MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 6 — Intégration (corrections)

Exercice 66. (Applications directes du cours)

(a) Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω. Quelle est la tribu engendrée par A ?

Elle contient au moins $\varnothing$, A, $A^{\complement}$ et Ω. On vérifie facilement que l'ensemble $\{\varnothing, A, A^{\complement}, \Omega\}$ est une tribu, c'est donc la tribu recherchée.

(b) (Intégrale de Riemann) On rappelle qu'une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ est *une fonction en escalier* s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ et des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, pour tout $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\phi(x) = c_i$. L'intégrale au sens de Riemann d'une telle fonction est le nombre

$$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i\,.$$

Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est *intégrable au sens de Riemann* si

$$\sup\left\{\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x \;:\; \phi \text{ en escalier telle que } \phi \le f\right\} = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x \;:\; \psi \text{ en escalier telle que } \psi \ge f\right\},$$

et, dans ce cas, l'intégrale au sens de Riemann de f est ce nombre. On rappelle enfin que les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann.

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.

(i) Montrer que f est mesurable.

Il suffit de voir que l'image réciproque de tout ouvert est mesurable. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}$. Il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ telle que les restrictions $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soient continues. Ainsi

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \underbrace{\{x_i \;:\; f(x_i) \in \mathcal{O}\}}_{\text{fermé}} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{f^{-1}_{|]x_{i-1},x_i[}(\mathcal{O})}_{\text{ouvert}}$$

est mesurable.

(ii) Montrer que f est intégrable (au sens de Lebesgue) et que son intégrale (au sens de Lebesgue) est égale à son intégrale au sens de Riemann.

On sait déjà que f est mesurable. En écrivant $f = f^+ - f^-$, on se ramène au cas des fonctions positives. Les fonctions en escalier sont étagées et l'intégrale de ces fonctions (Définition 2.2) correspond à la définition de Riemann dans ce cas. Pour des fonctions en escalier $\phi \le f \le \psi$, on a donc

$$\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x \le \sup\left\{\int_a^b \xi(x)\mathrm{d}x \;:\; \xi \text{ étagée telle que } \xi \le f\right\} \le \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x\,.$$

On conclut en prenant le sup sur ϕ et l'inf sur ψ.

Exercice 67. (Intégrable implique finie presque partout)

(a) Montrer, en revenant à la définition de l'intégrale d'une fonction positive, que si f et $g : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ sont deux fonctions mesurables telles que $f \leqslant g$, alors $\int f dx \leqslant \int g dx$.

On rappelle la définition de l'intégrale d'une fonction mesurable f :

$$\int_{\mathbf{R}^N} f \,\mathrm{d}\lambda = \sup\left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \,\mathrm{d}\lambda : \varphi \text{ est étagée et } 0 \leqslant \varphi \leqslant f \right\}.$$

Si l'on remplace dans cette définition la fonction f par une fonction $g \geqslant f$, l'ensemble dont on prend la borne supérieure contient l'ensemble précédent, et le résultat est donc plus grand, c'est-à-dire $\int_{\mathbf{R}^N} f \,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{\mathbf{R}^N} g \,\mathrm{d}\lambda$.

(b) En déduire qu'une fonction intégrable est finie presque partout.

Soit f une fonction mesurable telle que $|f|$ est infinie sur un borélien A de mesure strictement positive $\lambda(A) > 0$. Soit $\varphi_n = n\mathbf{1}_A$. Alors $|f| \geqslant \varphi_n$ et $\int \varphi_n dx = n\lambda(A)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, on déduit de la question précédente $\int |f| \geqslant n\lambda(A)$. Comme ceci tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, on a $\int |f| = \infty$ et f n'est pas intégrable.

Exercice 68. (Une application du théorème de convergence dominée) Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ une fonction à valeurs complexes. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>n} |f(x)|\, dx = 0.$$

Ceci résulte d'une simple application du théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_n = \mathbf{1}_{|x|>n} \cdot |f|$. En effet, pour x donné, et $n > |x|$ on a $f_n(x) = 0$; ceci entraîne que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. De plus, on a la majoration suivante indépendante de n : pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$. Le théorème de convergence dominée montre que $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 0$, ce qui répond à la question.

Exercice 69. (Intégrale semi-convergente)

(a) Montrer que la limite suivante est finie :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{1+x} dx.$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_0^n \frac{\sin(x)}{1+x} dx = \left[\frac{-\cos(x)}{1+x}\right]_0^n - \int_0^n \frac{\cos(x)}{(1+x)^2} dx.$$

Le premier terme du membre de droite converge vers 1 lorsque $n \to \infty$. Le deuxième terme converge vers $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x)^2} dx$ par l'exercice précédent, car la fonction $\frac{\cos(x)}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $]0,\infty[$ (elle est majorée par $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable).

(b) Est-ce que la fonction $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+x}$ est intégrable sur $]0,\infty[$?

On va montrer que

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{1+x} dx = \infty,$$

ce qui signifie que $f \notin L^1(]0,\infty[)$. En effet, grâce à l'identité $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, on trouve

$$\frac{|\sin(x)|}{1+x} \geqslant \frac{\sin^2(x)}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{\cos(2x)}{1+x}\right).$$

Comme précédemment, la limite $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\cos(2x)}{1+x} dx$ est finie ; en revanche, $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \infty$. L'intégrale de la question (a) est une intégrale généralisée ; c'est une limite, qui ne rentre pas dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Exercice 70. (Primitive d'une fonction intégrable) Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ une fonction à valeurs complexes.

(a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si A est un borélien de $\mathbf{R}$, alors

$$\lambda(A) < \delta \implies \int_A |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite de boréliens $(A_n)_{n\geqslant 1}$ tels que $\lambda(A_n) < e^{-n}$ et $\int_{A_n} |f|\, dx > \varepsilon$. On pose $B_n = \cup_{k\geqslant n} A_k$ et $D = \cap_{n\geqslant 0} B_n$. D'après deux propriétés générales des mesures, on a pour $n \geqslant 1$,

$$\lambda(B_n) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \lambda(A_k) \leqslant \sum_{k\geqslant n} e^{-k} = \frac{e}{e-1} e^{-n},$$

et, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ étant une suite *décroissante* de boréliens, $\lambda(D) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0$.

On considère la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $g_n = \mathbf{1}_{A_n} \cdot f$. Si $x \notin D$, alors il existe $n \geqslant 1$ tel que $x \notin B_k$, pour tout $k \geqslant n$. Ainsi, $g_n \to 0$ sur $\mathbf{R} \setminus D$, c'est-à-dire presque partout sur $\mathbf{R}$. On conclut comme dans la question précédente.

(b) Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Montrer que la fonction F est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

Soient $x, y \in [0, \infty[$, avec $x \geqslant y$. Alors

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(y) dy.$$

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - y| < \delta$, alors $\int_y^x |f| dx < \varepsilon$. Ceci entraîne que $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$.

Exercice 71. (Boréliens et mesurabilité)

(a) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs réelles. On note A l'ensemble des x tels que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0. Montrer que A est borélien.

Indication : Pour des entiers $p \geqslant 0$ et $k \geqslant 1$, noter

$$C_{p,k} = \left\{ x \in \mathbf{R}^N : |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \text{ pour tout } n \geqslant p \right\},$$

et utiliser la définition de la limite pour écrire A en fonction des $C_{p,k}$.

Par la définition de la limite, $x \in A$ si et seulement si, pour tout $k \geqslant 1$, il existe $p \geqslant 0$ tel que $x \in C_{p,k}$. Ainsi, en notant $B_k = \bigcup_{p\in\mathbf{N}} C_{p,k}$, on voit que $A = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} B_k$.

Pour chaque p et k, l'ensemble $C_{p,k}$ est un fermé de $\mathbf{R}^N$ car c'est l'image réciproque par la fonction continue $\max_{n\geqslant p} |f_n|$ du fermé $[0, 1/k]$.

(b) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs réelles qui converge ponctuellement vers une fonction f. Montrer que f est mesurable.

Indication : comme la tribu borélienne de $\mathbf{R}$ est engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, b[$ où $b \in \mathbf{R}$, il suffit de vérifier que $f^{-1}(]-\infty, b[)$ est un borélien. Utiliser la définition de la limite et la mesurabilité de chaque f_n.

Pour chaque nombre réel $b \in B$, on définit

$$A_b = f^{-1}(]-\infty, b[) = \left\{ x \in \mathbf{R}^N : f(x) < b \right\}.$$

Alors, $x \in A_b$ si et seulement s'il existe des entiers $k \geqslant 1$ et $p \geqslant 0$ tels que, pour tout $n \geqslant p$, on ait $f_n(x) \leqslant b - 1/k$. Ainsi,

$$A_b = \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{p\in\mathbf{N}} \left(\bigcap_{n=p}^{\infty} f_n^{-1}\left(]-\infty, b - 1/k]\right) \right).$$

Comme les fonctions f_n sont mesurables, chaque $f_n^{-1}\left(]-\infty, b-1/k]\right)$ est borélien et on a donc écrit A_b comme réunion et intersection dénombrable de boréliens.

(c) Soif $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa fonction dérivée $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est mesurable.

C'est une simple application de la question précédente. Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

La fonction g_n est mesurable comme somme de fonctions mesurables (la translation d'une fonction mesurable est mesurable). Comme f est dérivable au point x, la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f'(x)$. D'après la question précédente, f' est mesurable.

Exercice 72. (Applications du théorème de convergence monotone)

(a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int u_n dx\right).$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) dx = \sum_{n=0}^{N} \left(\int u_n dx\right)$$

pour tout $N \geqslant 0$. Comme les fonctions u_n sont à valeurs positives, la suite $(\sum_{n=0}^{N} u_n)_{N\geqslant 0}$ est croissante et a pour limite ponctuelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Par le théorème de convergence monotone de Beppo Levi, le terme de gauche converge donc vers $\int (\sum_{n=0}^{\infty} u_n)\, dx$. Par ailleurs, la convergence de $\sum_{n=0}^{N} (\int u_n dx)$ vers $\sum_{n=0}^{\infty} (\int u_n dx)$ est évidente.

(b) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour des entiers $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on pose

$$A_{k,n} = \{x \in \mathbf{R}^N : (k-1)2^{-n} \leqslant f(x) < k2^{-n}\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \geqslant n\}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} ((k-1)2^{-n})\mathbf{1}_{A_{k,n}} + n\mathbf{1}_{B_n}$$

est une suite croissante de fonctions étagées qui converge ponctuellement vers f.

Les ensembles $A_{k,n}$ et B_n sont boréliens comme images réciproques d'intervalles par la fonction mesurable f. Ainsi, à $n \geqslant 0$ fixé, φ_n est bien une fonction étagée.

Soient $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbf{R}^N$. Si x est tel que $f(x) < n$, alors il existe $1 \leqslant k \leqslant n2^n$ tel que $x \in A_{k,n}$. On peut écrire $A_{k,n} = A_{2k-1,n+1} \cup A_{2k,n+1}$. Si $x \in A_{2k-1,2n}$, alors $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) = (k-1)2^{-n}$. Si $x \in A_{2k,2n}$, alors $\varphi_{n+1}(x) = (2k-1)2^{-n-1} > \varphi_n(x)$. Si x est tel que $f(x) \geqslant n$, alors $\varphi_{n+1}(x) \geqslant n = \varphi_n(x)$. Ainsi, $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ est bien une suite croissante.

Si x est tel que $f(x) = \infty$, alors pour tout n, $\varphi_n(x) = n$ et on a bien $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \infty = f(x)$.

Si x est tel que $f(x) \in [0, \infty[$, alors il existe n_0 tel que $f(x) \leqslant n_0$. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\varphi_n(x) \leqslant f(x) < \varphi_n(x) + 2^{-n}$, ce qui implique $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

(c) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions étagées positives telle que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. De plus, $\int f dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dx$.

Soit $f : \mathbf{R}^N \to \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction mesurable. La question (a) montre l'existence d'une suite croissante de fonctions étagées qui converge ponctuellement vers f. D'après le théorème de Beppo Levi, $\int f dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dx$.

Exercice 73. (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbf{R}^N$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$. La *limite inférieure* de cette suite est la fonction

$$\liminf_{n\to\infty} f_n : x \mapsto \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k(x)\,.$$

(a) Montrer que cette fonction est mesurable et que $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}x$.

Posons $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et converge simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}x\,.$$

Or, pour tout $k \geq n$, $g_n \leq f_k$, donc $\int g_n \,\mathrm{d}x \leq \int f_k \,\mathrm{d}x$ et ainsi $\int g_n \,\mathrm{d}x \leq \inf_{k\geq n} \int f_k \,\mathrm{d}x$.

(b) En considérant les fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{[n,n+1]}$, montrer que l'inégalité n'est pas vérifiée en général.

On a $\inf_{k\geq n} f_k = 0$. Ainsi $\liminf f_n = 0$, donc $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x = 0$. Par ailleurs, $\displaystyle\int f_k \mathrm{d}x = k$, ce qui donne $\displaystyle\inf_{k\geq n} \int f_k \mathrm{d}x = n$ et donc $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}x = +\infty$.

Exercice 74. (*Preuve du théorème de convergence dominée)

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$. On suppose que :

- *la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge presque partout vers une fonction f ;*
- *il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $|f_n| \leqslant g$ presque partout.*

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}x = 0.$$

(a) Se ramener au cas où la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers f et les majorations $|f_n| \leqslant g$ ont lieu en tout point de $\mathbf{R}^N$ en modifiant les fonctions f_n et f sur un ensemble de mesure nulle.

Il existe des boréliens A et B_n de mesure nulle tels que la convergence ait lieu sur $\mathbf{R}^N \setminus A$ et la majoration $|f_n| \leqslant g$ ait lieu sur $\mathbf{R}^N \setminus B_n$. L'ensemble $D = A \cup (\bigcup_n B_n)$ est aussi de mesure nulle. On peut maintenant modifier les fonctions f_n et f sur D en les prenant égales à 0 sur cet ensemble, ce qui ne change pas les valeurs des intégrales et assurent que la convergence et les majorations sont vérifiées sur tout $\mathbf{R}^N$.

(b) Pour chaque $n \geqslant 0$, poser $h_n = |f_n - f|$, $a_n = \sup_{k\geqslant n} h_k$ et $b_n = 2g - a_n$. Appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions $(b_n)_{n\geqslant 0}$.

On voit que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers 0 en tout point par les hypothèses. De plus $a_n \leqslant 2g$ par l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de majoration. Ainsi, la suite de fonctions positives $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et converge ponctuellement vers $2g$. Le théorème de convergence monotone entraîne que $\lim_{n\to\infty} \int b_n dx = 2\int g dx$.

On a donc démontré que $\lim_{n\to\infty} \int a_n dx = 0$. Comme $0 \leqslant h_n \leqslant a_n$, on a bien montré $\lim_{n\to\infty} \int h_n dx = 0$.

Exercice 75. (*Théorème de Fischer–Riesz)

Le but de cet exercice est de montrer que l'espace $(L^1(\mathbf{R}^N), \|\cdot\|_{L^1})$ est complet. On rappelle (voir par exemple la feuille d'exercices 2, exercice 19) qu'*un espace vectoriel normé est un espace complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

On considère une série de terme général u_n dans L^1, normalement convergente pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

(a) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} |u_n(x)|$ est intégrable.

D'après le théorème de convergence monotone (voir aussi exercice 72(a)) et l'hypothèse sur la série $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on a

$$\int h dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int |u_n| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_{L^1} < \infty.$$

(b) Montrer qu'il existe un borélien A de mesure nulle telle que la série $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ soit convergente pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus A$.

D'après l'exercice 67.(b), comme la fonction h est intégrable, il existe un borélien A de mesure nulle tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus A$, on ait $h(x) < \infty$. Une série numérique absolument convergente est convergente. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^N \setminus A$, la série $S(x)$ converge.

(c) Utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que la série de terme général u_n converge vers S dans L^1.

On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$. On a, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^N$, la majoration

$$|S_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n(x)| \leqslant h(x),$$

où la fonction h est intégrable. De plus, la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge presque partout vers S. On en déduit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int |S(x) - S_N(x)| dx = 0,$$

ce qui signifie exactement que la série de terme général u_n converge vers S dans L^1.

(d) Déduire des arguments précédents le résultat suivant : *Si une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans L^1 alors il existe une sous-suite qui converge presque partout vers f.*

Indication : on pourra utiliser une sous-suite $(g_k)_{k\geqslant 0}$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\|g_k - f\|_{L^1} \leqslant 2^{-k}$.

L'extraction proposée existe bien par définition de la limite. On a alors

$$g_k = g_0 + \sum_{l=0}^{k-1} (g_{l+1} - g_l).$$

La série de terme général $(g_{k+1} - g_k)$ est normalement convergente dans L^1 et, par les arguments précédents, on en déduit qu'elle converge presque partout.

Exercice 76. (*Résultats de densité)

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^N$. On note $\mathcal{C}_c(U)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans U (c'est-à-dire des fonctions continues qui sont nulles en dehors d'une partie compacte de $\mathbf{R}^N$ incluse dans U).

(a) Montrer que $\mathcal{C}_c(U) \subset L^1(U)$.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(U)$. La fonction f étant continue, elle est mesurable. De plus, il existe un compact $K \subset U$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in U \setminus K$. En particulier, f restreinte à K étant continue sur un compact, f est bornée. Comme K est compact, il est borné, donc inclus dans un pavé de $\mathbf{R}^N$ et sa mesure de Lebesgue est finie. Ainsi,

$$\int_U |f| dx = \int_K |f| dx \leqslant \lambda(K) \sup_K |f| < \infty.$$

(b) Soit $A \in \mathcal{B}(U)$ de mesure de Lebesgue finie. Montrer qu'il existe une suite $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{C}_c(U)$ qui converge vers la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ dans $L^1(U)$.

Indication : utiliser la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.

D'après la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe K_n compact de $\mathbf{R}^N$ et V_n ouvert de $\mathbf{R}^N$ tels que

$$K_n \subset A \subset V_n \quad \text{et} \quad \lambda(V_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}.$$

Quitte à remplacer V_n par $V_n \cap U$, on peut supposer que les ouverts V_n sont inclus dans l'ouvert U. On note $\delta_n = d(K_n, V_n^{\complement}) > 0$ la distance de K_n au complémentaire de V_n. Pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in U$, on pose

$$\psi_n(x) = \max\left\{1 - \frac{2d(x, K_n)}{\delta_n}, 0\right\},$$

où $d(x, K_n)$ est la distance du point x au compact K_n. Soit $K_n' \subset U$ l'ensemble des points de U à distance inférieure à $\delta_n/2$ de K_n. C'est un compact et on remarque que ψ est nulle hors du compact K_n'. De plus, ψ est égale à 1 sur K_n et ψ est comprise entre 0 et 1 ailleurs. On a donc

$$\|\mathbf{1}_A - \psi_n\|_{L^1} = \int_{V_n \setminus K_n} |\mathbf{1}_A - \psi_n| dx \leqslant \lambda(V_n \setminus K_n) \leqslant \frac{1}{n},$$

et la suite $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ répond à la question.

(c) Montrer que $\mathcal{C}_c(U)$ est dense dans $(L^1(U), \|\cdot\|_{L^1})$.

On observe que l'espace des fonctions étagées est dense dans $(L^1, \|\cdot\|_{L^1})$. En effet, pour $f \in L^1(U)$, on décompose f en parties réelle et imaginaire. Ensuite, on décompose les parties réelle et imaginaire en parties positive et négative. Chaque partie étant une fonction mesurable à valeurs positives, elle est arbitrairement proche en norme $\|\cdot\|_1$ d'une fonction étagée ; le résultat s'en déduit (voir aussi exercice 72(c)).

Soit $f \in L^1(U)$ et $\varepsilon > 0$ donné, on vient de voir qu'il existe une fonction étagée φ telle que $\|f - \varphi\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

La fonction étagée φ étant une combinaison linéaire de fonctions indicatrices de boréliens, par la question précédente, on peut approcher φ par une suite de fonctions continues de $\mathcal{C}_c(U)$ en norme L^1 : il existe $\psi \in \mathcal{C}_c(U)$ telle que $\|\varphi - \psi\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc

$$\|f - \psi\|_{L^1} \leqslant \|f - \varphi\|_{L^1} + \|\varphi - \psi\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Exercice 77. (Continuité des translations dans L^1)

(a) Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ une fonction continue à support compact (voir exercice précédent). Montrer que

$$\lim_{\tau \to 0} \int |g(x-\tau) - g(x)| dx = 0.$$

Indication : utiliser le théorème de Heine.

La fonction g (supposée non nulle) étant continue sur un compact K, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|\tau| \leqslant \delta$ implique $|g(x-\tau) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda(K)}$ et donc

$$\int |g(x-\tau) - g(x)| dx \leqslant \varepsilon.$$

(b) Montrer le même résultat pour $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Indication : utiliser la conclusion de l'exercice 76(c).

Soient $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 76(c), il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. De plus, par la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|\tau| \leqslant \delta$, alors $\|g(\cdot - \tau) - g(\cdot)\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. En conclusion, si $|\tau| \leqslant \delta$,

$$\|f(\cdot - \tau) - f(\cdot)\|_{L^1} \leqslant \|f(\cdot - \tau) - g(\cdot - \tau)\|_{L^1} + \|g(\cdot - \tau) - g(\cdot)\|_{L^1} + \|g(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^1} \leqslant \varepsilon.$$

(On a utilisé $\|f(\cdot - \tau) - g(\cdot - \tau)\|_{L^1} = \|f - g\|_{L^1}$.)

Exercice 78. (Cas où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas)

Existe-t-il des suites de fonctions intégrables sur $[0,1]$ telles que :

(a) $\displaystyle\int_{[0,1]} |f_n(x)| dx$ ne tend pas vers 0 mais $f_n(x)$ tend vers 0 presque partout ?

La suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $f_n(x) = n \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ vérifie $\int_{[0,1]} f_n = 1$ et, pour tout $x \in]0,1]$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$.

(b) $\displaystyle\int_{[0,1]} |g_n(x)| dx$ tend vers 0 mais $g_n(x)$ ne tend pas presque partout vers 0 ?

On rappelle que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe un unique couple d'entiers (k_n, j_n) tels que $k_n \geqslant 0$, $0 \leqslant j_n < 2^k - 1$ et

$$n = 2^{k_n} + j_n$$

(il suffit de choisir d'abord k_n tel que $2^{k_n} \leqslant n < 2^{k_n+1}$ et ensuite poser $j_n = n - 2^{k_n}$). On définit la suite de fonctions positives $(g_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$g_n = \mathbf{1}_{[j_n 2^{-k_n}, (j_n+1)2^{-k_n}[}.$$

Alors, $\int_{[0,1]} g_n dx \leqslant 2^{-k_n} \to 0$ quand $n \to \infty$. En revanche, pour tout $x \in [0,1[$, il existe une sous-suite de $(g_n(x))_{n \geqslant 0}$ qui converge vers 0 et une autre sous-suite qui converge vers 1.

Exercice 79. (Intégrale à paramètre)

Pour chaque réel $t > 0$, on pose

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

(a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, \infty[$. Calculer $\lim_{t\to\infty} F(t)$.

On considère la fonction $f(t, x) = \frac{1-\cos x}{x^2} e^{-tx}$ définie sur $[0, \infty[^2$. Par un développement limité de cosinus en 0, on voit que f est bien définie et continue sur $[0, \infty[^2$.

Par ailleurs, il est facile de voir que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$. De plus, comme $t, x \geqslant 0$, on a $e^{-tx} \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $(t, x) \in [0, \infty[^2$,

$$0 \leqslant f(t, x) \leqslant h_0(x), \quad h_0(x) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{x^2}\right).$$

On voit que $h_0 \in L^1(]0, \infty[)$. Par le théorème de continuité d'intégrale à paramètre, la fonction F est bien définie et continue sur $[0, \infty[$.

Par le théorème de convergence monotone (ou le théorème de convergence dominée), on montre que $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \infty[$. Calculer F''.

Soit $t_0 > 0$ arbitraire. On a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) = (1 - \cos x)e^{-tx}.$$

Par la majoration précédente, on a pour tout $t \geqslant t_0$ et $x \geqslant 0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leqslant h_1(x), \quad h_1(x) = \min\left(\frac{x}{2}, \frac{2}{x}\right) e^{-t_0 x},$$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x)\right| \leqslant h_2(x), \quad h_2(x) = \min\left(\frac{x^2}{2}, 2\right) e^{-t_0 x}.$$

Les fonctions h_1 et h_2 sont intégrables sur $[0, \infty[$.

En appliquant une première fois le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre, on montre que F est dérivable sur $[t_0, \infty[$. De plus,

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx = -\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx.$$

En appliquant une deuxième fois le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre, on montre que F' est dérivable sur $[t_0, \infty[$. De plus,

$$F''(t) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) dx = \int_0^\infty (1 - \cos x)e^{-tx} dx.$$

On utilise ensuite le théorème de continuité pour montrer que F'' est continue sur $[t_0, +\infty[$. La valeur de t_0 étant arbitraire, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

(c) La fonction F est-elle dérivable à droite en 0 ?

Soit

$$g_n(x) = -\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{1}{n}, x\right) = \frac{1-\cos x}{x} e^{-\frac{x}{n}},$$

de sorte que $F'(\frac{1}{n}) = -\int_0^\infty g_n(x)dx$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et converge vers $g(x) = \frac{1-\cos x}{x}$. Par des calculs comparables à ceux de l'exercice 69, on a $\int_0^\infty g dx = \infty$. Ainsi, par le théorème de la convergence monotone de Beppo Levi, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n dx = \int_0^\infty g dx = \infty$. Ce raisonnement étant valable pour toute suite décroissante $t_n \downarrow 0$, on en déduit que

$$\lim_{t\downarrow 0} F'(t) = -\infty.$$

Ainsi, la fonction F n'est pas dérivable au point 0 (utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que la limite $\lim_{h\to 0} \frac{F(h)-F(0)}{h}$ est $-\infty$).

(d) Déduire de (a) et (b) une expression de F.

Pour $t > 0$, par un calcul explicite basé sur la formule trouvée à la question (b) pour $F''(t)$, on obtient

$$F''(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}.$$

Ainsi, par intégration,

$$F'(t) = \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C.$$

La constante d'intégration C est choisie pour assurer $\lim_{t\to\infty} F'(t) = 0$, c'est-à-dire $C = 0$. En intégrant une fois de plus, on a

$$F(t) = t\ln t - \frac{1}{2} t\ln(t^2+1) - \arctan t + C',$$

où il faut choisir $C' = \frac{\pi}{2}$.

(e) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

D'après l'expression de F et la continuité en 0, on trouve $F(0) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 80. (Une application du théorème de Tonelli)

Soit $N \geqslant 2$. Soit A le graphe d'une application f de $\mathbf{R}^{N-1}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire

$$A = \left\{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}^{N-1}\right\}.$$

Montrer que A est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^N$.

Exercice non corrigé.

Exercice 81. (Volume d'un tronc de cône en dimension N)

Soit $N \geqslant 2$. Soit B un borélien de $\mathbf{R}^{N-1}$, dont la mesure de Lebesgue est notée $\mathcal{A}(B)$. Soit $h \geqslant 0$. On considère

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R} : 0 < y < h,\ \frac{h}{y} x \in A\right\}.$$

Calculer la mesure de Lebesgue de C (comme borélien de $\mathbf{R}^N$).

Réponse : on trouve

$$\lambda(C) = \frac{\mathcal{A}(B)\, h}{N}.$$

(Ici, $\lambda(C)$ est la mesure de Lebesgue de C en dimension N, alors que $\mathcal{A}(B)$ est la mesure de Lebesgue de B en dimension $N-1$.)