ECO361
Équilibre de marché
PC 2

Exercice 1. **Discussion** à commenter en PC

Exercice 2. **Lecture d'article** à commenter en PC

Exercice 3. **Compétition parfaite** Sous l'hypothèse de rendements croissants, puis décroissants (ce qui signifie que les coûts marginaux sont décroissants puis croissants), l'offre d'un producteur est donnée par les prix marginaux, tant qu'ils sont supérieurs aux prix moyens. Ceci signifie qu'il existe un prix p^* en deçà duquel un producteur ne peut que faire des pertes. Pour un prix inférieur à p^*, l'offre est nulle. Pour un prix supérieur à p^*, le profit d'un producteur est positif car les coûts moyens sont inférieurs aux coûts marginaux. Par conséquent, si le prix de marché est supérieur à p^* de nouveaux producteurs entrent sur le marché. Cela a pour effet d'augmenter l'offre, donc de faire baisser les prix. Cela se produit jusqu'à ce que le prix soit égal à p^*.

En cas d'augmentation de la demande résultant en une augmentation des prix, de nouveaux producteurs entrent car ils ont la possibilité de faire des profits.

En cas de diminution de la demande résultant en une diminution des prix, des producteurs sortent du marché car ils font des pertes.

Dans les deux cas, le prix se rétablit à p^*. On observe que dans ce modèle, pour un prix inférieur à p^* l'offre est nulle, tandis qu'elle est infinie pour une prix supérieur.

Cela signifie que l'offre est infiniment élastique.

En pratique, l'offre ne peut être infiniment élastique car de nouveaux producteurs en nombre infini ne peuvent entrer sur le marché en produisant au même prix. Cela se produit car de nouveaux entrants créent une tension sur le marché du travail (pénurie de main d'oeuvre), ainsi que sur les marchés de matières premières entrant en compte dans la production.

Le modèle est une bonne approximation tant que le nombre de firmes entrant sur le marché n'est pas trop élevé. En cas d'augmentation très importante, un modèle plus adapté demanderait de considérer l'offre et la demande pour chacun des biens, y compris pour la matière première et pour l'offre de travail. C'est le type de modèles étudiés en *équilibre général*, par opposition à l'*équilibre partiel* de notre modèle simplifié.

Concernant l'effet de la demande sur les prix, il peut aller dans deux directions opposées. D'une part, une augmentation de la demande provoque une augmentation de la demande de matières premières telles que les minerais ou les terres agricoles, qui sont en quantité limitée. Par exemple, les prix de production de la vanille de Madagascar ne sont pas infiniment élastiques. Ceci peut provoquer une augmentation des coûts de production et par ricochet du prix des biens produits. D'un autre côté, une augmentation de la demande et de la production peut induire des investissements technologiques, eux-même aboutissant à une baisse des coûts de production et donc des prix, c'est le cas par exemple pour les produits électroniques (ordinateurs, TV) et les véhicules particuliers, un tel effet peut être attendu dans le futur concernant des technologies tells que les véhicules électriques.

Exercice 4. **Subvention de bien vertueux**

1. Les préférences sont convexes (cf semaine dernière) et symétriques. Comme les prix des deux biens sont égaux, lorsqu'un agent choisit le panier de bien qu'il préfère sous contrainte de budget, les consommations des deux biens sont égales. Le riche consomme 4 de chaque bien, le pauvre 1 de chaque bien.

2. (a) Si les agents n'ajustent pas leur demande, alors le coût supplémentaire de 0,5€ dû à la subvention de la consommation par le pauvre est exactement compensé par les recettes supplémentaires dues à la taxe de la consommation par le riche. En réalité, les nouveaux prix vont conduire à une augmentation de la consommation pour le pauvre, et à une diminution pour le riche. Ce qui veut dire que les dépenses vont être supérieures aux dépenses escomptées, et les recettes vont être inférieures, d'où un trou dans le budget. Le problème de raisonner à consommation constante est de ne pas prendre en compte l'adaptation des agents économiques à la nouvelle politique. Cela peut sembler une erreur basique mais elle est hélas extrêmement courante.

   (b) On cherche les quantités consommées q_n, q_c si le prix du bien culturel est p, et le budget est total est b, le fait que la courbe d'indifférence soit tangente à la frontière de budget implique la relation

$$\frac{1}{\sqrt{q_n}} = \frac{p}{\sqrt{q_a}}$$

d'où

$$q_n = p^2 q_c$$

Comme par ailleurs la saturation de la contrainte de budget implique

$$q_n + pq_c = b$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} q_c &= \tfrac{b}{p+p^2} \\ q_n &= \tfrac{p^2 b}{p+p^2} \end{aligned}$$

Avec pour données pour le riche $b = 8$, $p = 1,125$ et pour le pauvre $b = 2$, $p = 0,5$.

La mesure n'est pas équilibrée, elle crée un déficit pour la raison invoquée dans la réponse à la question précédente. Le coût est de 1/2 par unité de consommation par le pauvre du bien culturel, soit $\frac{4}{3}$. Le revenu engendré est de 1/8 par unité de consommation par le riche du bien culturel, soit $\frac{64}{153} \sim 0,41$.

(c) Pour équilibrer la mesure, il faudrait que les revenus supplémentaire issus du riche compensent le coût de la subvention au pauvre, cad

$$\frac{8}{p+p^2}(p-1) = \frac{4}{3}$$

On obtient deux solutions (équation du second degré) qui sont $p = 2$ et $p = 3$. La première permet d'augmenter les revenus jusqu'à compensation de la subvention au pauvre. Si on continue à augmenter p au delà, les revenus issus de la consommation du bien culturel par le riche vont croître, puis décroître jusqu'à retrouver le même niveau qu'à $p = 2$. D'un point de vue de politique publique, la solution $p = 2$ est préférable (même recettes, mais meilleure pour le riche qui a une consommation plus élevée).

3. La mesure proposée permet de réduire les inégalités, et d'augmenter la consommation de bien culturel par le pauvre. Cependant elle induit une distortion, par rapport à l'équilibre de marché, le riche sous-consomme le bien culturel, tandis que le pauvre sur-consomme. Comparons ce qu'il se passe si on instaurait un transfert de richesse de 2 du riche vers le pauvre. Avec la mesure proposée par le ministre, la consommation du riche est

$$\begin{aligned} q_c &= \tfrac{4}{3} \\ q_n &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

Avec un transfert du riche vers le pauvre, la consommation du riche serait également répartie entre les deux biens :

$$\begin{aligned} q_c &= 3 \\ q_n &= 3 \end{aligned}$$

Comme $2\sqrt{3} \sim= \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{16}{3}}$, le riche est indifférent entre les deux solutions.

Avec la mesure proposée par le ministre, la consommation du pauvre est

$$\begin{aligned} q_c &= \tfrac{8}{3} \\ q_n &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Avec un transfert du riche vers le pauvre, la consommation du pauvre serait elle aussi également répartie entre les deux biens :

$$\begin{aligned} q_c &= 2 \\ q_n &= 2 \end{aligned}$$

On a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} > \sqrt{\frac{8}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$, ce qui implique que le pauvre préfère la solution avec transfert à la subvention du bien.

4. C'est une question destinée à ouvrir une discussion. D'après l'exercice, on peut "faire mieux" par une politique de redistribution avec des transferts qu'avec une politique de différentiation des tarifs. Alors quelles raisons pour une politique de tarifs différentiés (accès aux crèches par exemple) ? La première serait la possibilité que les pauvres ne fassent pas les "bons choix", par exemple sous-consomment d'un bien. Mais cette attitude est paternaliste, car elle suppose qu'on peut définir les bons choix des individus mieux qu'eux-mêmes. Une autre idée serait celle des externalités, par exemple, si on favorise l'accès de personnes à faible revenu à certains biens culturels par exemple, on peut espérer réduire violences et criminalité, le problème étant que de tels effets restent à démontrer !

De manière générale, les mesures de compensation des inégalités passant par des subventions ou taxes différentiées selon les revenus induisent ce que les économistes appellent des distortions. A l'optimum économique, il faudrait que le coût marginal de consommation du produit pour le riche comme pour le pauvre soient égaux au coût de production du produit. Avec mesures de taxation et subvention différentiées, cela ne peut être le cas. En revanche, des mesures redistributives telles que des transferts de richesse d'un individu vers l'autre sont compatibles avec ce principe.

Exercice 5. **Production d'électricité**

1. Le coût marginal est constant donc égal au coût variable moyen.

   - Type N: $p < 1 \Rightarrow q = 0$ et $p > 1 \Rightarrow q = 1\ 000$. Quand $p > 1$, le revenu marginal est toujours supérieur au coût marginal: le bénéfice croit avec la quantité et donc il est optimal de produire la capacité maximum de production.

   - Type F: $p < 50 \Rightarrow q = 0$ et $p > 50 \Rightarrow q = 10$.

   - L'offre totale: $p < 1 \Rightarrow Q = 0$, $1 < p < 50 \Rightarrow q = 20\ 000$, $p > 50 \Rightarrow q = 30\ 000$.

   La courbe d'offre est plate en $p = 1$ et $p = 50$

2. On remarque que le point $(q = 20\ 000, p = 50)$ est sur la courbe de demande D_1 et sur la courbe d'offre. C'est donc l'équilibre. En ce point, les N servent tout le marché. Les centrales F seraient prêtes à produire une quantité positive à ce prix, mais n'ont pas besoin, car les centrales N produisent à leur capacité maximum (20 000MW en tout), ce qui suffit pour servir la demande.

3. Supposons que 50 soit un prix d'équilibre. La demande vaut alors 25 000. Le point $(q = 25\ 000, p = 50)$ est donc sur la courbe d'offre et sur la courbe de demande D_2, c'est donc l'équilibre. Les N produisent 20000 unités (capacité maximum) et les centrales F produisent les 5000 qui manquent pour servir

la demande restante. La production individuelle de chaque centrale F n'est pas définie de manière unique; par exemple, toutes les centrales peuvent produire 5MW, ou bien seules 5% des centrales produisent, mais à pleine capacité (chaque centrale F est indifférente entre tous les niveaux de production entre 0 et 10).

4. On garde les mêmes courbes de demande mais on remonte la courbe d'offre en montant le coût marginal de F de 50 a 60.

   - Heure creuse. Le point $(q = 20\ 000, p = 50)$ est encore sur la courbe de demande et sur la courbe d'offre, l'équilibre est donc inchangé.

   - Heure pleine. Cette fois, le point $(q = 20\ 000, p = 60)$ est sur la courbe de demande et sur la courbe d'offre. C'est l'équilibre et seuls les N offrent. Les F sortent du marché du fait de l'augmentation des coûts.

Exercice 6. **Concurrence et polution**

1. Considérons un des deux pays, sachant qu'il y a libre entrée, le prix d'équilibre satisfait l'équation "prix = coût total moyen = coût marginal" soit

$$\frac{50}{q} + \frac{1}{2}q = q = p$$

   Cela donne $q = 10$ et $p = 10$. Le prix d'équilibre de long terme est donc $p = 10$ et la quantité produite par chaque firme est $S_j(10) = 10$.

   La demande à ce prix est $D(10) = 1\ 000 - 100 = 900$. L'offre totale à $p = 10$ est $S(10) = n^* S_j(10)$, où n^* est le nombre total d'entreprises et S_j la fonction d'offre d'une d'entre elles. Le nombre d'entreprises à l'équilibre est donc $n^* = 90$.

2. On refait les mêmes calculs avec comme fonction de coûts $50 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{3}{2}q^2 + 20q$. L'équation "coût total moyen égal à coût marginal" devient:

$$\frac{50}{q} + 2q + 20 = 4q + 20$$

Cela donne $q = 5$ et $p = 40$ qui est le nouveau prix de sortie et donc le nouveau prix d'équilibre. La demande à ce prix est $D(40) = 600$. La courbe d'offre individuelle est maintenant donnée par $p = 4q + 20$ soit $q = (p - 20)/4$, pour $p = 40$ une entreprise offre donc $q = 5$ unités. Le nombre d'entreprises est donc n^{**} tel que $600 = 5n^{**}$ soit $n^{**} = 120$.

3. (a) Le marché ouvert est un marché avec entreprises hétérogènes, 120 types A, 90 types B.

   Comme on s'intéresse à l'équilibre de court terme, la condition de production des entreprises est "prix = coût marginal $\geq$ coût variable moyen ". Pour les types A, le coût variable est $CV_A = 2q^2 + 20q$, donc le coût variable moyen est $CVM_A = 2q + 20$, le minimum de cette quantité est donc $sdf^A = 20$. Comme le coût marginal est $C_m^A = 4q + 20$, l'offre des types A est $\mathcal{S}^A(p) = 120 \times \frac{p-20}{4} = 30p - 600$ pour $p > 20$ et 0 sinon.

   Pour les types B, on a le coût variable est $CV_B = q^2/2$, et le coût variable moyen est donc $CVM_B = q/2$, le minimum est 0. Comme le coût marginal est $C_m^B = q$, l'offre totale des B est $\mathcal{O}^B(p) = 90p$ pour tout p.

   L'offre totale est donc $\mathcal{S}_T(p) = 90p$ pour $p < 20$ et $\mathcal{O}_T(p) = 120p - 600$ pour $p > 20$. La demande totale est $D_T(p) = D_1(p) + D_2(p) = 2\ 000 - 20p$.

   Supposons d'abord $p < 20$. $\mathcal{S}_T(p) = D_T(p)$ s'écrit

   $$90p = 2\ 000 - 20p,$$

   ce qui donne $p = 200/11 \approx 18.18 < 20$. C'est donc l'équilibre à court terme. Dans cet équilibre, seules entreprises du pays B produisent.

   (b) Le prix d'équilibre est compris entre 10, qui est le prix d'entrée dans le pays B, et 40, le prix de sortie dans le pays A. A long terme, certaines firmes du pays A vont sortir et des firmes vont entrer sur le marché du pays B. On le voit, dans un équilibre de long terme, aucune entreprise ne subsiste dans le pays A. En effet, si le prix de long terme était de

40, alors il y aurait entrée dans le pays B, et nous serions pas dans une situation d'équilibre. Le seul équilibre est celui dans lequel le prix est de 10. Il n'y a aucune firme dans le pays A : personne ne paie de taxe et toute l'industrie polluante est délocalisée dans le pays B.

La demande totale est $D_T(10) = 1800$. Au prix de 10, chaque firme de B produit 10 unités. Il y a donc $n^* = 180$ entreprises, toutes localisées en B.

4. Cette situation est clairement au désavantage des consommateurs du pays B. En terme de prix et de quantités, c'est comme dans la situation sans taxe. Mais la taxe dans le pays A ayant conduit à la délocalisation, les consommateurs du pays B supportent maintenant toute l'externalité négative.

   Le surplus de la consommation est le même dans les deux cas. Les consommateurs du pays B consomment 900 unités au prix de 10, ce qui donne un surplus
$$SC = \frac{900 \times (100 - 10)}{2} = 40.500$$

   Chaque entreprise produisant 10 unités induit une perte de surplus de $\frac{3}{2}10^2 + 20 \times 10 = 350$. Avant l'ouverture, la désutilité globale pour le pays B est donc $90 \times 350 = 31.500$.

   Après l'ouverture, il y a deux fois plus de firmes (180 au lieu de 90), la désutilité double donc pour atteindre 63 000.

ECO361
Solutions PC 1

Exercice 1. **Propension totale et marginale à payer**

S'il est possible de mettre un consommateur devant des choix binaires du type "acheter X tablette de chocolat à un montant total M ou ne rien acheter du tout". Dans ce cadre, il est possible de mesurer le montant M_X maximal qu'un consommateur est prêt à payer pour X unités du bien. Prenons l'exemple des tablettes de chocolat, supposons que $M_1 = 4$, $M_2 = 6$, $M_3 = 7$.

1. On réfléchit en termes d'indifférences. Le consommateur est indifférent entre soit 0 tablette et 4€ soit 1 tablette. Il est donc prêt à payer 4 € pour la première tablette, sa propension marginale à payer la première tablette est 4€.

   Le consommateur est indifférent entre soit 0 tablette et 6€ soit 2 tablettes. Il est aussi indifférent entre soit 0 tablette et 6€ soit 1 tablette et 2€Il est donc indifférent entre soit 1 tablette 2€ soit 2 tablettes Sa propension marginale à payer pour la seconde tablette vaut donc 2€.

   Finalement, il est indifférent entre : soit 0 tablette et 7€ soit 3 tablettes et entre soit 0 tablette et 7€ soit 2 tablettes et 1 €donc indifférent entre soit 2 tablettes et 1 € soit 3 tablettes.

   Sa propension marginale à payer pour la troisième tablette est de 1 €.

2. On en déduit la demande du consommateur : Pour un prix supérieur à 4€, 0

tablette. Pour un prix compris entre 2 et 4€, 1 tablette, pour un prix compris entre 1 et 2€, 2 tablettes, et pour un prix inférieur à 1 €, 3 tablettes.

Exercice 2. **Propension marginale à payer** Pour le café, le sucre, les meubles, il est naturel de supposer que la propension marginale à payer est décroissante avec la quantité de bien.

Pour des pièces de légo en petit nombre ou pour des roues de voiture par exemple, la propension marginale à payer est d'abord croissante, puis décroissante (une roue seule n'est pas très utile, non plus qu'une ou deux pièces de légo isolées, ou un ski).

Si jamais $m(q) > p$ le consommateur préfère consommer $q + dq$ (avec $dq > 0$ et petit) plutôt que q au prix p, et il préfère consommer $q - dq$ si $m(q) < p$. Supposons qu'au point q tel que $m(q) = p$, la propension marginale à payer est croissante. Alors pour $q + dq >' q > 0$ petit, $m(q') > p$, donc le consommateur préfère là aussi consommer $q + dq$ plutôt que q (chaque incrément entre q et $q + dq$ lui coûte moins que sa propension marginale à payer).

Exercice 3.

1. Si le port débarque 30,000 tonnes avant et après, le gain du projet est de 10 € $\times$ 30,000 = 300 000 € par an.

2. On peut anticiper qu'une baisse des coûts reportée vers le consommateur doit faire baisser les prix des marchandises, donc augmenter la demande des consommateurs. Par conséquent la quantité de marchandises transitant vers le port devrait augmenter suite au projet (à supposer qu'il n'existe pas de contraintes physiques limitant le transport à 30,000 tonnes par an)

3. L'estimation obtenue en question 1) ne prend pas en compte le surplus pour les nouvelles unités transitant par le port dues à l'augmentation de la demande. C'est donc une estimation basse du surplus généré par le projet, et le surplus réellement obtenu doit être plus élevé.

4. Observer une nouvelle quantité est de 36,000 tonnes par an n'est pas en soi suffisant pour estimer le nouveau surplus, car tout dépend de la propension à

payer des consommateurs pour les unités situées entre 30,000 et 36,000 tonnes par an. Une estimation basse correspond au cas où la propension à payer pour ces unités est celle au nouveau coût de grutage, et dans ce cas le surplus est celui calculé en question 1, cad 300 000 € / an. Une estimation haute est le cas extrême opposé dans lequel la propension à payer pour ces unités est celle à l'ancien coût de grutage, et dans ce cas toutes les nouvelles unités bénéficient créent un surplus de 10 €, on a alors un surplus total de 36 000 $\times$ 10 € = 360 000 €/an. Si on fait une hypothèse que la demande est linéaire entre l'ancien et le nouveau coût on obtient un surplus généré se situant à la moyenne des extrêmes, soit 330 000 €/an.

Exercice 4. 1. On sait qu'au prix p_F, la demande en France se situe à 200 000 tonnes par an. On ne connaît pas la demande en Allemagne à ce prix, mais étant donné que $p_F > p_A$ la loi de la demande nous indique qu'elle est inférieure à 400 000 tonnes par an. Au prix p_F, la demande de patates est donc inférieure à 600 000, or on doit avoir une demande totale égale à la quantité sur le marché, soit 600 000. Cela signifie que le prix est inférieur à p_F. Un raisonnement symétrique montre que le prix p_U doit être supérieur à p_A.

2. Étant donné que les prix baissent en France et augmentent en Allemagne, la consommation augmente dans le premier pays et diminue dans le second (loi de la demande). Les premiers sont donc gagnants et les second perdants.

3. On cherche d'abord la fonction de demande dans chacun des pays. Si on suppose une élasticité constante alors la fonction de demande D dans chacun des pays satisfait :
$$\frac{d \log D}{\log p} = -e,$$
ce qui donne
$$D = D_0 p^{-e}.$$
pour une constante D_0 qui dépend du pays. Pour la France on a 200000000 =

$D_{0F} 1.5^{-0.3}$, ce qui donne une fonction de demande (approximativement)

$$D_F = 226000000 p^{-0.3}.$$

Pour l'Allemagne on utilise $400000000 = D_{0A} 1^{-0.3}$ ce qui donne comme fonction de demande

$$D_A = 400000000 p^{-0.3}.$$

La fonction de demande totale est alors la somme des deux, c'est à dire :

$$D_U = 626000000 p^{-0.3}.$$

On cherche maintenant le prix p_U qui égalise D_U avec la quantité totale de 600 000 tonnes par an, et on obtient numériquement :

$$p_U \sim 1,15 \text{par kilo},$$

ce qui est cohérent avec le fait que p_U se situe entre p_A et p_F.

Pour l'Allemagne, on a une perte en surplus mesurée par $\int_{p_A}^{p_U} D_A(p)dp$, une primitive de $D_A(p)$ étant $400000000/0.7p^{0.7}$ on obtient (numériquement encore) une perte de 59 millions d'€ par an environ.

Pour la France on a un gain de surplus donné par $\int_{p_U}^{p_F} D_F(p)dp$, ce qui donne cette fois un gain de 73 millions d'€ par an.

On a bien une perte de surplus en Allemagne, un gain en France, et un gain total de surplus de 14 millions d'€ par an environ pour l'ensemble des consommateurs sur les deux pays.

En se basant sur le surplus total, il faudrait créer le marché unique de la patate. Cependant, créer ce marché peut aussi poser des problèmes politiques et des tensions entre les deux pays, étant donné qu'il crée des perdants en Allemagne. Peut-être faut-il imaginer créer ce marché en même temps qu'un autre marché unique qui soit, lui, favorable aux consommateurs allemands, ou imaginer un système redistributif autre qui compense les perdants en Allemagne.

Exercice 5. **Elasticités de la demande de carburant** à discuter en PC.

Exercice 6. **Comparaison d'élasticités**

Parmi tous les biens listés, l'elasticité de l'insuline est la plus faible car pour de nombreux diabétiques, il s'agit d'un bien lié à leur survie.

En second vient l'elasticité du tabac, pour lequel il conviendrait de distinguer elasticité de court et de long terme. L'elasticité de court terme est relativement faible car il est difficile pour les fumeurs de changer leurs habitudes. Sur le long terme, les augmentations répétées du prix du tabac ont eu l'effet souhaité de santé publique de réduire significativement la consommation.

Ensuite vient le pain qui tient une place centrale dans notre alimentation.

Finalement l'elasticité des places de cinéma est relativement élevée. Ceci à la fois car il s'agit d'un bien non indispensable, mais aussi car des substituts existent assez facilement (places de théâtre, VoD, cable TV).

Exercice 7. **Offre de court versus long terme**

Nous supposons ici que nous avons ouvert la pizzeria, avec un bail de location de matériel d'un an *avant* d'observer le prix de marché. Ces coûts de location sont irrécupérables, et nous sommes obligés de payer cette location pendant un an.

Offre de long terme En première remarque, on voit que si le prix des pizza est inférieur ou égal à 2€, soit au coût de la matière première, le meilleur choix possible est celui de ne pas ouvrir la pizzeria (production nulle). Pour tout prix supérieur à 2€, étant donné un nombre d'employés, il est optimal de maximiser la production à ce nombre d'employés donné car une fois les employés et le matériel payés, chaque pizza produite coûte 2€ et est vendue à un prix supérieur. On en conclut qu'à prix donné, le choix de production optimal ne peut être que de 0, 10, 32, 47, 55, 60, 63, ou 65.

Le graphique représente les *coûts marginaux* entre ces quantités, c'est à dire le coût unitaire supplémentaire par pizza lorsqu'on passe successivement de

0 à 10 unites, puis à 32, 47, ... Lors du passage de 0 à 10 pizza produites, le coût marginal est (90 - 0)/10 = 9€. Puis il est de (164 - 90)/(32 -10) $\sim$ 3,36€, puis successivement de 4, 5,8, 8, 12 et 17€ à chaque incrémentation de la production. Observons que les coûts marginaux sont d'abord décroissants, puis croissants.

La décision de production de la firme peut être décomposée en deux étapes. D'abord décider de louer le matériel pour la journée ou non, puis, s'il a été décidé de louer le matériel, décider enfin du nombre de pizzas produites. Pour décider de louer le matériel ou non, il faut savoir si ouvrir la pizzeria est profitable, donc analyser la production en supposant le matériel loué. Nous allons donc commencer par cette étape.

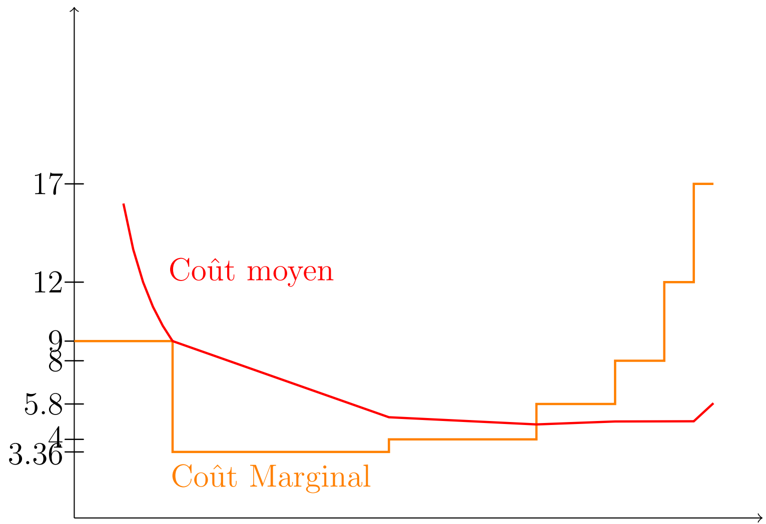
En supposant la pizzeria ouverte, au point où la quantité offerte maximise les profits, les coûts marginaux sont croissants.

En supposant la pizzeria ouverte, l'offre est donc déterminée par la partie croissante de la courbe de coûts marginaux pour des prix compris entre 3,36€ et 17€. Elle est de 65 pizzas pour un prix supérieur à 17€ et nulle pour un prix inférieur à 3,36€.

Une fois connue l'offre en supposant la pizzeria ouverte, nous pouvons analyser la décision d'ouverture de la pizzeria. Ne pas ouvrir la pizzeria conduit à un bénéfice nul, il est donc optimal d'ouvrir la pizzeria lorsque l'ouverture conduit à un bénéfice positif, et de ne pas l'ouvrir sinon.

Il nous faut donc comparer les recettes et les coûts de production. Les coûts sont donnés par la fonction de production, et les recettes sont de q^*p, où q^* est la quantité optimale produite une fois la pizzeria ouverte et p est le prix unitaire. De manière équivalente, nous allons comparer les coûts moyens à p, où les coûts moyens sont définis par les coûts totaux divisés par la quantité produite.

Nous savons déjà que si la pizza est ouverte, la quantité optimale produite est



donnée par la partie croissante des coûts marginaux. Nous comparons donc les coûts marginaux restreints à leur partie croissante avec les coûts moyens, comme représentés dans la figure **??**. Les deux courbes se croisent à une quantité de 47 pizzas et un prix de 4,76€.

Pour un prix inférieur à 4,76€, les coûts moyens sont supérieurs aux coûts marginaux et il est optimal de ne pas ouvrir la pizzeria et l'offre est donc nulle. Pour un prix supérieur à 4,76€, il est optimal d'ouvrir la pizzeria et de produire la quantité donnée par la partie croissante de la courbe de coûts marginaux. On obtient ainsi l'offre de pizzas, représentée figure **??**.

Offre de court terme La différence est que les coûts de 40€ par jour ne sont pas récupérables, ce qui intervient lors de la décision d'ouvrir la pizzeria (production > 0) ou non (production $= 0$). Comme en cours, le choix optimal de production est toujours d'égaliser coût marginal et prix (ou bien de se trouver à un point tel que le coût marginal "à gauche" est inférieur au prix, et le coût marginal "à droite" est supérieur au prix) lorsque la pizzeria est ouverte. Pour décider si on préfère ouvrir la pizzeria ou non, on compare toujours les prix aux coûts moyens, mais cette fois les coûts moyens sont calculés *sans prendre en compte les coûts fixes*

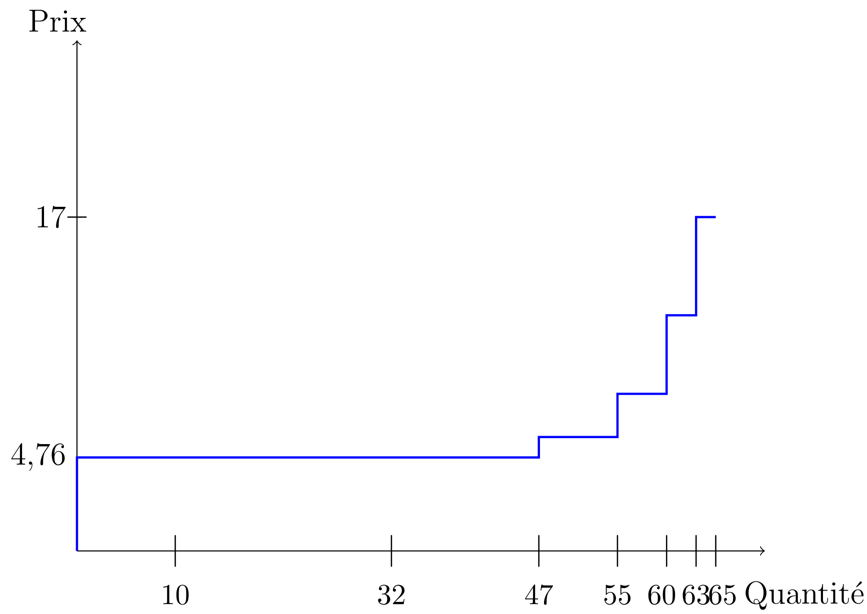


Figure 1: L'offre de court terme

de location de matériel ; on parle dans ce cas de *coûts variables moyens*. En effet, les coûts fixes étant payés et n'étant pas recouvrables, ils n'entrent pas dans le calcul de court terme.

Employés	Pizzas	Coût Var. Total	Coût Marginal	Coût Var. Moyen
0	0	0	-	-
1	10	50	5€	5€
2	32	124	3.36€	3.87€
3	47	184	4€	3.91€
4	55	230	5.75€	4.18€
5	60	270	8€	4.5€
6	63	306	12€	4.86€
7	65	340	17€	5.23€

Commençons par ne pas prendre en compte la décision d'ouvrir ou non la pizzeria. En fonction du prix, on a la table de production suivante:

Prix	Production
$<$ à 3.36€	0
de 3.36€à 4€	32
de 4€à 5.75€	47
de 5.75€à 8€	55
de 8€à 12€	60
de 12€à 17€	63
$>$ à 17€	65

On voit que les coûts variables moyens sont inférieurs au prix lorsque le prix est entre 3.36€ et 3.87€. Dans ce cas il vaut mieux ne pas ouvrir la pizzeria (les 40€ de location de matériel sont perdus, mais on évite des pertes supplémentaires).

En conclusion, l'offre de pizza est donnée par la table suivante :

Prix	Production
$<$ à 3.87€	0
de 3.87€à 4€	32
de 4€à 5.75€	47
de 5.75€à 8€	55
de 8€à 12€	60
de 12€à 17€	63
$>$ à 17€	65

1. L'offre de court terme est égale à l'offre de long terme lorsque la production à long terme est positive. Cependant, il y a un intervalle de prix pour lesquels l'offre de long terme est nulle et l'offre de court terme est positive. Dans cet intervalle de prix, le producteur effectue des pertes lorsqu'on prend en

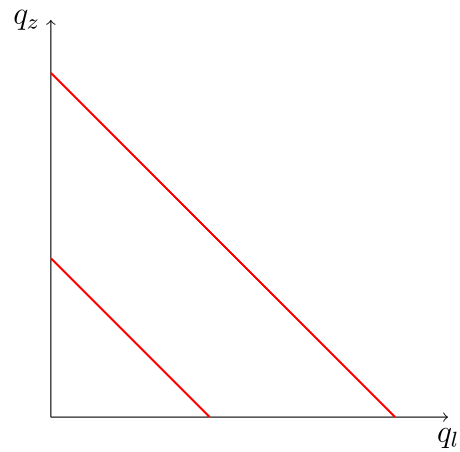


Figure 2: Deux courbes d'indifférence entre coca light et coca zero.

compte les coûts irrécouvrables, mais pas si on ne prend en compte que les coûts variables. A long terme, les producteurs n'entrent pas sur le marché dans cet intervalle de prix. A court terme, les coûts irrécouvrables sont déjà payés et l'entreprise ne peut s'ajuster.

Exercice 8. **Coca-Zero, Coca light**

1. Karine est indifférence entre deux paniers (q_l, q_z) et (q_l', q_z') si la quantité totale de soda est la même dans les deux cas:

$$q_l + q_z = q_l' + q_z';$$

par conséquent les courbes d'indifférence sont des portions de droite à 45 degrés.

2. Pour un prix p du coca light supérieur à 1€ , Karine consomme 3 unités de coca zero et aucune de coca light. Pour un prix du coca light inférieur à 1€ , Karine consomme $3/p$ unités de coca light et aucune de coca zero.

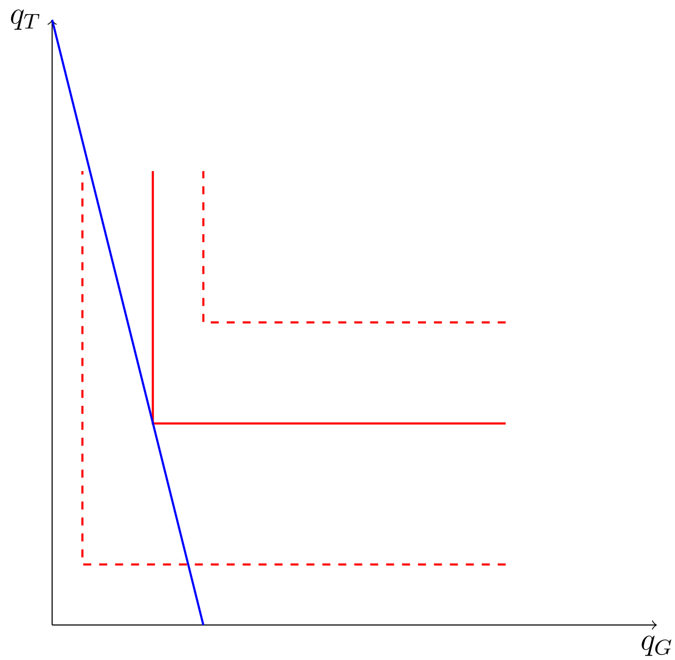


Figure 3: Les courbes d'indifférence pour le "Gin-Tonic" ont une forme de L. La meilleure courbe d'indifférence touche la contrainte de budget "en coin".

3. La demande de coca zero est croissante avec le prix du coca light, les deux biens sont substituts.

Exercice 9. **Gin-Tonic**

1. A partir de (q_G, q_T), on produit une quantité de Gin-Tonic égale à

$$\min\{q_G, q_T/2\}.$$

2. On a cette fois le graphe suivant:

3. Aux prix fixés, on a les équations $4q_G^* + q_T^* = 20$ et $q_T^* = 2q_G^*$, ce qui donne $q_G^* = 3.33$, $q_T^* = 6.66$.

4. Si on note p_G le prix du Gin, on a $p_G q_G^* + q_T^* = 20$ et $q_T^* = 2q_G^*$, ce qui donne $q_G^* = 20/(2 + p_G)$, $q_T^* = 40/(2 + p_G)$.

5. La demande de Tonic décroit avec le prix du Gin, ce sont des biens compléments.

ECO361 PC5

Monopole et Oligopole

Exercice 1. **Oligopole**

Notre première tâche est de calculer les quantités produites à l'équilibre d'oligopole.

1. Le profit est la différence entre le revenu et le coût.

$$\begin{aligned} U_i(q_i, q_{-i}) &= pq_i - q_i c \\ &= q_i(a - b\sum_j q_j - c) \\ &= q_i(a - b\sum_{j \neq i} q_j - c - bq_i) \end{aligned}$$

2. $U_i(q_i, q_{-i})$ est une fonction quadratique de q_i, dont le maximum est atteint pour $q_i \geq 0$ en :
$$Q_i(q_{-i}) = \max\{0, \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} q_j\}.$$

3. On résout simultanément le système d'équations $q_i^* = Q_i(q_{-i}^*)$. On obtient l'existence d'un équilibre unique dans lequel pour tout i,
$$q_i^* = \frac{a-c}{b(n+1)}.$$

4. La quantité totale qui serait produite en situation de marché est $\tilde{q}$ qui égalise le coût marginal et la propension à payer des agents. La propension à payer

est donnée par la fonction de demande inverse. On a donc :

$$\begin{aligned} p &= a - b\tilde{q} = c \\ \tilde{q} &= \frac{a-c}{b} \end{aligned}$$

Soit $q^* = \sum_i q_i^*$. La perte sèche est donnée par:

$$\begin{aligned} PS &= \int_{q^*}^{\tilde{q}} (D^{-1}(q) - c)dq \\ &= \frac{1}{2}(a - c - bq^*)(\tilde{q} - q^*) \\ &= \frac{a-c}{2}\frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(a-c)^2}{2b(n+1)^2} \end{aligned}$$

5. Le profit d'équilibre de chacune des firmes dans un oligopole de n firmes est

$$\begin{aligned} \Pi &= U_i(q_i, q_{-i}^*) = q_i^*(a - b\sum_j q_j - c) \\ &= \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2} \end{aligned}$$

Pour les firmes $1, 2$. Les profits avant fusion sont au total:

$$2\frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$$

tandis que le profit après fusion est

$$\frac{(a-c)^2}{bn^2}$$

Le profit est plus grand avant fusion qu'après fusion lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n+1)^2} &> \frac{1}{n^2} \\ \frac{n+1}{n} &< \sqrt{2} \\ n &> \frac{1}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, le profit est supérieur après fusion plutôt qu'avant fusion (essayez de le démontrer par un raisonnement direct, sans aucun calcul!). Pour $n \geq 3$, le profit est supérieur avant fusion.

Pour les firmes $j \neq 1, 2$, le profit est toujours supérieur après fusion qu'avant fusion. La diminution de la concurrence est favorable à toutes les firmes qui restent sur le marché.

Exercice 2. **Elasticité et pouvoir de marché**

1. On applique la définition de l'élasticité :

$$\begin{aligned} \frac{d \log D_e}{d \log p} &= -e \\ \log D_e &= -e \log p + K \\ D_e(p) &= e^K p^{-e} \end{aligned}$$

En utilisant $D_e(1) = 1$ on conclut:

$$D_e(p) = p^{-e}.$$

2. Le monopole choisit p qui maximise le profit donné par:

$$(p - c) D_e(p).$$

La condition de premier ordre (dérivée nulle de la fonction en son maximum) exprime qu'à l'optimum, le revenu marginal est égal au coût marginal. Cette condition donne:

$$\begin{aligned}
D_e(p^m) + (p^m - c)D_e'(p^m) &= 0 \\
(p^m)^{-e} - (p^m - c)e(p^m)^{-e-1} &= 0 \\
p^m - (p^m - c)e &= 0 \\
p^m &= \frac{c}{1 - \frac{1}{e}},
\end{aligned}$$

où l'expression est valide uniquement pour $e > 1$. Pour ces valeur de e, on a:

$$q^m = \left(\frac{1 - \frac{1}{e}}{c}\right)^e.$$

On voit que la quantité de monopole croit avec e et tend vers 0 lorsque e tend vers 1. Le prix de monopole est décroissant en e et s'envole vers $+\infty$ lorsque e se rapproche de 1.

3. Pour $e < 1$, la demande est très inélastique. On a vu en cours que dans ce cas, le budget alloué au bien augmente lorsque le prix augmente. Par conséquent, pour la firme, augmenter les prix permet de diminuer les coûts de production tout en augmentant les revenus. Comme augmenter les prix est toujours profitable, le problème de maximisation n'admet pas de solution réelle.

4. La quantité de marché $\tilde{q}$ et le prix de marché $\tilde{p}$ égalisent le coût marginal et la demande. On a donc

$$\tilde{p} = D_e^{-1}(\tilde{q}^e) = c.$$

La perte sèche est donnée par

$$
\begin{aligned}
PS &= \int_{\tilde{p}}^{p^m} (D_e(p) - q^m)dq \\
&= \int_{\tilde{p}}^{p^m} (p^{-e} - q^m)dq \\
&= \left[\frac{1}{1-e}p^{1-e} - q^m p\right]_c^{\frac{c}{1-\frac{1}{e}}} \\
&= \frac{c^{1-e}}{e-1}\left(1 - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right)^{1-e}\right) - \frac{c^{1-e}}{e-1}\left(1-\frac{1}{e}\right)^e \\
&= \frac{c^{1-e}}{e-1}\left(1 - \left(1-\frac{1}{e}\right)^{e-1} - \left(1-\frac{1}{e}\right)^e\right)
\end{aligned}
$$

On voit sur une représentation graphique que lorsque e croit, la perte sèche décroit. Une demande plus élastique implique une moins grande perte en surplus.

On peut aussi obtenir la même conclusion graphiquement, et plus élégamment. Lorsque l'élasticité augmente, la courbe de la fonction de demande mD s'aplatit. La perte de surplus *à valeur de p donnée* est donc plus petite. De plus, le prix de monopole se rapproche du prix de marché. Ce deuxième effet a lui aussi tendance à diminuer la perte de surplus. Par conséquent, la perte sèche décroit avec e.

5. Soit q_i la quantité produite par la firme i, . En utilisant la relation $p = (\sum_j q_j)^{-\frac{1}{e}}$ on obtient que le profit de la firme i s'exprime comme :

$$\left((\sum_j q_j)^{-\frac{1}{e}} - c\right) q_i.$$

La condition de premier ordre de maximisation de profit est :

$$\left(\sum_j q_j\right)^{-\frac{1}{e}} \left(1 - \frac{1}{e}\frac{q_i}{\sum_j q_j}\right) = c$$

On résout pour un équilibre symétrique dans lequel $q_i = q_j$ pour tous i, j. On obtient l'équilibre d'oligopole dans lequel pour tout i la production de la firme i est donnée par

$$q_i = \frac{1}{n}\left(\frac{c}{1-\frac{1}{ne}}\right)^{-e}$$

et le prix d'oligopole est :

$$p = \frac{c}{1-\frac{1}{ne}}.$$

Cette fois encore, on voit que le prix de marché augmente et s'envole lorsque l'élasticité diminue vers 1. L'effet est mitigé par la compétition entre firmes (le prix décroit avec n), mais à n fixé, la compétition oligopolistique ne suffit pas à éviter une envolée des prix lorsque l'élasticité devient trop faible.

Exercice 3. **Equilibre de Stackleberg**

1. Le meilleur choix $Q_2(q_1)$ de la firme 2 est donné par l'exercice 1. On a :

$$Q_2(q_1) = \max\{0, \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1\}.$$

2. Le choix de 1 influence le choix de 2. En supposant des quantités produites

positives, le gain de 1 lorsqu'elle choisit q_1 est donné par :

$$\begin{aligned}
U_1^s(q_1) &= q_1(p-c) \\
&= q_1(a-c-b(q_1+Q_2(q_1)) \\
&= q_1(a-c-b(q_1+Q_2(q_1)) \\
&= \frac{q_1}{2}(a-c-bq_1) \\
&= \frac{q_1}{2}(a-c-bq_1)
\end{aligned}$$

3. La quantité de Stackelberg pour la firme 1 est donnée par

$$q_1^s = \frac{a-c}{2b}.$$

et la meilleure réponse de 2 est donc

$$q_2^2 = \frac{a-c}{4b}.$$

4. On voit que la firme 1 fait un profit supérieur au profit de duopole tandis que la firme 2 fait un profit inférieur. Le fait d'entrer avant la firme 2 donne à la firme 1 la possibilité de pré-empter une partie du marché et ainsi d'augmenter ses profits.

Exercice 4. **Prix différenciés**

Patients:

$$p = 50 - q \quad q = 50 - p$$

Impatients:

$$p = 100 - q \quad q = 100 - p$$

1. a) pour les patients, le prix de monopole p^p maximise $p(50-p)$. Le tarif qui maximise ce profit est $p^p = 25$. Pour les impatients, le prix de monopole

maximise $p(100-p)$, et le prix de monopole pour cette catégorie est $p^i = 50$.

b) Le profit auprès des patients est 25×25, celui auprès des impatients est 50×50, le profit total est donc 3125

c) Le surplus des consommateurs patients est $\int_0^{25}(50-q)-25dq = \int_0^{25}(25-q)dq = 25^2/2 = 312,5$. Celui des consommateurs impatients est $\int_0^{50}(100-q)-50dq = \int_0^{50}(50-q)dq = 25^2/2 = 1250$. Le surplus de l'ensemble des consommateurs vaut donc $1562,5$.

2. a) Pour maximiser le surplus total, il faut que le prix soit égal au coût marginal, donc nul. En effet, pour un prix > 0, l'allocation est inefficiente car un consommateur serait prêt à obtenir le produit pour un prix positif tandis que le coût de production est nul.

b) Le profit de FreeSport est alors nul.

c) Le surplus des consommateurs patients est $\int_0^{50}(50-q)dq = 1250$. Celui des consommateurs impatients est $\int_0^{100}(100-q)dq = 5000$. Le surplus de l'ensemble des consommateurs est donc 6250.

3. a) Pour un prix $p \leq 50$, la demande des patients est $50-p$ est celle des impatients est $100-p$, la demande totale est donc $q = 150-2p$, ce qui revient à $p = 75 - q/2$. Pour un prix $p \geq 50$, la demande des patients est nulle et celle des impatients est $100-p$, donc la demande totale est $q = 100-p$ ce qui donne $p = 100-q$. Pour $p = 50$ on a $q = 50$. La fonction de demande est donc $p = 100-q$ pour $q \leq 50$ et $p = 75-q/2$ pour $q \geq 50$.

b) Une tarification optimale avec les patients et les impatients maximise $p(150-2p)$ sous contrainte $p \leq 50$, cad $p = 37,5$. Un tarif optimal avec uniquement les patients maximise $p(100-p)$ sous contrainte $p \geq 50$ et donne $p = 50$. A $p = 50$ le profit est inférieur à celui de $p = 37,5$, la tarification optimale est donc $p^m = 37,5$.

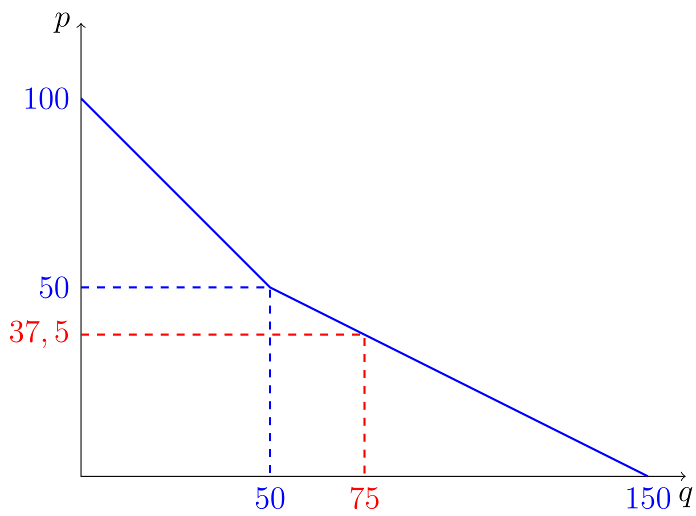


Figure 1: Question 3: La demande totale en bleu, le prix et la quantité de monopole en rouge. Le surplus pour les consommateurs compris entre le prix de monopole et la fonction de demande est visualisé comme la somme des aires de deux triangles et d'un rectangle.

c) Le profit correspondant est de $37,5 \times (150 - 75) = 2812,5$.

d) La demande au prix de monopole est $q^m = 75$. On peut calculer géométriquement le surplus des consommateurs sur la figure 1 comme $\frac{1}{2} \times 50 \times 50 + 12,5 \times 50 + \frac{1}{2} \times 25 \times 12,5 = 2031,25$.

4. On demande de comparer les 3 situations des questions 1/ 2/ 3/ et de commenter.

a) Dans la situation 1/ il y a deux prix, un plus élevé pour les impatients que pour les patients, ce qui est intuitif. Dans la situation 2/ le prix est nul car on tarifie à coût marginal donc nul. Dans la situation 3/ le prix intermédiaire de monopole se situe entre les deux prix de monopole de la situation 1/. C'est intuitif car le monopole fait face à un mix des deux catégories de consommateurs.

b) Le profit est le plus grand dans la situation 1/ C'est normal car c'est là que le monopole à le plus d'outils pour maximiser les profits (car il a deux prix comme instruments). Dans la situation 3/ le monopole est forcé à utiliser un seul prix et ses profits sont plus bas qu'en situation 1/, ce qui était prévisible. Enfin dans la situation 2/ les profits sont les plus bas car non seulement on a un seul tarif mais le monopole est régulé et ne peut décider de son prix.

c) Le surplus total est plus élevé dans la situation 2/, ce qui est normal car l'objectif du régulateur est précisément de maximiser ce surplus total. Entre la situation 1/ et la situation 3/ rien ne permet à priori de trancher, mais le calcul montre que le surplus total est plus élevé dans la situation 3/ (où il vaut 5625) que dans la situation 1/ (où il vaut 4843,75).

d) Le surplus des consommateurs est maximal dans la situation 2 où les consommateurs prennent tout le surplus. Le surplus des consommateurs est ensuite plus élevé dans la situation 3/ que dans la situation 1/: la discrimination selon la catégorie de consommateur est mauvaise pour les consommateurs, elle permet au monopole d'extraire de chaque consommateur une quantité proche de ce que ce consommateur est prêt à payer.

5. En règle générale, le régulateur a pour rôle de protéger le consommateur. Sur la base des calculs effectués, il vaut mieux interdire les prix différenciés afin de mieux protéger le consommateur.

6. Si le monopole connaît parfaitement les préférences de chaque consommateur, il a le pouvoir d'offrir à chacun sa propension maximale à payer (moins 1 cent) et donc d'extraire tout le surplus (SP est maximal). Les consommateurs ne reçoivent alors aucun surplus ($SC = 0$). Les consommateurs servis par le monopole sont alors ceux dont la propension à payer est supérieure aux coûts marginaux de production (en supposant la condition d'ouverture satisfaite). Par conséquent, la quantité produite par le monopole est la même qu'à l'équilibre de marché est la même demande est servie ! C'est donc une situation

efficace au sens de Pareto.

ECO361 PC6

Théorie des Jeux

Économie de l'information

Exercice 1. **Meilleures réponses et équilibres de Nash**

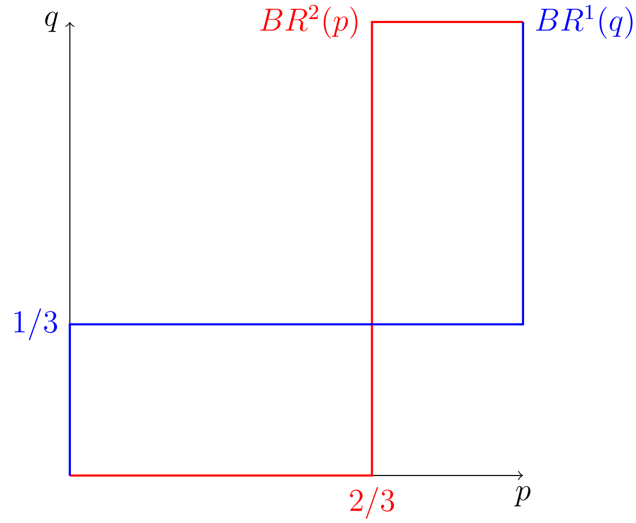
1. (a) Pour le joueur 2, le paiement de la stratégie B est p, celui de la stratégie S est $2(1-p)$. B est meilleure réponse si et seulement si $p \geq 2(1-p)$, i.e., $p \geq 2/3$. De même S est meilleure réponse si et seulement si $p \leq 2/3$. Pour $p = 2/3$ toutes les stratégies mixtes sont meilleures réponses. On a donc

$$BR^2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } p > 2/3 \\ [0,1] & \text{si } p = 2/3 \\ \{0\} & \text{si } p < 2/3 \end{cases}$$

   (b) On a de même :

$$BR^1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } q > 1/3 \\ [0,1] & \text{si } q = 1/3 \\ \{0\} & \text{si } q < 1/3 \end{cases}$$

   (c) Le graphique est comme suit:



(d) On trouve les équilibres de Nash comme intersections des deux correspondances de meilleures réponses. On trouve les deux équilibres en stratégies pures (B, B) et (S, S) qui correspondent aux points $(1, 1)$ et $(0, 0)$, ainsi qu'un troisième équilibre, en stratégies mixtes, au point $p = 2/3$, $q = 1/3$.

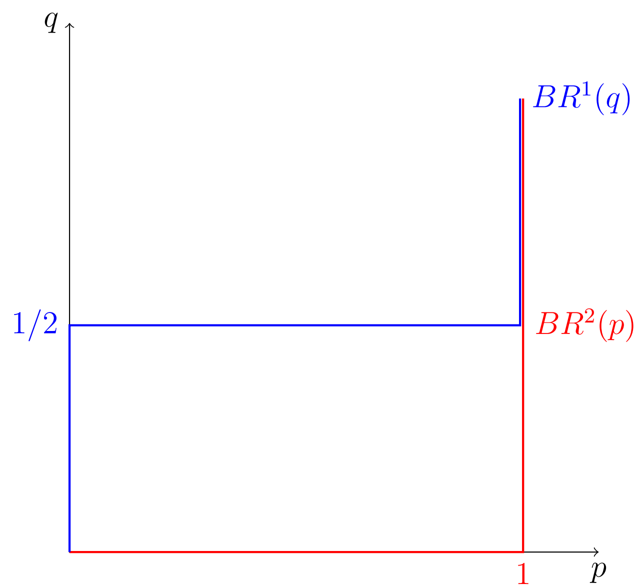
2. (a) Le paiement de la stratégie B est 0, celui de la stratégie S est $(1 - p)$. B est meilleure réponse si et seulement si $p = 1$. S est meilleure réponse pour toutes les valeurs de p. On a donc :

$$BR^2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } p < 1 \\ [0, 1] & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

(b) Le paiement de B est $q - (1 - q) = 2q - 1$, celui de la stratégie S est $-q + 1 - q = 1 - 2q$. B est meilleure réponse si et seulement si $q \geq 1/2$, et S est meilleure réponse si et seulement si $q \leq 1/2$.

$$BR^1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } q > 1/2 \\ [0,1] & \text{si } q = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } q < 1/2 \end{cases}$$

(c) Le graphique est comme suit:



(d) On a deux composantes d'équilibres de Nash : le point isolé $(0,0)$ qui correspond à l'équilibre en stratégies pures (S,S), et le segment entre les points $(1,1/2)$ et $(1,1)$, qui correspond à un continuum d'équilibres en stratégies mixtes.

Exercice 2. **Jeu de penalties**

1. Si le tireur choisit le même côté que le gardien de but, alors le ballon n'entre pas, le paiement des 2 joueurs est 0. Si le tireur et choisit G et le gardien D, alors le ballon entre avec probabilité $0,9$, c'est donc le paiement (en moyenne de probabilité) du tireur, qui est l'opposé de celui du gardien (jeu à somme

nulle). Si le tireur choisit D et le gardien G, le ballon entre avec probabilité $0,6$. On a donc la matrice de paiements comme suit :

	G	D
G	0	.9
D	.6	0

2. On suppose que le tireur tire à gauche avec probabilité p. Du point de vue du gardien, plonger à gauche donne une probabilité de but de $.6(1-p)$, plonger à droite une probabilité de but de $.9p$. Plonger à gauche est une meilleure réponse pour $.6(1-p) \leq .9p$, cad. $p \geq .4$. Pour $p \geq .4$, plonger à droite est meilleure réponse. Pour $p = .4$, les deux stratégies G, D (ainsi que toutes les stratégies mixtes) sont meilleures réponses.

   Sachant que le joueur 2 minimise le paiement du joueur 1, on a $v(p) = \min\{.6(1-p), .9p\}$. (représenter le graphe de v aide à visualiser).

3. Le maximum de $v(p)$ est atteint en $p^* = \frac{2}{5}$, et la valeur correspondante que le joueur 1 peut se garantir est $\underline{v} = .36$.

4. Tirer à gauche donne un paiement de $.9(1-q)$ et tirer à droite un paiement de $.6q$. Tirer à gauche est meilleure réponse si $.9(1-q) \geq .6q$, ie. $q \leq .6$. Tirer à droite est meilleure réponse pour $q \geq \frac{3}{5}$, et pour .6 toutes les stratégies de 1 sont meilleure réponses.

   Sachant que le joueur 1 maximise son paiement à stratégie de 2 donné, on a $w(q) = \max\{.9(1-q), .6q\}$. (représenter le graphe de w aide à visualiser).

5. La stratégie du joueur 2 qui minimise $w(q)$ est $q^* = .6$, que est le gain espéré correspondant du joueur 1 est $\overline{v} = .36$. On dit que le joueur 1 peut *défendre* $\overline{v}$. En effet, pour toute stratégie de 2, le joueur 1 a une stratégie p qui lui assure un gain espéré de $\overline{v}$ au moins.

6. Ce sont les mêmes valeurs. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème appelé théorème de minmax pour les jeux à somme nulle.

7. De manière générale, la valeur qu'il est possible de garantir est plus petite que la valeur qu'il est possible de défendre. Cela provient du fait que pour garantir $\underline{v}$, il faut trouver *une* stratégie qui obtient au moins $\underline{v}$ face à *toutes* les stratégies de l'autre joueur. Tandis que pour défendre $\overline{v}$, il suffit de trouver, pour chaque stratégie de l'adversaire, une stratégie qui obtienne $\overline{v}$. On voit que le passage de la définition de garantir à défendre est une inversion de quantificateurs mathématiques, passage de $\exists\ \forall$ à $\forall\ \exists$. Ce qui explique que les valeurs de $\underline{v}$ et de $\overline{v}$ puissent différer, avec en général $\overline{v} \geq \underline{v}$.

   On peut montrer ce résultat formellement pour tous ensembles de stratégies S pour le joueur 1, T pour le joueur 2 et fonction de paiement du joueur 1 $g\colon S \times T \to \mathbb{R}$, on montre l'inégalité:

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \inf_t \sup_s g(s,t).$$

   En effet pour tout $s' \in S, t' \in T$, on a

$$\inf_t g(s',t) \leq g(s',t') \geq \sup_s g(s,t')$$

   et donc en prenant le sup sur s à gauche, pour tout s' on a :

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \sup_s g(s,t')$$

   finalement en prenant le inf à droite sur t':

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \inf_t \sup_s g(s,t)$$

8. Le tireur tire plus souvent à droite, c'est à dire là où il est le moins bon. S'il tirait plus souvent à gauche, le portier aurait doublement intérêt à plonger à gauche (ballon tiré plus souvent qu'à gauche, ballon tiré plus souvent avec réussite de ce côté), on n'aurait pas une situation d'équilibre car dans ce cas le

joueur 1 aurait, lui, finalement intérêt à tirer à droite. Bien sûr cette prédiction provient du fait que les joueurs connaissent la matrice de paiements, donc ils savent tous deux que le tireur tire mieux à gauche qu'à droite. Si cette information était connue du tireur seul, les prédictions du modèle différeraient.

Exercice 3. **Compétition en prix de Bertrand**

1. Un producteur dont la demande est nulle ne produit rien et son gain est nul. Pour un producteur qui produit une quantité positive ou nulle, le gain est égal à la quantité vendue multipliée par le gain unitaire, lequel gain unitaire est la différence entre le prix de vente et le coût unitaire de production. On a donc les fonctions de gain :

$$g^i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i)(p_i - c) & \text{si } p_i < p_j \\ D(p_i)(p_i - c)/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

2. On commence par raisonner par élimination pour ne garder qu'une possibilité avant de vérifier que c'est un équilibre de Nash.

   - Supposons que $p_i > p_j > c$. Alors la firme i fait un profit nul et pourrait faire un profit positif en utilisant un prix compris entre c et p_j, ça n'est donc pas un équilibre de Nash.
   - Supposons maintenant $p_i > c \geq p_j$. Dans ce cas la firme j fait un profit négatif ou nul, et pourrait faire un profit positif en utilisant un prix compris entre c et p_i, ça n'est pas non plus un équilibre de Nash.

   Donc à tout équilibre de Nash on a $p_1 = p_2$, soit p^* cette valeur commune.

   - Si $p^* < c$ alors les deux producteurs fond des pertes, et augmenter le prix serait une déviation profitable car elle assurerait un gain de 0.
   - Si $p^* > c$, alors chaque firme aurait intérêt à mettre un prix "juste au dessous" de p^*, pour un gain proche de $D(p^*)(p^* - c) > D(p^*)(p^* - c)/2$.
   - On a donc forcément $p^* = c$, et on vérifie bien que $p_1 = p_2 = c$ est un équilibre de Nash : chaque firme a un profit nul, et toute déviation donne aussi un profit nul.

On a donc un équilibre de Nash unique dans lequel les deux firmes vendent au prix marginal.

3. Le duopole de Cournot prédit des profits positifs lorsqu'il y a deux firmes, il prédit aussi une inefficience liée au pouvoir de marché des firmes. Le duopole de Bertrand prédit que l'issue de la compétition entre deux firmes est le même que l'issue de la compétition parfaite.

Exercice 4. **Compétition spatiale de Hotelling**

1. Si les deux marchands sont positionnés en des points différents ($x_i \neq x_j$) alors tous ceux à droite de leur milieu $\frac{x_i+x_j}{2}$ vont acheter au vendeur le plus à droite, et les autres au vendeur le plus à gauche. S'ils sont tous deux au même point alors la demande se répartit également entre les deux vendeurs.

$$g^i(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_i+x_j}{2} & \text{si } x_i < x_j \\ \frac{1}{2} & \text{si } x_i = x_j \\ 1 - \frac{x_i+x_j}{2} & \text{si } x_i > x_j \end{cases}$$

2. On ne peut pas avoir d'équilibre de Nash dans lequel $x_1 \neq x_2$, car dans ce cas, chaque marchand de glace aurait intérêt à se rapprocher de l'autre pour augmenter ses gains. Si $x_1 = x_2 < \frac{1}{2}$, chacun a la moitié des plagistes comme client, et une augmentation infime de x_i permettrait au vendeur i d'augmenter ses ventes ; de même on ne peut pas avoir un équilibre de Nash dans lequel $x_1 = x_2 > \frac{1}{2}$. Par élimination on voit qu'à un équilibre de Nash on a nécessairement $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, et on vérifie que c'est bien un équilibre de Nash : en effet, chaque déviation donnerait un paiement strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

3. Imaginons que les plagistes soient en fait des électeurs, et que la position sur la plage représente les préférences des électeurs sur un axe $[0,1]$. Par exemple 0 peut signifier "de gauche" et 1 "de droite" ou bien 0 peut signifier "pro

immigration" et 1 "anti-immigration", etc .... S'il y a deux candidats, chaque électeur vote pour le candidat le plus proche de sa position électorale. L'objectif de chaque candidat est d'obtenir le plus de votes possible.

Le modèle prédit que les deux candidats ont finalement des programmes électoraux très proches. C'est ce qu'on a observé pendant assez longtemps dans différentes démocraties (US, UK, France ...), où on avait plus de différences entre pays qu'entre candidats dans un même pays, en accord avec la prédiction du jeu de Hotelling.

Récemment, on assiste dans divers pays (notamment USA) à un phénomène de polarisation politique assez accentué. La polarisation peut s'expliquer partiellement par un changement de préférences des électeurs. Un élément qui semble manquer dans le jeu de Hotelling est la motivation des électeurs à élire leur candidat. Si les deux candidats sont très proches, l'intérêt à voter est quasi nul et l'abstention très élevée. En revanche, un candidat plus proche des préférence de ces électeurs peut plus facilement les motiver, ce qui introduit un intérêt stratégique à des positions politiques qui s'éloignent de l'électeur médian.

Exercice 5. **Enchères au second prix**

1. Soit $B_i = \max_{j \neq i} B_j$ le maximum des enchères des joueurs différents de i.

   Si $B_i > v_i$, toute enchère supérieure ou égale à B_i donne un paiement négatif, tandis que b_i (ou toute autre enchère inférieure à B_i donne un paiement nul.

   Si $B_i < v_i$, toute enchère inférieure B_i donne un paiement nul, une enchère égale à B_i permet de remporter l'objet au prix B_i avec probabilité < 1, tandis que $b_i = v_i$ (ou toute autre enchère $> B_i$ donne un meilleur paiement car elle permet de remporter l'objet avec probabilité 1.

   Si $B_i = v_i$, alors toute enchère y compris $b_i = v_i$ donne un paiement nul.

On vient de vérifier que $b_i = v_i$ est toujours meilleure réponse. Il reste à montrer que c'est faiblement dominant. Pour cela, il faut comparer $b_i = v_i$ avec une autre enchère b'_i, et montrer qu'il existe au moins un profil d'enchères des autres joueurs dans lequel $b_i = v_i$ donne un meilleur paiement que b'_i. Si $b'_i < v_i$. Alors si $b'_i < B_i < v_i$, enchérir b'_i donne un paiement nul tandis qu'enchérir $b_i = v_i$ donne un paiement $v_i - B_i > 0$. Si $b'_i > v_i$, alors si $b'_i > B_i > v_i$, enchérir b'_i donne un paiement $v_i - B_i < 0$, tandis qu'enchérir $b_i = v_i$ donne un paiement nul.

2. On fixe la valuation de l'enchérisseur i à v_i. La probabilité que i remporte l'objet est:

$$\begin{aligned} P(B_i < v_i) &= P(\forall j \neq i, b_j < v_i) \\ &= P(\forall j \neq i, v_j < v_i) \\ &= \prod_{j \neq i} P(v_j < v_i) \\ &= \prod_{j \neq i} v_i \\ &= v_i^{n-1} \end{aligned}$$

3. Il reste à calculer l'espérance du montant payé par i. Si on était de manière "discrète", on la calculerait comme $\sum_{b \leq v_i} P(B_i = b)b$, où la somme est prise sur toutes les situations " gagnantes " de i, c'est-à-dire $B_i \leq v_i$, étant donné que i paye 0 si $B_i > v_i$. De manière continue et "intégrale", on a l'expression:

$$\begin{aligned} R(v_i) &= \int_{b=0}^{v_i} (n-1)b^{n-2} b db \\ &= \frac{n-1}{n} v_i^n \end{aligned}$$

Où $(n-1)b^{n-2}db$ correspond à $P(b \leq B_i < b + db) = P(B_i < v_i + db) - P(B_i < v_i)$ d'après le calcul précédent (autrement dit c'est la fonction de densité pour la fonction cumulative calculée).

Le montant moyen payé avant de connaître sa valuation est la moyenne des montants payés sur toutes les valutations, c'est donc:

$$\begin{aligned} R_i &= \int_0^1 R(v_i) dv_i \\ &= \frac{n-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Le revenu du vendeur est la somme des montants payés par tous les enchérisseurs, comme tous les enchérisseurs sont symétriques,

$$\begin{aligned} R &= \sum_i R_i = nR_i \\ &= \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

On observe que ce revenu est croissant en n, et tend vers 1 lorsqu'il y a de plus en plus d'enchérisseurs. C'est intuitif : plus d'enchérisseur augmente la compétition et permet de vendre l'objet en moyenne plus cher. Aussi, la présence d'un nombre accru d'enchérisseur augmente la probabilité qu'un ou plusieurs d'entre eux ait une valuation élevée, auquel cas il est possible de vendre l'objet à un prix élevé.

Exercice 6. **Pierre, Papier, Ciseaux**

1. Si le joueur 1 joue $(1/3, 1/3, 1/3)$, il obtient un paiement espéré de 0 indépendamment de la stratégie de 2. Par conséquent, tout équilibre de Nash a un paiement (pour 1) de au moins 0 (sinon $(1/3, 1/3, 1/3)$ serait une déviation profitable pour le joueur 1).

   Idem si le joueur 2 joue $(1/3, 1/3, 1/3)$ le paiement espéré du joueur 1 est 0. Donc tout paiement d'équilibre de Nash pour 1 est au plus 0.

2. Soit (p, q) un équilibre de Nash. Face à q, écrivons g_1, g_2, g_3 les paiements des trois stratégies pures du joueur 1. On vérifie que $g_1 + g_2 + g_3 = 0$.

   Si on n'a pas $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, alors au moins une des 3 stratégies du joueur 1 donne un paiement > 0 : $\max\{g_1, g_2, g_3\} > 0$. Comme on suppose que p est une meilleure réponse à q, p donne un paiement > 0 face à q, ce qui est en contradiction avec la question 1.

   La résolution linéaire de $g_1 = g_2 = g_3$ donne $q = (1/3, 1/3, 1/3)$.

   De même, raisonner sur les paiements des stratégies du joueur 2 nous montre qu'on a forcément $p = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Exercice 7. **Concours de beauté**

1. Les 2/3 de la moyenne est forcément au moins 2/3100. Donc toute stratégie supérieure à 2/3100 est strictement dominée par 2/3100. (sont-ce les seules dominées?)

2. Si on élimine toutes les stratégies supérieures à 2/3100, toutes les stratégies supérieures à 4/9100 dans le jeu restant sont dominées. Et ainsi de suite.

3. Au seul équilibre de Nash, tous les participants annoncent 0. En effet on vérifie directement que c'est un équilibre de Nash. Considérons maintenant un équilibre de Nash où la moyenne des annonces est m. Si $m > 0$ alors tous ceux qui annoncent m ou plus ont intérêt à annoncer un peu moins que m, ce qui constituerait une déviation profitable. On ne peut donc qu'avoir $m = 0$, ce qui veut dire que toutes les annonces sont 0.

ECO 361 Jean-Baptiste Michau
Mai 2023 Ecole Polytechnique

Introduction à l'économie

Solution 3: Le commerce international

Exercice 1: La conscription

A/ Au lieu de produire une unité de défense, un travailleur qualifié peu produire 3 unités de biens industriels; tandis qu'un non-qualifié peu en produire 2. Le coût d'opportunité de la défense en terme de biens industriels est donc égal à:

- 3 pour un qualifié;
- 2 pour un non-qualifié.

Ce coût d'opportunité étant plus faible pour les non-qualifiés, ils ont un avantage comparatif dans la production de défense. A l'inverse, les qualifiés ont un avantage comparatif dans la production de biens industriels.

Notez que les qualifiés possèdent un avantage absolu dans la production de défense et de biens industriels.

B/ Si les travailleurs qualifiés produisent 30 unités de défense, alors cela occupera $30/2 = 15$ travailleurs (puisque chacun d'entre eux peut produire 2 unités de défense). Par conséquent, $50 - 15 = 35$ qualifiés peuvent chacun produire 6 unités de biens industriels, soit au total $35 \cdot 6 = 210$ unités. En outre, les 50 travailleurs non-qualifiés produiront chacun 2 unités de biens industriels, ce qui fera une production de $50 \cdot 2 = 100$ unités. Dans ce scénario, la production industrielle de l'écoomie s'élève à $210 + 100 = 310$ unités.

Si, au contraire, ce sont les non-qualifiés qui produisent 30 unités de défense, alors cela occupera $30/1 = 30$ travailleurs. Par conséquent, $50 - 30 = 20$ travailleurs non-qualifiés produiront chacun 2 unités de biens industriels, pour une production totale de $20 \cdot 2 = 40$ unités. Les 50 qualifiés produiront chacun 6 unités de biens industriels, soit au total $50 \cdot 6 = 300$ unités de biens. La production industrielle est de $40 + 300 = 340$ unités.

La production industrielle est donc plus élevée lorsque la défense est produite par les non-qualifiés. Cette situation est paradoxale puisque les non-qualifiés sont moitié moins productif que les qualifiés dans la production de défense. Ceci étant, les non-qualifiés sont comparativement encore moins productif dans l'industrie. Cet exemple illustre donc que l'organisation efficace de la production ne repose pas sur les avantages absolus, mais sur les avantages comparatifs. (Comme vu en cours, c'est naturellement ce à quoi abouti une économie de marché.)

C/ 40 travailleurs qualifiés produisent donc chacun 6 unités de biens industriels et 40 non-qualifiés en produisent chacun 2 unités. La production industrielle est donc $40 \cdot 6 + 40 \cdot 2 = 320$ unités.

D/ La conscription requiert l'embauche de 10 travailleurs qualifiés, qui auraient chacun pu produire 6 unités de biens industriels, et de 10 non-qualifiés, qui auraient chacun pu produire 2 unités de biens industriels. Le coût d'opportunité de la conscription est donc de $10 \cdot 6 + 10 \cdot 2 = 80$ unités de biens.

Les travailleurs non-qualifiés sont prêt à s'engager dans l'armée dès lors qu'ils sont payés 2 unités de biens chacun. Pour produire 30 unités de défense, il faut recruter 30 non-qualifiés payés chacun 2 unités de biens. Le coût d'opportunité de l'armée volontaire est donc de $30 \cdot 2 = 60$ unités de biens.

La conscription est donc beaucoup plus coûteuse pour l'économie que l'armée volontaire. Cela à dû à ce que la conscription force des travailleurs qualifiés à travailler dans la défense, tandis que leur avantage comparatif est dans le secteur industriel.

Remarque: La conscription n'étant pas basée sur le volontariat mais sur la coercition, l'Etat peut choisir de rémunérer ses soldats à un niveau inférieur à leur coût d'opportunité en terme de biens industriels. Par exemple, il peut rémunérer tous ses soldats à 2 unités de biens chacun. Ainsi, le coût budgétaire de la conscription n'est que de $(10 + 10) \cdot 2 = 40$ unités de biens, contre 60 pour l'armée volontaire. Ceci étant, les dépenses militaires sont nécessairement financées par des prélèvements sur la production industrielle. Par conséquent, en cas de conscription, la rémunération des soldats n'affecte que la distribution des biens industriels entre les habitants du pays (qui dépend également du niveau de prélèvement des travailleurs industriels qualifiés et non-qualifiés), elle n'affecte pas la quantité totale de biens produite. C'est donc bien le *coût d'opportunité*, et non le *coût budgétaire*, qui détermine l'efficacité du mode de production choisi.

E/ Le modèle de cet exercice est caricatural et donc, forcément, irréaliste. Il suppose des fonctions de production linéaires, où chaque travailleur a une productivité marginale constante.[1] Par ailleurs, les travailleurs n'attachent d'importance qu'à leurs salaires et n'ont pas de préférences quant à leur secteur d'activité. Enfin, le modèle néglige complètement l'aspect civique de la conscription (le "nation building").

[1] Le productivité marginale d'un travailleur correspond à la quantité produite en une heure supplémentaire de travail.

Ceci étant, il nous enseigne par l'exemple une leçon fondamentale: *l'efficacité productive requiert que la spécialisation des travailleurs soit déterminée par leurs avantages comparatifs.*

La réalité du monde sera toujours plus compliquée qu'un modèle mathématique (même en utilisant des mathématiques sophistiquées). Un modèle est donc une représentation simplifiée de la réalité. Mais, cet aspect caricatural est une vertu: il permet d'illustrer un mécanisme économique de manière transparente et avec une précision mathématique.

Par conséquent, lorsqu'en sciences économiques on vous présente un modèle, vous devez l'approchez à deux niveaux:

1. Dans un premier temps, vous devez vous plongez dans le scénario du modèle. Cela consiste à en accepter toutes les hypothèses et à comprendre ce qu'elles impliquent. Ainsi, vous devez parvenir à comprendre exactement le mécanisme économique qui est à l'oeuvre. Ici, il s'agit de l'impact des avantages comparatifs sur l'efficacité productive.

2. Dans un deuxième temps, vous devez prendre du recul est vous demander si ce mécanisme est réaliste ou s'il s'agit au contraire d'une simple curiosité théorique. Même si le modèle est caricatural, le mécanisme qu'il illustre peut être absolument fondamental à notre compréhension de la réalité de l'économie. En l'occurrence, le débat public sur la conscription doit évidemment aller bien au-delà des avantages comparatifs. Mais, ces considérations constituent néanmoins un aspect fondamental de la question.

Donc, pour répondre à la question, le modèle de cet exercice est certes simpliste, mais son message est conceptuellement profond. Il n'est donc pas idiot!

Ces considérations méthodologiques sont au coeur des sciences économiques. En 1938, l'économiste britannique John Maynard Keynes (l'inventeur de la macroéconomie) écrivit:

> *Economics is a science of thinking in terms of models joined to the art of choosing models which are relevant to the contemporary world. [...] Good economists are scarce because the gift for using "vigilant observation" to choose good models, although it does not require a highly specialised intellectual technique, appears to be a very rare one.*

Exercise 2: Le modèle Ricardien

A/ En une heure de travail, un travailleur allemand peut produire 1/50 voitures ou 1/100 bateaux. Par conséquent, son salaire est égal à $P^{Inter}_{Voiture}/50$ dans le secteur automobile et à $P^{Inter}_{Bateau}/100$ dans la construction navale. Mais, avec $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} \in (1,2)$, on sait que $P^{Inter}_{Voiture}/50 > P^{Inter}_{Bateau}/100$. Les allemands choisissent de se spécialiser dans la production automobile où ils sont payés $P^{Inter}_{Voiture}/50$ par heure.

De manière similaire, un travailleur français peut produire 1/125 voitures ou 1/125 bateaux. Son salaire est donc égal à $P^{Inter}_{Voiture}/125$ dans le secteur automobile et à $P^{Inter}_{Bateau}/125$ dans la construction navale. Mais, avec $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} \in (1,2)$, on a $P^{Inter}_{Bateau}/125 > P^{Inter}_{Voiture}/125$. Les français choisissent de se spécialiser dans la construction navale où ils sont payés $P^{Inter}_{Bateau}/125$ par heure.

Le fait que $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} < 2$ implique que $P^{Inter}_{Bateau}/125 < P^{Inter}_{Voiture}(2/125)$ et donc $P^{Inter}_{Bateau}/125 < P^{Inter}_{Voiture}/50$. Les salaires allemands sont ainsi plus élevés que les salaires français. Un pays qui possède un avantage absolu dans tous les secteurs d'activités bénéficie forcément d'un niveau de salaire plus élevé. Il s'agit d'un résultat général selon lequel la spécialisation sectorielle dépend des avantages comparatifs, tandis que le niveau des salaires dépend des avantages absolus.

B/ Expliquons d'abord la construction de la courbe d'offre relative. Si le prix relatif des bateaux est compris entre 1 et 2, soit $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} \in (1,2)$, alors la France se spécialise dans la construction de bateaux et produit $500/125 = 4$ bateaux tandis que l'Allemagne se spécialise dans la construction automobile et produit $500/50 = 10$ voitures. L'offre relative de bateaux est égale à $4/10$.

Si le prix relatif des bateaux est égal à 2, alors la France se spécialise toujours dans la construction navale (puisque cela lui permet d'échanger chaque bateau contre deux voitures). En revanche, l'Allemagne n'a plus nécessairement intérêt à se spécialiser dans la construction automobile. En effet, le commerce international lui permet d'échanger deux voitures contre un bateau, mais elle produit naturellement chaque voiture deux fois plus facilement qu'un bateau. L'Allemagne est donc indifférente entre produire $500/50 = 10$ voitures et zéro bateau, ou produire zéro voitures et $500/100 = 5$ bateaux, ou encore produire n'importe quelle combinaison linéaire de ces deux possibilités. Toutes ces options lui sont également profitables. Par conséquent la production mondiale (franco-allemande) de voitures est inférieure ou égale à 10 tandis que la production mondiale de bateaux est supérieure ou égale à 4. Ainsi, lorsque le prix relatif des bateaux est égal à 2, l'offre relative de bateaux est supérieure ou égale à $4/10$.

Enfin, si le prix relatif des bateaux est égal à 1, alors l'Allemagne se spécialise dans la construction automobile tandis que la France est indifférente entre produire $500/125 = 4$ bateaux et zéro voiture, ou zéro bateau et $500/125 = 4$ voitures, ou n'importe quelle combinaison linéaire de ces deux possibilités. Ainsi, lorsque le prix relatif des bateaux est égal à 1, l'offre relative de bateaux est inférieure ou égale à $4/10$.

Intéressons-nous désormais à la courbe de demande relative. Elle ne provient pas du modèle Ricardien tel qu'il vous a été présenté. En théorie, la demande relative de bateaux découle des préférences (représentées par des courbes d'indifférences) entre bateaux et voitures des consommateurs français et allemands. Ici, on suppose simplement que ces préférences sont telles que, plus le prix relatif des bateaux augmente, plus la demande relative de bateaux est faible.

C/ Comme nous venons de le voir à la question précédente, lorsque le prix relatif des bateaux est égal à 2, la France se spécialise dans la construction navale tandis que l'Allemagne est disposée à produire simultanément voitures et bateaux.

La France peut échanger chaque bateau contre 2 voitures ce qui lui permet de diviser par deux le coût de l'acquisition d'une voiture (qui passe de 125 heures de travail à 125/2 heures de travail). La France bénéfice donc sans ambiguïté de l'ouverture des frontières.

Lorsqu'en économie ouverte le prix relatif des bateaux est égal à 2, alors l'ouverture des frontières ne modifie pas ce prix relatif en Allemagne. Bien que l'Allemagne commerce avec la France au prix relatif $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} = 2$, elle ne bénéficie nullement de l'ouverture des frontières. En effet, le libre-échange lui permet d'échanger deux voitures contre un bateau... ce qui était déjà possible en autarcie. L'économie allemande ne se spécialise donc pas dans un unique secteur d'activité. D'ailleurs, le salaire horaire dans la construction navale $P^{Inter}_{Bateau}/100$ à égal à celui de l'industrie automobile $P^{Inter}_{Voiture}/50$.

Intuitivement, une augmentation mondiale (franco-allemande) de la demande de bateaux bénéficie au pays qui dispose d'un avantage comparatif dans ce secteur. En l'occurrence, avec un prix relatif $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture}$ égal à 2, la demande est si forte que même l'Allemagne produit des bateaux. Le prix relatif des bateaux dans le monde est donc déterminé par le coût d'opportunité de la construction d'un bateau en Allemagne. L'Allemagne ne bénéficie donc pas du libre-échange.

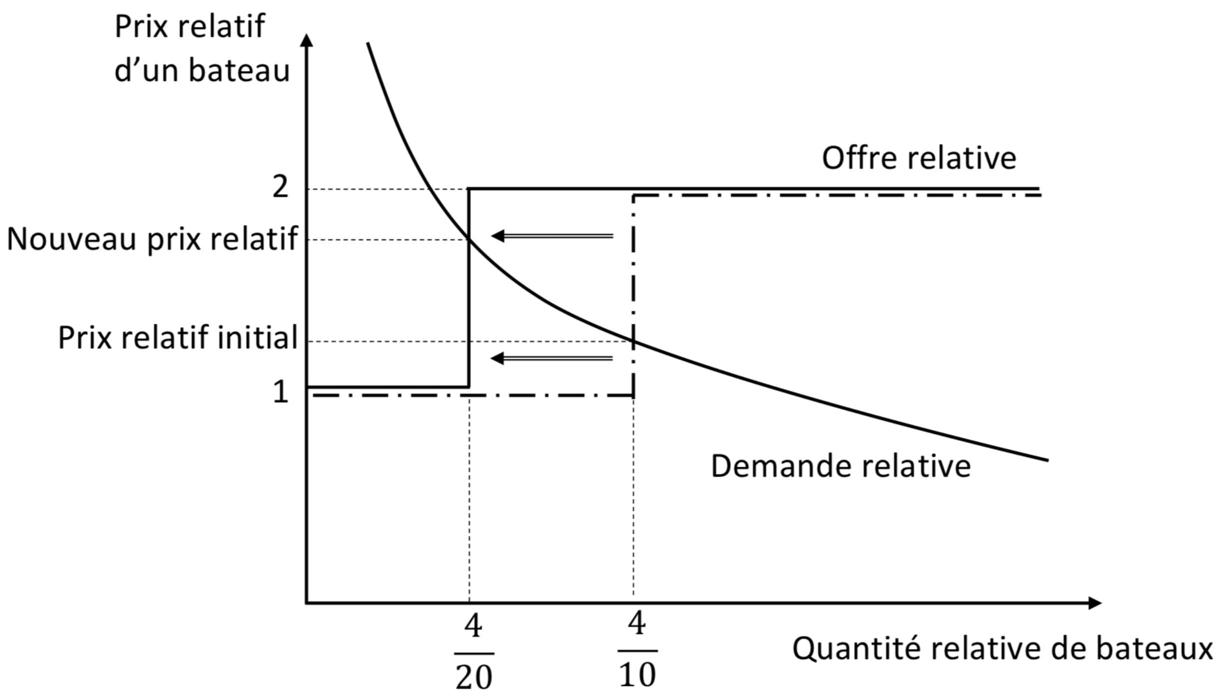
En d'autres termes, plus un pays peut bénéficier du libre-échange, plus il se spécialise. Cela illustre la conclusion paradoxale que le pays bénéficiant le plus de l'ouverture des frontières est celui dont la composition sectorielle de l'économie est la plus affectée (où certaines industries sont ravagées tandis que d'autres prospèrent). Par exemple, la quasi disparition de l'industrie textile en France suite à l'entrée de la Chine dans l'économie mondiale montre tout le bénéfice que les consommateurs français ont pu tirer de l'importation de textiles chinois. Ces importations sont financées par l'exportation d'autres biens dont les industries se développent grâce à la mondialisation des échanges commerciaux.[2]

D/ Le doublement de la productivité allemande dans les deux secteurs d'activité diminue les coût de production allemands et renforce les avantages absolus de l'Allemagne. En revanche, elle ne modifie pas ses coûts d'opportunité. L'Allemagne conserve donc un

[2] Si la France accumulent des déficits commerciaux, alors ceux-ci seront nécessairement financés par des exportations futures... sans quoi les chinois regretteront d'avoir tant exporté en France.

avantage comparatif dans la construction automobile.

Désormais, la production d'une voiture en Allemagne ne requiert que 25 heures et celle d'un bateau 50 heures. Si le prix relatif des bateaux $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture}$ reste entre 1 et 2, alors l'Allemagne se spécialise dans la construction automobile et produit $500/25 = 20$ voitures (au lieu de 10) tandis que la France se spécialise dans la construction navale et produit $500/125 = 4$ bateaux. La quantité relative de bateaux produits passe donc de 4/10 à 4/20. La courbe d'offre relative se déplace donc vers la gauche (voir figure ci-dessous).



En supposant que les préférences *relatives* des français et des allemands pour les bateaux et les voitures ne changent pas, la courbe de demande *relative* reste inchangée. Cette courbe étant décroissante, l'intersection entre l'offre et la demande s'effectue à un prix relatif $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture}$ plus élevé. Par conséquent, pour chaque bateau produit, la France peut obtenir plus de voitures. Les **termes de l'échange** sont donc plus favorables à la France, qui bénéficie ainsi d'une hausse de la productivité allemande.

Intuitivement, l'économie allemande devenant plus grosses, elle produit plus de voitures. Cela diminue la rareté relative des voitures et donc leur prix, ce qui bénéficie à la France.

E/ Après le doublement de la productivité allemande dans le secteur de la construction navale, il suffit de 50 heures à un travailleur allemand pour produire un bateau. Le coût d'opportunité d'un bateau en terme de voiture en Allemagne devient donc égal à 1. Ce coût d'opportunité est identique à celui de la France. En d'autres termes, la productivité du secteur naval relative au secteur automobile est la même dans les deux pays. Il n'y a donc plus d'avantages comparatifs. En autarcie, en France comme en Allemagne, le prix relatif d'un bateau est égal à 1. Par conséquent, l'ouverture des frontières ne modifie pas ce prix relatif (la courbe d'offre relative est horizontale).

Le doublement de la productivité allemande dans la construction navale nuit à la France qui perd son avantage comparatif. Elle ne peut donc plus échanger un bateau contre $P^{Inter}_{Bateau}/P^{Inter}_{Voiture} > 1$ voitures. Intuitivement, cela est dû à ce que l'Allemagne n'a plus de raison de payer plus d'une voiture pour obtenir un bateau.

F/ Si les travailleurs allemands en France sont peu nombreux, alors, lorsque l'économie française est en autarcie, leur présence ne modifie pas le prix relatif d'un bateau qui reste égal à 1. Cela permet aux travailleurs allemands de bénéficier pleinement de leur avantage comparatif dans le secteur automobile. Ils échangent donc chaque automobile produite, et dont ils n'ont pas besoin pour leur propre consommation, contre un bateau.

L'ouverture des frontières augmente le prix relatif d'un bateau, ce qui nuit aux travailleurs allemands en France. Intuitivement, lorsque toute l'économie allemande a la capacité de transformer un bateau en deux voitures, alors le prix relatif des voitures baisse.

G/ En principe, en France, le libre-échange devrait nuire aux salariés du secteur automobile et bénéficier à ceux du secteur naval. Or, dans le modèle Ricardien, tous les travailleurs d'un même pays sont identiques. Par conséquent, les travailleurs automobiles passent du secteur automobile au secteur naval, d'où ils bénéficient pleinement du libre-échange.

Pour que le libre-échange nuise à certaines personnes, il est nécessaire d'introduire de l'hétérogénéité au sein des travailleurs de chaque pays. Ainsi, comme nous l'avons vu à la question précédente, un travailleur français qui est très productif dans le secteur automobile, mais pas dans le secteur naval, sera un perdant de l'ouverture des frontières.

Exercice 3: Les perdants de la mondialisation

A/ Afin d'étudier les conséquences distributives du commerce international, nous devons supposer que, au sein de chaque pays, les travailleurs n'ont pas tous la même productivité dans chaque secteur et qu'ils ne sont pas parfaitement mobiles entre les secteurs. C'est une différence majeure avec le modèle Ricardien.

En Europe comme en Chine, les travailleurs peu qualifiés travaillent plus souvent dans la production de T-shirt que dans l'aéronautique. En outre, ils ne peuvent pas facilement être déplacés vers le secteur aéronautique, où leur productivité est particulièrement faible (puisque le secteur n'a pas véritablement besoin d'eux). L'inverse est vrai des travailleurs hautement qualifiés.[3]

Si l'Europe exporte des avions et importe des T-shirts, alors en Europe le prix relatif des avions doit être plus élevé lorsque les frontières sont ouvertes que lorsqu'elles sont fermées. Par conséquent, en Europe, les travailleurs qualifiés du secteur aéronautique bénéficient du libre-échange tandis que les travailleurs peu qualifiés du secteur textile en pâtissent. Le commerce avec la Chine augmente donc le niveau des inégalités en Europe. Le phénomène inverse se produit en Chine.

B/ Pour l'Europe, le commerce international est comme une innovation technologique qui permet de transformer des avions en T-shirts. Si l'Europe choisit d'exporter des avions c'est précisément parce que le prix relatif d'un avion (soit le nombre de T-shirts qu'elle peut obtenir en échange d'un avion) y est supérieur au coût d'opportunité d'un avion en terme de T-shirts. L'écart entre les deux détermine le nombre de T-shirts supplémentaires obtenus grâce au libre-échange. L'innovation technologique "commerce international" permet à l'Europe de disposer d'un plus grand nombre de T-shirts (pour un nombre donné d'avions qu'elle souhaite conserver pour sa propre consommation).

Ainsi, grâce au libre-échange, l'Europe dispose au total d'un plus grand nombre de richesses. Il est toujours possible de redistribuer ce surplus de richesses entre les citoyens européens de tels sorte que tout le monde bénéficie du libre-échange.

Exercise 4: Compensations et efficacité

A/ Une allocation (soit une répartition des biens) est Pareto-efficace dès lors qu'il est impossible d'augmenter simultanément le bien-être de l'ensemble des individus de l'économie. Il n'y a donc pas de gaspillage de ressources. A l'inverse, une allocation est Pareto-inefficace dès lors qu'il est possible d'augmenter simultanément le bien-être de l'ensemble des individus de l'économie car, en ce cas, des ressources sont clairement gaspillées.

Les gagnants du libre-échange gagnent plus que les perdants ne perdent. Par conséquent, il est possible pour les gagnants de compenser les perdants de tel sorte que tout le monde gagne à l'ouverture des frontières. Cela implique que le protectionnisme est Pareto-inefficace: il engendre un gaspillage de ressources.

A l'inverse, s'il n'est pas possible de compenser tous les perdants, alors le protectionnisme est Pareto-efficace. En effet, l'ouverture des frontières se fait nécessairement au bénéfice des uns, mais au détriment des autres.

[3] On peut donc dire que, au sein de chaque pays, les travailleurs peu qualifiés ont un avantage comparatif dans la production de T-shirt, tandis que les travailleurs qualifiés ont un avantage comparatif dans l'aéronautique.

B/ Le libre-échange sans compensation est Pareto-efficace puisque, pour améliorer le bien-être des perdants de la mondialisation, il faut nécessairement diminuer celui des gagnants. En d'autres termes, si l'on part du libre-échange sans compensations, il n'est pas possible d'augmenter simultanément le bien-être de tout le monde.

Avec ou sans compensations, le libre-échange est Pareto-efficace! Il existe donc plusieurs allocations qui sont Pareto efficaces. Pour utiliser une analogie, le libre échange permet de maximiser la taille du gâteau. Ensuite, chaque découpage de ce gâteau est Pareto efficace (y compris un découpage qui augmente la part des gagnants et diminue celle des perdants!).

Soulignons que même lorsque les compensations sont impossibles, et que le protectionnisme est alors Pareto-efficace, le libre-échange sans compensation est également Pareto-efficace. Pour reprendre notre analogie, l'impossibilités d'effectuer des compensations implique que le gâteau ne peut pas être découpé librement. Il faut donc choisir entre un petit gâteau et un gâteau plus gros mais qui réserve nécessairement une part plus petite à certaines personnes (aux perdants du libre-échange). Ces deux possibilités sont efficaces.

Les différentes possibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	Protection -nisme	Libre-échange avec compensations	Libre-échange sans compensations
Compensations possibles	Inefficace	Efficace	Efficace
Compensations impossibles	Efficace	·	Efficace

Soulignons que, lorsque les compensations sont possibles, seul un sous-ensemble des allocations Pareto efficaces représente une amélioration de Pareto (*Pareto improvement*) par rapport à une situation initiale donnée. Partant du protectionnisme, le libre échange avec compensations est une amélioration de Pareto (pourvu que les compensations soient suffisantes), tandis que le libre-échange sans compensation ne l'est pas. Pourtant, les deux politiques sont Pareto efficaces. La notion d'*amélioration de Pareto* fait référence à une situation initiale, contrairement à la notion d'*efficacité de Pareto*.

C/ Les économistes sont unanimement d'accord pour éviter les politiques inefficaces. En revanche, lorsque plusieurs politiques aboutissent à des allocations efficaces, il convient de choisir la répartition des richesses la plus juste et équitable. Est-il juste et équitable de compenser les perdants du libre-échange? Il s'agit là d'une question de philosophie politique, pas de sciences économiques. Différents économistes peuvent donc être en désaccord sur la politique à suivre.

Il est d'ailleurs concevable de penser que les compensations ne sont pas philosophiquement justifiées. Si un village dispose d'un unique restaurant de qualité médiocre et qu'un entrepreneur ouvre un restaurant concurrent de bonne qualité, alors le restaurateur historique sera un perdant du libre-échange (au sein du village). Mais, doit-il être compensé?

ECO 361 Jean-Baptiste Michau
Mai 2023 Ecole Polytechnique

Introduction à l'économie

Solution 4: L'économie publique

Exercice 1: Imposer la rente foncière

L'offre de terre nue est, par nature, parfaitement inélastique! En revanche, la demande de terre nue est élastique, puisqu'une augmentation de la rente foncière diminue la quantité de terre nue demandée pour la location. Par conséquent, que l'impôt sur la rente foncière soit prélevée sur les propriétaires ou sur les locataires, sont incidence repose intégralement sur les propriétaires. En clair, une augmentation d'un euro de l'imposition de la rente foncière ne diminue pas le coût de la location de la terre nue, mais diminue les revenus du propriétaire (et donc la rente foncière) d'un euro.

Puisque l'offre de terre nue est parfaitement inélastique, l'imposition de la rente foncière ne crée aucune distorsion et ne génère donc pas de perte sèche. Cela est dû à ce que la quantité de terre louée est indépendante du montant de l'impôt sur la rente foncière. Cet impôt ne modifie donc pas (ne distord pas) l'allocation des ressources. Il est donc parfaitement efficace!

En pratique, la terre ne se loue pas nue. Elle est améliorée grâce à des investissements, comme des constructions. L'offre de terre améliorée est clairement élastique: une diminution des revenus locatifs diminue les investissements réalisés sur la terre. Pour implémenter une taxe non-distorsionnaire sur la terre, le fisc doit donc être capable d'identifier la fraction de la valeur locative de la terre qui ne résulte pas d'améliorations. La tâche est difficile!

Plus fondamentalement, bien que parfaitement efficace, l'impôt sur la rente foncière pose un problème d'équité. Cet impôt permet à l'Etat de s'approprier la rente foncière, au détriment des propriétaires qui sont spoliés. Est-ce légitime? Oui, si la propriété a été acquise au détriment de la collectivité dans des conditions contestables; non, si la propriété a été acquise par l'épargne des revenus du travail.

Exercice 2: Subvention

A/ En l'absence de subvention, le prix d'équilibre est égal à p^*. Par conséquent, le surplus du consommateur est égal à $A + B$ tandis que le surplus du producteur est égal à $E + G$. Le surplus total est donc égal à $A + B + E + G$.

B/ Grâce à la subvention, le prix payé par le consommateur diminue donc de p^* à p^c. Le surplus du consommateur s'accroit donc de $E + F$. Au total, le surplus du consommateur est donc égal à $A + B + E + F$. A noter que le surplus du consommateur correspond à l'aire sous la courbe de demande initiale (celle qui n'est pas affectée par la subvention), car c'est cette courbe qui reflète le bénéfice marginal de la consommation.

Le prix reçu par le producteur augmente de p^* à p^p (où $p^p = p^c + s$). Le surplus du producteur s'accroît donc de $B + C$ afin de s'établir à $B + C + E + G$.

Enfin, le coût de la subvention pour les finances publiques est égal à $p^p - p^c$ multiplié par la quantité de biens consommée, soit $B + C + D + E + F$.

C/ La subvention accroît le surplus du consommateur de $E + F$, celui du producteur de $B+C$, et diminue les recettes gouvernementales de $B+C+D+E+F$. Par conséquent, la subvention engendre une perte sèche d'efficacité égale à $(B + C + D + E + F) - (E + F) - (B + C) = D$.

Cette perte sèche correspond aux unités de biens qui n'auraient pas dû être produits car leurs coûts marginaux de production sont supérieurs aux bénéfices marginaux de leur consommation. Le triangle D correspond à l'écart entre ces coût et ces bénéfices marginaux.

En règle générale, les subventions créent encore plus de distorsions que les taxes puisqu'elles doivent être financées par des taxes qui engendrent elles-mêmes des distorsions sur les marchés où elles sont prélevées.

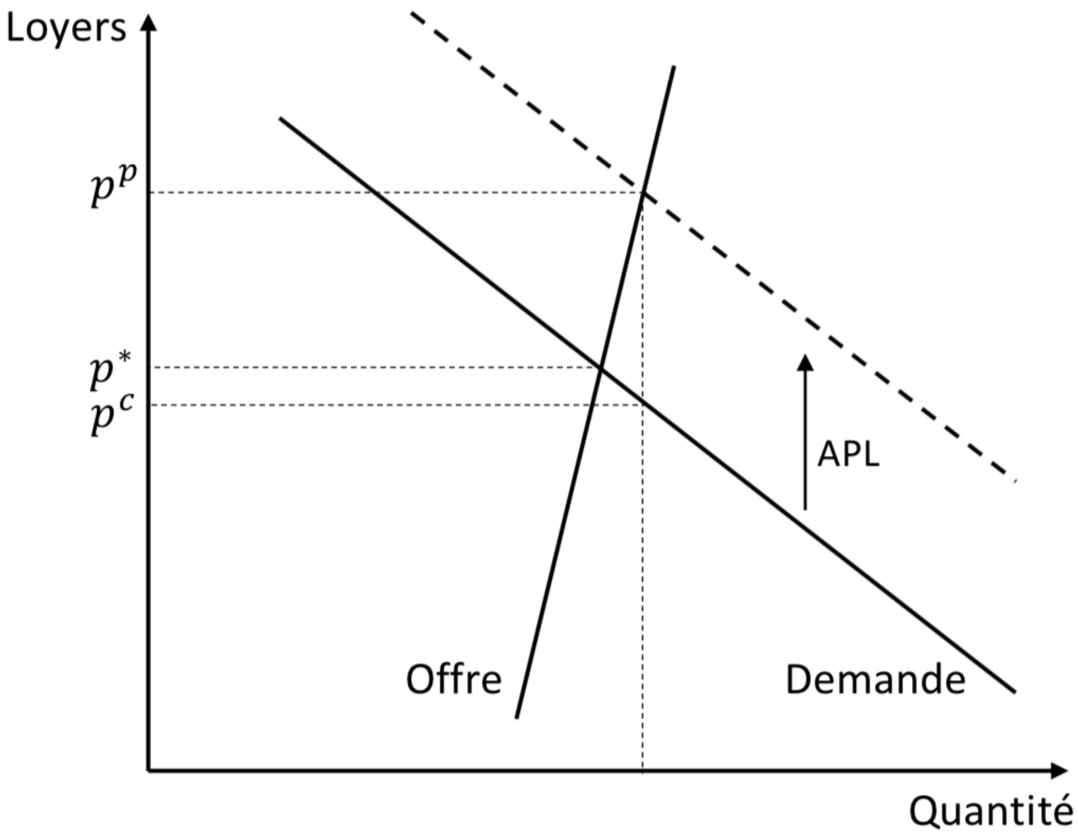
D/ Sur le marché locatif du logement, la demande est généralement beaucoup plus élastique que l'offre. Par conséquent, qu'une subvention soit perçue par les propriétaires ou par les locataires, son incidence repose essentiellement sur les propriétaires.

Le graphique ci-dessous montre que les APL perçues par les locataires déplacent verticalement la courbe de demande du montant de la subvention, égal à $p^p - p^c$. Le loyer perçu par le propriétaire augmente de p^* à p^p, ce qui correspond presque à l'intégralité du montant de la subvention, tandis que le loyer payé par le locataire ne diminue que de p^* à p^c, ce qui correspond à une petite fraction de la subvention. Les études empiriques montrent que près de 80% du bénéfice des APL est perçu par les propriétaires.[1]

L'offre de logement étant assez inélastique, les APL ne créent pas de grosses distorsions sur le marché du logement (voir exercice précédent). Ceci étant, elles sont financées par d'autres impôts, comme l'impôt sur les revenus du travail, qui engendrent eux des distorsions non négligeables.

Dernier point, les APL étant "personnalisées", tous les ménages locataires ne touchent pas les mêmes subventions. La hausse des loyers est déterminée par le niveau moyen des

[1] Voir, par exemple, Fack, G. (2006), 'Are housing benefit an effective way to redistribute income? Evidence from a natural experiment in France', *Labour Economics*, 13(6), 747-771.



APL. Par conséquent, cette politique bénéficie aux ménages touchant plus d'APL que la moyenne, au détriment de ceux dont la subvention est inférieure à la moyenne. En revanche, elle bénéficie à tous les propriétaires-bailleurs.

Exercice 3: Réchauffement climatique

1/ Le coût marginal des réductions d'émission est égal à:

$$\frac{d}{d\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)}\left(\alpha_i \frac{\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)^2}{2}\right) = \alpha_i\left(\bar{Q}_i - Q_i\right).$$

Le paramètre α_i détermine donc le coût marginal des réductions d'émission pour un niveau d'effort $\bar{Q}_i - Q_i$ donné. Par exemple, les caractéristiques géographiques suivantes sont de nature à diminuer ce coût:

- Un fort ensoleillement améliore l'efficacité de l'énergie solaire;
- Une bonne exposition au vent augmente le potentiel des énergies éoliennes;
- Le relief et le climat peut être favorable aux énergies hydrauliques (mais, si les conditions sont particulièrement favorables, cela se traduira plutôt par une diminution de $\bar{Q}_i$ car cette énergie est rentable, même en situation de *laissez-faire*);

- Un climat clément permet de se passer de chauffage l'hiver ou d'air conditionné l'été.

2/ Le coût engendré par cette politique pour le pays i s'élève à $\alpha_i E^2/2$. Le coût marginal correspondant est donc de $\alpha_i E$. Avec $\alpha_N > \alpha_S$, le coût marginal des réductions d'émission est supérieur dans le pays N que dans S, ce qui est Pareto inefficace. En effet, N peut payer S pour faire une partie de l'effort à sa place, ce qui est mutuellement bénéfique tout en maintenant l'effort de réduction d'émission égal à $2E$.

On peut démontrer ce résultat formellement. Supposons que S augmente ses réductions d'émission d'une petite quantité ε, tout en étant compensé financièrement par N qui réduit son propre effort de ε. Pour compenser S de son surcroit d'effort, N doit lui verser:

$$\alpha_S \frac{(E+\varepsilon)^2}{2} - \alpha_S \frac{E^2}{2} \simeq \alpha_S E \varepsilon.$$

La diminution de l'effort de N lui permet d'économiser:

$$\alpha_N \frac{E^2}{2} - \alpha_N \frac{(E-\varepsilon)^2}{2} \simeq \alpha_N E \varepsilon.$$

La richesse de N augmente donc de:

$$\alpha_N E \varepsilon - \alpha_S E \varepsilon > 0.$$

Les émissions globales demeurent égales à $2E$, le pays S a été intégralement compensé par N pour son surcroit d'effort, et N a augmenté sa richesse. Cette politique est donc Pareto supérieur à la politique initiale qui était donc Pareto inefficace.

Conclusion: Il n'est pas efficace d'assigner à chaque pays (indépendamment de α_i) un montant fixe de réduction d'émission.

Soulignons que ce résultat est robuste dès lors que la fonction de coût de réduction d'émission est convexe. Le choix d'une fonction quadratique simplifie l'exposition, mais ne modifie nullement le raisonnement économique sous-jacent. Cette remarque reste pertinente pour toutes les questions suivantes.

3/ (i) Après l'instauration de la taxe, les citoyens de chaque pays i choisissent un niveau Q_i d'émission qui minimise leurs coûts de pollution:

$$\alpha_i \frac{(\bar{Q}_i - Q_i)^2}{2} + \tau Q_i.$$

La condition de premier ordre est:

$$\alpha_i \left(\bar{Q}_i - Q_i\right) = \tau.$$

A l'optimum, la taxe est égale au coût marginal des réductions d'émission.[2]

La taxe doit engendrer une réduction globale des émissions de $2E$. On doit donc avoir:

$$\bar{Q}_N - Q_N + \bar{Q}_S - Q_S = 2E.$$

Ainsi:

$$\frac{\tau}{\alpha_N} + \frac{\tau}{\alpha_S} = 2E,$$

soit:

$$\tau = 2E\frac{\alpha_N \alpha_S}{\alpha_N + \alpha_S}.$$

Plus la réduction d'émission $2E$ est forte, plus la taxe est élevée. Si $\alpha_S = \alpha_N = \alpha$, alors $\tau = E\alpha$. En ce cas, plus α est élevé, plus les réductions marginales d'émission sont coûteuses pour l'économie et, donc, plus la taxe est élevée. Enfin, si $\alpha_N > \alpha_S$, alors c'est le pays S qui réagira le plus fortement à la taxe et qui déterminera donc principalement le niveau de cette taxe. Cela se voit facilement dans le cas extrême où $\alpha_N = +\infty$, auquel cas $\tau = 2E\alpha_S$. La taxe n'ayant aucune chance d'infléchir les émissions de N, elle est fixée à un niveau suffisamment élevé pour que S réduise ses émissions de $2E$.

(ii) La réduction d'émission du pays i s'élève à:

$$\bar{Q}_i - Q_i = \frac{\tau}{\alpha_i}.$$

Au sein de chaque pays, les citoyens pollueurs perdent:

$$\alpha_i \frac{\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)^2}{2} + \tau Q_i$$

à cause de la taxe carbone, mais l'Etat obtient des recettes fiscales égales à τQ_i. Le coût total pour le pays est donc égal à:

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)^2}{2} &= \alpha_i \frac{\left(\tau/\alpha_i\right)^2}{2}, \\ &= \frac{\tau^2}{2\alpha_i}. \end{aligned}$$

Paradoxalement, le coût de l'effort climatique est donc plus faible dans le pays N que

[2] On suppose implicitement que, si Q_i est négatif, les citoyens touchent une subvention de τ pour chaque tonne de carbone capturée dans l'atmosphère.

dans le pays S dès lors que le coût de la réduction d'émission y est plus élevé $\alpha_N > \alpha_S$. En effet, plus α_i est élevé, moins la taxe carbone n'affecte la quantité d'émission et donc moins la politique est coûteuse pour ce pays relativement à l'autre pays. Autrement dit, plus les émissions sont une fonction élastique du niveau de la taxe carbone (qui est le prix de la pollution), plus la taxe carbone est couteuse pour le pays.

En utilisant la taxe carbone calculée à la question précédente, et en denotant par $-i$ l'autre pays (donc, si $i = N$, alors $-i = S$), on obtient que le coût de l'effort climatique pour le pays i s'élève à:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2\alpha_i} &= \frac{1}{2\alpha_i}\left(2E\frac{\alpha_i\alpha_{-i}}{\alpha_i+\alpha_{-i}}\right)^2, \\ &= \frac{2E^2\alpha_i\alpha_{-i}^2}{(\alpha_i+\alpha_{-i})^2}. \end{aligned}$$

Ce coût est une fonction croissante de α_i pour $\alpha_i < \alpha_{-i}$ et décroissante pour $\alpha_i > \alpha_{-i}$. Lorsque $\alpha_i < \alpha_{-i}$, le pays i fait l'essentiel de l'effort de réduction d'émission, ce qui est d'autant plus coûteux que α_i est élevé. En revanche, lorsque $\alpha_i > \alpha_{-i}$, l'effort repose principalement sur l'autre pays, ce qui est d'autant plus vrai que α_i est élevé. Le coût est nul si $\alpha_i = 0$ ou si $\alpha_i = +\infty$.

(iii) La taxe étant fixé au niveau mondial, le coût marginal des réductions d'émission est identique dans les deux pays, ce qui est Pareto efficace. En revanche, cette taxe n'aboutit pas à une répartition nécessairement équitable de l'effort de réduction d'émission. Ayant $\alpha_N > \alpha_S$, cette politique est plus coûteuse pour S que pour N, ce qui n'est pas nécessairement équitable.[3]

Conclusion: Une taxe carbone fixée au même niveau dans l'ensemble des pays du globe est une solution efficace au réchauffement climatique. En revanche (en l'absence de transferts fiscaux entre pays), elle nuit davantage aux pays où les réductions d'émission sont peu coûteuses, ce qui n'est pas nécessairement équitable (surtout si ces pays sont les plus pauvres).

4/ (i) Soit p le prix de la permission d'émettre une tonne de CO2. Le nombre de tonnes de carbone achetées par i à l'autre pays est égal à $Q_i - C_i$. Par conséquent, pour le pays i, le coût total des réductions d'émission s'élève à:

$$\alpha_i\frac{(\bar{Q}_i - Q_i)^2}{2} + p\,(Q_i - C_i)\,.$$

[3]Notez que les émissions du pays i s'élèvent à $Q_i = \bar{Q}_i - \tau/\alpha_i$. Par conséquent, si $\bar{Q}_S$ est nettement supérieur à $\bar{Q}_N$, il est possible que, malgré un effort supérieur de S, les émissions totales de S demeurent supérieures à celles de N. En ce cas, la taxe carbone peut être perçue comme étant équitable.

La minimisation de ce coût donne:

$$\alpha_i \left(\bar{Q}_i - Q_i\right) = p,$$

soit:

$$Q_i = \bar{Q}_i - \frac{p}{\alpha_i}.$$

Le prix d'équilibre égalise l'offre et la demande de permis d'émission:

$$\begin{aligned} C_N + C_S &= Q_N + Q_S, \\ \bar{Q}_S + \bar{Q}_N - 2E &= \bar{Q}_N - \frac{p}{\alpha_N} + \bar{Q}_S - \frac{p}{\alpha_S}, \\ 2E &= \frac{p}{\alpha_N} + \frac{p}{\alpha_S}, \\ p &= 2E\frac{\alpha_N \alpha_S}{\alpha_N + \alpha_S}. \end{aligned}$$

Le prix d'équilibre du CO2 est donc égal au niveau de la taxe carbone qui réduit les émissions de $2E$.

Le coût marginal de la réduction d'émission étant identique sous ces deux politiques, le niveau d'émission Q_i de chaque pays i est identique dans les deux cas. Les efforts sont réalisés là où ils sont le moins coûteux, ce qui est efficace.

(ii) Le coût total de la politique de quota d'émission échangeables pour le pays i s'élève à:

$$\alpha_i \frac{\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)^2}{2} + p\left(Q_i - C_i\right).$$

En utilisant le niveau d'émission $Q_i = \bar{Q}_i - p/\alpha_i$, on obtient:

$$\begin{aligned} \alpha_i \frac{\left(\bar{Q}_i - Q_i\right)^2}{2} + p\left(Q_i - C_i\right) &= \alpha_i \frac{\left(p/\alpha_i\right)^2}{2} + p\left(\bar{Q}_i - \frac{p}{\alpha_i} - C_i\right), \\ &= p\left(\bar{Q}_i - C_i\right) - \frac{p^2}{2\alpha_i}. \end{aligned}$$

Avec un quota de niveau $C_i = \bar{Q}_i - E$, ce coût s'élève à $pE - p^2/(2\alpha_i)$. Le coût de la taxe carbone pour i, avec $\tau = p$, est de $p^2/(2\alpha_i)$.

Par conséquent, la taxe carbone est défavorable au pays S dont le coût α_S de réduction d'émission est faible car c'est ce pays qui réalise l'essentiel de l'effort climatique. A l'inverse, une politique de quota dans lequel chaque pays se voit attribuer un quota inférieur à ses émission initiales $\bar{Q}_i$ d'un montant E, ce qui semble assez équitable, est favorable au pays S dont le coûts α_S est faible. En effet, le pays N pour lequel les réductions d'émission sont coûteuses va choisir d'acheter à S une part de ses quotas, ce qui compense S pour ses efforts importants de réductions d'émission.

En résumé, les échanges de quotas règlent le problème de l'efficacité, en s'assurant que les émissions soient réduites là où l'effort est le moins coûteux, tandis que l'allocation initiale des quotas entre pays peut être faite de manière à assurer l'équité du partage de l'effort climatique.

Conclusion:

- Les quotas échangeables sont efficaces car ils impliquent un même prix du carbone dans l'ensemble de la planète;
- Le niveau d'émission de chaque pays dépend de la quantité totale de quotas distribués, mais pas de leur répartition entre pays;
- La répartition initiale des quotas entre pays détermine la répartition de l'effort climatique.

Soulignons qu'il existe une répartition des quotas qui aboutit au même coût supporté par chaque pays qu'avec la taxe carbone. A l'inverse, n'importe quelle répartition initiale de quota est équivalent à la combinaison d'une taxe carbone et d'un transfert fiscal donné entre pays.

5/ Pour lutter efficacement contre le réchauffement climatique, les accords internationaux doivent viser un prix unique du carbone dans l'ensemble des pays du globe. Ce prix doit être suffisamment élevé pour réduire les émissions à un niveau convenable. Cela laisse le champ à d'âpres négociations sur la répartition du coût de l'effort climatique entre les pays, soit sous forme de répartition des quotas, soit sous forme de transferts fiscaux.

Exercice 4: L'éducation

Bien public?

L'éducation est un service excluable: un enfant qui n'est pas inscrit dans une école, ne peut pas bénéficier de ses enseignements.

L'éducation est également un service rival: si le nombre d'enfants à éduquer double, alors le coût de leur éducation devrait a peu près doubler (à qualité d'enseignement constante). Il y a donc bien un coût de l'éducation par enfant.

L'éducation étant excluable et rival, il s'agit d'un bien (ou plutôt d'un service) privé pur! Le fait que, en pratique, l'éducation soit financée par le secteur public n'en fait pas pour autant un bien public.

Externalités

Est-il justifié qu'un service purement privé comme l'éducation soit financer par le secteur public? L'éducation génère de nombreuses externalités positives pour l'ensemble de la société:

- L'éducation élémentaire est indispensable au bon fonctionnement de nos institutions démocratiques, ce qui est une source de prospérité collective;
- L'éducation est de nature à diminuer la criminalité, réduisant par là même une externalité négative;
- L'éducation favorise la diffusion des connaissances et donc l'innovation, qui est elle-même source d'externalités positives;
- L'éducation augmente la productivité des travailleurs et donc leurs contributions fiscales (on parle d'externalité fiscale).

Tout cela montre que le bénéfice de l'éducation n'est pas qu'individuel, il est aussi social. Les externalités générées par l'éducation étant pratiquement toutes positives, en l'absence de subventions publiques, la consommation d'éducation serait trop faible. Il est donc souhaitable que l'Etat prenne en charge une partie du coût de l'éducation.

Distorsions

Ceci étant le bénéfice de l'éducation est aussi, en grande partie, privé. Cela suggère qu'il est inefficace que la quasi totalité de l'éducation soit financée par l'Etat.

Ceci étant, la demande d'éducation, notamment au niveau primaire et secondaire, est très inélastique. Le financement par l'Etat de l'éducation ne distord donc pas la quantité d'éducation consommée et n'engendre donc pas d'ineficacité majeure (sauf si certaines familles souhaitent dépenser beaucoup plus que d'autres pour l'éducation).[4]

Financement vs. production

Nous avons vu qu'il était, *in fine*, justifié que l'éducation soit financée en grande partie, voir intégralement, par l'Etat. Cela n'implique en rien que l'éducation doit également être produite par l'Etat.

De nombreux économistes, notamment aux Etats-Unis, sont favorables à un système de "school vouchers" (chèques scolaires). Dans ce système, les parents sont libres d'inscrire leurs enfants dans l'école de leur choix. Chaque école reçoit un financement

[4] La demande d'éducation pourrait être inélastique pour certains enfants issus de milieux défavorisés à cause d'une incapacité à emprunter les sommes nécessaires au financement de l'éducation, malgré le caractère rentable de l'investissement éducatif. On parle alors de "contrainte de crédit". Il s'agit là d'un autre type de défaillance de marché qui justifie une intervention gouvernementale, comme le financement par l'Etat de l'éducation.

public proportionnel au nombre de ses élèves. Cela permet d'avoir un financement public tout en ayant de la compétition entre des établissements scolaires privés.

Toute la question est de savoir si les services éducatifs sont produits de manière plus efficace dans un système concurrentiel que dans un système public.

ECO 361 Jean-Baptiste Michau
Juin 2023 Ecole Polytechnique

Introduction à l'économie

Solution 7: L'économie du travail

Exercice 1: Production viticole

1/ La productivité marginale du travail (en euros) correspond à la valeur de la production réalisée par une unité de travail supplémentaire. La production totale de l'entreprise, en euros, est égale à $1000Q = 1000\left[60L - L^2\right] = 60000L - 1000L^2$. Par conséquent, la production d'une unité de travail supplémentaire, en euros, est donnée par:

$$\begin{aligned} PMT &= \frac{d\left[60000L - 1000L^2\right]}{dL}, \\ &= 60000 - 2000L. \end{aligned}$$

Une entreprise maximisant ses profits embauche des travailleurs jusqu'à ce que la productivité marginale du travail PMT est égale au salaire W. La demande de travail d'une entreprise est donc donnée par:

$$L = 30 - \frac{W}{2000}.$$

La demande de travail est une fonction décroissante du salaire, ce qui résulte d'une productivité marginale du travail elle-même décroissante du nombre d'employés.

L'industrie viticole comptant 10 entreprises, sa demande totale de travail L^d est égale à:

$$\begin{aligned} L^d &= 10\left[30 - \frac{W}{2000}\right], \\ &= 300 - \frac{W}{200}. \end{aligned}$$

2/ Si l'offre de travail des 200 travailleurs est parfaitement inélastique, alors la courbe d'offre de travail est trivialement donnée par $L^o = 200$. Le marché du travail est à l'équilibre lorsque le salaire égalise l'offre et la demande:

$$L^o = L^d,$$
$$200 = 300 - \frac{W}{200},$$
$$W = 20000.$$

Le salaire annuel est donc de 20 000 euros.

Chacun des 10 producteurs emploie $200/10 = 20$ travailleurs and produit $Q = 60 \cdot 20 - 20^2 = 20\,(60 - 20) = 800$ tonneaux de vin. Les profits annuel d'un producteur sont donc de $1000Q - WL = 1000 \cdot 800 - 20000 \cdot 20 = 400\ 000$ euros.

3/ Seuls huit producteurs survivent à la catastrophe naturelle. La demande de travail de l'industrie viticole est donc réduite à:

$$\begin{aligned} L^d &= 8\left[30 - \frac{W}{2000}\right], \\ &= 240 - \frac{W}{250}. \end{aligned}$$

L'offre de travail étant toujours donnée par $L^o = 200$, le salaire d'équilibre est déterminé par:

$$200 = 240 - \frac{W}{250},$$
$$W = 10000.$$

La salaire annuel est donc de 10 000 euros.

Chacune des 8 entreprises emploie désormais $200/8 = 25$ travailleurs et produit $Q = 60 \cdot 25 - 25^2 = 25\,(60 - 25) = 875$ tonneaux de vin. Les profits annuel d'un producteur sont donc de $1000Q - WL = 1000 \cdot 875 - 10000 \cdot 25 = 625\ 000$ euros. La production totale de vin passe de $800 \cdot 10 = 8000$ tonneaux à $875 \cdot 8 = 7000$ tonneaux. Enfin, la profitabilité de l'ensemble du secteur viticole passe de $10 \cdot 400000 = 4$ millions d'euros à $8 \cdot 625000 = 5$ millions d'euros.

En somme, la disparition de 2 des 10 producteurs réduit le salaire de moitié, augmente la production de chaque entreprise de près de 10%, améliore la profitabilité de ces entreprises de plus de 50%, diminue la production agricole totale de 12,5% et augmente la profitabilité de l'ensemble du secteur de 25%.

Ces résultats sont la conséquence de la décroissance de la productivité marginale du travail. Chaque entreprise embauche cinq employés supplémentaires. Hors, *ces travailleurs étaient plus productifs chez leurs employeurs initiaux que chez les huit survivants de la catastrophe naturelle*. Ainsi, le salaire diminue très fortement, tandis que la profitabilité de chaque entreprise augmente beaucoup plus que le niveau de sa production. L'effet est si fort que la profitabilité de l'ensemble du secteur augmente de 25%, alors même que la production viticole totale diminue de 12,5%.

Exercice 2: "College wage premium"

1/ Le graphique montre que, depuis les années 1980, l'écart de salaire entre les diplômés universitaires et les autres travailleurs s'est fortement accru, alors même que la fraction de travailleurs diplômés n'a cessé d'augmenter. C'est paradoxal. En théorie, une augmentation de l'offre de travail qualifié devrait réduire la productivité marginale des diplômés universitaires, et donc leur salaire relativement à celui des non qualifiés.

Pour résoudre ce paradoxe, on doit supposer que, parallèlement à l'augmentation de l'offre de travail qualifié, l'économie américaine a subi une augmentation de la demande de travail qualifié. L'objectif du reste de l'exercice est de préciser ce scénario.

2/ Les paramètres A_L et A_H déterminent l'efficacité productive des deux types de travailleurs. Ainsi, lorsque A_L double, chaque travailleur non qualifié est deux fois plus efficace, ce qui est équivalent à un doublement de leur nombre L.

Le paramètre ε détermine le degré de complémentarité entre travail qualifié et non qualifié. Lorsque $\varepsilon = 0$, il y a une complémentarité parfaite entre les deux types de travailleurs. Autrement dit, les deux types de travailleurs doivent nécessairement travailler ensemble, dans des proportions fixes, afin de pouvoir créer des richesses. A l'inverse, lorsque $\varepsilon \to \infty$, les deux types de travailleurs sont parfaitement substituables. Seul le nombre total de travailleurs compte, pondérés par leurs productivités respectives. Enfin, $\varepsilon = 1$ correspond à un niveau intermédiaire de complémentarité. Plus ε est élevé, moins les deux types de travailleurs sont complémentaires.

Enfin, le paramètre α correspond à l'importance des travailleurs non qualifiés, relativement aux qualifiés, dans le processus de production.

3/ Le salaire w_H des travailleurs qualifiés est égal à leur productivité marginale:

$$\begin{aligned} w_H &= \frac{\partial Q}{\partial H}, \\ &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\left[(1-\alpha)(A_L L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha (A_H H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\alpha (A_H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} H^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1}, \\ &= \left[(1-\alpha)(A_L L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha (A_H H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha (A_H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} H^{\frac{-1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

De la même manière, le salaire w_L des travailleurs non qualifiés est égal à:

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{\partial Q}{\partial L}, \\ &= \left[(1-\alpha)(A_L L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha (A_H H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (1-\alpha)(A_L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} L^{\frac{-1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Le "college wage premium" $\omega = w_H/w_L$ s'élève donc à:

$$\omega = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{A_H}{A_L}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{-1}{\varepsilon}}.$$

Notez que le cas vraisemblable est d'avoir un "college wage premium" supérieur à 1, ce qui requiert:

$$\frac{A_H}{A_L} > \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}\left(\frac{H}{L}\right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}.$$

Une augmentation de la proportion de travailleurs qualifiés H/L diminue le "college wage premium" ω. Cela résulte d'une productivité marginale du travail qualifié qui est décroissante du nombre de travailleurs qualifiés et croissante du nombre de travailleurs non qualifiés.[1] Il y a donc une complémentarité entre les deux types de travailleurs. D'ailleurs, plus ε est élevé, moins cette complémentarité est forte et, donc, moins le "college wage premium" ne dépend de la proportion de travailleurs qualifiés.

4/ Depuis les années 1980, on a simultanément observé une hausse de H/L et de ω, d'où le paradoxe. Une explication serait que, dans le même temps, $(A_H/A_L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$ ait également augmenté. Si la complémentarité entre les deux types de travail est forte, $\varepsilon < 1$, cela requiert une hausse de l'efficacité productive des travailleurs non qualifiés, A_L/A_H. Dans ce cas, une hausse de A_L/A_H démultiplie l'efficacité des travailleurs peu qualifiés et augmente donc la rareté relative des travailleurs qualifiés, dont le salaire augmente (relativement au salaire des non qualifiés).

A l'inverse, si la complémentarité entre les deux types de travail est faible, $\varepsilon > 1$, la résolution du paradoxe requiert une hausse de l'efficacité productive des travailleurs qualifiés, A_H/A_L. La faible complémentarité implique que la productivité marginale des travailleurs qualifiés dépend principalement de leur propre efficacité productive A_H, et

[1] La productivité marginale de travail qualifié est donnée par:

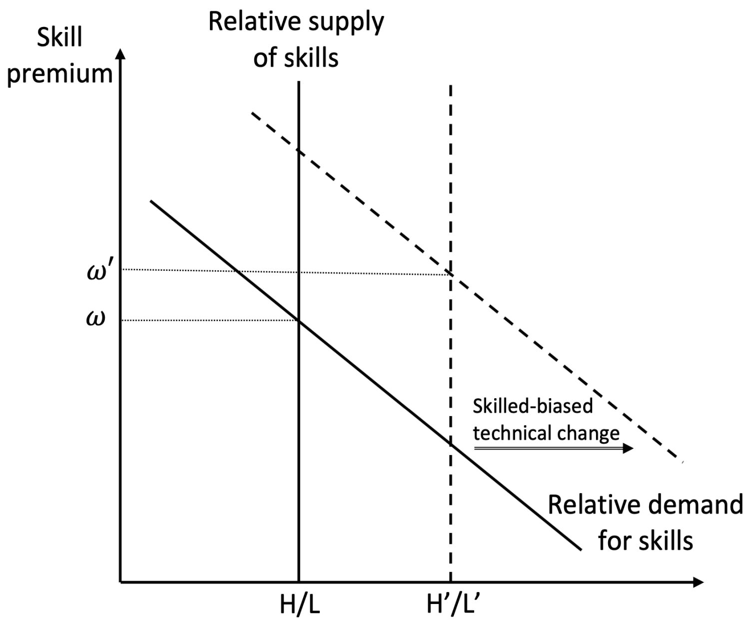
$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial H} &= \left[(1-\alpha)(A_L L)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha (A_H H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha (A_H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} H^{\frac{-1}{\varepsilon}}, \\ &= \left[(1-\alpha)\left(A_L \frac{L}{H}\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha (A_H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha (A_H)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

non du nombre L ou de l'efficacité A_L des travailleurs peu qualifiés.[2]

La seconde de ces deux possibilités semble plus plausible. D'abord parce que la majorité des études empiriques concluent à une complémentarité faible entre travail qualifié et non qualifié, avec $\varepsilon \in (1, 2)$. Ensuite, parce qu'au cours des dernières décennies, le progrès technique a été biaisé et a beaucoup plus augmenté la productivité des travailleurs qualifiés que non qualifiés. C'est en particulier le cas des progrès de l'informatique. On parle de **"skilled-biased technical change"**.

La graphique ci-dessous montre que la demande de travail qualifié s'est fortement accrue, à tel point que le "college wage premium" a augmenté alors même que le nombre de diplômés universitaires était en forte hausse. Ces évolutions technologiques sont une cause majeure de l'accroissement des inégalités aux Etats-Unis au cours des trois ou quatre dernières décennies.

Soulignons que, par soucis de simplicité, notre représentation graphique suppose que l'offre de travail est inélastique. Ceci étant, à très long terme, une augmentation du "college wage premium" ω est de nature à accroître l'offre relative de travail qualifié H/L. Mais, à court et moyen terme, les travailleurs peuvent difficilement modifier leur niveau de qualification et cette offre est donc pratiquement inélastique. Autrement dit, même si, sur le graphique, la courbe d'offre relative de travail qualifié H/L était légèrement croissante du "college wage premium" ω, l'augmentation massive de niveau de qualification de la population américaine devrait être interprétée comme étant une translation vers la droite de cette courbe, ce qui ne modifierait pas notre analyse.



Cet exercice était basé sur:

[2] Dans le cas extrême où $\varepsilon \to \infty$, on a $Q = (1 - \alpha) A_L L + \alpha A_H H$.

Acemoglu, D., 2002, 'Technical Change, Inequality, and the Labor Market', *Journal of Economic Literature*, 40, 7-72.

Exercice 3: Salaire minimum

A/ Les effets du salaire minimum au sein d'un marché du travail compétitif sont représentés sur la figure 3.1 ci-dessous. Le salaire d'équilibre w^* égalise l'offre et la demande de travail, ce qui aboutit à une quantité de travail effectuée égale à L^*. Le salaire minimum $\underline{w}$, supérieur à w^*, diminue la demande de travail des entreprises de L^* à L_D tandis qu'elle augmente l'offre de travail des ménages de L^* à L_O. Cet écart $L_O - L_D$ entre l'offre et la demande de travail correspond à la quantité de chômage générée par cette politique. (On peut parler de sous-emploi, plutôt que de chômage, si cet écart est partagé par tous les ménages qui travaillent moins longtemps qu'ils ne le souhaiteraient.)

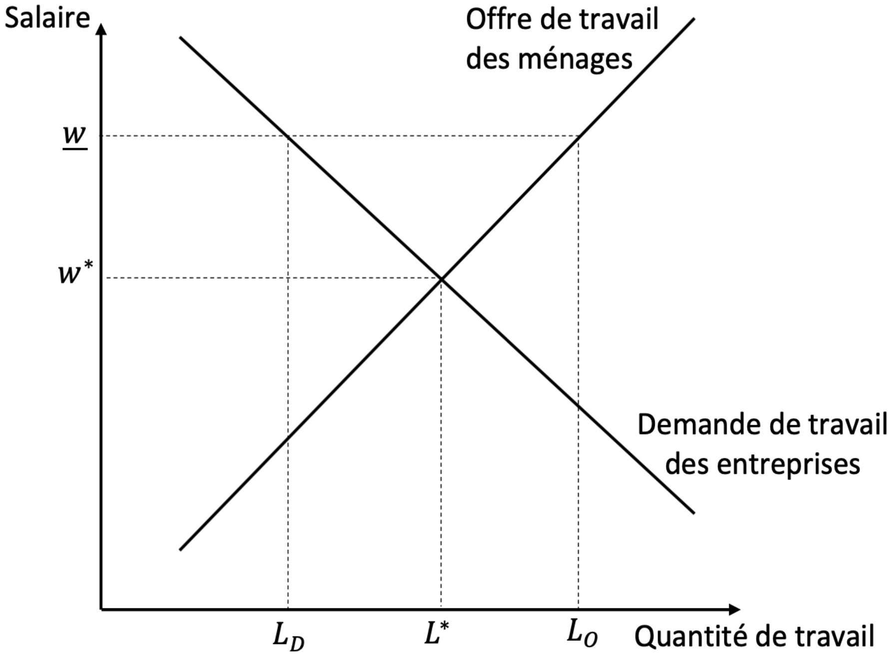


Figure 3.1: Salaire minimum dans un marché du travail parfaitement compétitif

B/ Le monopsone étant le seul "acheteur" de travail, il choisit le point sur la courbe d'offre de travail qui maximise ses profits. Par conséquent, pour augmenter la quantité de travail dont il dispose, le monopsone doit accepter de payer un salaire plus élevé *pour toutes les heures de travail effectuées.* Le coût marginal d'une heure de travail supplémentaire est donc constitué de:

- Du salaire qui doit être payé sur cette heure supplémentaire;
- De l'augmentation de salaire que cela implique sur l'ensemble des heures de travail effectuées.

Seul le premier effet est à l'oeuvre dans un marché du travail parfaitement compétitif (puisqu'une entreprise n'a aucune influence sur le salaire). Le deuxième effet, qui est spécifique au monopsone, augmente le coût marginal du travail au delà du salaire.

Formellement, si $S(w)$ est la courbe d'offre de travail, alors le coût du travail pour le monopsone est égal à wL avec $L = S(w)$. Par conséquent, le coût marginal du travail pour le monopsone s'élève à:

$$\begin{aligned} \frac{d(wL)}{dL} &= \frac{d(S^{-1}(L)L)}{dL}, \\ &= L\frac{d(S^{-1}(L))}{dL} + S^{-1}(L), \\ &= \frac{L}{S'(w)} + w. \end{aligned}$$

Dans un marché du travail compétitif, chaque entreprise prend w comme étant donné, ce qui implique un coût marginal du travail simplement égal à $d(wL)/dL = w$.

C/ Pour chaque niveau d'emploi, le salaire correspondant est donné par la courbe d'offre de travail des ménages. Le coût marginal du travail étant supérieur au salaire, la courbe correspondante est au-dessus de la courbe d'offre de travail. En outre, plus la quantité de travail embauchée est élevée, plus l'écart entre les deux courbes est grand. Par ailleurs, on suppose que la productivité marginale du travail est une fonction décroissante de la quantité de travail embauchée par le monopsone. Cette situation est représentée sur la figure 3.2 ci-dessous.

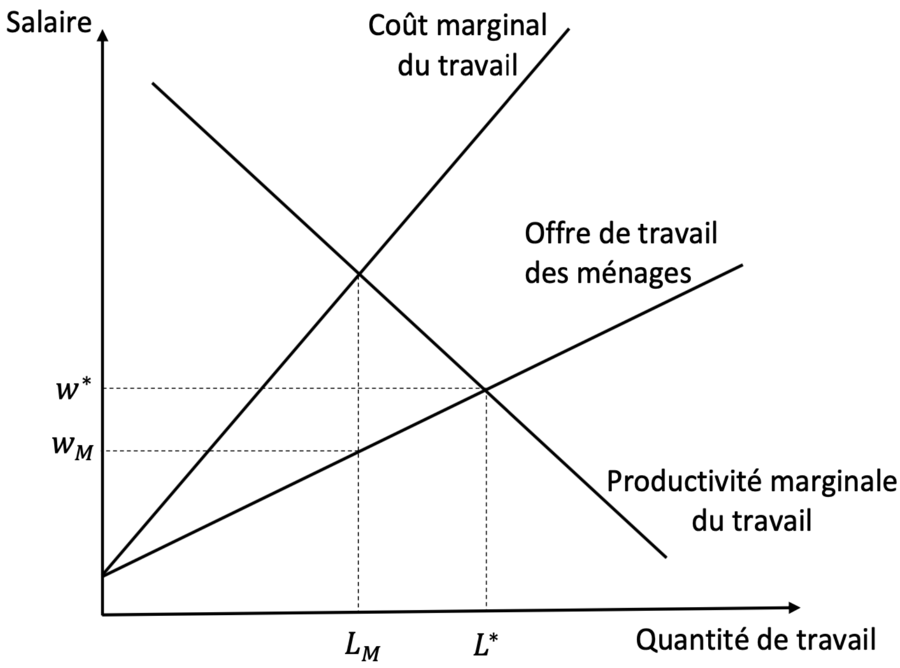


Figure 3.2: Monopsone

Le monopsone maximisant ses profits, il choisit d'embaucher des travailleurs jusqu'à ce que la productivité marginale du travail soit égale au coût marginal du travail. Cela détermine le niveau d'emploi L_M. Le salaire w_M est choisi par le monopsone de manière à ce que l'offre de travail soit égal à L_M.

Dans un marché du travail parfaitement compétitif, le coût marginal du travail est égal au salaire. La demande de travail des entreprises est donc telle que la productivité marginale du travail est égale au salaire. Autrement dit, la courbe de demande de travail coïncide avec la courbe de productivité marginale. Le salaire d'équilibre w^* et le niveau de l'emploi L^* sont donc déterminés par l'intersection entre la courbe de productivité marginale et la courbe d'offre de travail des ménages.

On remarque que les niveaux de l'emploi et du salaire sont plus faibles dans le cas du monopsone que dans celui du marché parfaitement compétitif. Le monopsone choisit de réduire l'emploi afin de diminuer le coût du travail et d'augmenter ses marges. C'est le miroir de la situation du monopole qui diminue sa production afin d'augmenter ses prix et, donc, ses profits.

D/ La perte sèche engendrée par le monopsone correspond à la surface triangulaire qui est: 1/ en-dessous de la courbe de productivité marginale du travail, 2/ au-dessus de la courbe d'offre de travail, et 3/ à droite du niveau d'emploi L_M choisit par le monopsone.

Une augmentation marginale de l'emploi engendre une hausse de la production égale à la productivité marginale du travail, tandis que les travailleurs sont disposés à fournir cet effort supplémentaire pourvu qu'ils soient payés au moins au niveau de salaire donné par la courbe d'offre de travail. Le surplus généré par cette augmentation de l'emploi est donc égal à la différence entre la courbe de productivité marginale et la courbe d'offre. La perte sèche engendrée par le monopsone correspond au cumul de cet écart sur tout l'intervalle allant de L_M à L^*.

E/ Comme illustré sur la figure 3.3 ci-dessous, un salaire minimum $\underline{w}$ fixé entre w_M et w^* augmente l'emploi de L_M à $\underline{L}$. Cette mesure augmente donc le niveau des salaires et l'emploi, tout en réduisant la perte sèche (le triangle correspondant étant à droite du nouveau niveau de l'emploi $\underline{L}$).

L'explication est que le monopsone ne pouvant plus diminuer le salaire en dessous de $\underline{w}$, choisit d'embaucher la quantité de travail $\underline{L}$ offerte par les ménages puisque leur productivité marginale reste supérieure au niveau de leur salaire.

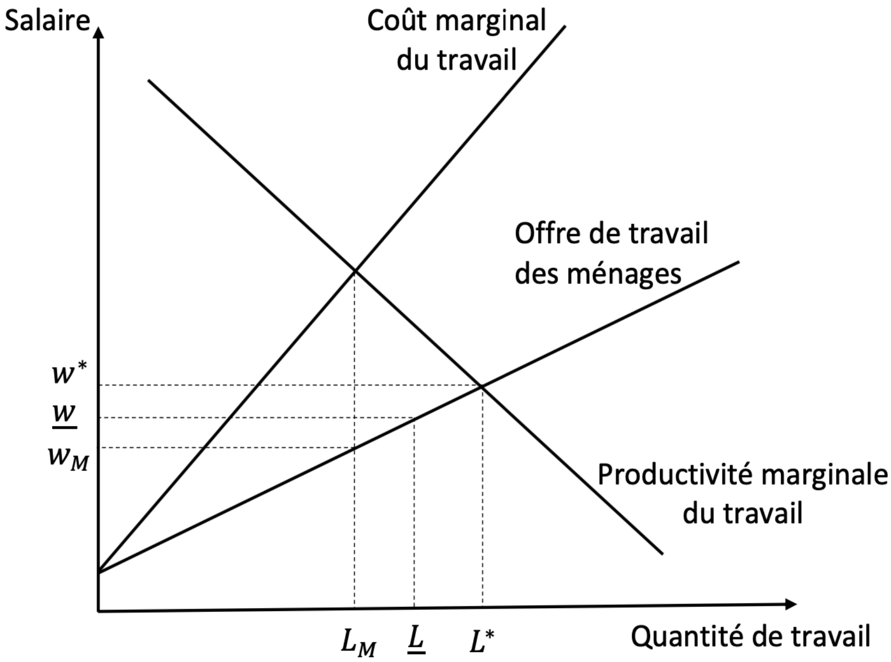


Figure 3.3: Salaire minimum inférieur à w^* en cas de monopsone

La figure 3.4 montre que, une fois que le salaire minimum $\underline{w}$ excède w^*, la demande de travail $\underline{L}$ du monopsone est déterminée par la productivité marginale du travail au niveau du salaire minimum $\underline{w}$. En effet, une entreprise qui maximise ses profits ne choisit jamais d'embaucher avec une productivité marginale du travail inférieure au salaire. Ainsi, une fois atteint le niveau w^*, toute augmentation du salaire minimum diminue la demande de travail du monopsone et augmente l'offre de travail des ménages (au niveau L_O représenté sur le graphique), générant ainsi du chômage (ou du sous-emploi) comme c'est le cas dans un marché du travail parfaitement compétitif.

Un salaire minimum $\underline{w}$ supérieur à w^* a donc exactement le même effet sur le marché du travail, que l'on soit dans le cas du monopsone ou d'un marché parfaitement compétitif. Il n'est donc jamais efficace de fixer un salaire minimum supérieur à w^*.

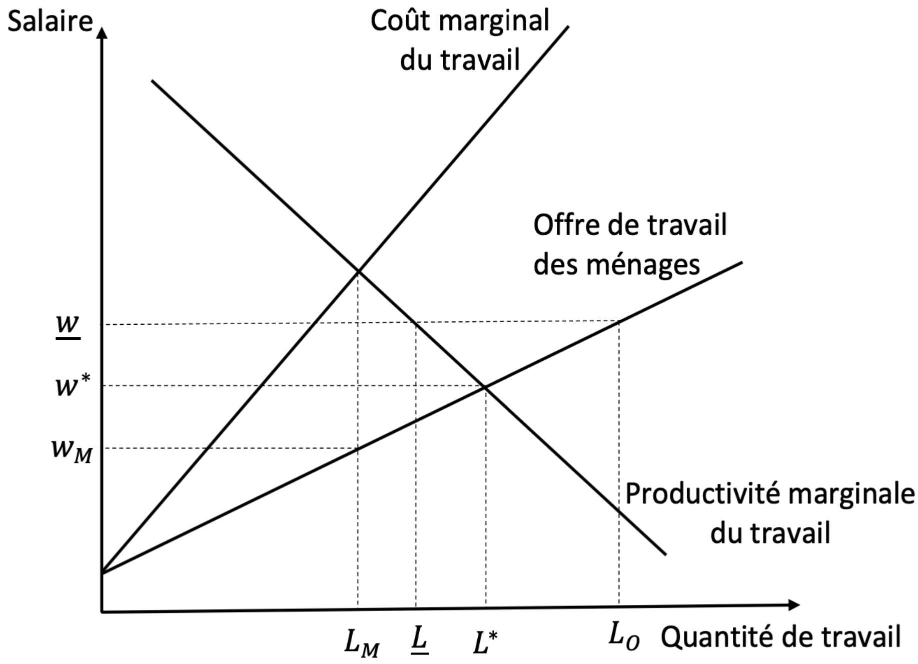


Figure 3.4: Salaire minimum supérieur à w^* en cas de monopsone

Exercice 4: Recettes fiscales

1/ L'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire correspond au pourcentage d'augmentation de l'offre de travail provoqué par une hausse de 1% du niveau des salaires (net d'impôts). L'élasticité est donc donnée par:

$$\begin{aligned}\frac{\%\text{ d'augmentation de } L^s}{1\%\text{ d'augmentation de } W} &= \frac{dL^s/L^s}{dW/W}, \\ &= \frac{W}{L^s}\frac{dL^s}{dW}, \\ &= \frac{W}{L^s}\varepsilon W^{\varepsilon-1}, \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

L'élasticité de l'offre de travail est égale au paramètre ε.

2/ Une productivité marginale du travail constante implique que la demande de travail des entreprises est parfaitement inélastique. Tous les travailleurs reçoivent donc un salaire de $\bar{W}$. Le salaire net d'impôts est égal à $(1-\tau)\bar{W}$, ce qui implique une offre de travail de:

$$L^s = \left[(1-\tau)\bar{W}\right]^{\varepsilon}.$$

Les recettes fiscales s'élèvent donc à:

$$\tau\bar{W}L^s = \tau\bar{W}\left[(1-\tau)\bar{W}\right]^{\varepsilon}.$$

Le taux d'impôt τ^* qui maximise ces recettes fiscales maximise également leur logarithme. On peut donc considérer que l'objectif est de maximiser:

$$\ln \tau + \varepsilon \ln (1 - \tau) + (\varepsilon + 1) \ln \bar{W}.$$

La condition de première ordre est:

$$\frac{1}{\tau^*} - \frac{\varepsilon}{1 - \tau^*} = 0,$$

ce qui donne:

$$\tau^* = \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Ce taux d'imposition donne le sommet de la **courbe de Laffer**, où plutôt de Dupuit-Laffer (que nous avions vu dans la 4ème séance de cours).

Le taux d'imposition τ^* qui maximise les recettes fiscales est décroissant de l'élasticité ε de l'offre de travail. Pour comprendre ce résultat, soulignons qu'une augmentation du taux d'imposition τ a deux effets: 1/ cela augmente les recettes fiscales pour une offre de travail donnée; 2/ cela réduit l'offre de travail L^s et donc la base fiscale $\bar{W} L^s$. Plus l'offre de travail est élastique, plus le deuxième effet est fort, ce qui diminue le taux d'imposition à partir duquel une hausse d'impôt réduit les recettes fiscales.

Selon la littérature empirique, l'élasticité de l'offre de travail est d'environ 0.5. Cela implique $\tau^* = 66.7\%$. Ainsi, si le taux d'imposition des revenus du travail est supérieur à 66.7%, alors une diminution de ce taux augmente les recettes de l'Etat.

ECO 361 Jean-Baptiste Michau
Juin 2023 Ecole Polytechnique

Introduction à l'économie

Solution 8: Les marchés financiers

Exercice 1: Projet d'investissement

1/ Pour déterminer si un projet d'investissement est profitable, il suffit de calculer sa **valeur actuelle nette** qui correspond à la différence entre la valeur actuelle des revenus et la valeur actuelle des coûts.

La valeur actuelle des revenus est égale à:

$$\frac{55}{1+0.1}+\frac{55}{(1+0.1)^2}+\frac{55}{(1+0.1)^3}=136.78 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle des coûts est égale à:

$$100+\frac{50}{1+0.1}=145.45 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle nette du projet est donc de $136.78-145.45=-8.68$ euros. Cette valeur étant négative, il n'est pas profitable pour l'entreprise de financer ce projet d'investissement.

2/ Avec un taux d'intérêt de 5%, la valeur actuelle des revenus est égale à:

$$\frac{55}{1+0.05}+\frac{55}{(1+0.05)^2}+\frac{55}{(1+0.05)^3}=149.78 \text{ euros,}$$

tandis que la valeur actuelle des coûts est de:

$$100+\frac{50}{1+0.05}=147.62 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle nette du projet s'élève donc à $149.78-147.62=2.16$ euros. Ce chiffre étant positif, il est désormais profitable pour l'entreprise de financer ce projet.

Une baisse du taux d'intérêt augmente la valeur actuelle des flux financiers futurs. Or, une caractéristique typique des projets d'investissement est qu'ils engendrent des coûts à court terme et qu'ils génèrent des revenus à long terme. Par conséquent, une baisse du taux d'intérêt augmente davantage la valeur actuelle des revenus que la valeur actuelle des coûts. Il améliorent donc la profitabilité des projets d'investissement.

De part ce mécanisme, la demande d'investissement des entreprises est une fonction décroissante du taux d'intérêt.

Exercice 2: Investissements immobiliers

1/ La somme empruntée E est égale à la valeur actuelle de y payée pendant n année. On a donc:

$$\begin{aligned} E &= \frac{y}{1+r} + \frac{y}{(1+r)^2} + \frac{y}{(1+r)^3} + ... + \frac{y}{(1+r)^n}, \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{y}{(1+r)^k}, \\ &= \frac{y}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]. \end{aligned}$$

Cela implique:

$$y = \frac{rE}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.$$

2/ L'écart de rendement entre les placements immobiliers et les obligations sans risque peut s'expliquer, par exemple, par le travail que représente la gestion immobilière, par le manque de liquidité des biens immobiliers qui sont difficiles à acheter et à vendre, par le risque d'avoir un logement vacant pendant quelques temps ou encore par le risque d'une baisse des loyers ou des prix. En pratique, l'immobilier rapporte entre 2 et 4% de plus que les obligations sans risque.

Par soucis de simplicité, l'analyse qui suit fait abstraction des risques. Il est néanmoins naturel d'escompter les rendements immobiliers futurs au taux x, typiquement plus élevé que r, afin de prendre en compte ces inconvénients des rendements immobiliers relativement aux rendements obligataires qui sont plus sûrs et plus faciles à percevoir. Le prix P du bien immobilier est donc égal à la valeur actuelle des loyers d, escompté au taux x. On a donc:

$$\begin{aligned} P &= \frac{d}{1+x} + \frac{d}{(1+x)^2} + \frac{d}{(1+x)^3} + ..., \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{(1+x)^k}, \\ &= \frac{d}{x}. \end{aligned}$$

Le randement immobilier annuel x correspond donc bien au ratio du loyer d perçu relativement au prix P de l'actif.

Si une maison rapporte 25 000 euros chaque année et que le rendement immobilier s'élève à 5%, alors le prix de cette maison doit être égal à 500 000 euros. A l'inverse, les loyers de 25 000 euros représentent bien un rendement de 5% pour un actif immobilier d'une valeur de 500 000 euros.

3/ Les investissements immobiliers génèrent un rendement annuel de x. La première année vous touchez d que vous placez pendant $n-1$ années au taux x. La second année, vous touchez d que vous placez pendant $n-2$ années au taux x; et ainsi de suite jusqu'à la n-ième année où vous touchez juste d. Au bout de la n-ième année, votre bien vaudra toujours P. Par conséquent, votre fortune sera égale à:

$$\begin{aligned} F_n &= (1+x)^{n-1} d + (1+x)^{n-2} d + ... + d + P, \\ &= P + \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k d, \\ &= P + \frac{d}{x} \left[(1+x)^n - 1 \right]. \end{aligned}$$

Dans la question précédent, nous avons établi que $d/x = P$. On a donc:

$$= P (1+x)^n .$$

Cela correspond à la fortune obtenue après avoir investi P pendant n années consécutives au taux x.

4/ Pour faire fructifier votre fortune, une meilleure solution est de s'endetter le plus possible au taux r afin d'effectuer des investissements immobiliers dont le rendement est de $x > r$.

Soit E_n le montant maximum que vous pouvez emprunter au taux r sur n années. Cela permet d'acheter un bien immobilier d'une valeur de E_n, en plus du bien d'une valeur de P que vous possédez déjà. Chaque année, vous toucherez un montant $x(E_n + P)$ de loyers, que vous allez intégralement consacrer au remboursement de l'emprunt E_n.[1]

Le niveau de l'emprunt E_n qui peut ainsi être financé est déterminé par le formule dérivée dans le première question, ce qui donne:

$$E_n = \frac{x (E_n + P)}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right].$$

[1] Si vous empruntez une somme supérieure à E_n sur n années, les loyers ne suffiront pas à rembourser la dette. Au bout des n années, il vous faudra alors vendre une partie de vos biens immobiliers pour rembourser la banque. On suppose ici que les banques ne souhaitent pas s'exposer au risque d'effondrement des prix de l'immobilier et refuse de vous prêter au delà de votre capacité à rembourser sur la base de vos loyers.

Au bout de n périodes, l'emprunt est remboursé et les deux biens immobiliers, d'une valeur totale de $E_n + P$, vous appartiennent. Votre fortune s'élève donc à:

$$L_n = E_n + P.$$

Par conséquent:

$$L_n - P = \frac{xL_n}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

ce qui implique:

$$L_n = \frac{P}{1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]}.$$

En supposant $L_n \in (0, \infty)$, on a $L_n > F_n$ si et seulement si:

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]} > (1+x)^n,$$

$$\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] > \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k},$$

$$x > r.$$

Le recours à l'endettement permet de bénéficier de l'effet de levier, ce qui démultiplie la croissance de votre fortune si et seulement si vous parvenez à placer votre épargne avec un rendement supérieur au taux d'intérêt auquel vous vous endettez. Si $x < r$, l'effet de levier fonctionne à l'envers et fait fondre votre fortune.

Pour $r = 1\%$, $x = 4\%$, et $n = 15$ ans, on a $F_n = 1.04^{15}P = 1.80P$ et $L_n = P/(1 - 0.04/0.01(1 - 1/1.01^{15})) = 2.25P$. En se contentant de placer à 4% les revenus des loyers, la fortune augmente de 80% en 15 ans; tandis qu'en empruntant pour acheter un autre bien immobilier qui sera remboursé sur 15 ans par l'ensemble des loyers perçus, la fortune augmente de 125% en 15 ans!

5/ L_n peut être arbitrairement grand dès lors que, pour n'importe quel $L^n > 0$, le montant emprunté est inférieur à la valeur actuelle des remboursements annuels, soit:

$$L_n - P \leq \frac{xL_n}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

On doit donc avoir:

$$L_n\left(1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]\right) \leq P.$$

Cette inégalité est satisfaite pour n'importe quel $L_n > 0$ si et seulement si:

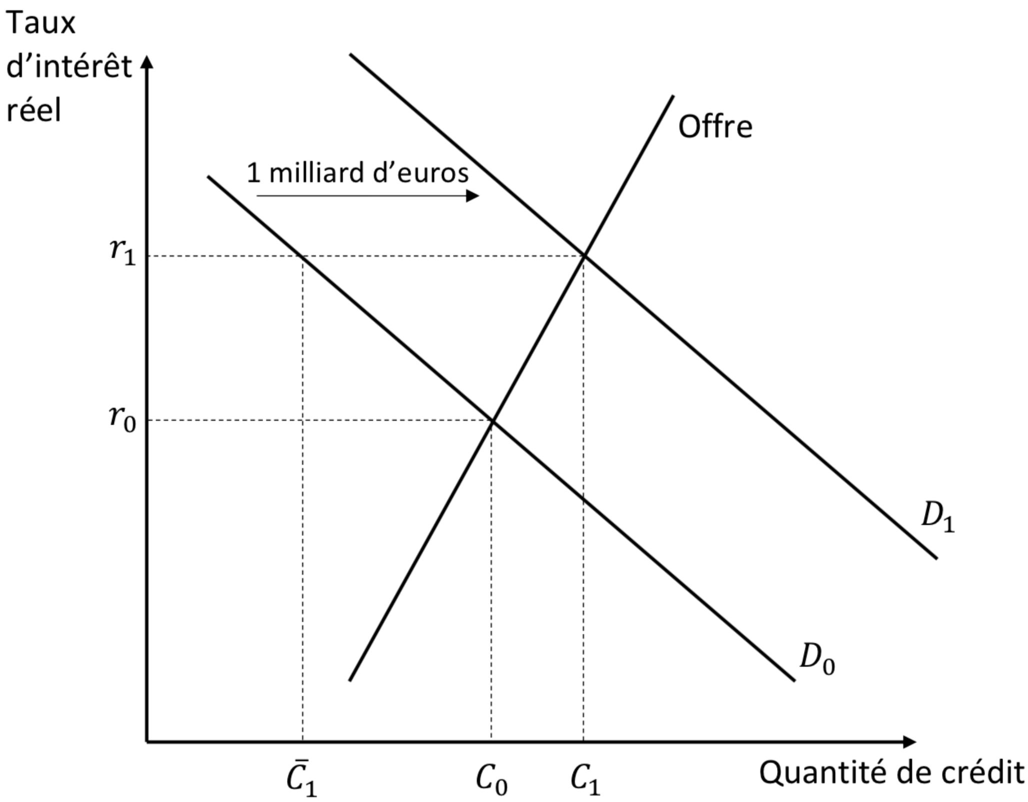
$$1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] \leq 0,$$
$$x \geq \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.$$

En ce cas, le rendement immobilier est si élevé que les loyers remboursent l'emprunt *sans même avoir besoin d'effectuer un apport personnel.* Le levier est donc infiniment grand! Dans notre exemple, avec $r = 1\%$ et $n = 15$, il faudrait avoir $x > 0.01/(1 - 1/1.01^{15}) = 7.21\%$.

Bien sûr, ce type de situation a peu de chance de se produire dans la réalité car les investisseurs choisiraient alors d'acheter massivement de l'immobilier, faisant monter les prix et réduisant le rendement $x = d/P$ correspondant.

Exercice 3: Le déficit budgétaire

1/ Le graphique ci-dessous montre que, avant l'intervention du gouvernement, la demande de crédit des entreprises était égale à C_0 et le taux d'intérêt à r_0. L'apparition d'un déficit public force le gouvernement à emprunter de l'argent en émettant des obligations souveraines, ce qui augmente la demande de crédit de un milliard d'euro. La courbe de demande se déplace donc horizontalement de un milliard d'euros vers la droite, de D_0 à D_1. Le taux d'intérêt d'équilibre augmente de r_0 à r_1 et la quantité de crédit de C_0 à C_1.



La hausse du taux d'intérêt diminue la demande de crédit des entreprises de C_0 à $\bar{C}_1 = C_1 -$ 1 milliard d'euros. Autrement dit, la demande de crédit des entreprises se déplace le long de leur courbe de demande D_0. Ainsi, la hausse du taux d'intérêt de r_0 à r_1 réduit la demande de crédit des entreprises de $C_0 - \bar{C}_1$.

En somme, pour pouvoir emprunter un milliard d'euros, une hausse du taux d'intérêt d'équilibre est nécessaire afin d'inciter les ménages à épargner davantage et les entreprises à emprunter moins. On constate un **effet d'éviction**: le déficit public évince l'investissement privé!

2/ Si les ménages anticipent une hausse de un milliard d'euros de la valeur actuelle des prélèvement fiscaux à venir, alors ils ont intérêt à épargner davantage afin d'accroître les ressources dont ils disposeront à l'avenir pour payer ces impôts. En ce cas, l'augmentation du déficit budgétaire augmente à la fois la demande et l'offre de crédit, ce qui se traduit à l'équilibre par une forte hausse du volume de crédit.

Le taux d'intérêt peut-il baisser? Soulignons que les ménages n'ont aucune raison d'augmenter leur offre de crédit de plus de un milliard d'euros. Par conséquent, la courbe d'offre se déplace au maximum de un milliard d'euros vers la droite. Cela implique que le taux d'intérêt ne peut pas diminuer, tandis que le volume de crédit ne peut pas augmenter de plus de un milliard d'euros.

Dans le cas particulier où la hausse du déficit public est intégralement utilisée pour financer une baisse immédiate de la fiscalité (au lieu d'être utilisée pour financer des dépenses publiques), alors le revenu des ménages augmentent de un milliard d'euros. Or, au même moment, la valeur actuelle de leurs prélèvement fiscaux à venir augmente également de un milliard d'euros. Les ménages ont donc intérêt à épargner l'intégralité de la baisse de la fiscalité afin de financer les prélèvement fiscaux à venir. Leur offre de crédit devrait donc augmenter d'exactement un milliard d'euros. En ce cas, le taux d'intérêt demeure inchangé tandis que le volume de crédit augmente d'exactement un milliard d'euros. La demande de crédit des entreprises n'est plus affectée par la hausse du déficit public.

Ce résultat est connu sous le nom d'**équivalence Ricardienne**. En principe, la richesse des ménage ne dépend que de la valeur actuelle des prélèvement fiscaux (présents et à venir), et non des dates auxquels ces prélèvement seront effectués. Par conséquent, il n'y a aucune différence entre taxer les ménages aujourd'hui et augmenter le déficit public pour les taxer plus tard.

Exercice 4: Fonds propres

Apple investis ses 250 milliards d'euros sur les marchés financiers afin de faire fructifier son capital. Pour investir en recherche et développement (R&D), Apple n'a pas besoin d'emprunter, mais doit réduire le montant de ses placements financiers. Par conséquent, le **coût d'opportunité** de l'investissement en R&D correspond aux revenus qu'Apple aurait perçu si ses fonds propres avaient été placés en bourse au lieu d'être consacrés à la R&D. Ce coût d'opportunité est une fonction croissante du taux d'intérêt.[2] Ainsi, la demande d'investissements en R&D d'Apple est une fonction décroissante du taux d'intérêt, malgré le fait que l'entreprise n'ait pas besoin d'emprunter pour financer ses investissements.

En pratique, l'existence de frictions financières impliquent que le taux d'intérêt payé par l'emprunteur est supérieur à celui perçu par l'épargnant. Il est donc moins coûteux pour une entreprise de financer ses dépenses d'investissement en utilisant ses fonds propres qu'en empruntant de l'argent. La demande d'investissement est donc plus élevée pour les entreprises disposant de fonds propres. Cette demande reste néanmoins une fonction décroissante du taux d'intérêt.

Exercice 5: Valeur fondamentale

1/ La valeur fondamentale d'un actif financier est définit comme la valeur actuelle du flux de revenus qu'il génère. L'obligation perpétuelle génère d euros dans un an, d dans deux ans, d dans trois ans, et ainsi de suite. Sa valeur fondamentale p^* est donc égale à:

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{d}{1+i} + \frac{d}{(1+i)^2} + \frac{d}{(1+i)^3} + ..., \\
&= d\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}, \\
&= d\frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}, \\
&= \frac{d}{i}.
\end{aligned}$$

Plus le taux d'intérêt est élevé, moins les coupons futurs sont valorisés, et donc plus la valeur fondamentale de l'obligation est faible.

2/ A la date t, l'acquisition de l'obligation perpétuelle coûte p_t euros. A la date $t+1$, l'obligation génère un coupon de d euros et peut être revendue pour p_{t+1} euros. Le rendement sur investissement s'élève donc à $(d+p_{t+1})/p_t$. Pour qu'un ménage soit indifférent entre détenir l'obligation perpétuelle et effectuer un autre placement rapportant un taux d'intérêt i, on doit avoir:

$$\frac{d+p_{t+1}}{p_t} = 1+i.$$

[2] Plus le taux d'intérêt est élevé, plus l'ensemble des actifs financiers génèrent des revenus élevés.

Si cette relation n'est pas satisfaite, alors il existe une opportunité d'**arbitrage**. Par exemple, si $(d + p_{t+1})/p_t > 1+i$, alors un ménage peut théoriquement gagner une quantité illimitée d'argent en empruntant au taux i et en achetant des obligations perpétuelles, puis en les vendant à la période suivante pour rembourser son emprunt. Cette possibilité ne peut pas prévaloir à l'équilibre car, en cherchant à s'enrichir, les ménages opportunistes vont faire monter le taux d'intérêt i auquel ils empruntent et faire monter le prix p_t auquel ils achètent les obligations perpétuelles.

Si, au contraire, $(d + p_{t+1})/p_t < 1 + i$, alors un ménage peut s'enrichir sans limite en émettant des obligations perpétuelles au temps t qui sont vendues au prix p_t et en plaçant cet argant au taux i, puis au temps $t + 1$ en utilisant les $p_t(1 + i)$ touchés pour chaque obligation émise à la période précédente pour payer les coupons d et les racheter au prix p_{t+1}. Ces comportements opportunistes vont faire baisser p_t et i.

En finance, on considère donc toujours que, lorsque les marchés financiers sont à l'équilibre, il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. Tous les actifs financiers (ayant le même profil de risque) doivent donc générer le même rendement.

3/ La réponse à la question précédente implique que le prix de l'obligation perpétuelle doit satisfaire:

$$p_{t+1} = (1 + i)\, p_t - d.$$

En itérant de la date 0 à la date t, on obtient:

$$\begin{aligned} p_t &= (1+i)^t p_0 - d \sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^k, \\ &= (1+i)^t p_0 - d \frac{(1+i)^t - 1}{i}, \\ &= \frac{d}{i} + \left(p_0 - \frac{d}{i}\right)(1+i)^t, \\ &= p^* + (p_0 - p^*)(1+i)^t. \end{aligned}$$

Le prix de l'obligation perpétuelle comporte donc deux composantes distinctes: la valeur fondamentale p^* et la bulle $(p_0 - p^*)(1 + i)^t$.

Deux raisons distinctes peuvent pousser les épargnants à acheter un actif financier. D'abord, ils souhaitent acquérir le flux de revenus généré par cet actif, dont la valorisation correspond à la valeur fondamentale. Ensuite, ils peuvent vouloir spéculer sur l'actif dans le but de le revendre à un prix plus élevé. Cela génère une bulle financière. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, cette bulle croît au taux d'intérêt i.

Peut-on avoir $p_0 < p^*$, ce qui correspond à une bulle négative? Avec $i > 0$, cela impliquerait que le prix de l'obligation devienne un jour négatif. Or, en supposant qu'une personne puisse toujours renoncer à la propriété de l'obligation, le prix ne peut pas être négatif. Cela élimine la possibilité d'une bulle négative.

Peut-on avoir $p_0 > p^*$? En ce cas, la bulle grossie sans limite. En théorie, rien ne permet d'éliminer cette possibilité. Ceci étant, si les épargnants anticipent que personne ne voudra jamais acheter cette obligation pour un prix supérieur à une borne $\bar{p}$, avec $\bar{p} >> p^*$, alors la bulle ne peut pas se produire (puisqu'une fois atteint le prix $\bar{p}$, la bulle cessera de croître au taux i). Il en résulte que l'on doit avoir $p_0 = p^*$, ce qui implique $p_t = p^*$ pour tout t. Le prix d'équilibre le plus plausible est celui correspondant à la valeur fondamentale.

4/ Soit $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ la trajectoire du prix de l'obligation perpétuelle en l'absence de retour à la valeur fondamentale. Si au temps t le prix de l'obligation est égal à p_t, alors au temps $t+1$ il sera égal à p^* avec une probabilité q et à p_{t+1} avec une probabilité $1-q$. A l'équilibre, l'absence d'opportunité d'arbitrage requiert toujours que le rendement de l'obligation perpétuel soit égal au taux d'intérêt i. On doit donc désormais avoir:

$$(1-q)\frac{d+p_{t+1}}{p_t} + q\frac{d+p^*}{p_t} = 1+i.$$

Cela implique:

$$p_{t+1} = \left(\frac{1+i}{1-q}\right)p_t - \frac{d+qp^*}{1-q}.$$

Or la valeur fondamentale p^* de l'obligation est toujours égale à d/i. Par conséquent:

$$p_{t+1} = \left(\frac{1+i}{1-q}\right)p_t - \frac{i+q}{1-q}p^*.$$

En itérant de 0 à t, on obtient:

$$\begin{aligned} p_t &= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - \frac{i+q}{1-q}p^* \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^k, \\ &= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - \frac{i+q}{1-q}p^* \frac{\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t - 1}{\frac{1+i}{1-q} - 1}, \\ &= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - p^*\left[\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t - 1\right], \\ &= p^* + (p_0 - p^*)\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t. \end{aligned}$$

Plus la probabilité q de l'éclatement de la bulle est élevée, plus la bulle croît rapidement!

Pour comprendre ce résultat, soulignons que le rendement moyen de la bulle doit toujours être égal à i.[3] Il est donc nécessaire de compenser la probabilité q d'un éclatement de la bulle par un taux de croissance supérieur à i en l'absence d'éclatement. Ainsi, plus la bulle a de chances d'éclater, plus elle croît rapidement.

[3] L'équation d'absence d'opportunité d'arbitrage ci-dessus peut s'écrire:

$$d + (1 - q)\, p_{t+1} + qp^* = (1 + i)\, p_t.$$

En utilisant $d = ip^*$, on obtient facilement:

$$(1 - q)\, [p_{t+1} - p^*] = (1 + i)\, [p_t - p^*]\,,$$

ce qui impose que le rendement moyen de la bulle est bien égal à i.