MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 8 — Séries de Fourier (corrections)

Exercice 94 (Propriétés des coefficients de Fourier)**.** (a) Soit $f \in L^2(]-\pi, \pi[)$ une fonction à valeurs réelles. On définit les coefficients de Fourier $c_k(f)$

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Montrer que $c_{-k} = \bar{c}_k$. Montrer que si f est paire, alors les c_k sont réels et vérifient $c_k = c_{-k}$. Montrer que si f est impaire, alors les c_k sont imaginaires purs et vérifient $c_k = -c_{-k}$. Traduire ces propriétés sur les coefficients $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Ces propriétés sont conséquences de calculs directs.

(b) Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos^p x$ et $x \mapsto \sin^p x$ peuvent chacune s'exprimer comme une somme trigonométrique de la forme

$$\sum_{n=0}^{p} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{avec des coefficients } a_n \text{ et } b_n \text{ réels.}$$

On raisonne par récurrence. La propriété est clairement vraie pour $p = 0, 1$. On rappelle des formules classiques de trigonométrie : pour $n \geqslant 1$,

$$\cos nx \cos x = \frac{1}{2} (\cos(n-1)x + \cos(n+1)x);$$
$$\sin nx \cos x = \frac{1}{2} (\sin(n-1)x + \sin(n+1)x).$$

Donc, l'hypothèse de récurrence au rang p

$$\cos^p x = \sum_{n=0}^{p} (a_{n,p} \cos nx + b_{n,p} \sin nx),$$

implique par multiplication par $\cos x$:

$$\cos^{p+1} x = a_{0,p} \cos x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} \{a_{n,p} (\cos(n-1)x + \cos(n+1)x) + b_{n,p} (\sin(n-1)x + \sin(n+1)x)\},$$

qui s'écrit bien sous la forme voulue. Le même argument s'applique pour $\sin^p x$.

Exercice 95 (Un exercice calculatoire sur les coefficients de Fourier)**.** Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\begin{cases} f(x) = \pi - x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ f(x) = \pi + x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Étudier la convergence de la série de Fourier. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On calcule les coefficients a_n, b_n. La fonction f étant réelle et paire, on a $b_n = 0$. On voit facilement que $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi$. Pour $n \geqslant 1$, par parité et intégration par parties :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}[(\pi - x)\sin nx]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx \\ &= -\frac{2}{n^2\pi}[\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k,\ k \geqslant 1, \\ \frac{4}{(2k+1)^2\pi} & \text{si } n = 2k+1,\ k \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f s'écrit donc

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

La fonction f étant continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, par un résultat du cours, la série de Fourier de f converge uniformément vers f. En $x = 0$, on a

$$f(0) = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 96 (Phénomène de Gibbs)**.** On définit la fonction f sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(a) Calculer les coefficients de Fourier de f définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (\text{pour } n \geq 0), \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \ (\text{pour } n \geq 1).$$

Il est clair que pour tout $n \geq 0$, $a_n(f) = 0$ car la fonction f est impaire. Pour $n \geq 1$, on obtient facilement

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(b) On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Justifier que pour tout $x \in]0,\pi[$, $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$.

C'est une conséquence du théorème de Dirichlet. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]-\pi,\pi[$ et elle est continue sur l'intervalle $]0,\pi[$. Donc, sa série de Fourier converge ponctuellement vers $f = 1$ sur cet intervalle.

(c) Pour $n \geq 1$ et $x \in]0,\pi[$, calculer explicitement $S'_{2n}(x)$ et en déduire que la fonction S_{2n} admet un maximum local au point $\frac{\pi}{2n}$.

Par l'expression de b_n calculée en (a), on a

$$S_{2n}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}.$$

En dérivant terme à terme, on trouve

$$S'_{2n}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \cos(2p+1)x.$$

Par un calcul classique,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1} \cos(2p+1)x = \Re\left(\sum_{p=0}^{n-1} e^{(2p+1)ix}\right) = \Re\left(e^{ix}\sum_{p=0}^{n-1} e^{2pix}\right) = \Re\left(e^{ix}\frac{1-e^{2nix}}{1-e^{2ix}}\right) \\ = \Re\left(\frac{e^{2nix}-1}{e^{ix}-e^{-ix}}\right) = \frac{1}{2\sin(x)}\Im\left(e^{2nix}-1\right) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$S'_{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}.$$

On voit que S'_{2n} s'annule en $\frac{\pi}{2n}$ et de plus, S'_{2n} est positif sur $]0, \frac{\pi}{2n}[$ et négatif sur $]\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}[$. La fonction S_{2n} a donc un maximum local au point $\frac{\pi}{2n}$.

(d) En utilisant l'expression trouvée à la question précédente pour $S'_{2n}(x)$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Comme $S_{2n}(0) = 0$, on a

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx.$$

En découpant l'intégrale et ensuite par changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{x} dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(2nx)\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(2nx)\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right) dx.\end{aligned}$$

Par le développement limité de $\sin x$ en 0, on remarque que la fonction $x \mapsto \frac{x-\sin x}{x\sin x}$ est bornée (et tend vers 0) au voisinage de 0. Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $n \geq 1$,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(2nx)\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right) dx\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{x-\sin x}{x\sin x} dx \leq \frac{C}{n}.$$

Ainsi, on obtient comme demandé la limite suivante $\lim_{n\to\infty} S_{2n}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

(e) Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ (on rappelle que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$). Interpréter le résultat trouvé à la question précédente.

Il suffit de montrer que $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx < 0$. Pour cela, on décompose l'intégrale en une somme d'intégrales

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{(2n+2)\pi}^{(2n+3)\pi} \frac{\sin x}{x}dx\right]$$

et on observe par changement de variable et les propriétés de la fonction sin

$$\begin{aligned}\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{(2n+2)\pi}^{(2n+3)\pi} \frac{\sin x}{x}dx &= \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi}dx \\ &= \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\pi+x}\right)\sin x\, dx < 0.\end{aligned}$$

Interprétation : on savait déjà que la convergence de $S_{2n}(x)$ vers 1 lorsque $n \to \infty$ ne pouvait pas être uniforme sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ car $S_{2n}(0) = 0$. Ceci est dû au fait que la fonction f n'est pas continue au point 0. Le calcul proposé montre que $S_{2n}(\frac{\pi}{2n})$ converge vers une valeur strictement supérieure à 1. C'est une manifestation du phénomène de Gibbs : au voisinage de la discontinuité de la fonction f, des oscillations apparaissent autour de la valeur 1.

Exercice 97 (*Noyau de Fejer)**.** Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbf{R}$, dont la restriction au segment $[-\pi, \pi]$ appartient à $L^2(]-\pi, \pi[)$. On note

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

On considère les sommes de Fejer $\Sigma_n(f)$ associées à f définies par

$$\forall (n,x) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}, \quad \Sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x),$$

où pour tous $(k,x) \in \mathbf{N}\times\mathbf{R}$, $S_k(f)(x) = \sum\limits_{\ell=-k}^{k} c_\ell(f)e^{i\ell x}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère le noyau de Fejer K_n d'ordre n défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x}\right).$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)dt.$$

On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i\ell y}dy\right)e^{i\ell x} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i\ell(x-y)}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{-i\ell(x-y)}\right)dy = (n+1)\Sigma_n(f)(x).\end{aligned}$$

(b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad K_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbf{Z}, \\ \dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\|K_n\|_{L^1(]-\pi,\pi[)}$.

Si $n = 2\pi p$ pour $p \in \mathbf{Z}$, alors

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = n+1.$$

Sinon,

$$\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x} = e^{-ikx}\sum_{\ell=0}^{2k} e^{i\ell x} = e^{-ikx}\frac{1-e^{i(2k+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-ikx}-e^{i(k+1)x}}{1-e^{ix}}.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-ikx} = \frac{1-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}}, \quad \sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)x} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}e^{ix} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{e^{-ix}-1}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-ikx}-e^{i(k+1)x}\right]}{1-e^{ix}} &= \frac{2-e^{-i(n+1)x}-e^{i(n+1)x}}{(1-e^{-ix})(1-e^{ix})} \\ &= \frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}-e^{-i\frac{n+1}{2}x}\right)^2}{\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2.\end{aligned}$$

En fait, $K_n \geqslant 0$ et donc $\int_{-\pi}^{\pi}|K_n| = \int_{-\pi}^{\pi}K_n$ et on peut intégrer terme à terme. Comme

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{pour } \ell = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on trouve $\int_{-\pi}^{\pi}K_n = 2\pi\frac{n+1}{n+1} = 2\pi$.

(c) Montrer que pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|x|\leq\pi}|K_n(x)|dx = 0.$$

Pour $0 < \delta < \pi$ et $x \in [\delta, \pi]$, on a $\sin\frac{x}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$, ce qui implique $K_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{1}{|\sin\frac{\delta}{2}|^2}$, d'où $\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|x|\leq\pi}|K_n(x)|dx = 0$.

(d) Dans le cas où f est la restriction au segment $[-\pi,\pi]$ d'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodique, montrer que la suite de fonctions $(\Sigma_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-\pi,\pi]$.

En utilisant $\int_{-\pi}^{\pi} K_n = 2\pi$, on a

$$|\Sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}[|f(x-t)| + |f(x)|]K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\sup_{|t|<\delta}|f(x-t) - f(x)|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f, on choisit $\delta > 0$ tel que le second membre soit inférieur à ε. Cette valeur de $\delta > 0$ étant choisie, le premier terme converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ par la question précédente.

(e) En déduire que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

C'est bien la conclusion de la question précédente puisque pour tout n, $\Sigma_n(f)$ est un polynôme trigonométrique. Bien noter que $\Sigma_n(f)$, associée au noyau de Fejer, n'est pas la somme partielle de la série de Fourier, associée au noyau de Dirichlet.

(f) Soit f continue et 2π-périodique. Montrer que si la série de Fourier de f converge simplement, sa limite est nécessairement f.

Soit g la limite simple de $S_n(f)$. Pour tout x, on a $S_n(f)(x) \to g(x)$ lorsque $n \to \infty$, ce qui par le lemme de Cesaro (appliqué à x fixé) implique $\Sigma_n(f)(x) \to g(x)$. Comme par ailleurs $\Sigma_n(f)$ converge uniformément vers f par la question (d), on en déduit $g = f$.

Exercice 98 (Utilisation des séries de Fourier pour la résolution explicite d'une équation différentielle)**.** Montrer que l'équation différentielle

$$\ddot{x} + xe^{it} = 0$$

admet des solutions à valeurs complexes périodiques de période 2π. Préciser l'ensemble de ces solutions sous forme d'une série convergente.

Réponse : l'ensemble des solutions est donné par

$$\left\{\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{(k!)^2} \quad \text{où } \lambda \in \mathbf{C}\right\}.$$

Brève justification : Ce résultat se déduit de l'observation que toute solution 2π-périodique de l'équation est développable en série de Fourier. On remarque ensuite par l'équation que les coefficients de Fourier exponentiels c_k d'une telle solution vérifient $c_{k-1} - k^2 c_k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 99 (Développement en demi-période et conditions de Dirichlet)**.**

(a) Montrer que les fonctions $(\sin nx)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ forment un système total de $L^2(]0,\pi[;\mathbf{R})$.

Soit $f \in L^2(]0,\pi[)$. On prolonge la fonction f par imparité sur $]-\pi,\pi[$ en définissant $\tilde{f} \in L^2(]0,\pi[)$ telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in]0,\pi[$ et $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ pour $x \in]-\pi,0[$. On décompose $\tilde{f}$ en série de Fourier. Les coefficients a_n sont nuls par imparité et on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

La série $\sum_{n\geqslant1} b_n \sin nx$ converge au sens de $L^2(]-\pi,\pi[)$ vers la fonction $\tilde{f}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant1} b_n \sin nx$ converge au sens de $L^2(]0,\pi[)$ vers la fonction f. Par ailleurs, la série $\sum_{n\geqslant1} |b_n|^2$ converge. Le système $(\sin nx)_{n\geqslant1}$ est donc total dans $L^2(]0,\pi[)$.

(b) Soit $g \in L^2(]0,\pi[)$. Déterminer une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,\infty[\times[0,\pi])$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in]0,\pi[,$$

qui vérifie les conditions de Dirichlet au bord

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t > 0,$$

et la condition initiale

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t) = g \quad \text{dans } L^2(]0,\pi[).$$

On pose

$$u(t,x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

et on procède exactement comme dans le cours pour montrer la régularité de u et le fait que u vérifie l'équation de la chaleur. L'unique différence est que pour tout n, la fonction $\sin nx$ n'est pas nécessairement π-périodique, mais vérifie la condition de Dirichlet homogène en $x = 0$ et $x = \pi$. Ainsi, pour $t > 0$, on vérifie par convergence ponctuelle $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

(c) Rappeler de l'exercice 3 les coefficients $(b_n)_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 1 \quad \text{dans } L^2(]0,\pi[).$$

En déduire une expression en série de Fourier de la solution de l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet sur le bord et donnée initiale $g \equiv 1$.

On trouve

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x.$$

Exercice 100 (Equation des ondes périodique)**.** (a) Soit g une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbf{R}$ et h une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$. Déterminer une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, 2π-périodique par rapport à la variable x pour tout $t \in \mathbf{R}$, de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R},$$

et qui vérifie les conditions initiales

$$u(0,x) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = h(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Indication. Chercher la fonction u sous la forme

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx) \Big).$$

(b) La solution $u(t)$ est-elle bornée lorsque $t \to \infty$?

(c) Pourquoi une hypothèse de régularité $\mathcal{C}^p$ sur les fonctions g et h a été faite ? Comparer au cas de l'équation de la chaleur.

Exercice 101 (Contrôle de l'équation des ondes)**.** On considère une équation des ondes qui modélise le comportement d'une corde vibrante fixe à une extrémité et commandée à l'autre extrémité. Le but est d'arrêter les oscillations.

Le problème s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & \text{sur }]0,\infty[\times]0,1[, \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,1) = p(t), & \text{pour tout } t \in [0,\infty[, \\ w(0,x) = g(x), \quad \partial_t w(0,x) = h(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[\end{cases}$$

où les fonctions g et h, de classe C^4, sont données et où l'on cherche le contrôle $t \mapsto p(t)$ pour avoir

$$\text{pour tout } x \in]0,1[, \quad w(4,x) = \partial_t w(4,x) = 0. \tag{1}$$

Pour simplifier, on suppose

$$p(0) = p'(0) = 0 \quad \text{ainsi que} \quad p(4) = p'(4) = 0. \tag{2}$$

(a) Préliminaires :

— Soit q une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et $\alpha > 0$. Montrer que la solution de l'équation différentielle

$$b'' + \alpha^2 b = q, \quad b(0) = b_0, \quad b'(0) = \tilde{b}_0.$$

s'écrit

$$b(t) = b_0 \cos \alpha t + \frac{\tilde{b}_0}{\alpha} \sin \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \sin(\alpha(t-s)) q(s) ds.$$

En principe, l'équation proposée se résout par la méthode de variation des constantes. Mais puisque l'expression de la solution est donnée, on peut se contenter de vérifier qu'elle convient. Il n'y a qu'une solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les conditions en $t = 0$ sont vérifiées immédiatement. De plus, on a

$$b'(t) = -\alpha b_0 \sin \alpha t + \tilde{b}_0 \cos \alpha t + \int_0^t \cos(\alpha(t-s)) q(s) ds,$$

$$b''(t) = -\alpha^2 b_0 \cos \alpha t - \alpha \tilde{b}_0 \sin \alpha t - \alpha \int_0^t \sin(\alpha(t-s)) q(s) ds + q(t).$$

Ainsi, on a bien $b''(t) + \alpha^2 b(t) = q(t)$.

— Décomposer la fonction $x \mapsto x$ en série de sinus sur l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire trouver les coefficients $(\beta_k)_{k\geq 1}$ tels que pour $x \in [0,1[$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi x).$$

On part de l'expression

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p \sin p\pi x$$

que l'on multiplie par $\sin k\pi x$ et intègre sur $[0,1]$. On trouve

$$\int_0^1 x \sin(k\pi x) dx = \beta_k \int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx.$$

Comme

$$\int_0^1 x \sin(k\pi x) dx = -\frac{(-1)^k}{k\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx = \frac{1}{2},$$

on trouve

$$\beta_k = \frac{-2(-1)^k}{k\pi}.$$

La série converge ponctuellement sur $[0,1[$, par le théorème de Dirichlet.

(b) Poser $u(t,x) = w(t,x) - xp(t)$ et déterminer l'équation vérifiée par $u(t,x)$ en supposant p de classe C^2 sur $[0,1]$.

On suppose p de classe C^2 sur $[0,1]$, comme $u = w - xp$ et $p(0) = p'(0) = 0$ d'après (2), on trouve

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -xp'', \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = h(x). \end{cases}$$

(c) Chercher une solution de l'équation de u sous la forme $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(k\pi x)$ et donner l'équation de b_k. En déduire l'expression de $b_k(t)$ et $b_k'(t)$ en fonction de p et des coefficients de Fourier en séries de sinus des fonctions g et h.

En partant de $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(k\pi x)$, et en utilisant la question 1.b, on trouve le système suivant en b_k :

$$b_k'' + k^2\pi^2 b_k = \frac{2(-1)^k}{k\pi} p'', \quad b_k(0) = b_k^g, \quad b_k'(0) = b_k^h,$$

où b_k^g et b_k^h sont les coefficients de Fourier de g et h en séries de sinus. On résout l'équation de b_k en utilisant la question (a) :

$$b_k(t) = b_k^g \cos(k\pi t) + \frac{b_k^h}{k\pi} \sin(k\pi t) + \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2} \int_0^t \sin(k\pi(t-s)) p''(s) ds.$$

et

$$b_k'(t) = -k\pi b_k^g \sin(k\pi t) + b_k^h \cos(k\pi t) + \frac{2(-1)^k}{k\pi} \int_0^t \cos(k\pi(t-s)) p''(s) ds.$$

(d) Montrer que (1) impose que les quantités suivantes

$$\int_0^4 p''(t) \cos(k\pi t) dt, \ \int_0^4 p''(t) \sin(k\pi t) dt$$

prennent des valeurs à préciser en fonction des coefficients de Fourier de g et h.

On impose pour tout $x \in [0,1]$,

$$w(4,x) = \partial_t w(4,x) = 0, \tag{3}$$

ce qui est équivalent $u(4,x) = \partial_t u(4,x) = 0$. Cela implique $b_k(4) = b_k'(4) = 0$ pour tout $k \geq 1$, c'est-à-dire :

$$\int_0^4 \sin(k\pi s) p''(s) ds = \frac{k^2\pi^2}{2}(-1)^k b_k^g, \quad \int_0^4 \cos(k\pi s) p''(s) ds = -\frac{k\pi}{2}(-1)^k b_k^h.$$

(e) On choisit $g(x) = \sin(\pi x)$ et $h(x) = 0$. Trouver une fonction p solution du problème sous la forme

$$p(t) = \delta \sin(\pi t) + \gamma \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

où δ et γ sont à déterminer.

Puisque $g(x) = \sin(\pi x)$ et $h(x) = 0$, on a $b_1^g = 1$, $b_k^g = 0$ pour tout $k \geq 2$ et $b_k^h = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où les conditions

$$\int_0^4 \sin(\pi s) p''(s) ds = -\frac{\pi^2}{2}, \quad \forall k \geq 2, \int_0^4 \sin(k\pi s) p''(s) ds = 0,$$

$$\forall k \geq 1, \int_0^4 \cos(k\pi s) p''(s) ds = 0.$$

Avec la forme proposée, on trouve

$$p(t) = \frac{1}{4}\sin(\pi t) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right).$$