MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 4 – Équations différentielles, théorie générale (corrections)

Exercice 41. (Applications directes du cours)

(a) On considère l'équation $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$ avec $f \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ et $f(t, 0) = 0$. Vérifier que $x(t) = 0$ est solution avec $x_0 = 0$. En déduire que $x(0) > 0$ implique $x(t) > 0$ sur l'intervalle maximal d'existence.

> 0 est bien solution. Soit x solution sur l'intervalle maximal I (éventuellement infini) avec $x_0 > 0$. Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 0$. Or, par unicité des solutions, cela implique $x(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

(b) Soit $t \in \mathbf{R} \mapsto A(t) \in M_n(\mathbf{R})$ une application continue à valeur matricielle.

i) Retrouver par les théorèmes du cours que le problème de Cauchy $\dot{x} = A(t)x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ a une unique solution globale.

> L'application $(t, x) \mapsto f(t, x) = A(t)x$ est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. De plus, pour tout intervalle compact I, elle est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable : $|f(t, x - y)| = |A(t)(x - y)| \leq |x - y| \sup_{t \in I} \|A(t)\|$ où $|\cdot|$ est n'importe quelle norme et $\|\cdot\|$ sa norme subordonnée. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc. De plus, on a $|f(t, x)| \leq p(t)\,|x|$ avec $p(t) = \|A(t)\|$ continue. Donc le critère d'existence globale du cours s'applique et les solutions sont globales.

ii) Supposons $M = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|A(t)\|_\infty < +\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme subordonnée à la norme ∞ sur $\mathbf{R}^n$. Donner une estimée $\|x(t)\|_\infty$ en fonction de $\|x_0\|_\infty$.

> La solution vérifie $\|\dot{x}(t)\|_\infty \leq \|A(t)\|_\infty \|x(t)\|_\infty \leq M \|x(t)\|_\infty$. Le Lemme de Grönwall du cours donne $\|x(t)\|_\infty \leq e^{Mt} \|x_0\|_\infty$ pour tout $t \geq 0$. Ensuite, en raisonnant sur $y(t) = x(-t)$ pour $t \geq 0$, on trouve $\|x(t)\|_\infty \leq e^{M|t|} \|x_0\|_\infty$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 42. (Une application du théorème du point fixe de Banach) On note $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodiques de période 1 et de norme inférieure ou égale à 1, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |\cdot|$

(a) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{C}_{\text{pér}}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

> Soit une suite de Cauchy $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |\cdot|$. En particulier, la suite des restrictions $\tilde{f}_n$ de f_n à $[0, 1]$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ pour la norme uniforme $\sup_{[0,1]} |\cdot|$. Comme $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}), \sup_{[0,1]} |\cdot|)$ est complet, il existe $\tilde{f}$ dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ telle que $\lim_{n \to \infty} \sup_{[0,1]} |\tilde{f}_n - \tilde{f}| = 0$. Comme $\tilde{f}_n(0) = \tilde{f}_n(1)$, par convergence uniforme, on a $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$. De même, $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ pour tout n implique que $\sup_{[0,1]} |\tilde{f}| \leqslant 1$. Finalement, on considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vaut $\tilde{f}$ sur $[0, 1]$ et qui est 1-périodique. Elle est dans $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ et vérifie $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(b) Montrer que l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad [f(x+\sqrt{3})]^2 + [f(x-\sqrt{2})]^3 + 10f(x) = \sin(2\pi x)$$

admet une solution f continue et périodique de période 1.

Indication : appliquer le théorème du point fixe de Banach à une application $\Phi : \mathcal{C}_{\text{pér}} \to \mathcal{C}_{\text{pér}}$ bien choisie.

On définit l'application $\Phi : \mathcal{C}_{\text{pér}} \to \mathcal{C}(\mathbf{R};\mathbf{R})$ par

$$\Phi(f) : x \mapsto \frac{1}{10}\left\{\sin(2\pi x) - [f(x+\sqrt{3})]^2 - [f(x-\sqrt{2})]^3\right\}.$$

On montre d'abord que l'image de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ par Φ est incluse dans $\mathcal{C}_{\text{pér}}$. Bien sûr, pour $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, $\Phi(f)$ est continue. Elle est aussi périodique de période 1 car $\sin(2\pi x)$, $[f(x+\sqrt{3})]^2$ et $[f(x-\sqrt{2})]^3$ sont périodiques de période 1. Finalement, on a la majoration, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|\Phi(f)(x)| \leqslant \frac{1}{10}\left\{1 + \|f\|_\infty^2 + \|f\|_\infty^3\right\} \leqslant \frac{3}{10} \leqslant 1.$$

On montre maintenant que $\Phi : \mathcal{C}_{\text{pér}} \to \mathcal{C}_{\text{pér}}$ est une contraction. En effet, pour $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \leqslant \frac{1}{10}\left\{\|f^2 - g^2\|_\infty + \|f^3 - g^3\|_\infty\right\} \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty.$$

On a utilisé

$$|f^2 - g^2| = |f-g||f+g| \leq 2|f-g|$$

et

$$|f^3 - g^3| = |f-g||f^2+fg+g^2| \leq 3|f-g|.$$

Ainsi, $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$ et Φ est une contraction sur $\mathcal{C}_{\text{pér}}$. Cette application admet donc un unique point fixe dans $\mathcal{C}_{\text{pér}}$, ce qui nous fournit une fonction répondant à la question.

Exercice 43. (Version intégrale du lemme de Gronwall) Soient $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T[,\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ et une fonction continue $v : [0,T[\to [0,+\infty[$ telle que

$$\forall t \in [0,T[, \quad u(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [0,T[, \quad u(t) \leqslant C\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

On pose

$$w(t) = C + \int_0^t u(s)v(s)ds.$$

On voit que $w(0) = C$ et que w est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[$. En particulier,

$$w'(t) = u(t)v(t) \leqslant w(t)v(t).$$

On réecrit cette majoration sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[w(t)\exp\left(-\int_0^t v(s)ds\right)\right] \leqslant 0,$$

et on en déduit par intégration sur $[0,t]$,

$$w(t) \leqslant w(0)\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right) = C\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

On termine l'exercice en rappelant que $u(t) \leqslant w(t)$ sur $[0,T[$.

Exercice 44. (Estimation de la divergence de solutions) Le but de l'exercice est de démontrer un résultat mentionné en cours sur l'estimation de la divergence des solutions, et d'en donner ensuite une généralisation.

On considère une application $f : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ continue et C-lipschitzienne en x, pour une constante $C > 0$.

(a) Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ définies sur l'intervalle $[0,T]$, où $T > 0$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant e^{Ct}\,|x_1(0) - x_2(0)|\,.$$

On pose $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$. On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$|\dot{y}(t)| = |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant C|x_1(t) - x_2(t)| = C|y(t)|.$$

En utilisant le lemme de Grönwall vu en cours pour $\Psi(t) = |x_1(0) - x_2(0)|e^{Ct}$, on montre bien $|y(t)| \leqslant e^{Ct}\,|x_1(0) - x_2(0)|$.

(b) Soit $g : \mathbf{R}\times\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ une application continue vérifiant, pour $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^N$,

$$|f(t,x) - g(t,x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient x_1 une solution de l'équation $\dot{x} = f(t,x)$ définie sur l'intervalle $[0,T]$, où $T > 0$, et x_2 une solution de l'équation $\dot{x} = g(t,x)$ définie sur l'intervalle $[0,T]$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(0) - x_2(0)|\,e^{Ct} + \frac{\varepsilon}{C}\left(e^{Ct} - 1\right).$$

La méthode est identique. On pose $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}|\dot{y}(t)| = |f(t,x_1) - g(t,x_2)| &\leqslant |f(t,x_1) - f(t,x_2)| + |f(t,x_2) - g(t,x_2)| \\ &\leqslant C|x_1(t) - x_2(t)| + \varepsilon = C|y(t)| + \varepsilon.\end{aligned}$$

On voit que $\Psi(t) = |x_1(0) - x_2(0)|e^{Ct} + \frac{\varepsilon}{C}\left(e^{Ct} - 1\right)$ est solution de $\dot{\Psi} = C\Psi + \varepsilon$ et $\Psi(0) = |y(0)|$. En utilisant le lemme de Grönwall vu en cours on a $|y(t)| \leqslant \Psi(t)$, ce qui donne le résultat.

Exercice 45. (*Inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles) On considère une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur $\mathbf{R}^N$.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note

$$f'(x) = (f_1'(x), \dots, f_N'(x)).$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $a, b \in I$, $a < b$, on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(s)\| ds.$$

(a) Montrer directement l'inégalité dans le cas des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^N$.

Pour tout $j = 1, \dots, N$, comme f_j est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbf{R}$, on a

$$|f_j(b) - f_j(a)| = \left| \int_a^b f_j'(s) ds \right| \leqslant \int_a^b |f_j'(s)| ds.$$

Pour la norme $\|\cdot\|_1$, il suffit de sommer ces estimations pour $j = 1, \dots, N$. Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, il suffit d'utiliser l'inégalité précédente pour obtenir $|f_j(b) - f_j(a)| \leqslant \int_a^b \|f'(s)\|_\infty ds$ pour tout $j = 1, \dots, N$, et de conclure en prenant le max sur j.

(b) Montrer l'inégalité dans le cas de la norme $\|\cdot\|_2$.

Indication. Utiliser la fonction $\psi : I \to \mathbf{R}$ définie par (on peut supposer $f(b) \neq f(a)$)

$$\psi(x) = f(x) \cdot v \quad \text{où} \quad v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|_2}.$$

(On a noté $g \cdot h = \sum_{j=1}^N g_j h_j$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$.)

On remarque que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $\psi'(x) = f'(x) \cdot v$. Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et $\|v\|_2 = 1$,

$$\|f(b) - f(a)\|_2 = |\psi(b) - \psi(a)| \leqslant \int_a^b |\psi'(s)| ds = \int_a^b |f'(s) \cdot v| ds \leqslant \int_a^b \|f'(s)\|_2 ds.$$

(c) Montrer l'inégalité pour toute norme $\|\cdot\|$.

Indications : On rappelle que pour tout $x \in I$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| \leqslant \delta$,

$$\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\| \leqslant \varepsilon |h|,$$

ce qui s'écrit également sous la forme $f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(h)$. La notation $h \mapsto df_x(h)$ désigne la différentielle de f au point x. En particulier, on a ici $df_x(h) = hf'(x)$.

Considérer $\varepsilon > 0$ arbitraire et définir l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que la relation

$$\|f(y) - f(a)\| \leqslant \int_a^y \|f'(s)\| ds + 2\varepsilon(y - a) \qquad (\star)$$

est vérifiée pour tout $y \in [a, x]$. Montrer que A est non vide et fermé dans $[a, b]$. Supposer que $b \notin A$ et considérer sa borne supérieure $c \in [a, b]$. Trouver une contradiction en utilisant le rappel ci-dessus. Conclure.

On pose $\varphi(x) = \int_a^x \|f'(s)\| ds$ et on définit A comme suggéré dans l'énoncé. On voit que A est fermé car f, φ, $\|\cdot\|$ sont des applications continues et A est l'image réciproque de $[0, +\infty[$ par une application continue. De plus, $a \in A$ car $(\star)$ est vraie en a. On note $c = \sup A$, la borne supérieure de A. Le but est de montrer que $c = b$. On raisonne par l'absurde en supposant que $a \leqslant c < b$.
D'après le rappel appliqué au point c, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \delta]$,

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leqslant (\|f'(c)\| + \varepsilon)\, h,$$

et

$$\varphi'(c)h \leqslant \varphi(c+h) - \varphi(c) + \varepsilon h.$$

Ainsi, on obtient la majoration

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leqslant (\|f'(c)\| + \varepsilon)\, h = (\varphi'(c) + \varepsilon)\, h \leqslant \varphi(c+h) - \varphi(c) + 2h\varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire et comme $(\star)$ est vérifié au point c, on a, pour tout $h \in [0, \delta]$,

$$\begin{aligned}\|f(c+h) - f(a)\| &\leqslant \|f(c+h) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leqslant \varphi(c+h) - \varphi(c) + 2h\varepsilon + \varphi(c) + 2\varepsilon(c-a) \\ &= \varphi(c+h) + 2\varepsilon(c+h-a).\end{aligned}$$

Cela signifie que $(\star)$ est vérifiée au point $c + \delta$, une contradiction avec la définition de c comme borne supérieure. Ainsi, $c = b$, ce qui signifie que $(\star)$ est vraie sur tout l'intervalle $[a, b]$, et en particulier en b. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, l'inégalité est démontrée.

Exercice 46. (*Suite de l'exercice précédent) On s'intéresse maintenant au cas plus général d'une fonction $F : U \to \mathbf{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^M$. On note $\mathbf{J}_F$ la matrice Jacobienne de F, définie par sur U

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_M} \end{pmatrix}$$

Soient deux normes notées $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^M$ et $\mathbf{R}^N$. On définit, pour tout $X \in U$, la norme subordonnée de $\mathbf{J}_F(X)$ comme matrice de taille $N \times M$ par

$$\|\mathbf{J}_F(X)\| = \sup_{\|h\|=1} \|\mathbf{J}_F(X)h\|.$$

Montrer que pour tous $X, Y \in U$ tels que le segment joignant X à Y est contenu dans U,

$$\|F(Y) - F(X)\| \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} \|\mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y)\| \cdot \|Y - X\|.$$

Indication : utiliser l'application f définie par $f(\theta) = F((1-\theta)X + \theta Y)$.

En définissant l'application f comme dans l'énoncé, on voit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$. De plus, pour tout $j = 1, \ldots, N$, on calcule par la formule de dérivation composée

$$f_j'(\theta) = (Y - X) \cdot \nabla F_j((1-\theta)X + \theta Y) = \sum_{i=1}^{M} (Y_i - X_i) \frac{\partial F_j}{\partial X_i}((1-\theta)X + \theta Y).$$

où ∇F_j est le gradient de F_j. Ainsi, on peut réécrire $f'(\theta)$ comme le produit à droite du vecteur $Y - X$ (sous forme colonne) avec la matrice $\mathbf{J}_F$ au point $(1-\theta)X + \theta Y$:

$$f'(\theta) = \mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y) \cdot (Y - X).$$

On a, par définition de la norme subordonnée :

$$\|f'(\theta)\| \leqslant \|\mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y)\| \cdot \|Y - X\|.$$

On applique le résultat de l'exercice précédent à f sur $[0,1]$ pour obtenir

$$\|f(1) - f(0)\| \leqslant \int_0^1 \|f'(\theta)\| d\theta \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} \|\mathbf{J}_F((1-\theta)X + \theta Y)\| \cdot \|Y - X\|.$$

Comme $f(1) = F(Y)$ et $f(0) = F(X)$, on obtient le résultat voulu.

Exercice 47. (*Application de l'exercice précédent)

(a) Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est contractante sur $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|)$ si, et seulement si, il existe $k \in [0,1[$ tel que $\sup_{\mathbf{R}^N} \|\mathbf{J}_F\| \leqslant k$.

D'abord, l'hypothèse $\sup_{\mathbf{R}^N} \|\mathbf{J}_F\| \leqslant k < 1$ est clairement suffisante par le résultat de l'exercice 6.

Inversement, on a

$$F(X + H) - F(X) - \mathbf{J}_F(X)H = o(\|H\|).$$

Si on suppose que F est contractante, il existe $k \in [0,1[$ telle que, pour tout $X, H \in \mathbf{R}^N$ $\|F(X + H) - F(X)\| \leqslant k\|H\|$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient alors

$$\|\mathbf{J}_F(X)H\| \leqslant k\|H\| + o(\|H\|).$$

L'application $H \in \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{J}_F(X)H \in \mathbf{R}^N$ étant linéaire, on obtient $\|\mathbf{J}_F(X)\| \leqslant k$ et donc $\sup_{\mathbf{R}^N} \|\mathbf{J}_F\| \leqslant k < 1$.

(b) Montrer que si $F(0) = 0$ et $\|\mathbf{J}_F(0)\| < 1$, alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^N$ tel que

$$\text{pour tout } X \in V, \quad \lim_{n \to +\infty} F^n(X) = 0,$$

où $F^n = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}}$.

Comme

$$F(H) - F(0) - \mathbf{J}_F(0)H = o(\|H\|),$$

si $F(0) = 0$, on a

$$\|F(H)\| \leqslant \|\mathbf{J}_F(0)\| \cdot \|H\| + o(\|H\|).$$

Soit $k = (1 + \|\mathbf{J}_F(0)\|)/2$. On a $\|\mathbf{J}_F(0)\| < k < 1$. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|H\| \leqslant \delta$, alors

$$\|F(H)\| \leqslant k\|H\|.$$

Ainsi, $\|F(H)\| \leqslant \delta$ et par récurrence, on a $\|F^n(H)\| \leqslant k^n\|H\|$.

Exercice 48. (Une variante du théorème du point fixe de Banach) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Soit $f : X \to X$ une application. On suppose que pour un entier $\ell \geqslant 1$, l'application f^ℓ est contractante (on rappelle que $f^\ell = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\ell \text{ fois}}$).

(a) Montrer que f admet un unique point fixe sur X.

D'après le théorème du point fixe de Banach, l'application f^ℓ admet un unique point fixe $x \in X$, *i.e.* x vérifie $x = f^\ell(x)$. On voit que $f(x) = (f \circ f^\ell)(x) = f^\ell(f(x))$. Ainsi, $f(x)$ est aussi un point fixe de f^ℓ. L'unicité entraîne que $f(x) = x$, et donc x est un point fixe de f.

Par ailleurs, tout point fixe de f est également un point fixe de f^ℓ. Donc, l'unicité du point fixe de f découle de l'unicité du point fixe de f^ℓ.

(b) Montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge vers le point fixe de f.

On considère $x_0 \in X$ arbitraire. Soit x le point fixe de f obtenu à la question précédente et $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$, $d(f^\ell(x), f^\ell(y)) \leqslant k\, d(x, y)$. D'après la démonstration du théorème du point fixe de Banach, on a la majoration suivante, pour tout $n \geqslant 0$,

$$d(f^{\ell n}(x_0), x) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(f^\ell(x_0), x_0).$$

En particulier, la suite $(f^{\ell n}(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge vers x.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in X$. En l'appliquant à $f^r(x_0)$ pour tout $0 \leqslant r \leqslant \ell - 1$, on voit que la suite $(f^{\ell n + r}(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge aussi vers x. En revenant à la définition de la limite, cela implique que toute la suite $(f^m(x_0))_{m \geqslant 0}$ converge vers x.

Exercice 49. (*Variante du théorème de Cauchy-Lipschitz) Le but de l'exercice est de donner une version raffinée du théorème de Cauchy-Lipschitz vu en cours, en rendant le temps d'existence $T > 0$ indépendant de la constante de Lipschitz C.

Soient δ un nombre réel positif et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$. On pose

$$A = \Big\{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N : |t - t_0| \leqslant \delta,\ |x - x_0| \leqslant \delta\Big\}.$$

On suppose que $f : A \to \mathbf{R}^N$ est continue et vérifie :

— Il existe $M > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $|f(t, x)| \leqslant M$;

— Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in A$, $(t, y) \in A$, $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant C|x - y|$.

Sous les hypothèses précédentes, on veut montrer qu'il existe une solution (J, x) de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec $J = [t_0 - T, t_0 + T]$ et $T > 0$ dépendant de δ et M, mais indépendant de C.

(a) On considère l'application Φ définie sur E par

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds.$$

Montrer que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, l'application Φ^ℓ est lipschitzienne avec constante de Lipschitz égale à $C^\ell T^\ell / \ell!$

(b) En utilisant le résultat de l'exercice 8, montrer que l'existence d'une solution sur un intervalle de temps dont la longueur ne dépend que de M.

Exercice non corrigé.

Exercice 50. (Critère géométrique d'existence globale) On note $x \cdot y = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^N$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant énoncé en cours. *Soit $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe deux fonctions continues p et $q : \mathbf{R} \to [0, +\infty[$ telles que pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$,*

$$x \cdot f(t, x) \leqslant p(t)(x \cdot x) + q(t).$$

Alors toute solution maximale de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ avec donnée initiale $(0, x_0)$ est globale en temps positif, *c'est-à-dire définie sur un intervalle contenant $[0, +\infty[$.*

(a) On pose $h(t) = x(t) \cdot x(t)$. Calculer $\dot{h}$.

Soit (J, x) une solution maximale de $\dot{x} = f(x)$ avec donnée initiale $(0, x_0)$. La première question est un simple calcul de dérivée de produits. Sur J, on a $\dot{h} = 2\,(x \cdot \dot{x}) = 2\,(x \cdot f(t, x))$.

(b) Conclure en utilisant l'hypothèse sur f.

En utilisant l'hypothèse sur f, on obtient sur J, $\dot{h} \leqslant ph + q$. On peut réécrire l'inéquation différentielle sur h sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(h \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right)\right) \leqslant q(t) \exp\left(-\int_0^t p(s)ds\right).$$

En intégrant sur $[0, t]$, pour $t \geq 0$, $t \in J$, on obtient

$$h(t) \leqslant (x_0 \cdot x_0) \exp\left(\int_0^t p(s)ds\right) + \int_0^t q(s) \exp\left(-\int_t^s p(\sigma)d\sigma\right) ds.$$

Ainsi, $h(t)$ et donc $\|x(t)\|$ ne peuvent pas devenir arbitrairement grands en temps fini. Cela prouve que J contient $[0, +\infty[$ par l'alternative d'explosion vue en cours.

Exercice 51. (Flot de gradient) Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t)), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = x_0,$$

où

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_N}\right)$$

est le gradient de F.

(a) Soit (J, x) une solution de condition initiale $(0, x_0)$. Montrer que pour tout $t \in J$,

$$\frac{d}{dt}\left[F(x)\right] = -\|\nabla F(x)\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. En déduire que pour tout $t \in J$,

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant t^{\frac{1}{2}} (F(x_0) - F(x(t)))^{\frac{1}{2}}.$$

On a par dérivation composée et par l'équation

$$\frac{d}{dt}\left[F(x)\right] = \dot{x}\cdot\nabla F(x) = -(\nabla F(x)\cdot\nabla F(x)) = -\|\nabla F(x)\|^2.$$

Par intégration sur $[0,t]$, pour $t\geqslant 0$, $t\in J$, on a

$$F(x(t)) - F(x_0) = -\int_0^t \|\nabla F(x(s))\|^2 ds = -\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds.$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'identité précédente,

$$\|x(t)-x_0\|^2 = \left\|\int_0^t \dot{x}(s)ds\right\|^2 \leqslant t\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = t\left(F(x_0) - F(x(t))\right).$$

(b) On suppose que $\inf_{x\in\mathbf{R}^N} F(x) > -\infty$. Montrer alors que toute solution maximale est définie sur $J\supset [0,+\infty[$.

Si $\inf_{x\in\mathbf{R}^N} F(x) = C > -\infty$, alors par la majoration de la question précédente, on a

$$\|x(t)\| \leq \|x(t)-x_0\| + \|x_0\| \leq t^{\frac{1}{2}}\left(F(x_0)-C\right)^{\frac{1}{2}} + \|x_0\|.$$

Si J est borné pour $t\geqslant 0$, alors par l'alternative d'explosion vue en cours, $\|x(t)\|$ devient infini en la borne supérieure de J. C'est une contradiction avec la majoration ci-dessus. Donc, $J\supset [0,+\infty[$.

(c) Donner un exemple de fonction F telle que la solution explose en temps fini.

Dans le cas $N=1$, on considère l'équation $\dot{x}=x^2$ vue en cours. Avec les notations de l'exercice, cette équation correspond à $F(x) = -x^3/3$.

Exercice 52. (Sur les équations linéaires scalaires d'ordre 2) Soient p,q et r des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = r, \tag{NH}$$

et l'équation homogène associée

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{H}$$

(a) Rappeler la structure de l'ensemble des solutions réelles de (H). Même question pour (NH).

L'ensemble $S(\mathrm{H})$ des solutions de (H) sur $\mathbf{R}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

L'ensemble $S(\mathrm{NH})$ des solutions de (NH) sur $\mathbf{R}$ est un sous-espace affine de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, de direction $S(\mathrm{H})$.

(b) Écrire (NH) sous la forme d'un système d'ordre un en $X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}\end{pmatrix}$.

On écrit l'équation (NH) sous la forme matricielle suivante

$$\dot{X} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ r\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}\end{pmatrix},$$

et une expression identique avec $r=0$ pour l'équation (H).

En particulier, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a existence et unicité pour toute donnée initiale (t_0, X_0) (les solutions sont toutes globales par le critère d'existence globale du cours).

Soient h_1 et h_2 deux solutions de (H). On définit la matrice

$$W = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ \dot{h}_1 & \dot{h}_2 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\det W(t_0) = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t) = 0$. *Si* $\det W \neq 0$, *on dit que les solutions sont indépendantes.*

Si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t) = 0$, alors par dérivation $\lambda \dot{h}_1(t) + \mu \dot{h}_2(t) = 0$. Ainsi, pour tout temps t, le rang de la matrice $W(t)$ est 0 ou 1, et son déterminant est nul.

On suppose maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\det W(t_0) = 0$. Les vecteurs colonnes de la matrice $W(t_0)$ sont liés : il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda h_1(t_0) + \mu h_2(t_0) = 0$ et $\lambda \dot{h}_1(t_0) + \mu \dot{h}_2(t_0) = 0$. On voit que la solution $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t)$ a pour données initiales en t_0 : $\lambda h_1(t_0) + \mu h_2(t_0) = 0$ et $\lambda \dot{h}_1(t_0) + \mu \dot{h}_2(t_0) = 0$. Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, il s'agit donc de la solution nulle. On en conclut que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda h_1(t) + \mu h_2(t) = 0$.

(d) On suppose à partir de maintenant que les deux solutions h_1 et h_2 satisfont pour tout temps $\det W \neq 0$. Soit x une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe des fonctions u_1 et u_2 de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$x = u_1 h_1 + u_2 h_2, \quad \dot{x} = u_1 \dot{h}_1 + u_2 \dot{h}_2.$$

Montrer que nécessairement $\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0$.

Pour tout temps t, étant donné un vecteur (x, y) de $\mathbf{R}^2$, l'existence et l'unicité de réels u_1 et u_2 tels que $x = u_1 h_1(t) + u_2 h_2(t)$, $y = u_1 \dot{h}_1(t) + u_2 \dot{h}_2(t)$ résulte du fait que $\{(h_1(t), \dot{h}_1(t)), (h_2(t), \dot{h}_2(t))\}$ est une base de $\mathbf{R}^2$. On applique cette observation à $(x(t), \dot{x}(t))$.

En résolvant le système, on exprime u_1 et u_2 explicitement en fonction de x, $\dot{x}$, h_1 et h_2. On en déduit que u_1 et u_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Comme

$$u_1 \dot{h}_1 + u_2 \dot{h}_2 = \dot{x} = \frac{d}{dt}(u_1 h_1 + u_2 h_2) = \dot{u}_1 h_1 + u_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 h_2 + u_2 \dot{h}_2,$$

on obtient bien $\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0$.

(e) Calculer $\ddot{x} + p\dot{x} + qx$. En déduire que x est solution de (NH) si, et seulement si

$$\dot{u}_1 h_1 + \dot{u}_2 h_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2 = r.$$

Calculons $\ddot{x} + p\dot{x} + qx$ en utilisant que h_1, h_2 sont solutions de (H) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + p\dot{x} + qx = \dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2 + u_1 \left(\ddot{h}_1 + p\dot{h}_1 + qh_1\right) + u_2 \left(\ddot{h}_2 + p\dot{h}_2 + qh_2\right) \\ = \dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2. \end{aligned}$$

Pour toute fonction x de classe $\mathcal{C}^2$, on a déjà vu que la première identité est automatique. Par le calcul précédent, x est solution de (NH) si, et seulement si $\dot{u}_1 \dot{h}_1 + \dot{u}_2 \dot{h}_2 = r$.

(f) Déduire de la question précédente une expression de $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$ en fonction de r et h_1, h_2.

On voit la conclusion de la question précédente comme un système 2×2 à résoudre en l'inconnue $(\dot{u}_1, \dot{u}_2)$. On pose $w = \det W \neq 0$. On obtient

$$\dot{u}_1 = -\frac{rh_2}{w}, \quad \dot{u}_2 = \frac{rh_1}{w}.$$

(g) Conclusion : déduire de ce qui précéde une expression de la solution générale de (NH) en fonction de h_1, h_2 et r.

En intégrant u_1 et u_2 de t_0 à t et en revenant à $x = u_1h_1 + u_2h_2$, on obtient

$$x(t) = ah_1(t) + bh_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{r(s)}{w(s)} \left[h_1(s)h_2(t) - h_2(s)h_1(t)\right] ds$$

où a et b sont des constantes d'intégration.

Exercice 53. (Suite de l'exercice précédent) Soit $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle du second ordre avec second membre

$$\ddot{x} + x = r.$$

(a) Donner deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.

Par exemple,

$$h_1(t) = \cos t \quad \text{et} \quad h_2(t) = \sin t$$

sont bien indépendantes car $\det W(t) = 1$.

(b) En utilisant la formule obtenue dans l'exercice précédent, calculer la solution générale de l'équation avec second membre r.

En remplaçant les données dans la formule, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(t) + b\sin(t) + \int_0^t r(s) \left[\cos(s)\sin(t) - \sin(s)\cos(t)\right] ds \\ &= a\cos(t) + b\sin(t) + \int_0^t r(s)\sin(t-s)ds. \end{aligned}$$

Pour $\dot{x}$, on trouve

$$\dot{x}(t) = -a\sin(t) + b\cos(t) + \int_0^t r(s)\cos(t-s)ds.$$

(c) On suppose dans cette question que r est périodique de période 2π. Montrer que toute x est périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} r(s)\sin s ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} r(s)\cos s ds = 0.$$

Si $\int_0^{2\pi} r(s)\sin(s)ds = \int_0^{2\pi} r(s)\cos(s)ds = 0$, alors $x(2\pi) = x(0)$ et $\dot{x}(2\pi) = \dot{x}(0)$. Ainsi, par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $x(2\pi + t) = x(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$ et x est périodique de période 2π.

Inversement, si $x(t)$ est périodique de période 2π, alors $\dot{x}$ est aussi périodique de période 2π. Par les formules de la question (b) appliquées en $t = 2\pi$, on trouve

$$\int_0^{2\pi} r(s)\sin(2\pi - s)ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} r(s)\cos(2\pi - s)ds = 0,$$

ce qui donne le résultat.

(d) Application : calculer les solutions des équations suivantes et discuter leur comportement

$$\ddot{x} + x = \cos(x) \quad \text{et} \quad \ddot{y} + y = \cos(2x).$$

En prenant $a = b = 0$, on trouve pour le premier cas la solution

$$x(t) = \int_0^t \cos(s)\sin(t-s)ds = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(t) + \sin(t-2s)]ds = \frac{t\sin t}{2}.$$

En prenant $a = b = 0$, on trouve pour le deuxième cas la solution

$$y(t) = \int_0^t \cos(2s)\sin(t-s)ds = \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(t+s) + \sin(t-3s)]ds = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

Dans le premier cas (résonant), la solution n'est pas périodique et n'est pas bornée.
Dans le deuxième cas (non résonant), la solution est périodique et donc bornée.