École polytechnique 2022-2023
Théorie de Galois

Feuille d'exercices 6

Soient k un corps parfait et Ω une clôture algébrique de k. On rappelle qu'une sous-extension finie K/k de Ω est *galoisienne* si, pour chaque $x \in K$, tous les k-conjugués de x dans Ω appartiennent à K. D'après un résultat du cours, il est équivalent de demander que l'inclusion naturelle $\mathrm{Hom}_k(K,K) \subset \mathrm{Hom}_k(K,\Omega)$ soit une égalité, de sorte que $|\mathrm{Hom}_k(K,K)| = [K : k]$. Le groupe $\mathrm{Gal}(K/k) = \mathrm{Hom}_k(K,K)$ est appelé *groupe de Galois* de K/k. Si $x \in K$, les k-conjugués de x sont alors permutés transitivement par $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Si $P \in k[X]$, on note R_P l'ensemble de ses racines dans Ω et $\mathrm{Gal}(P,k)$ le groupe de Galois de l'extension galoisienne $k[R_P]$ sur k.

Exercice 1. Soit $P \in k[X]$ un polynôme irréductible de degré n et soit $G = \mathrm{Gal}(P,k)$.

(i) Rappeler pourquoi $|R_P| = n$.

(ii) En déduire que n divise $|G|$ et que $|G|$ divise $n!$.

Exercice 2. Soit K une extension galoisienne de k.

(i) Soient $k \subseteq F_1 \subseteq K$ et $k \subseteq F_2 \subseteq K$ des sous-extensions de K. On note F_1F_2 le *compositum* de F_1 et F_2, c'est-à-dire, la plus petite sous-extension de K contenant F_1 et F_2. Montrer que

$$\mathrm{Gal}(K/F_1F_2) = \mathrm{Gal}(K/F_1) \cap \mathrm{Gal}(K/F_2).$$

(ii) Soit $k \subseteq F \subseteq K$ une sous-extension de K. Notons L la plus petite sous-extension galoisienne de K contenant F . Montrer que

$$\mathrm{Gal}(K/L) = \bigcap_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} \sigma \mathrm{Gal}(K/F)\sigma^{-1}.$$

Exercice 3. Soient $K_1 \subset \Omega$ et $K_2 \subset \Omega$ des extensions galoisiennes de k.

(i) Montrer que $K_1 \cap K_2$ et K_1K_2 sont aussi galoisiennes sur k.

(ii) Montrer que $\mathrm{Gal}(K_1K_2/K_2)$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(K_1/K_1 \cap K_2)$.

(iii) En déduire que $[K_1K_2 \colon k] = [K_1 \colon k] \cdot [K_2 \colon k]$ si et seulement si $K_1 \cap K_2 = k$.

(iv) Montrer qu'il y a un morphisme injectif

$$\mathrm{Gal}(K_1K_2/k) \to \mathrm{Gal}(K_1/k) \times \mathrm{Gal}(K_2/k)$$

qui est un isomorphisme si et seulement si $K_1 \cap K_2 = k$.

Exercice 4. Soit $x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = 4$ et déterminer les conjugués de x dans $\mathbf{C}$.

(ii) Montrer que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisienne.

(iii) Montrer que $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ sont galoisiennes.

(iv) Vérifier que $\mathbf{Q}[x,i]/\mathbf{Q}$ est galoisienne de degré 8.

(v) Montrer qu'en revanche $\mathbf{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]/\mathbf{Q}$ est galoisienne de degré 4.

(vi) Montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}[\sqrt{2+\sqrt{2}}]/\mathbf{Q})$ est cyclique d'ordre 4.

Exercice 5. Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ le polynôme cubique unitaire dont les racines sont

$$x_1 = 2\cos(2\pi/7), \quad x_2 = 2\cos(4\pi/7), \quad x_3 = 2\cos(6\pi/7).$$

(i) Vérifier que $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$.

(ii) Montrer que P est irréductible.

(iii) Montrer que $\mathbf{Q}[x_1]$ est un corps de décomposition de P.

(iv) En déduire $\mathrm{Gal}(P, \mathbf{Q})$.

Exercice 6. Soient $f = X^4 - 4X^2 - 1 \in \mathbf{Q}[X]$ et $g = Y^2 - 4Y - 1 \in \mathbf{Q}[Y]$.

(i) Pourquoi le groupe $\mathrm{Gal}(g, \mathbf{Q})$ est-il un quotient de $G = \mathrm{Gal}(f, \mathbf{Q})$?

(ii) Montrer que G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{R_f}$ *compatible* avec la partition

$$\left\{\left\{\sqrt{2+\sqrt{5}}, -\sqrt{2+\sqrt{5}}\right\}, \left\{\sqrt{2-\sqrt{5}}, -\sqrt{2-\sqrt{5}}\right\}\right\}$$

de R_f. (On dit qu'une permutation σ d'un ensemble fini E est *compatible* avec une partition de E lorsque $x \sim y$ implique $\sigma(x) \sim \sigma(y)$ pour $\sim$ la relation d'équivalence dont les classes sont la partition considérée.)

(iii) En déduire que G est contenu dans le groupe diédral du carré, c'est-à-dire le groupe des isométries du plan conservant le carré.

(iv) Montrer qu'il existe un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\sqrt{2+\sqrt{5}})$ est égal à $\sqrt{2-\sqrt{5}}$ ou $-\sqrt{2-\sqrt{5}}$.

(v) Montrer qu'il existe un élément $\tau \in G$ échangeant $\sqrt{2-\sqrt{5}}$ et $-\sqrt{2-\sqrt{5}}$ mais fixant $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

(vi) En déduire que G est le groupe diédral tout entier.

Exercice 7. Soit $P \in k[X]$ un polynôme irréductible de degré n et $K = k[R_P]$.

(i) Montrer que si $\mathrm{Gal}(K/k)$ est abélien alors $[K : k] = n$.

(ii) La réciproque est-elle vraie ?