Feuille d'exercices 1

Exercice 1. (Rappels) Soit G un groupe. Pour X et Y des parties de G, on pose

$$XY = \{xy, x \in X, y \in Y\} \subset G.$$

Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G. Si $g \in G$, on note $gH = \{g\}H$ le translaté de H à gauche par g et on désigne par $G/H \subset \mathcal{P}(G)$ l'ensemble des gH, $g \in G$. On a une définition analogue pour Hg. On rappelle que H est dit *distingué* (ou *normal*) dans G si $gH = Hg$ pour tout g dans G, on note $H \lhd G$.

(i) Montrer que $H \lhd G$ si, et seulement si, $\forall g, g' \in G$, $(gH)(g'H) = gg'H$.

(ii) En déduire que si $H \lhd G$, la loi de composition sur G/H définie par $(gH, g'H) \mapsto gg'H$ est une loi de groupe de neutre H. De plus, l'application $\pi : G \to G/H$, $g \mapsto gH$, est un morphisme de groupes, surjectif et de noyau H.

(iii) Supposons $H \lhd G$. Montrer que l'application qui à un sous-groupe $X \subset G/H$ associe le sous-groupe $\pi^{-1}(X) \subset G$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G/H dans ceux de G contenant H. Si G est fini, vérifier que $|\pi^{-1}(X)| = |X||H|$.

(iv) Montrer qu'un sous-groupe H de G est distingué dans G si, et seulement si, il existe un morphisme $\varphi : G \to G'$ vers un autre groupe G' tel que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Si $n \geq 1$, on note S_n le groupe des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même (pour la composition). Si $\sigma \in S_n$, on rappelle que le *support* de σ est l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $\sigma(i) \neq i$. Si $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ et $|I| = k$, on note $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ le k-cycle $\sigma \in S_n$ fixant $\{1, \ldots, n\} \backslash I$ et tel que $\sigma(i_s) = i_{s+1}$ pour $1 \leq s < k$ et $\sigma(i_k) = i_1$.

Exercice 2. (i) Pour $\sigma \in S_n$, montrer que $\sigma(i_1, \cdots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$. En déduire que tous les k-cycles sont conjugués.

(ii) Vérifier que deux permutations à supports disjoints commutent. Remarquer que la réciproque est fausse : $(1,2)(3,4)$ et $(1,3)(2,4)$ commutent dans S_4.

(iii) Exprimer l'ordre d'une permutation σ en terme des longueurs des cycles intervenant dans sa décomposition en cycles.

(iv) Donner un exemple de cycle dont le carré n'est pas un cycle.

Exercice 3. On suppose dans cet exercice que $n \geq 2$.

(i) Montrer que les transpositions engendrent S_n.

(ii) Montrer qu'il existe exactement deux morphismes de groupes $S_n \to \mathbf{C}^*$: le morphisme constant et la signature ϵ.

(iii) Soit $A_n = \{\sigma \in S_n | \epsilon(\sigma) = 1\}$. Montrer que A_n est un sous-groupe distingué de S_n et écrire une suite exacte faisant intervenir S_n et A_n.

Exercice 4.

Soit p un nombre premier impair. On identifie le groupe symétrique S_p aux bijections de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et on note $\bar{m}$ la classe de l'entier m dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Soient i, j deux entiers avec $1 \leq i < j \leq p$ et G le sous-groupe de S_p engendré par le cycle $(\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \bar{p})$ et la transposition $(\bar{i}, \bar{j})$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $(\bar{i}+\bar{k}, \bar{j}+\bar{k}) \in G$ puis que

$$(\bar{i}+k\overline{(j-i)}, \bar{i}+(k+1)\overline{(j-i)}) \in G.$$

(ii) Montrer par récurrence sur $k \in [1, \cdots, p-1]$ que $(\bar{i}, \bar{i}+k\overline{(j-i)}) \in G$.

(iii) Montrer que l'équation $\bar{i}+\bar{k}\overline{(j-i)} = \bar{i}+1$ a une solution $\bar{k} \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

(iv) Montrer que $(\bar{i}, \bar{i}+1) \in G$ puis $\forall \bar{t} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z},\ (\bar{t}, \bar{t}+1) \in G$.

(v) Montrer $G = S_p$.

(vi) Soit c un p-cycle et τ une transposition de S_p. Montrer que S_p est engendré par c et τ.

(vii) Montrer que le résultat précédent tombe en défaut si on ne suppose pas p premier.

Exercice 5. On munit $\mathbf{C}$ de sa structure de plan euclidien orienté dans le sens trigonométrique. Soit C l'ensemble des 4 sommets d'un carré et ω son centre. On note Γ le sous-groupe des bijections g de C telles

$$\forall x, y \in C,\ |g(x) - g(y)| = |x - y|.$$

Soit ρ la rotation de centre ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et σ une symétrie par rapport à une diagonale de C (ou plutôt leurs restrictions à C).

(i) Montrer que si $g \in \Gamma$ fixe deux sommets consécutifs de C, alors $g = \mathrm{Id}$.

(ii) Montrer l'égalité

$$\Gamma = \{\rho^\alpha, \rho^\beta\sigma,\ \alpha, \beta \in \{1, \cdots, 4\}\}$$

et qu'on a la formule $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$.

(iii) Montrer que Γ est un groupe d'ordre 8 non abélien et qu'on a une suite exacte de groupes

$$1 \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \Gamma \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 1.$$

(iv) Donner tous les sous-groupes de Γ. Lesquels sont distingués ? En particulier, combien Γ a-t-il de sous-groupes d'ordre 2 ? 4 ?

Exercice 6. Soient $n \geq 1$ et K un corps. Pour $k \geq 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{T}_k$ des éléments de $GL_n(K)$ de la forme $I_n + N$ avec $N_{i,j} = 0$ pour $i > j - k$. Montrer que $\mathcal{T}_k$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$ et écrire une suite exacte faisant intervenir $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{T}_{k+1}$.

Exercice 7. (i) Soit X l'ensemble des partitions en deux parties égales de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, c'est à dire des paires $P, Q \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ telles que $|P| = |Q| = 2$ et $P \cap Q = \emptyset$. Vérifier que $|X| = 3$ et que S_4 agit sur X par $\sigma.\{P, Q\} = \{\sigma(P), \sigma(Q)\}$.

(ii) Soit $K \subset S_4$ le sous-groupe engendré par les trois doubles transpositions dans S_4 (*groupe de Klein*). Montrer que $K \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ et que K est distingué dans S_4.

(iii) Soit $\varphi : S_4 \longrightarrow S(X) \simeq S_3$ le morphisme de groupes associé à l'action du (i). Montrer que φ est surjectif, que $\mathrm{Ker}(\varphi) = K$, et en déduire l'existence d'une suite exacte

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow S_4 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 1.$$

Exercice 8. Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 (i. e. tel que $|G/H| = 2$). Montrer que H est distingué dans G. En utilisant l'exercice 3, en déduire que A_n est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n.