MAT361 – Introduction à l'analyse réelle

Devoir personnel obligatoire à rendre en PC le vendredi 19 mai 2023

Problème 1 (Théorème d'Ascoli)**.** Ce problème propose une preuve du théorème d'Ascoli.

Dans tout le problème (et en particulier aux questions (c), (k) et (l)), la norme utilisé dans $\mathbf{R}^N$ sera la norme sup : $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^N(|x_i|)$.

(a) Montrer que si (Y, d) est un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, alors, $\mathcal{C}(Y; E)$ l'espace des fonctions continues de Y dans E, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in Y}\|f(x)\|$, est un espace de Banach.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(Y; E)$. Alors pour tout $y \in Y$, on a $\|f_n(y) - f_m(y)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ donc la suite $(f_n(y))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E. Comme E est un Banach cette suite converge vers un élément noté $f(y) \in E$. On montre que l'application $f : Y \to E, y \mapsto f(y)$ est continue et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f.

Soit $y \in Y$ fixé et soit $\epsilon > 0$. Soit N tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon/3$. Notons que pour tout $y' \in Y$, par passage à la limite quand m tend vers l'infini dans l'inégalité $\|f_n(y') - f_m(y')\| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon/3$, on a $\|f_N(y') - f(y')\| < \epsilon/3$. Soit δ tel que $d(y, y') < \delta \Rightarrow \|f_N(y) - f_N(y')\| < \epsilon/3$. On a alors pour y' tel que $d(y, y') < \delta$, on a les inégalités suivantes :

$$\|f(y) - f(y')\| \leq \|f(y) - f_N(y)\| + \|f_N(y) - f_N(y')\| + \|f_N(y') - f(y')\| < 3\epsilon/3 = \epsilon,$$

ce qui prouve que f est continue. Par passage à la limite quand m tend vers l'infini dans l'inégalité $\|f_n(y') - f_m(y')\| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon/3$, on a $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3$ pour tout $n \geq N$ ce qui prouve que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ tend vers f.

Définition 1. *Un espace métrique* (X, d) *est dit **précompact** si pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe des éléments* $x_1, \cdots, x_N$ *de* X *tels que* $X \subset \cup_{i=1}^N B(x_i, \epsilon)$*.*

(b) Montrer que $[0, 1]$ est précompact dans $\mathbf{R}$.

Soit $\epsilon > 0$ et soit N tel que $\epsilon > 1/N$. Il suffit de prendre les boules $B_{[0,1]}(k/N, \epsilon)$ pour tout k entier entre 0 et N.

(c) Montrer que tout sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^N$ est précompact.

On commence par traiter le cas de l'ensemble $[-R, R]^N$. Soit $\epsilon > 0$ et M un entier tel que $\epsilon/2R > 1/M$. Il suffit alors de prendre les boules (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) suivantes $B_{[-R,R]^N}(x_{i_1,\cdots,i_n}, \epsilon)$ où $x_{i_1,\cdots,i_n} = (-R+2Ri_1/M, \cdots, -R+2Ri_n/M)$ avec $i_1, \cdots, i_n$ des entiers compris entre 0 et M.

Pour X borné quelconque, il existe $R > 0$ tel que $X \subset [-R, R]^N$. On recouvre $[-R, R]^N$ par des boules $(B(a_i, \epsilon/2))_{i\in[1,n]}$. Quitte à renuméroter les a_i, on peut suppoer que $B(a_i, \epsilon/2) \cap X \neq \emptyset$ si et seulement si $i \in [1, M]$ pour un certain entier $M \leq n$. Pour chaque $i/in[1, M]$, on choisit $x_i \in B(a_i, \epsilon/2) \cap X$. Alors par l'inégalité triangulaire, on a $B(a_i, \epsilon/2) \subset B(x_i, \epsilon)$ pour tout $i \in [1, M]$ et donc $X \subset \cup_{i=1}^M B(x_i, \epsilon)$.

(d) Montrer qu'un espace compact est précompact.

Soit $\epsilon > 0$, on a un recouvrement de Y par les boules $(B(y,\epsilon))_{y\in Y}$. Par le Théorème 2.1.5 du poly de cours, on peut en extraire un sous-recouvrement fini ce qui termine la preuve. On aurait aussi pu traiter les questions (b) et (c) de cette manière.

(e) Soit (X,d) un espace métrique et $Z \subset X$ précompact. Montrer que $\overline{Z}$ l'adhérence de Z est précompacte.

Soit $\epsilon > 0$ et soient $z_1, \cdots, z_n \in Z$ tels que $Z \subset \cup_{i=1}^n B_X(z_i, \epsilon/2)$. Montrons que $\overline{Z} \subset \cup_{i=1}^n B_X(z_i,\epsilon)$. Soit $z \in \overline{Z}$, alors il existe $z' \in Z$ tel que $z \in B_X(z', \epsilon/2)$. Par ailleurs comme $z' \in Z$, il existe z_i tel que $z' \in B_X(z_i, \epsilon/2)$ et par l'inégalité triangulaire, on obtient $z \in B_X(z_i, \epsilon)$.

(f) Montrer que (X,d) est compact si et seulement s'il est complet et précompact.

On sait déjà qu'un espace compact est complet et précompact. On montre donc la réciproque. Soit (Y,d) complet et précompact et soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de Y. On va extraire une suite de Cauchy de cette suite. Si $(y_n)_{n\geq 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors on peut extraire une suite contante et on a terminé. Supposons que la suite prend une infinité de valeurs. On contruit par récurrence sur $k \geq 0$, un ensemble $Y_k \subset \{y_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ tel que Y_k contient une infinité de valeurs de $(y_n)_{n\geq 0}$ et tel que, pour $k \geq 1$, deux points de Y_k sont à distance au plus $1/k$. Posons $Y_0 = \{y_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ et supposons Y_k construit. Par précompacité, il existe un entier N et des éléments $z_1, \cdots, z_N$ de Y tels que $Y = \cup_{i=1}^N B(z_i, 1/(2(k+1)))$. Comme on a un nombre fini de telles boules et que Y_k est infini, il en existe une qui contient une infinité de termes de Y_k, l'ensemble Y_{k+1} est l'intersection de Y_k avec cette boule. En prenant pour chaque $k \geq 0$ un élément $y_{\varphi(k)}$ de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dans le sous-ensemble Y_k, on construit une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de $(y_n)_{n\geq 0}$ qui est de Cauchy (car pour $n, m \geq k$, on a $y_{\varphi(n)}, y_{\varphi(m)} \in Y_k$ donc $d(y_{\varphi(n)}, y_{\varphi(m)}) < 1/k$). Comme Y est complet, cette suite de Cauchy converge ce qui prouve que Y est compact.

On rappelle la définition d'équicontinuité et on introduit la notion d'uniforme équicontinuité.

Définition 2. *Soit (Y,d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(Y;\mathbf{R})$ une famille d'applications continues de Y vers $\mathbf{R}$.*

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **équicontinue** *au point $y \in Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y' \in Y, \quad d(y,y') < \delta \implies |f(y) - f(y')| < \varepsilon.$$

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **équicontinue** *sur Y si elle est équicontinue en tout point de $y \in Y$.*

— *On dit que la famille $\mathcal{F}$ est* **uniformément équicontinue** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y, y' \in Y, \quad d(y,y') < \delta \implies |f(y) - f(y')| < \varepsilon.$$

(g) Montrer que si (Y,d) est compact et $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue sur Y alors elle est uniformément équicontinue.

Soit $\epsilon > 0$, par équicontinuité, pour tout $y \in Y$, il existe $\delta_y > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $d(y, y') < \delta_y \implies |f(y) - f(y')| < \epsilon/2$. On considère le recouvrement $(B(y, \delta_y))_{y \in Y}$ de Y. Comme Y est compact, par le Théorème 2.1.4 du poly de cours, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in Y$ la boule $B(y, \delta)$ est contenue dans l'une des boules précédente. Soient $y, y' \in Y$ tels que $d(y, y') < \delta$, alors $y, y' \in B(y, \delta) \subset B(z, \delta_z)$ pour un certain z. On a $d(y, z) < \delta_z$ et $d(y', z) < \delta_z$ donc pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a $|f(y) - f(y')| \leq |f(y) - f(z)| + |f(z) - f(y')| < 2\epsilon/2 = \epsilon$ ce qui prouve le résultat.

On rappelle l'énoncé du théorème d'Ascoli.

Théorème 1 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soit* (Y, d) *un espace métrique* compact*. Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(Y; \mathbf{R})$ *une famille de fonctions qui vérifie les hypothèses suivantes.*

— *La famille* $\mathcal{F}$ *est équicontinue sur* Y*.*

— *Pour tout* $y \in Y$*, l'ensemble* $\mathcal{F}(y) := \{f(y) : f \in \mathcal{F}\}$ *est une partie bornée de* $\mathbf{R}$*.*

Alors, de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* $(\mathcal{C}(Y; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$*.*

On se place maintenant sous les hypothèses du théorème d'Ascoli.

(h) Montrer que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, comme $\overline{\mathcal{F}}$ est compact, on peut extraire une sous-suite d'éléments qui converge dans $\overline{\mathcal{F}}$ et donc dans $(\mathcal{C}(Y; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(i) En déduire qu'il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est précompact (on rappelle que $(\mathcal{C}(Y; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach donc complet).

Si $\mathcal{F}$ est précompact, alors c'est aussi le cas de $\overline{\mathcal{F}}$ par (e). Comme $(\mathcal{C}(Y; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach donc complet, c'est aussi le cas de $\overline{\mathcal{F}}$. Donc $\overline{\mathcal{F}}$ est complet est précompact donc compact par (f).

On fixe maintenant $\epsilon > 0$.

(j) Soit δ (donné par l'uniforme équicontinuité de $\mathcal{F}$) tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ on ait l'implication $d(y, y') < \delta \Rightarrow |f(y) - f(y')| < \epsilon/3$. Montrer qu'il existe $y_1, \cdots, y_N \in Y$ tels que $Y = \cup_{i=1}^N B_Y(y_i, \delta)$.

C'est une application directe du fait que Y est compact donc précompact.

(k) Montrer que $\mathcal{F}(y_1, \cdots, y_N) := \{(f(y_1), \ldots, f(y_N)) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbf{R}^N$ est précompact. En déduire qu'il existe un entier M et des éléments $f_1, \cdots, f_M$ de $\mathcal{F}$ tels que

$$\mathcal{F}(y_1, \cdots, y_N) \subset \bigcup_{j=1}^M B_{\mathbf{R}^N}((f_j(y_i)_{i \in [1,N]}, \epsilon/3).$$

Pour tout y_i, l'ensemble $\mathcal{F}(y_i)$ est borné par hypothèse. C'est aussi le cas du produit $\mathcal{F}(y_1) \times \cdots \times \mathcal{F}(y_N)$ et donc de $\mathcal{F}(y_1, \cdots, y_N) \subset \mathcal{F}(y_1) \times \cdots \times \mathcal{F}(y_N)$ qui est donc précompact par (c). La dernière assertion en découle directement.

(l) Montrer que $\mathcal{F} \subset \cup_{j=1}^M B(f_j, \epsilon)$. En déduire que $\mathcal{F}$ est précompact.

Soit $f \in \mathcal{F}$, il existe un $j \in [1, M]$ tel que $(f(y_1), \cdots, f(y_N)) \in B_{\mathbf{R}^N}(f_j(y_1), \cdots, f_j(y_N), \epsilon/3)$. Soit $y \in Y$, il existe $i \in [1, N]$ tel que $y \in B_Y(y_i, \delta)$. On a alors (les deux inégalités extérieures proviennent de l'équicontinuité et celle du milieu du fait que $(f(y_1), \cdots, f(y_N)) \in B_{\mathbf{R}^N}(f_j(y_1), \cdots, f_j(y_N), \epsilon/3)$) :

$$|f(y) - f_j(y)| \leq |f(y) - f(y_i)| + |f(y_i) - f_j(y_i)| + |f_j(y_i) - f(y_i)| < 3\epsilon/3 = \epsilon$$

ce qui démontre ce que l'on voulait.