{\mathbf{R}} f(t) t^j e^{-t^2} dt \right).$$

(b) On suppose que f est orthogonale pour le produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)_H$ à l'espace engendré par les fonctions polynômes. Montrer que $F \equiv 0$.

(c) En utilisant que $F(ix) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, montrer que $f = 0$ et conclure.

Exercice 114. (*Équation de la chaleur dans le demi-espace) On considère le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

dans le demi espace $\mathbf{R}^N_+ = \{x \in \mathbf{R}^N : x_N > 0\}$, avec donnée initiale $u|_{t=0} = g \in L^2(\mathbf{R}^N_+)$ et avec la condition de Dirichlet au bord $u = 0$ sur le bord de $\mathbf{R}^N_+$. En prolongeant g sur $\mathbf{R}^N$ par imparité, donner l'expression d'une solution u du problème.

Exercice 115. (*Résolution d'une équation impliquant le bilaplacien via la transformée de Fourier) L'objectif des premières questions de l'exercice est de calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{4}{4+x^4}.$$

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$K : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-(1+i)|x|}.$$

(b) Calculer la partie réelle de la transformée de Fourier de la fonction $(1+i)K$.

(c) Déduire de la question précédente la transformée de Fourier de la fonction F.

(d) L'objectif de cette question est de résoudre l'équation

$$\frac{1}{4}\frac{d^4U}{dx^4} + U = V, \quad x \in \mathbf{R},$$

où $V \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ est une fonction donnée. Donner l'expression d'une solution U de ce problème sous la forme d'un produit de convolution $H \star V$ où H est une fonction à préciser.

On admet que pour une fonction $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{C}$, intégrable sur $\mathbf{R}^3$ et à symétrie radiale, c'est-à-dire de la forme $g(x) = G(|x|)$, où G est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, la transformée de Fourier de g est également à symétrie radiale et vérifie $\widehat{g}(\xi) = \psi(|\xi|)$, où la fonction ψ est définie de la façon suivante, pour $\rho > 0$,

$$\psi(\rho) = \frac{4\pi}{\rho}\int_0^{+\infty} r\sin(\rho r)G(r)dr.$$

(e) On suppose de plus que G est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on l'étend à $\mathbf{R}$ par parité, c'est-à-dire que l'on pose $G(-r) = G(r)$ pour $r > 0$. Justifier la formule suivante

$$\psi(\rho) = -\frac{2\pi}{\rho}\frac{d\widehat{G}}{d\rho}(\rho).$$

(f) Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f : x \in \mathbf{R}^3 \mapsto \frac{4}{4+|x|^4}.$$

(g) On considère le problème suivant (on note $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$)

$$\frac{1}{4}\Delta^2 u + u = v, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

pour une fonction $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ donnée. Donner l'expression d'une solution u de ce problème sous la forme $h \star v$ où h est une fonction à préciser.

Bibliographie

Les références suivantes ont été utilisées par l'équipe enseignante. Il ne s'agit pas une liste d'ouvrages à consulter pour suivre le cours.

Nous recommandons aux élèves souhaitant des lectures additionnelles sur certaines parties du cours de demander conseil aux enseignants.

Cours de l'X :

— F. Golse, Y. Laszlo, F. Pacard, C. Viterbo : *Introduction à l'analyse réelle*

— B. Rémy : Résumés de cours et feuilles de petites classes MAT311 promotions 2015 et 2016

— J. Garnier, S. Méléard, N. Touzi : *Aléatoire*, 2020 MAP 361-371

— C. Viterbo : *Équations différentielles et systèmes dynamiques*

— D. Renard : *Calcul différentiel et fonctions holomorphes*

— J.-M. Bony : *Intégration et analyse hilbertienne*

— J.-M. Bony et Y. Martel : *Analyse de Fourier, analyse spectrale et équations aux dérivées partielles*

Autres références :

— J.-C. Yoccoz : *Cours de topologie, calcul différentiel, équations différentielles pour la licence MAF*, Université Paris-Sud, 1994.

— H. Queffélec et C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Sciences Sup, Dunod, 2013.

— V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, 1988.

— *Intégration et probabilités*, Objectif licence, EdiScience, Dunod 2005.

— D. Guinin et B. Joppin, *Les nouveaux Précis*, Bréal, Analyse MP 2004.