Feuille d'exercices 3

Exercice 1. (Extensions quadratiques de $\mathbf{Q}$)

(i) Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier qui n'est pas un carré. Déterminer

$$[\mathbf{Q}[\sqrt{d}] : \mathbf{Q}],$$

et les $\mathbf{Q}$-conjugués de $\sqrt{d}$ dans $\mathbf{C}$.

(ii) Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ des non carrés. Montrer que

$$\sqrt{a} \in \mathbf{Q}[\sqrt{b}]$$

si et seulement si a/b est le carré d'un nombre rationnel.

(iii) Montrer que si $K/\mathbf{Q}$ est telle que

$$[K : \mathbf{Q}] = 2,$$

alors

$$K = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$$

pour un unique entier non nul d sans facteurs carrés.

Exercice 2.

(i) Montrer que

$$K = \mathbf{Q}[\sqrt{5}, \sqrt[5]{2}]$$

est de degré 10 sur $\mathbf{Q}$.

(ii) En déduire que K est isomorphe à la $\mathbf{Q}$-algèbre

$$\mathbf{Q}[X, Y]/(X^2 - 5, Y^5 - 2).$$

(iii) Montrer que

$$\mathbf{Q}[\sqrt[6]{2}] = \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}].$$

Exercice 3. Soit L/K une extension de degré fini impair et $x \in L$.

Montrer que

$$K[x] = K[x^2].$$

Exercice 4. Soit

$$K = \mathbf{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] \subset \mathbf{C}.$$

(i) Montrer que

$$[K : \mathbf{Q}] = 4$$

et expliciter une base de $K/\mathbf{Q}$.

(ii) Trouver tous les sous-corps de K.

(iii) Soit $x \in K$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que

$$\mathbf{Q}[x] = K.$$

(iv) Quels sont les $\mathbf{Q}$-conjugués dans K de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$?

(v) Déterminer les k-conjugués de $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ dans K pour chacun des sous-corps k trouvés au (iii).

Exercice 5. Soit
$$K = \mathbf{Q}\big[\sqrt{2+\sqrt{2}}\big] \subset \mathbf{C}.$$

(i) Déterminer le polynôme minimal de
$$\sqrt{2+\sqrt{2}}$$
sur $\mathbf{Q}$ ainsi que ses conjugués.

(ii) Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}-\mathrm{alg}}(K,K)$ est un groupe pour la composition isomorphe à
$$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}.$$

(iii) Trouver tous les sous-corps de K.

Exercice 6. (Polynômes cyclotomiques pour p premier) Soit p un nombre premier.

(i) Montrer que
$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + \cdots + X + 1$$
est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

(On pourra considérer le polynôme $\Phi_p(X+1)$.)

(ii) En déduire la valeur de
$$[\mathbf{Q}[e^{2i\pi/p}] : \mathbf{Q}]$$
puis celle de
$$[\mathbf{Q}[\cos(2\pi/p)] : \mathbf{Q}].$$

Exercice 7. Soit
$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}.$$

(i) Montrer que 2 divise $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}]$.

(ii) Montrer que
$$[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = 6.$$

Exercice 8.

Un nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ est dit entier sur $\mathbf{Z}$ si z est racine d'un polynôme unitaire non nul à coefficients entiers.

(i) Montrer que $z \in \mathbf{C}$ est entier sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si son polynôme minimal $\pi_{z,\mathbf{Q}}(X)$ est à coefficients entiers.

(ii) Montrer qu'un nombre complexe dans $\mathbf{Q}[i]$ est entier sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont dans $\mathbf{Z}$.