MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 7 – Espaces de Hilbert (corrections)

Exercice 82. (Applications directes du cours)

(a) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que pour tout produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension n il existe une base $\{e_j\}_{j=1,\ldots,n}$ de E telle que

$$(x \mid y) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j \quad \text{si} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Par sesquilinéarité, une base $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ vérifie la propriété de l'exercice si, et seulement si elle est orthonormée pour $(\cdot \mid \cdot)$, c'est-à-dire si elle vérifie $(e_j \mid e_k) = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ vaut 1 pour $j = k$ et 0 sinon. Le but de l'exercice est donc de prouver qu'en dimension finie tout produit scalaire hermitien admet une base orthonormée. On note $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot \mid \cdot)}$.

En dimension 1, on considère un vecteur non nul a et la base formée du vecteur unitaire $e = a/\|a\|$.

Supposons maintenant que la propriété est démontrée jusqu'au rang n. On considère un produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension $n+1$. Soit b un vecteur non nul de E, supposé normalisé $\|b\| = 1$, et $F = \{b\}^{\perp}$ (l'orthogonalité est au sens du produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$). Le sous-espace vectoriel F est de dimension n et la restriction de $(\cdot \mid \cdot)$ à F est un produit scalaire hermitien. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\{e_j\}_{j=1,\ldots,n}$ de F orthonormée pour $(\cdot \mid \cdot)$. Le système $\{e_1, \ldots, e_n, b\}$ est une base orthonormée pour E, ce qui complète le raisonnement par récurrence.

(b) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Soit $\{z_l\}_{1 \leqslant l \leqslant n}$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux dans H, et $x \in H$.

i) Montrer qu'il existe une unique famille de scalaires $\{c_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $x - \sum_{k=1}^{n} c_k z_k$ et z_l soient orthogonaux pour tout $1 \leqslant l \leqslant n$.

Soit l un entier entre 1 et n. On a $(z_l \mid x - \sum_{k=1}^{n} c_k z_k) = (z_l \mid x) - c_l \|z_l\|^2$. Cela prouve donc que $x - \sum_{k=1}^{n} c_k z_k$ est orthogonal à z_l si et seulement si $c_l = \frac{(z_l|x)}{\|z_l\|^2}$. On obtient donc l'existence et l'unicité de la famille $\{c_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

ii) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{z_l\}_{1 \leqslant l \leqslant n}$. Justifier l'existence de la projection de x sur F et calculer $d(x, F)$.

Le sous-espace vectoriel F est de dimension finie, donc fermé (cours 3). Cela prouve l'existence de la projection de x sur F. D'après la question précédente, cette projection est égale à $\sum_{k=1}^{n} c_k z_k$. De plus, on a $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \|\sum_{k=1}^{n} c_k z_k\|^2$. Puisque les vecteurs $\{z_l\}_{1 \leqslant l \leqslant n}$ sont deux à deux orthogonaux, on calcule $\|\sum_{k=1}^{n} c_k z_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|z_k\|^2$, et on obtient finalement

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(z_k \mid x)|^2}{\|z_k\|^2}$$

Exercice 83. (Distance et projection pour une norme non associée à un produit scalaire) On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbf{C})$ muni de la norme

$$\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On définit F l'ensemble des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. Soit f_0 la fonction égale à 1 sur $[0,1]$. Calculer $d(f_0, F)$ où la distance de f_0 à F est définie à partir de la norme ci-dessus. Existe-t-il $f \in F$ tel que $\|f_0 - f\| = d(f_0, F)$?

Pour tout $f \in F$, on a

$$\|f_0 - f\| = 1 + \int_0^1 |1 - f(x)| dx.$$

On peut choisir des fonctions f dans F pour rendre l'intégrale ci-dessus arbitrairement petite, donc

$$d(f_0, F) = 1.$$

Mais l'intégrale ne peut pas être rendue exactement nulle (sinon $f = 1$ n'appartient pas à F) et donc la distance n'est pas atteinte.

Exercice 84. (Un contre-exemple au théorème de représentation de Riesz dans le cas préhilbertien) On considère l'espace préhilbertien réel $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $p \geqslant 0$ et $a \in]0,1[$ fixés, on définit l'application

$$A(f) = \int_0^a t^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que A est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

La linéarité de A se déduit de celle de l'intégrale. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|A(f)| \leqslant \left(\int_0^a t^{2p}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \|f\| = \left(\frac{a^{2p+1}}{2p+1}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|.$$

Pour montrer que $\|A\| = \left(\frac{a^{2p+1}}{2p+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, on considère la suite de fonctions continues pour $n \geqslant \frac{1}{1-a}$:

$$f_n(t) = \begin{cases} t^p & \text{si } t \in [0,a] \\ na^p\left(a + \frac{1}{n} - t\right) & \text{si } t \in [a, a+1/n] \\ 0 & \text{si } t \in [a+1/n, 1] \end{cases}$$

(b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $A(f) = (f \mid g)$ pour tout $f \in E$.

Supposons qu'il existe g de E tel que, pour tout $f \in E$,

$$A(f) = \int_0^a t^p f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $b \in]a, 1[$ arbitraire. En considérant $f \in E$ telle que $f = g$ sur $[b, 1]$, $f = 0$ sur $[0, a]$ et $f = \frac{x-a}{b-a} g$ sur $[a, b]$, on a $A(f) = 0 \geqslant \int_b^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $g = 0$ sur $[a, 1]$ et pour tout $f \in E$,

$$\int_0^a [t^p - g(t)] f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En choisissant $f(t) = t^p - g(t)$ sur $[0, 1]$, on trouve $g(t) = t^p$ sur $[0, a]$. Contradiction avec le fait que g est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 85. (Polynômes d'Hermite) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$, c'est-à-dire l'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que $\int_{\mathbf{R}} |f|^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x < \infty$, muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_{\mathbf{R}} \overline{f} g e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

On définit les *polynômes d'Hermite* :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),$$

ainsi que les *fonctions d'Hermite* :

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x).$$

(a) Calculer H_0, H_1, H_3 et H_4.

On calcule :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

(b) Montrer que H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n, et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace vectoriel engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Le fait que H_n soit un polynôme de degré n (assertion A_n) se prouve par récurrence. Pour $n = 0$ cela se déduit de l'expression de H_0. La preuve de l'implication $A_n \implies A_{n+1}$ découle du calcul suivant :

$$H_{n+1}(x) = -e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[H_n e^{-x^2}\right](x) = -H_n'(x) + 2xH_n(x).$$

Pour la question de l'orthogonalité, on se donne une fonction polynomiale P de degré au plus $n - 1$ et on calcule :

$$\int_{\mathbf{R}} P(x) H_n(x)\, e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} (-1)^n P(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne, après n intégrations par parties :

$$\int_{\mathbf{R}} P(x) H_n(x)\, e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}x^n}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(c) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x) \psi_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

On ne perd rien en généralité à supposer que $n > m$, et alors :

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La nullité découle alors de la seconde partie de la question précédente.

(d) Montrer $H_n' = 2nH_{n-1}$ et $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$.

On rappelle l'identité vue à la question (b), pour tout $n \geqslant 0$,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) \qquad (*_n)$$

Ainsi, la deuxième égalité de la question se déduit directement de la première.
On prouve la première égalité par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $H_1'(x) = 2H_0(x)$ par la question (a). Supposons maintenant l'égalite vraie jusqu'au rang n. En dérivant $(*_n)$, en utilisant $H_n' = 2nH_{n-1}$ et ensuite $(*_{n-1})$, on trouve

$$H_{n+1}' = 2H_n + 2xH_n' - 2nH_{n-1}' = 2H_n + 4nxH_{n-1} - 2nH_{n-1}' = 2(n+1)H_n.$$

Autre méthode : on peut aussi calculer H_{n+1} par la formule de Leibniz pour les dérivations itérées. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(e^{-x^2}) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(-2xe^{-x^2}) \\ &= (-1)^n e^{x^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(2x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}), \end{aligned}$$

somme dans laquelle seuls les termes pour $j = 0$ et $j = 1$ sont non nuls. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^n 2xe^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}) + n(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(e^{-x^2}) \\ &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

La première égalité se déduit alors de $(*_n)$.

Exercice 86. (Suite de l'exercice précédent) On reprend les notations de l'exercice précédent.

(a) Montrer que

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1} \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}.$$

En déduire

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)\psi_n = (2n+1)\psi_n.$$

Retrouver le résultat de la question (c) de l'exercice 4.

Pour la première identité demandée, on a : $\psi_n'(x) + x\psi_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}H_n'(x)$, soit $2n\psi_{n-1}(x)$ par l'exercice qui précède. Pour la deuxième identité demandée, on calcule :

$$\psi_n'(x) - x\psi_n(x) = (H_n'(x) - 2xH_n(x))e^{\frac{-x^2}{2}},$$

ce qui vaut $-\psi_{n+1}(x)$ par $(*_n)$.
Pour la suite, on peut écrire formellement :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x\right)\circ\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x\right)=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x^2+\mathrm{Id},$$

le terme Id provenant du crochet $[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\cdot x]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\circ\cdot x-\cdot x\circ\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, par calcul direct (ou *cf* cours de mécanique quantique). On a : $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x^2)\psi_n=[(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x)\circ(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x)]\psi_n-\psi_n$, autrement dit : $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x^2)\psi_n=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x)\psi_{n+1}-\psi_n=(2n+1)\psi_n$.
Par une double intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}(2n+1)\int_{\mathbf{R}}\psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}}(-\psi_n''(x)+x^2\psi_n(x))\psi_m(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbf{R}}\psi_n(x)(-\psi_m''(x)+x^2\psi_m(x))\,\mathrm{d}x\\&=(2m+1)\int_{\mathbf{R}}\psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(b) Calculer $\int_{\mathbf{R}}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Que dire de la famille $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$?

On a

$$\int_{\mathbf{R}}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}}H_n(x)^2e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{\mathbf{R}}H_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

et par n intégrations par parties, on obtient : $\int_{\mathbf{R}}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=2^nn!\int_{\mathbf{R}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}2^nn!$.
Ceci implique que la famille de fonctions $\{(\sqrt{\pi}2^nn!)^{-\frac{1}{2}}\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$.

Remarque : En combinant ces calculs à un résultat de densité qui sera vu dans la feuille d'exercices sur la transformée de Fourier, on obtient que la famille $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$.
L'idée sous-jacente est la *diagonalisation* de l'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x^2$ associé à l'oscillateur harmonique quantique. Par analogie avec la situation en dimension finie, on peut imaginer que cette diagonalisation est possible dans une base orthonormale car l'opérateur est auto-adjoint (cela se voit formellement par intégration par parties). Dans cet exercice, on voit en effet que les fonctions propres sont les fonctions d'Hermite, qu'elles sont orthogonales dans $L^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$ et que les niveaux d'énergie sont non dégénérés puisque les espaces propres sont des droites.

Exercice 87. (Un calcul de projection sur un convexe fermé) On considère dans $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ l'ensemble

$$\Gamma=\{(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} : \text{pour tout } n\in\mathbf{Z},\ |x_n|\leqslant 1\}.$$

(a) Montrer que Γ est un convexe fermé.

La convexité est une conséquence de l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$. Pour voir que Γ est fermé, on utilise le critère séquentiel : soit $(x^k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de Γ qui converge dans ℓ^2 vers un élément $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. En écrivant $x^k=(x_n^k)_{n\in\mathbf{Z}}$, la condition d'appartenance à Γ se traduit par $|x_n^k|\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et tout $k\geqslant 0$. La convergence $\lim_{k\to\infty}\|x-x^k\|_{\ell^2}=0$ s'écrit $\sum_{n\in\mathbf{Z}}|x_n-x_n^k|^2\to 0$ quand $k\to\infty$, ce qui implique que pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on a $\lim_{k\to\infty}x_n^k=x_n$ et donc $|x_n|\leqslant 1$ par passage à la limite.

(b) Déterminer la projection d'un élément de $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ sur Γ.

Soit $x \in \ell^2$. Le théorème de projection sur un convexe fermé affirme qu'il existe un unique point y de Γ (la projection de x sur Γ) qui minimise la quantité $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n - z_n|^2$ quand z parcourt Γ. Cela revient à minimiser $|x_n - z_n|$ pour tout n, et donc la suite y est fabriquée à partir de x de la façon suivante : pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, si $x_n \in [-1; 1]$ on pose $y_n = x_n$, si $x_n < -1$, on pose $y_n = -1$ et enfin si $x_n > 1$, on pose $y_n = 1$.

Exercice 88. (Condition pour qu'une norme soit associée à un produit scalaire) Soit $\|\cdot\|$ une norme définie dans un espace vectoriel réel E. Le but de l'exercice est de montrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire euclidien sur E si, et seulement si, elle vérifie l'identitée du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(a) Déterminer la seule forme possible du produit scalaire. On la notera $(\cdot \mid \cdot)$.

Si la norme dérive d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2, \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2.$$

En additionnant ces identités, on trouve l'identité du parallélogramme.

En soustrayant ces identités, on voit que le produit scalaire vérifie la formule de polarisation :

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Il s'agit maintenant de montrer que pour tout norme vérifiant l'identité du parallélogramme, la formule ci-dessus définit bien un produit scalaire sur E.

On voit immédiatement que $(x \mid x) = \|x\|^2 \geqslant 0$ et $(x \mid x) = 0$ est équivalent à $x = 0$. Par ailleurs, $(y \mid x) = (x \mid y)$ est aussi immédiat.

Il reste à vérifier la linéarité de l'application partielle $x \mapsto (x \mid y)$.

(b) Démontrer que, pour tout $x, y, z \in E$,

$$(x+y \mid z) + (x-y \mid z) = 2(x \mid z), \quad (2x \mid z) = 2(x \mid z).$$

On a en utilisant d'abord la formule de $(\cdot \mid \cdot)$ et ensuite l'identité du parallélogramme

$$\begin{aligned}
&(x+y \mid z) + (x-y \mid z)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\|x-z\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(x \mid z).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $y = x$, cela donne $(2x \mid z) = 2(x \mid z)$.

(c) En déduire $(u \mid v) + (w \mid v) = (u + w \mid v)$. Conclure.

Pour u, v, w donnés, on choisit $z = w$ et $x = \frac{1}{2}(u+w)$, $y = \frac{1}{2}(u-w)$ de sorte que $u = x + y$, $w = x - y$. Par la question précédente,

$$(u \mid v) + (w \mid v) = (x+y \mid v) + (x-y \mid v) = (2x \mid v) = (u+w \mid v).$$

Il reste à montrer que pour tout réel λ, $(\lambda x \mid z) = \lambda(x \mid z)$. Cela est vrai pour les entiers (à montrer par récurrence) par l'identité précédente. On en déduit que c'est également vrai pour les inverses d'entiers, puis pour les rationnels. Finalement, en approchant tout réel par une suite de nombres rationnels, et en passant à la limite (l'expression de $(\cdot \mid \cdot)$ en fonction $\|\cdot\|$ implique sa continuité), on en déduit que l'identité est vérifiée pour tout λ réel.

Exercice 89. (Distance entre deux parties convexes) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert.
(a) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de parties convexes fermées bornées non vides de H. Soit $x_0 \in H \setminus A_1$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ des projections de x_0 sur les $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de H. En déduire que $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ n'est pas vide.

Soient $1 \leqslant n < m$. Par décroissance de $(A_n)_{n\geqslant 1}$, on a $A_m \subseteq A_n$, et donc

$$d(x_0, A_n) = \inf_{a\in A_n} d(x_0, a) \leqslant \inf_{a\in A_m} d(x_0, a) = d(x_0, A_m).$$

Comme A_1 est bornée la suite croissante des $d(x_0, A_n)$ est bornée elle aussi (par exemple parce que $d(x_0, A_k) = \|x_0 - a_k\| \leqslant \|x_0\| + R$ où R est le rayon d'une boule contenant A_1 et donc tous les A_k pour $k \geqslant 1$) ; cette suite est donc convergente.
Par décroissance de $(A_n)_{n\geqslant 1}$ et par convexité de A_n on a : $\frac{1}{2}(a_m + a_n) \in A_n$, et donc $\|x_0 - \frac{1}{2}(a_m + a_n)\| \geqslant d(x_0, A_n)$. Enfin, par l'identité du parallélogramme, on a :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 = \|x_0 - a_n\|^2 + \|x_0 - a_m\|^2 - 2\left\|x_0 - \frac{1}{2}(a_m + a_n)\right\|^2,$$

ce qui entraîne, par ce qui précède :

$$\frac{1}{2}\|a_n - a_m\|^2 \leqslant [d(x_0, A_m)]^2 - [d(x_0, A_n)]^2,$$

Cela entraîne que la suite (a_n) est de Cauchy. La limite a de cette suite appartient à tous les A_n. En effet, pour un indice N fixé on a : $a_n \in A_n \subseteq A_N$ pour tout $n \geqslant N$; et par passage à la limite quand $n \to \infty$ et puisque A_N est fermé : $a \in A_N$ pour tout $N \geqslant 1$.

(b) Soient A et B deux parties convexes fermées bornées non vides de H disjointes. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\|a - b\| = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\|.$$

Notons $d_0 = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\|$. On pose pour tout $n \geqslant 1$:

$$A_n = \left\{x \in A : d(x, B) \leqslant d_0 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Vérifions que c'est une famille qui satisfait les conditions de la question précédente. Les A_n sont bornées car A est bornée par hypothèse. Les A_n sont convexes : pour $x, x' \in A_n$ de projections sur B respectives $b, b' \in B$, et pour $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\|\ \lambda x + (1-\lambda)x' - (\lambda b + (1-\lambda)b')\ \| \leqslant \lambda\|x - b\| + (1-\lambda)\|x' - b'\| \leqslant d_0 + \frac{1}{n},$$

assurant que $d(\lambda x + (1-\lambda)x', B) \leqslant d_0 + \frac{1}{n}$. Les A_n sont fermées : nous avons vu dans l'exercice 10 de la feuille d'exercices 1 que l'application $x \mapsto d(x, B)$ est 1-Lipchitzienne et donc continue. Ainsi, A_n est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[0, d_0 + \frac{1}{n}]$ par une application continue, donc une partie fermée de H.
Par la question qui précède, il existe un point a appartenant à l'intersection des A_n. Ce point a et sa projection b sur B répondent à la question posée.

Exercice 90. (Une propriété de l'application de projection) Montrer que dans un espace de Hilbert, l'application de projection sur une partie convexe fermée non vide est 1-lipschitzienne.

Soit H un espace de Hilbert et soit A une partie convexe fermée non vide de H. On se donne $x, x' \in H$ et on note $a, a' \in A$ les projections respectives sur A. D'après le cours, on a pour tout $z \in A$:

$$\Re(x - a|z - a) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \Re((x' - a'|z - a') \leqslant 0$$

En prenant $z = a'$ dans la première inégalité et $z = a$ dans la seconde, on obtient par addition :

$$\Re((x - x') - (a - a')|a' - a) \leqslant 0,$$

et donc

$$\Re((x - x')|a - a') \geqslant \|a - a'\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donnant $\Re((x - x')|a - a') \leqslant \|a - a'\|\|x - x'\|$, on en déduit : $\|a - a'\| \leqslant \|x - x'\|$.

Exercice 91. (Une relation impliquant la distance à un sous-espace vectoriel) Soit $(H, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Soient V un sous-espace vectoriel fermé de H et $x_0 \in H \setminus V$.

(a) Trouver une relation entre $d(x_0, V)$ et la norme de la forme linéaire sur V définie par $v \mapsto (x_0 \mid v)$.

Comme V est fermé, on peut écrire $H = V \oplus V^\perp$. En notant v_0 la projection orthogonale de x_0 sur V, on obtient la somme orthogonale : $x_0 = v_0 + (x_0 - v_0)$ où $x_0 - v_0 \in V^\perp$. Ceci permet d'écrire : $\|x_0\|^2 = \|v_0\|^2 + \|x_0 - v_0\|^2$, et donc

$$[d(x_0, V)]^2 = \|x_0 - v_0\|^2 = \|x_0\|^2 - \|v_0\|^2.$$

Notons $\varphi_{x_0} : v \mapsto (x_0 \mid v)$. Par orthogonalité puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour tout $v \in V$,

$$|\varphi_{x_0}(v)| = |(v_0 \mid v)| \leqslant \|v_0\|\|v\|$$

et donc $\|\varphi_{x_0}\| \leqslant \|v_0\|$. Comme $\varphi_{x_0}(v_0) = \|v_0\|^2$, on a en fait égalité : $\|\varphi_{x_0}\| = \|v_0\|$. En combinant ces égalités, on obtient la relation :

$$\|\varphi_{x_0}\|^2 + [d(x_0, V)]^2 = \|x_0\|^2.$$

(b) Étudier l'exemple : $H = L^2([0; 1], \mathrm{d}t)$,

$$V = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

et x_0 est la fonction identité $t \in [0, 1] \mapsto t$.

Par définition, V est l'orthogonal du sous-espace W de dimension 2 engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{[0;1]}$ et $\mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2}]}$; en particulier V est fermé. Pour écrire la décomposition orthogonale de la fonction identité x_0 suivant $H = V \oplus V^\perp = W^\perp \oplus W$, on va projeter x_0 sur W. On remarque qu'une base orthonormée de W est donnée par les fonctions $\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2}]}$ et $\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1]}$. La projection $P_W(x_0)$ de x_0 sur W s'écrit :

$$P_W(x_0) = (x_0|\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2}]})\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2}]} + (x_0|\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1]})\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1]} = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0;\frac{1}{2}]} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{[\frac{1}{2};1]}.$$

Ainsi, on a : $\|x_0\|^2 = \frac{1}{3}$ et $[d(x_0, V)]^2 = \|P_W(x_0)\|^2 = \frac{10}{32}$. Finalement, comme la projection de x_0 sur V est $x_0 - P_W(x_0)$:

$$\begin{aligned}\|\varphi_{x_0}\| &= \sup\left\{\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t : \|f\|_{L^2} \leqslant 1, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}\\ &= \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{10}{32}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Exercice 92. (Isométries linéaires entre espaces de Hilbert) Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert complexes (pour lesquels la norme et le produit scalaire sont notés $\|\cdot\|$ et $(\cdot \mid \cdot)$). Soit $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.

(a) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H_1$;

(ii) $(\Phi(x) \mid \Phi(y)) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H_1$.

On dit alors que Φ est une *isométrie linéaire*. Justifier qu'une telle isométrie linéaire est nécessairement injective.

Vu le calcul de la norme à partir du produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, l'implication (ii) $\implies$ (i) est immédiate. Pour l'autre implication, il suffit d'utiliser la formule de polarisation.

La condition d'isométrie $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ implique clairement que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$, ce qui implique l'injectivité par linéarité.

(b) On suppose que $\Phi : H_1 \to H_2$ est une isométrie linéaire. Montrer que :

— L'image de H_1 par Φ, muni de la restriction du produit scalaire de H_2, est un espace de Hilbert.

Il s'agit de voir qu'une isométrie est d'image fermée ; en effet la restriction du produit scalaire de H_2 fait alors de ImΦ un sous-espace complet pour la norme associée.

On utilise le critère séquentiel adapté à la situation : soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\operatorname{Im}\Phi$ convergeant vers $y \in H_2$, disons vers y ; montrons que $y \in \operatorname{Im}\Phi$. Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in H_1$ tel que $y_n = \Phi(x_n)$. Commme suite convergente, $(y_n)_{n\geqslant 1}$, autrement dit $\big(\Phi(x_n)\big)_{n\geqslant 1}$, est de Cauchy dans H_2. Par isométrie et par linéarité de Φ, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi une suite de Cauchy dans H_1. Par complétude de H_1, cette suite converge vers x un élément de H_1. L'application linéaire Φ est continue car 1-lipschitzienne, et donc par passage à la limite $y = \Phi(x) \in \operatorname{Im}\Phi$.

Remarque : la même démonstration prouve qu'une isométrie au sens de la condition (i) entre espaces de Banach est d'image fermée.

— Si E_1 est un sous-espace vectoriel dense de H_1, alors $\Phi(E_1)$ est dense dans $\Phi(H_1)$.

On utilise à nouveau qu'une application linéaire isométrique est 1-lipschitzienne donc continue. Soit $y = \Phi(x)$ avec $x \in H_1$. Par densité, on peut écrire $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ avec $x_n \in E_1$ pour tout $n \geqslant 1$, et par continuité on a : $y = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n)$.

— Si (e_j) est une base hilbertienne de H_1, alors son image par Φ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

Le respect de la norme et du produit scalaire implique que l'image d'une famille orthonormée par une isométrie linéaire est une famille orthonormée. L'autre propriété d'une base hilbertienne est que le sous-espace vectoriel engendré par cette base soit dense pour la norme hilbertienne. Or, la question précédente implique précisément que l'image d'une base hilbertienne de H_1 par une isométrie linéaire Φ engendre un sous-espace vectoriel dense dans $\operatorname{Im}\Phi$.

Exercice 93. (*Convergence faible dans un espace de Hilbert) Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de H *converge faiblement vers* $f \in H$ si

$$\text{pour tout } h \in H, \quad \lim_{n\to+\infty} (h \mid f_n) = (h \mid f).$$

(a) Montrer que si la limite faible d'une suite existe, alors elle est unique.

L'unicité de la limite est évidente : si f et $\tilde{f}$ sont limites faibles de la même suite alors pour tout h, $(h \mid f - \tilde{f}) = 0$ et donc $f = \tilde{f}$.

(b) Montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f \in H$, alors elle converge faiblement vers f.

Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f \in H$, alors par l'inégalité de Cauchy -Schwarz

$$|(h \mid f_n) - (h \mid f)| = |(h \mid f_n - f)| \leq \|h\|\|f_n - f\| \to 0.$$

(c) Soit $\{e_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la suite $(e_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0. En déduire que la suite (e_j) n'admet aucune sous-suite convergente.

En déduire que la boule unité de H n'est pas compacte.

Soit $\{e_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Soit $h \in H$, alors $\sum_{j\in\mathbf{N}} |(e_j \mid h)|^2 < \infty$ et donc $\lim_{j\to\infty}(e_j \mid h) = 0$. Ceci signifie que la suite $(e_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0.

Supposons qu'une sous-suite de (e_j) converge vers $f \in H$. Alors, par (a) et (b), $f = 0$, d'où $\|e_j\| \to 0$. C'est une contradiction avec $\|e_j\| = 1$.

(d) On veut maintenant montrer que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers un élément f de H. On va utiliser un argument d'extraction diagonale :

(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de H. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\psi_1(n)})$ telle que $(e_1|f_{\psi_1(n)})$ converge vers un scalaire γ_1 ($\psi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante).

(ii) Montrer ensuite que l'on peut extraire de $(f_{\psi_1(n)})$ une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\psi_2(n)})$ telle que $(e_2|f_{\psi_1\circ\psi_2(n)})$ converge vers un scalaire γ_2. Continuer l'argument et construire ainsi pour tout j une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)})$ extraite des précédentes et telle que $(e_j|f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)})$ converge vers un scalaire γ_j.

(iii) Définir pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(e_j \mid f_{\varphi(n)}) = \gamma_j$, pour tout j. Finalement, montrer que $\sum_j \gamma_j e_j$ définit un élément de H vers lequel la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ converge faiblement.

(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de H. La suite $((e_1 \mid f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{C}$. Donc, il existe une sous-suite $(f_{\psi_1(n)})$ telle que $(e_1 \mid f_{\psi_1(n)}) \to \gamma_1 \in \mathbf{C}$.

(ii) La suite $(e_2 \mid f_{\psi_1(n)})$ est bornée dans $\mathbf{C}$ et donc il existe une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\psi_2(n)})$ telle que $(e_2 \mid f_{\psi_1\circ\psi_2(n)}) \to \gamma_2 \in \mathbf{C}$.

On continue l'argument et on construit ainsi pour tout j une sous-suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)})$ extraite des précédentes telle que $(e_j \mid f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)}) \to \gamma_j$. On observe également que pour tout $1 \leq j' < j$, $(e_{j'} \mid f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_j(n)}) \to \gamma_{j'}$.

(iii) On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n)$. Soit $j \in \mathbf{N}$, alors pour $n > j$, $(\varphi(n))$ est une sous-suite de $(\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_j(n))$ et donc $(e_j \mid f_{\varphi(n)}) \to \gamma_j$. pour tout j.

Soit $C > 0$ tel que pour tout n, $\|f_n\| \leq C$. Alors, pour tout $J \geq 1$, $\sum_{j=1}^J |\gamma_j|^2 \leq C^2$. Donc, $\sum_j |\gamma_j|^2 < C^2$ et la somme de la série $f = \sum_j \gamma_j e_j$ définit un élément de H. Comme $(e_j \mid f_{\varphi(n)}) \to (e_j \mid f)$ pour tout j, on peut maintenant montrer que la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ converge faiblement vers f. En effet, soit $h \in H$, $h = \sum_j (e_j \mid h) e_j$. Alors

$$(h \mid f_{\varphi(n)} - f) = \sum_{j\leq J} \overline{(e_j \mid h)}(e_j \mid f_{\varphi(n)} - f) + \sum_{j>J} \overline{(e_j \mid h)}(e_j \mid f_{\varphi(n)} - f).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|\sum_{j>J} \overline{(e_j \mid h)}(e_j \mid f_{\varphi(n)} - f)|^2 \leq (2C)^2 \sum_{j>J} |(e_j \mid h)|^2 \leq \varepsilon$ pour J assez grand. Un tel J étant maintenant fixé, pour n assez grand, on a $|\sum_{j\leq J} \overline{(e_j \mid h)}(e_j \mid f_{\varphi(n)} - f)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la convergence.

(e) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui converge faiblement vers $f \in H$. Comparer $\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$ et $\|f\|$. Que se passe-t-il si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|$? (On pourra développer $\|f_n - f\|^2$.)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui converge faiblement vers $f \in H$. On a $\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$ et de plus, au cas où $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|$ on obtient que f_n converge vers f dans H (pour le voir, il suffit de développer $\|f_n - f\|^2$ et passer à la limite en utilisant la convergence faible pour le terme croisé).