École Polytechnique
Algèbre et théorie de Galois MAT 451

Contrôle classant du 27 mai 2022 - 3 heures

Avertissement

Les calculatrices et documents autres que le polycopié de cours et notes personnelles sont interdits. La rédaction doit être concise et précise. Les exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note.

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on notera $\zeta_n = \exp(2i\pi/n)$, et $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$.

1) Déterminer le degré de ζ_5 sur $\mathbf{Q}$, ainsi que son polynôme minimal.

2) Soit $a = \cos(\theta_5)$. Montrer que $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

3) Soit $b = \sin(\theta_5)$. Montrer que b est algébrique sur $\mathbf{Q}$, de degré 4. Quel est son polynôme minimal ?

4) Soit $K = \mathbf{Q}[\zeta_5, i]$. Montrer que K est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$.

5) Déterminer le degré de l'extension $K/\mathbf{Q}$ et son groupe de Galois G.

6) Déterminer les degrés possibles des sous-extensions de K, et le nombre de sous-extensions pour chaque degré.

7) Déterminer explicitement toutes les sous-extensions de K.

8) Soit $n, k \geq 1$ des entiers. Déterminer le degré de $\cos(k\theta_n)$ sur $\mathbf{Q}$.

Dans les questions 9 à 12, on se donne un entier $n \geq 1$ impair.
9) Montrer que $i \notin \mathbf{Q}[\zeta_n]$.

10) Montrer que $\sin(\theta_n)$ est algébrique sur $\mathbf{Q}$, et déterminer son degré.

11) Montrer que l'on a $\mathbf{Q}[\cos(2\theta_n)] \subseteq \mathbf{Q}[\tan(\theta_n)]$.

12) Montrer que $\tan(\theta_n)$ est algébrique sur $\mathbf{Q}$, et déterminer son degré.

13) Dans cette question, on ne suppose plus l'entier n impair. Calculer les degré de $\sin(\theta_n)$ et $\tan(\theta_n)$ sur $\mathbf{Q}$, pour $n \neq 4$.

Exercice 2

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note

$$C_{G,x} := \{gxg^{-1}, g \in G\} \qquad Com_{G,x} := \{g \in G, gx = xg\}$$

la classe de conjugaison et le commutant de x.

1) Soit $x \in G$. Montrer que $Com_{G,x}$ est un sous-groupe de G.

2) Soit $x \in G$ et $y \in C_{G,x}$. Quel est le cardinal de $\{g \in G, y = gxg^{-1}\}$?

3) Prouver que pour tout $x \in G$, $|G| = |C_{G,x}||Com_{G,x}|$.

Soit H un sous-groupe distingué d'indice n dans G.
4) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe d divisant n avec $|C_{G,x}| = d|C_{H,x}|$.

5) On considère l'élément $t = \tau_{1,2}\tau_{3,4} \in S_4$. Déterminer les cardinaux de $C_{S_4,t}$ et $C_{A_4,t}$.

6) Déterminer explicitement l'ensemble $C_{A_4,s}$ où s est le 3-cycle (123).

7) Déterminer le nombre de classes de conjugaisons de A_5, et le cardinal de chacune de ces classes.

Exercice 3

Soit p un nombre premier.

1) Déterminer le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré 2 dans $\mathbf{F}_p[X]$.

2) Déterminer le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré 3 dans $\mathbf{F}_p[X]$.

3) Soit $P \in \mathbf{F}_p[X]$ un polynôme irréductible de degré d, avec $d \geq 1$. Montrer que P divise $X^{p^d} - X$.

4) Soit $d \geq 1$ et $P \in \mathbf{F}_p[X]$ un polynôme irréductible divisant $X^{p^d} - X$. Montrer que le degré de P divise d.

Soit q un nombre premier.

5) Déterminer le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré q dans $\mathbf{F}_p[X]$.

6) Soit $d \geq 1$ un entier. Déterminer le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré q^d dans $\mathbf{F}_p[X]$.