ECO 361 Jean-Baptiste Michau
Juin 2023 Ecole Polytechnique

Introduction à l'économie

Solution 8: Les marchés financiers

Exercice 1: Projet d'investissement

1/ Pour déterminer si un projet d'investissement est profitable, il suffit de calculer sa **valeur actuelle nette** qui correspond à la différence entre la valeur actuelle des revenus et la valeur actuelle des coûts.

La valeur actuelle des revenus est égale à:

$$\frac{55}{1+0.1} + \frac{55}{(1+0.1)^2} + \frac{55}{(1+0.1)^3} = 136.78 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle des coûts est égale à:

$$100 + \frac{50}{1+0.1} = 145.45 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle nette du projet est donc de $136.78 - 145.45 = -8.68$ euros. Cette valeur étant négative, il n'est pas profitable pour l'entreprise de financer ce projet d'investissement.

2/ Avec un taux d'intérêt de 5%, la valeur actuelle des revenus est égale à:

$$\frac{55}{1+0.05} + \frac{55}{(1+0.05)^2} + \frac{55}{(1+0.05)^3} = 149.78 \text{ euros,}$$

tandis que la valeur actuelle des coûts est de:

$$100 + \frac{50}{1+0.05} = 147.62 \text{ euros.}$$

La valeur actuelle nette du projet s'élève donc à $149.78 - 147.62 = 2.16$ euros. Ce chiffre étant positif, il est désormais profitable pour l'entreprise de financer ce projet.

Une baisse du taux d'intérêt augmente la valeur actuelle des flux financiers futurs. Or, une caractéristique typique des projets d'investissement est qu'ils engendrent des coûts à court terme et qu'ils génèrent des revenus à long terme. Par conséquent, une baisse du taux d'intérêt augmente davantage la valeur actuelle des revenus que la valeur actuelle des coûts. Il améliorent donc la profitabilité des projets d'investissement.

De part ce mécanisme, la demande d'investissement des entreprises est une fonction décroissante du taux d'intérêt.

Exercice 2: Investissements immobiliers

1/ La somme empruntée E est égale à la valeur actuelle de y payée pendant n année. On a donc:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{y}{1+r} + \frac{y}{(1+r)^2} + \frac{y}{(1+r)^3} + ... + \frac{y}{(1+r)^n}, \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{y}{(1+r)^k}, \\
&= \frac{y}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].
\end{aligned}
$$

Cela implique:

$$
y = \frac{rE}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.
$$

2/ L'écart de rendement entre les placements immobiliers et les obligations sans risque peut s'expliquer, par exemple, par le travail que représente la gestion immobilière, par le manque de liquidité des biens immobiliers qui sont difficiles à acheter et à vendre, par le risque d'avoir un logement vacant pendant quelques temps ou encore par le risque d'une baisse des loyers ou des prix. En pratique, l'immobilier rapporte entre 2 et 4% de plus que les obligations sans risque.

Par soucis de simplicité, l'analyse qui suit fait abstraction des risques. Il est néanmoins naturel d'escompter les rendements immobiliers futurs au taux x, typiquement plus élevé que r, afin de prendre en compte ces inconvénients des rendements immobiliers relativement aux rendements obligataires qui sont plus sûrs et plus faciles à percevoir. Le prix P du bien immobilier est donc égal à la valeur actuelle des loyers d, escompté au taux x. On a donc:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{d}{1+x} + \frac{d}{(1+x)^2} + \frac{d}{(1+x)^3} + ..., \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{(1+x)^k}, \\
&= \frac{d}{x}.
\end{aligned}
$$

Le randement immobilier annuel x correspond donc bien au ratio du loyer d perçu relativement au prix P de l'actif.

Si une maison rapporte 25 000 euros chaque année et que le rendement immobilier s'élève à 5%, alors le prix de cette maison doit être égal à 500 000 euros. A l'inverse, les loyers de 25 000 euros représentent bien un rendement de 5% pour un actif immobilier d'une valeur de 500 000 euros.

3/ Les investissements immobiliers génèrent un rendement annuel de x. La première année vous touchez d que vous placez pendant $n-1$ années au taux x. La second année, vous touchez d que vous placez pendant $n-2$ années au taux x; et ainsi de suite jusqu'à la n-ième année où vous touchez juste d. Au bout de la n-ième année, votre bien vaudra toujours P. Par conséquent, votre fortune sera égale à:

$$\begin{aligned} F_n &= (1+x)^{n-1} d + (1+x)^{n-2} d + ... + d + P, \\ &= P + \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k d, \\ &= P + \frac{d}{x}\left[(1+x)^n - 1\right]. \end{aligned}$$

Dans la question précédent, nous avons établi que $d/x = P$. On a donc:

$$= P(1+x)^n .$$

Cela correspond à la fortune obtenue après avoir investi P pendant n années consécutives au taux x.

4/ Pour faire fructifier votre fortune, une meilleure solution est de s'endetter le plus possible au taux r afin d'effectuer des investissements immobiliers dont le rendement est de $x > r$.

Soit E_n le montant maximum que vous pouvez emprunter au taux r sur n années. Cela permet d'acheter un bien immobilier d'une valeur de E_n, en plus du bien d'une valeur de P que vous possédez déjà. Chaque année, vous toucherez un montant $x(E_n + P)$ de loyers, que vous allez intégralement consacrer au remboursement de l'emprunt E_n.[1]

Le niveau de l'emprunt E_n qui peut ainsi être financé est déterminé par le formule dérivée dans le première question, ce qui donne:

$$E_n = \frac{x(E_n + P)}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

[1] Si vous empruntez une somme supérieure à E_n sur n années, les loyers ne suffiront pas à rembourser la dette. Au bout des n années, il vous faudra alors vendre une partie de vos biens immobiliers pour rembourser la banque. On suppose ici que les banques ne souhaitent pas s'exposer au risque d'effondrement des prix de l'immobilier et refuse de vous prêter au delà de votre capacité à rembourser sur la base de vos loyers.

Au bout de n périodes, l'emprunt est remboursé et les deux biens immobiliers, d'une valeur totale de $E_n + P$, vous appartiennent. Votre fortune s'élève donc à:

$$L_n = E_n + P.$$

Par conséquent:

$$L_n - P = \frac{xL_n}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

ce qui implique:

$$L_n = \frac{P}{1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]}.$$

En supposant $L_n \in (0, \infty)$, on a $L_n > F_n$ si et seulement si:

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]} > (1+x)^n,$$
$$\frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] > \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right],$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k},$$
$$x > r.$$

Le recours à l'endettement permet de bénéficier de l'effet de levier, ce qui démultiplie la croissance de votre fortune si et seulement si vous parvenez à placer votre épargne avec un rendement supérieur au taux d'intérêt auquel vous vous endettez. Si $x < r$, l'effet de levier fonctionne à l'envers et fait fondre votre fortune.

Pour $r = 1\%$, $x = 4\%$, et $n = 15$ ans, on a $F_n = 1.04^{15}P = 1.80P$ et $L_n = P/(1 - 0.04/0.01(1 - 1/1.01^{15})) = 2.25P$. En se contentant de placer à 4% les revenus des loyers, la fortune augmente de 80% en 15 ans; tandis qu'en empruntant pour acheter un autre bien immobilier qui sera remboursé sur 15 ans par l'ensemble des loyers perçus, la fortune augmente de 125% en 15 ans!

5/ L_n peut être arbitrairement grand dès lors que, pour n'importe quel $L^n > 0$, le montant emprunté est inférieur à la valeur actuelle des remboursements annuels, soit:

$$L_n - P \leq \frac{xL_n}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

On doit donc avoir:

$$L_n\left(1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]\right) \leq P.$$

Cette inégalité est satisfaite pour n'importe quel $L_n > 0$ si et seulement si:

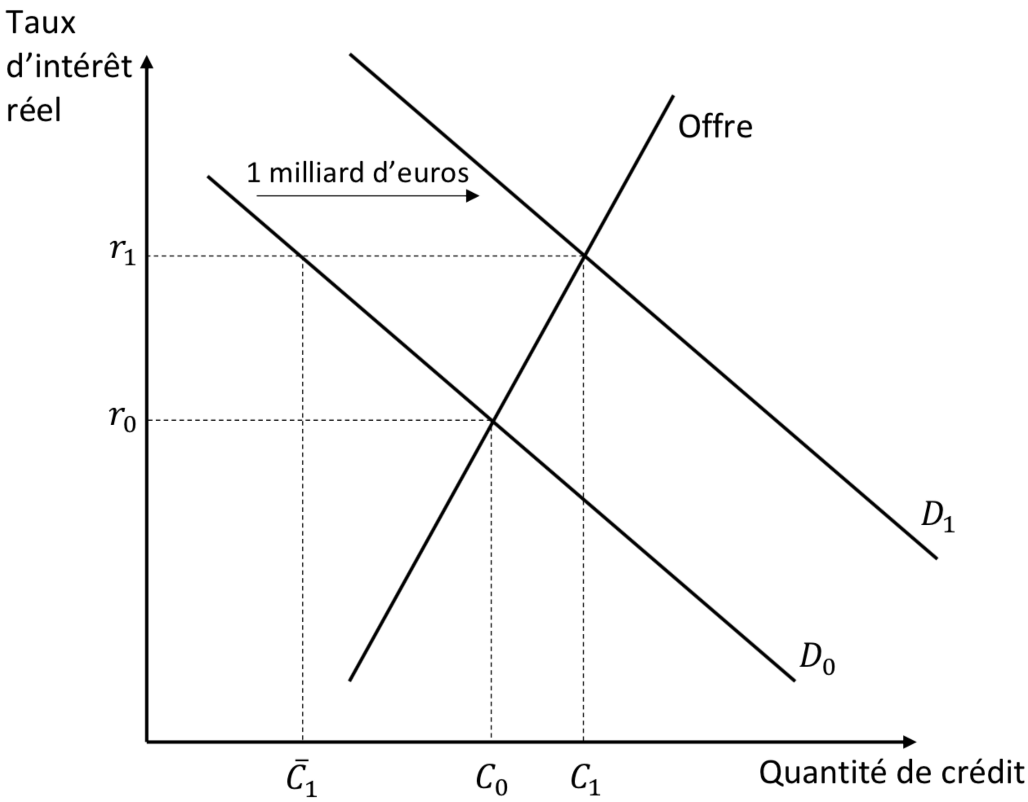
$$1 - \frac{x}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] \leq 0,$$
$$x \geq \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.$$

En ce cas, le rendement immobilier est si élevé que les loyers remboursent l'emprunt *sans même avoir besoin d'effectuer un apport personnel.* Le levier est donc infiniment grand! Dans notre exemple, avec $r = 1\%$ et $n = 15$, il faudrait avoir $x > 0.01/(1 - 1/1.01^{15}) = 7.21\%$.

Bien sûr, ce type de situation a peu de chance de se produire dans la réalité car les investisseurs choisiraient alors d'acheter massivement de l'immobilier, faisant monter les prix et réduisant le rendement $x = d/P$ correspondant.

Exercice 3: Le déficit budgétaire

1/ Le graphique ci-dessous montre que, avant l'intervention du gouvernement, la demande de crédit des entreprises était égale à C_0 et le taux d'intérêt à r_0. L'apparition d'un déficit public force le gouvernement à emprunter de l'argent en émettant des obligations souveraines, ce qui augmente la demande de crédit de un milliard d'euro. La courbe de demande se déplace donc horizontalement de un milliard d'euros vers la droite, de D_0 à D_1. Le taux d'intérêt d'équilibre augmente de r_0 à r_1 et la quantité de crédit de C_0 à C_1.



La hausse du taux d'intérêt diminue la demande de crédit des entreprises de C_0 à $\bar{C}_1 = C_1 -$ 1 milliard d'euros. Autrement dit, la demande de crédit des entreprises se déplace le long de leur courbe de demande D_0. Ainsi, la hausse du taux d'intérêt de r_0 à r_1 réduit la demande de crédit des entreprises de $C_0 - \bar{C}_1$.

En somme, pour pouvoir emprunter un milliard d'euros, une hausse du taux d'intérêt d'équilibre est nécessaire afin d'inciter les ménages à épargner davantage et les entreprises à emprunter moins. On constate un **effet d'éviction**: le déficit public évince l'investissement privé!

2/ Si les ménages anticipent une hausse de un milliard d'euros de la valeur actuelle des prélèvement fiscaux à venir, alors ils ont intérêt à épargner davantage afin d'accroître les ressources dont ils disposeront à l'avenir pour payer ces impôts. En ce cas, l'augmentation du déficit budgétaire augmente à la fois la demande et l'offre de crédit, ce qui se traduit à l'équilibre par une forte hausse du volume de crédit.

Le taux d'intérêt peut-il baisser? Soulignons que les ménages n'ont aucune raison d'augmenter leur offre de crédit de plus de un milliard d'euros. Par conséquent, la courbe d'offre se déplace au maximum de un milliard d'euros vers la droite. Cela implique que le taux d'intérêt ne peut pas diminuer, tandis que le volume de crédit ne peut pas augmenter de plus de un milliard d'euros.

Dans le cas particulier où la hausse du déficit public est intégralement utilisée pour financer une baisse immédiate de la fiscalité (au lieu d'être utilisée pour financer des dépenses publiques), alors le revenu des ménages augmentent de un milliard d'euros. Or, au même moment, la valeur actuelle de leurs prélèvement fiscaux à venir augmente également de un milliard d'euros. Les ménages ont donc intérêt à épargner l'intégralité de la baisse de la fiscalité afin de financer les prélèvement fiscaux à venir. Leur offre de crédit devrait donc augmenter d'exactement un milliard d'euros. En ce cas, le taux d'intérêt demeure inchangé tandis que le volume de crédit augmente d'exactement un milliard d'euros. La demande de crédit des entreprises n'est plus affectée par la hausse du déficit public.

Ce résultat est connu sous le nom d'**équivalence Ricardienne**. En principe, la richesse des ménage ne dépend que de la valeur actuelle des prélèvement fiscaux (présents et à venir), et non des dates auxquels ces prélèvement seront effectués. Par conséquent, il n'y a aucune différence entre taxer les ménages aujourd'hui et augmenter le déficit public pour les taxer plus tard.

Exercice 4: Fonds propres

Apple investis ses 250 milliards d'euros sur les marchés financiers afin de faire fructifier son capital. Pour investir en recherche et développement (R&D), Apple n'a pas besoin d'emprunter, mais doit réduire le montant de ses placements financiers. Par conséquent, le **coût d'opportunité** de l'investissement en R&D correspond aux revenus qu'Apple aurait perçu si ses fonds propres avaient été placés en bourse au lieu d'être consacrés à la R&D. Ce coût d'opportunité est une fonction croissante du taux d'intérêt.[2] Ainsi, la demande d'investissements en R&D d'Apple est une fonction décroissante du taux d'intérêt, malgré le fait que l'entreprise n'ait pas besoin d'emprunter pour financer ses investissements.

En pratique, l'existence de frictions financières impliquent que le taux d'intérêt payé par l'emprunteur est supérieur à celui perçu par l'épargnant. Il est donc moins coûteux pour une entreprise de financer ses dépenses d'investissement en utilisant ses fonds propres qu'en empruntant de l'argent. La demande d'investissement est donc plus élevée pour les entreprises disposant de fonds propres. Cette demande reste néanmoins une fonction décroissante du taux d'intérêt.

Exercice 5: Valeur fondamentale

1/ La valeur fondamentale d'un actif financier est définit comme la valeur actuelle du flux de revenus qu'il génère. L'obligation perpétuelle génère d euros dans un an, d dans deux ans, d dans trois ans, et ainsi de suite. Sa valeur fondamentale p^* est donc égale à:

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{d}{1+i} + \frac{d}{(1+i)^2} + \frac{d}{(1+i)^3} + ..., \\
&= d\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}, \\
&= d\frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}, \\
&= \frac{d}{i}.
\end{aligned}$$

Plus le taux d'intérêt est élevé, moins les coupons futurs sont valorisés, et donc plus la valeur fondamentale de l'obligation est faible.

2/ A la date t, l'acquisition de l'obligation perpétuelle coûte p_t euros. A la date $t+1$, l'obligation génère un coupon de d euros et peut être revendue pour p_{t+1} euros. Le rendement sur investissement s'élève donc à $(d + p_{t+1})/p_t$. Pour qu'un ménage soit indifférent entre détenir l'obligation perpétuelle et effectuer un autre placement rapportant un taux d'intérêt i, on doit avoir:

$$\frac{d + p_{t+1}}{p_t} = 1 + i.$$

[2] Plus le taux d'intérêt est élevé, plus l'ensemble des actifs financiers génèrent des revenus élevés.

Si cette relation n'est pas satisfaite, alors il existe une opportunité d'**arbitrage**. Par exemple, si $(d + p_{t+1}) / p_t > 1+i$, alors un ménage peut théoriquement gagner une quantité illimitée d'argent en empruntant au taux i et en achetant des obligations perpétuelles, puis en les vendant à la période suivante pour rembourser son emprunt. Cette possibilité ne peut pas prévaloir à l'équilibre car, en cherchant à s'enrichir, les ménages opportunistes vont faire monter le taux d'intérêt i auquel ils empruntent et faire monter le prix p_t auquel ils achètent les obligations perpétuelles.

Si, au contraire, $(d + p_{t+1}) / p_t < 1 + i$, alors un ménage peut s'enrichir sans limite en émettant des obligations perpétuelles au temps t qui sont vendues au prix p_t et en plaçant cet argant au taux i, puis au temps $t + 1$ en utilisant les $p_t(1 + i)$ touchés pour chaque obligation émise à la période précédente pour payer les coupons d et les racheter au prix p_{t+1}. Ces comportements opportunistes vont faire baisser p_t et i.

En finance, on considère donc toujours que, lorsque les marchés financiers sont à l'équilibre, il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. Tous les actifs financiers (ayant le même profil de risque) doivent donc générer le même rendement.

3/ La réponse à la question précédente implique que le prix de l'obligation perpétuelle doit satisfaire:

$$p_{t+1} = (1 + i)\, p_t - d.$$

En itérant de la date 0 à la date t, on obtient:

$$\begin{aligned}
p_t &= (1+i)^t p_0 - d \sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^k, \\
&= (1+i)^t p_0 - d \frac{(1+i)^t - 1}{i}, \\
&= \frac{d}{i} + \left(p_0 - \frac{d}{i}\right)(1+i)^t, \\
&= p^* + (p_0 - p^*)(1+i)^t.
\end{aligned}$$

Le prix de l'obligation perpétuelle comporte donc deux composantes distinctes: la valeur fondamentale p^* et la bulle $(p_0 - p^*)(1 + i)^t$.

Deux raisons distinctes peuvent pousser les épargnants à acheter un actif financier. D'abord, ils souhaitent acquérir le flux de revenus généré par cet actif, dont la valorisation correspond à la valeur fondamentale. Ensuite, ils peuvent vouloir spéculer sur l'actif dans le but de le revendre à un prix plus élevé. Cela génère une bulle financière. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, cette bulle croît au taux d'intérêt i.

Peut-on avoir $p_0 < p^*$, ce qui correspond à une bulle négative? Avec $i > 0$, cela impliquerait que le prix de l'obligation devienne un jour négatif. Or, en supposant qu'une personne puisse toujours renoncer à la propriété de l'obligation, le prix ne peut pas être négatif. Cela élimine la possibilité d'une bulle négative.

Peut-on avoir $p_0 > p^*$? En ce cas, la bulle grossie sans limite. En théorie, rien ne permet d'éliminer cette possibilité. Ceci étant, si les épargnants anticipent que personne ne voudra jamais acheter cette obligation pour un prix supérieur à une borne $\bar{p}$, avec $\bar{p} >> p^*$, alors la bulle ne peut pas se produire (puisqu'une fois atteint le prix $\bar{p}$, la bulle cessera de croître au taux i). Il en résulte que l'on doit avoir $p_0 = p^*$, ce qui implique $p_t = p^*$ pour tout t. Le prix d'équilibre le plus plausible est celui correspondant à la valeur fondamentale.

4/ Soit $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ la trajectoire du prix de l'obligation perpétuelle en l'absence de retour à la valeur fondamentale. Si au temps t le prix de l'obligation est égal à p_t, alors au temps $t+1$ il sera égal à p^* avec une probabilité q et à p_{t+1} avec une probabilité $1-q$. A l'équilibre, l'absence d'opportunité d'arbitrage requiert toujours que le rendement de l'obligation perpétuel soit égal au taux d'intérêt i. On doit donc désormais avoir:

$$(1-q)\,\frac{d+p_{t+1}}{p_t} + q\frac{d+p^*}{p_t} = 1+i.$$

Cela implique:

$$p_{t+1} = \left(\frac{1+i}{1-q}\right)p_t - \frac{d+qp^*}{1-q}.$$

Or la valeur fondamentale p^* de l'obligation est toujours égale à d/i. Par conséquent:

$$p_{t+1} = \left(\frac{1+i}{1-q}\right)p_t - \frac{i+q}{1-q}p^*.$$

En itérant de 0 à t, on obtient:

$$\begin{aligned}
p_t &= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - \frac{i+q}{1-q}p^* \sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^k, \\
&= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - \frac{i+q}{1-q}p^* \frac{\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t - 1}{\frac{1+i}{1-q} - 1}, \\
&= \left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t p_0 - p^*\left[\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t - 1\right], \\
&= p^* + (p_0 - p^*)\left(\frac{1+i}{1-q}\right)^t.
\end{aligned}$$

Plus la probabilité q de l'éclatement de la bulle est élevée, plus la bulle croît rapidement!

Pour comprendre ce résultat, soulignons que le rendement moyen de la bulle doit toujours être égal à i.[3] Il est donc nécessaire de compenser la probabilité q d'un éclatement de la bulle par un taux de croissance supérieur à i en l'absence d'éclatement. Ainsi, plus la bulle a de chances d'éclater, plus elle croît rapidement.

[3] L'équation d'absence d'opportunité d'arbitrage ci-dessus peut s'écrire:

$$d + (1 - q)\, p_{t+1} + qp^* = (1 + i)\, p_t.$$

En utilisant $d = ip^*$, on obtient facilement:

$$(1 - q)\,[p_{t+1} - p^*] = (1 + i)\,[p_t - p^*]\,,$$

ce qui impose que le rendement moyen de la bulle est bien égal à i.