École polytechnique — X2022 — INF412 Fondements de l'informatique

PC6 notée

(corrigé)

Cet énoncé comporte quatre parties indépendantes et qui pourront être résolues dans n'importe quel ordre. Dans chaque partie, on pourra, pour répondre à une question, admettre les résultats dont on demande la démonstration aux questions *précédentes*. Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir la note maximale. Les correcteurs vous remercient d'avance d'écrire lisiblement.

1 Calculabilité

Les problèmes de décision suivants sont-ils décidables ? Justifier.

Question 1.1. *Déterminer si une machine de Turing passe toujours par un état interne donné, quelle que soit l'entrée.*

Solution : C'est indécidable par réduction au problème universel. À une machine M et un mot w, on associe la machine M' qui, sur une entrée quelconque, commence par remplacer le contenu du ruban par w puis exécute M. On a alors que M accepte w si et seulement si M' passe toujours par l'état final. □

Question 1.2. *Déterminer si le langage reconnu par une machine de Turing est aussi reconnu par une machine de Turing avec des états inutiles (un état est dit* utile *si on peut l'atteindre dans au moins une exécution de la machine depuis l'état initial).*

Solution : C'est toujours vrai (il suffit d'ajouter un état qui ne sert à rien à la machine) et donc décidable. □

Question 1.3. *Déterminer si le langage reconnu par une machine de Turing ne contient que des mots de longueur paire.*

Solution : C'est indécidable par le théorème de Rice (la propriété est clairement non-triviale). □

Question 1.4. *Sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, déterminer si le langage reconnu par une machine de Turing ne contient pas de mots dont la longueur est impaire et qui contiennent le même nombre de a que de b.*

Solution : C'est indécidable par le théorème de Rice (la propriété est clairement non-triviale). □

Question 1.5. *Sur l'alphabet $\{a, b\}$, déterminer si le langage reconnu par une machine de Turing ne contient pas de mots dont la longueur est impaire et qui contiennent le même nombre de a que de b.*

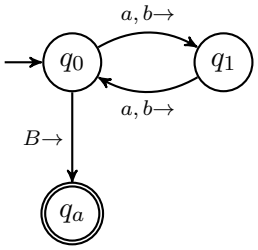
Solution : C'est toujours vrai (il n'existe pas de mot dont la longueur est impaire et qui contiennent le même nombre de a que de b) et donc décidable. □

2 Machines de Turing et opérations sur les mots

On fixe l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et on considère des machines qui manipulent des mots sur Σ, ou éventuellement plusieurs mots séparés par le caractère spécial « # ». On demande des machines de Turing explicitement décrites. Pour chaque machine, on donnera quelques phrases expliquant leur fonctionnement. Toute réponse de type « une machine avec 50 états sans explication » sera refusée.

Question 2.1. *Proposer une machine de Turing qui détermine si un mot $w \in \Sigma^*$ est de longueur paire.*

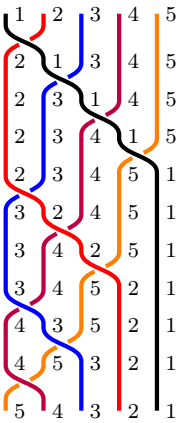
Solution : On alterne entre deux états jusqu'à la fin du mot :



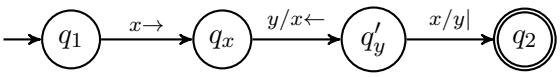
□

Question 2.2. *Proposer une machine de Turing qui prend en entrée un mot $w \in \Sigma^*$, et renvoie le mot renversé w^R. Par exemple, étant donné le mot abbab, la machine doit renvoyer babba.*

Solution : Il est possible de renverser un mot de longueur n en appliquant une séquence de $n(n-1)/2$ transpositions adjacentes, comme illustré ci-dessous :

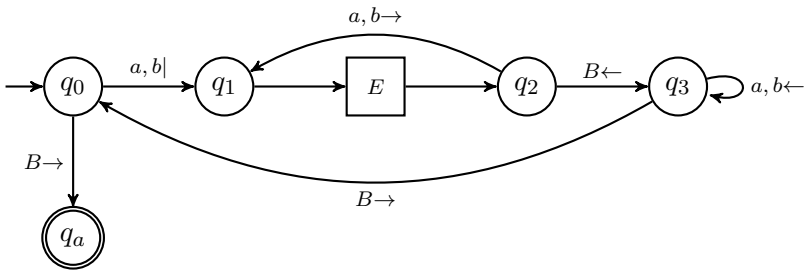


Pour réaliser cet algorithme, on commence par écrire une machine E qui échange les deux caractères en tête du ruban, qu'on utilisera dans la suite comme sous-programme. On peut facilement définir E avec $2k + 2$ états où $k = |\Gamma|$ est la taille de l'alphabet de travail :

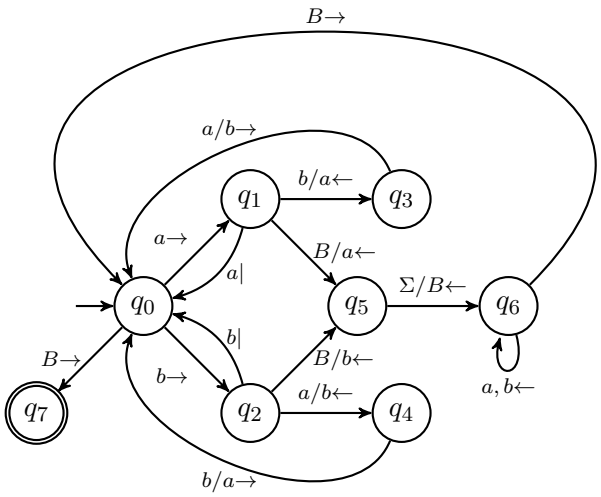


Ensuite, nous définissons notre machine pour renverser un mot en faisant des appels répétés à E jusqu'à arriver à la fin du mot (ayant transposé la dernière lettre avec un blanc), puis nous

revenons au début et répétons la procédure :

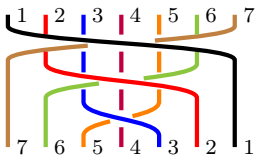


Alternativement, on peut définir directement une machine de Turing qui fonctionne essentiellement de la même manière mais qui est un peu plus optimisé :



Ici, nous utilisons les états q_0–q_4 pour échanger successivement les valeurs dans les cellules adjacentes jusqu'à ce que nous arrivions à la fin du mot avec le premier caractère maintenant juste au-délà du blanc final (état q_5), puis revenons au début du mot (boucle sur l'état q_6) pour répéter la procedure jusqu'à ce que le blanc arrive au début (terminaison dans l'état q_7).

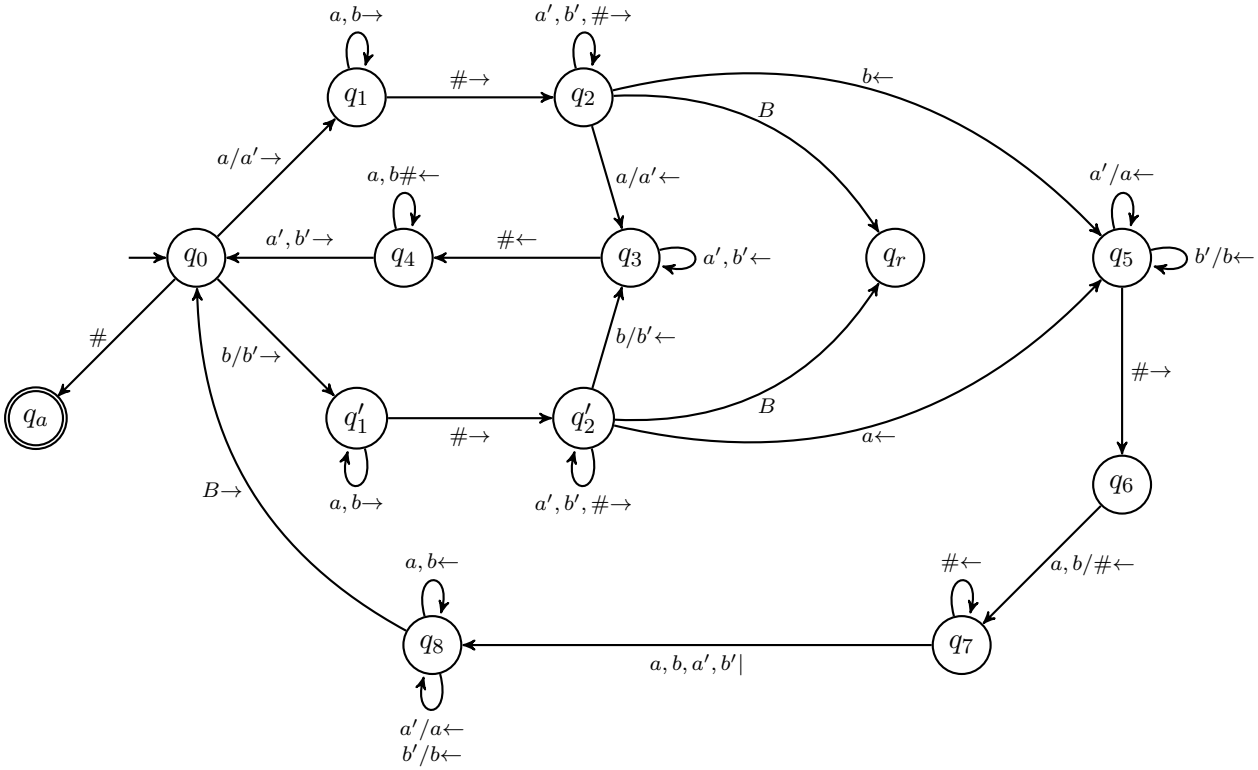
Une autre façon de renverser un mot est d'échanger progressivement des paires de lettres ($n/2$ paires pour un mot de longueur paire, $(n-1)/2$ pour un mot de longueur impaire), en commençant par les deux côtés et en progressant vers le milieu :



On peut réaliser cet algorithme par une machine de Turing qui étend l'alphabet de travail avec deux lettres a' et b' pour indiquer les lettres déjà échangés, avant de les convertir en a et b « standard » à la fin. La construction explicite de cette machine est laissé en exercice aux lecteurs. □

Question 2.3. *Proposer une machine de Turing qui prend en entrée deux mots $u, v \in \Sigma^*$ séparés par le caractère #, et décide si u est un sous-mot contigu de v, c'est-à-dire s'il existe des mots $x, y \in \Sigma^*$ tels que $v = xuy$.*

Solution : La machine ci-dessous considère progressivement tous les suffixes de v, jusqu'à en trouver (ou pas) un qui contienne u comme préfixe :

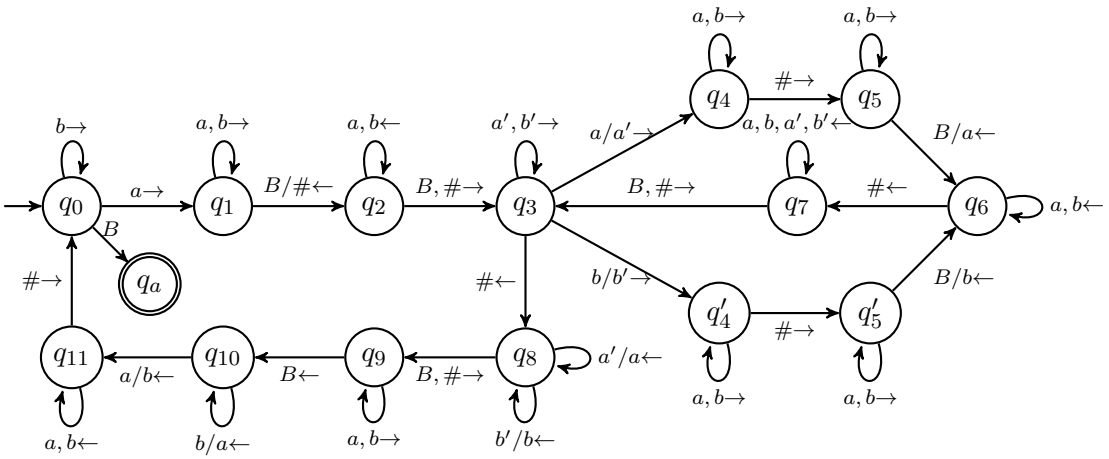


Ceci est réalisé en progressant dans les deux mots (boucle entre états q_0–q_4) avec l'aide des deux caractères supplementaires a' et b' qui sont utilisés pour garder une trace de quelles parties de u et du suffixe actuel de v ont déjà été analysées. Dès qu'une discordance est détéctée (arrivée en état q_5), la machine revient au début de u, tout en réinitialisant les a' et b' et en remplaçant la première lettre du suffixe actuel par #. La machine accepte si elle a avancé en u jusqu'au #, et rejette si elle a avancé en v jusqu'au blanc.

□

Question 2.4. *Proposer une machine de Turing qui prend en entrée un entier n codé par le mot a^n, et renvoie tous les mots $w \in \Sigma^*$ de longueur $|w| = n$ séparés par des caractères # (dans n'importe quel ordre). Par exemple, sur l'entrée aa la machine doit renvoyer aa#ab#ba#bb (ou une permutation de celui-ci).*

Solution : Considérez la machine ci-dessous :



Notre approche consiste à compter en binaire, en copiant le compteur actuel et en l'incrémentant de un. La copie est effectuée par le « cerf-volant» à droite (états q_1–q_8), essentiellement avec la même approche décrite dans le corrigé de PC4. Ensuite pour obtenir le successeur (états q_9–q_{11}), en partant de la droite, on change tous les b en a, jusqu'au premier a qu'on change en b. Enfin, le tout premier état q_0 sert à détecter si le compteur a une valeur de la forme b^*, ce qui nous fait arrêter. □

3 Équivalence élémentaire

On fixe une signature Σ contenant l'égalité (et on considérera des modèles égalitaires). Étant donnée une structure $\mathfrak{M}$ sur Σ, on définit la théorie

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \{\phi \mid \mathfrak{M} \vDash \phi\}$$

où ϕ désigne une formule arbitraire sur la signature Σ.

Question 3.1. *Montrer que* $\mathfrak{M}$ *est un modèle de* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$.

Solution : Étant donnée une formule $\phi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, on a $\mathfrak{M} \vDash \phi$ par définition de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ et donc $\mathfrak{M}$ est bien un modèle de la théorie. □

Question 3.2. *Sur la signature* $\Sigma = (\{0, 1, \pi\}, \{+, \times, \cos\}, \{=, \leq\})$*, considérons* $\mathfrak{M}$ *la structure* $\mathbb{R}$ *avec l'interprétation usuelle des symboles de constantes, fonctions et relations. Est-ce que* $\mathfrak{M}$ *est le seul modèle de* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *?*

Solution : Non, par Lowenheim-Skolem, on a un modèle dénombrable qui ne peut donc pas être $\mathbb{R}$ (qui n'est pas dénombrable). □

Une théorie $\mathcal{T}$ sur Σ est dite *complète* lorsqu'elle est cohérente et que pour toute formule close ϕ, soit $\mathcal{T} \vdash \phi$ soit $\mathcal{T} \vdash \neg\phi$.

Question 3.3. *Montrer que* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *est complète.*

Solution : Soit ϕ une formule. Par définition de la satisfiabilité, on a soit $\mathfrak{M} \vDash \phi$, soit $\mathfrak{M} \vDash \neg\phi$, d'où soit $\phi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ (et donc $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \phi$), soit $\neg\phi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ (et donc $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \vdash \neg\phi$). □

Deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur Σ sont *élémentairement équivalentes* si, pour toute formule close ϕ, on a $\mathfrak{M} \vDash \phi$ si et seulement si $\mathfrak{M}' \vDash \phi$. On note $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$ lorsque c'est le cas.

Question 3.4. *Montrer qu'une théorie cohérente est complète si et seulement si tous ses modèles sont élémentairement équivalents.*

Solution : Soit $\mathcal{T}$ une théorie cohérente.

Supposons que $\mathcal{T}$ est complète. Considérons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ deux modèles de cette théorie et ϕ une formule. Soit $\mathcal{T} \vdash \phi$ et dans ce cas ϕ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ et dans $\mathfrak{M}'$, soit $\mathcal{T} \vdash \neg\phi$ et dans ce cas ϕ n'est pas satisfaite dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$. On a donc bien que ϕ est valide dans $\mathfrak{M}$ si et seulement si elle l'est dans $\mathfrak{M}'$.

Réciproquement, supposons que les modèles de $\mathcal{T}$ sont élémentairement équivalents. Supposons qu'il existe une formule ϕ telle que ni $\mathcal{T} \vdash \phi$, ni $\mathcal{T} \vdash \neg\phi$. Par le théorème de complétude, il existe donc un modèle qui valide ϕ et un autre modèle qui valide $\neg\phi$, ce qui contredit l'hypothèse. □

On rappelle la notation $t^{\mathfrak{M}}[v]$ pour l'interprétation du terme t dans un modèle $\mathfrak{M}$ relative à une valuation v.

Étant données deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, une fonction $s : M \to M'$ entre les domaines respectifs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}'$ est un *isomorphisme* lorsque

— s est une bijection,
— s préserve les constantes : pour chaque symbole de constante c, $s(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{M}'}$,
— s préserve les fonctions : pour chaque symbole de fonction f d'arité n,

$$s(f^{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_n)) = f^{\mathfrak{M}'}(s(x_1), \ldots, s(x_n))$$

— s préserve les relations : pour chaque symbole de relation R d'arité n,

$$(x_1, \ldots, x_n) \in R^{\mathfrak{M}} \iff (s(x_1), \ldots, s(x_n)) \in R^{\mathfrak{M}'}$$

Deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont *isomorphes* lorsqu'il existe un isomorphisme $s : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$. On note $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ lorsque c'est le cas.

Question 3.5. *Soit $s : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ un isomorphisme. Montrer que pour tout terme t et valuation v, on a $s(t^{\mathfrak{M}}[v]) = t^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]$.*

Solution : On montre le résultat par induction sur t :
— si $t = x$ est une variable

$$s(x^{\mathfrak{M}}[v]) = s(v(x)) = x^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]$$

— si $t = c$ est une constante

$$s(c^{\mathfrak{M}}[v]) = s(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{M}'} = c^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]$$

— si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ commence par un symbole de fonction, on a

$$\begin{aligned} s(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}}[v]) &= s(f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[v])) \\ &= f^{\mathfrak{M}'}(s(t_1^{\mathfrak{M}}[v]), \ldots, s(t_n^{\mathfrak{M}}[v])) && \text{car } s \text{ préserve les fonctions} \\ &= f^{\mathfrak{M}'}(t_1^{\mathfrak{M}'}[s \circ v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]) && \text{par hypothèse d'induction} \\ &= f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}'}[s \circ v] \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. □

Question 3.6. *Montrer que deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes.*

Solution : Étant données deux structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ et un isomorphisme $s : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, on montre que toute formule ϕ a la même interprétation dans $\mathfrak{M}$ sous une valuation v et dans $\mathfrak{M}'$ sous la valuation $s \circ v$ par induction sur la structure de ϕ.
— Si $\phi = R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule atomique alors on a

$$\begin{aligned} v \vDash^{\mathfrak{M}} R(t_1, \ldots, t_n) \quad & \text{ssi} \quad R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[v]) \\ & \text{ssi} \quad R^{\mathfrak{M}'}(s(t_1^{\mathfrak{M}}[v]), \ldots, s(t_n^{\mathfrak{M}}[v])) && \text{car } s \text{ préserve les relations} \\ & \text{ssi} \quad R^{\mathfrak{M}'}(t_1^{\mathfrak{M}'}[s \circ v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]) && \text{par la question précédente} \\ & \text{ssi} \quad s \circ v \vDash^{\mathfrak{M}'} R(t_1, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

— Si $\phi = \top$ ou $\phi = \bot$ c'est immédiat.
— Si $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ alors on a

$$\begin{aligned} v \vDash^{\mathfrak{M}} \phi \quad & \text{ssi} \quad v \vDash^{\mathfrak{M}} \phi_1 \text{ ou } v \vDash^{\mathfrak{M}} \phi_2 \\ & \text{ssi} \quad s \circ v \vDash^{\mathfrak{M}'} \phi_1 \text{ ou } s \circ v \vDash^{\mathfrak{M}'} \phi_2 && \text{par hypothèse d'induction} \\ & \text{ssi} \quad s \circ v \vDash^{\mathfrak{M}'} \phi \end{aligned}$$

— Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, c'est similaire au cas précédent.

— Si $\phi = \forall x.\psi$ alors on a

$$\begin{array}{lll} v \vDash^{\mathfrak{M}} \forall x.\psi & \text{ssi} & \text{pour tout } m \in \mathfrak{M},\ (v, x \mapsto m) \vDash^{\mathfrak{M}} \psi \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } m \in \mathfrak{M},\ (s \circ v, x \mapsto s(m)) \vDash^{\mathfrak{M}'} \psi \quad \text{par hypothèse d'induction} \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } m' \in \mathfrak{M}',\ (s \circ v, x \mapsto m') \vDash^{\mathfrak{M}'} \psi \quad \text{car } s \text{ est une bijection} \\ & \text{ssi} & s \circ v \vDash^{\mathfrak{M}'} \forall x.\psi \end{array}$$

— Si $\phi = \exists x.\psi$, c'est similaire au cas précédent.

En particulier, si ϕ est une formule close, sous la valuation vide, on a $\mathfrak{M} \vDash \phi$ si et seulement si $\mathfrak{M}' \vDash \phi$. Les structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont donc élémentairement équivalentes. □

Question 3.7. *Montrer que si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont élémentairement équivalentes et $\mathfrak{M}$ est finie alors $\mathfrak{M}'$ est aussi finie et a le même nombre d'éléments que $\mathfrak{M}$.*

Solution : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère la formule ϕ_n

$$\phi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n. \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \right) \wedge \forall x. \bigvee_{1 \leq i \leq n} x = x_i$$

Ses modèles sont précisément les formules à n éléments. La structure $\mathfrak{M}$ la valide, donc $\mathfrak{M}'$ aussi, et on en déduit que $\mathfrak{M}'$ a n éléments. □

Question 3.8. *Montrer que deux structures élémentairement équivalentes finies sont isomorphes. On pourra raisonner par l'absurde.*

Solution : Supposons que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont finies élémentairement équivalentes et non isomorphes. On note n le nombre d'éléments de $\mathfrak{M}$, on note $m_1, \ldots, m_n$ les éléments de $\mathfrak{M}$ et on considère la valuation v qui a la variable x_i associe m_i avec $1 \leq i \leq n$.

Pour toute bijection $s : M \to M'$ entre les domaines respectifs de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}'$, il existe donc une constante, une fonction ou une relation qui n'est pas préservée. On définit une formule ϕ_s selon le cas.

— Si une constante c n'est pas préservée, il existe un élément m_i de $\mathfrak{M}$ tel que

$$c^{\mathfrak{M}} = m_i \qquad \text{et} \qquad c^{\mathfrak{M}'} \neq s(m_i)$$

On prend la formule ϕ_s qui est

$$c = x_i$$

— Si une fonction f d'arité k n'est pas préservée, il existe des éléments $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$ et m_i du modèle tels que

$$f^{\mathfrak{M}}(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_i \qquad \text{et} \qquad f^{\mathfrak{M}'}(s(m_{i_1}), \ldots, s(m_{i_k})) \neq s(m_i)$$

On prend la formule ϕ_s qui est

$$f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = x_i$$

— Si une relation R n'est pas préservée, il existe des éléments $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$ tels que les valeurs de vérités de

$$R^{\mathfrak{M}}(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \qquad \text{et} \qquad R^{\mathfrak{M}'}(s(m_{i_1}), \ldots, s(m_{i_k}))$$

sont différentes. Si $R^{\mathfrak{M}}(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$ est vraie, on prend la formule

$$R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

sinon, on prend la formule ϕ_s qui est

$$\neg R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

Par construction, on a des interprétations $\phi_s^{\mathfrak{M}}[v]$ et $\phi_s^{\mathfrak{M}'}[s \circ v]$ différentes.

Considérons maintenant la formule close ϕ définie par

$$\exists x_1 \dots \exists x_n. \underbrace{\left(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{s : M \to M' \\ \text{bijection}}} \phi_s \right)}_{\psi}$$

La deuxième conjonction est finie car $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sont finis. Par construction, l'interprétation de ϕ dans $\mathfrak{M}$ est vraie (en interprétant les x_i par m_i, c'est-à-dire en interprétant ψ sous la valuation v). Comme les structures sont supposées élémentairement équivalentes ϕ est aussi satisfaite dans $\mathfrak{M}'$: on a donc des valeurs m_i' dans $\mathfrak{M}'$ pour les x_i qui rendent la partie droite de la formule vraie dans $\mathfrak{M}'$ et ces valeurs sont nécessairement distinctes. On a donc une bijection

$$\begin{aligned} s : M &\to M' \\ m_i &\mapsto m_i' \end{aligned}$$

Par construction, la formule ϕ_s est fausse dans $\mathfrak{M}'$ sous la valuation $s \circ v$ et donc ψ aussi. On aboutit à une contradiction. □

4 Modèles de taille paire

On considère une signature $\Sigma = (\emptyset, \emptyset, \{<\})$ sans constante ni symbole de fonction, et avec un unique symbole de relation binaire $<$.

Question 4.1. *On considère les structures $(\mathbb{N}, <)$ et $(\mathbb{Z}, <)$. Donner une formule qui est satisfaite dans l'une mais pas dans l'autre.*

Solution : $\mathbb{N}$ a un élément minimal mais pas $\mathbb{Z}$. On peut donc prendre la formule $\exists x. \forall y. \neg(y < x)$. □

Question 4.2. *On considère les structures $(\mathbb{Z}, <)$ et $(\mathbb{Q}, <)$. Donner une formule qui est satisfaite dans l'une mais pas dans l'autre.*

Solution : L'ordre $<$ est dense dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$. On peut donc prendre la formule $\forall x. \forall z. ((x < z) \Rightarrow \exists y. (x < y) \wedge (y < z))$. □

Étant donnée une structure $\mathfrak{M}$, on dit qu'elle est
— *finie* si l'ensemble de base l'est,
— *paire* si elle est finie et que son ensemble de base a un nombre pair d'éléments.

On cherche à montrer qu'il n'existe pas de formule ϕ dont les modèles finis sont exactement ceux qui sont pairs. Notons qu'on n'impose rien sur les modèles infinis.

Question 4.3. *Sur une signature qui ne contient que l'égalité, montrer qu'il n'existe pas de formule ϕ dont les modèles égalitaires finis sont exactement ceux qui sont pairs (notons qu'on n'impose rien sur les modèles non finis : il peut ou non y en avoir). On pourra raisonner par contradiction et chercher une structure qui valide à la fois ϕ et $\neg\phi$.*

Solution : La théorie $\{\phi\}$ admet un modèle $\mathfrak{M}$ (n'importe quelle structure finie paire), donc un modèle dénombrable par le théorème de Löwenheim-Skolem. La théorie $\{\neg\phi\}$ admet un modèle $\mathfrak{M}'$ (n'importe quelle structure finie non paire), donc un modèle dénombrable par le théorème de Löwenheim-Skolem. Les deux modèles sont dénombrables et donc isomorphes : $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$. Ils satisfont donc les mêmes formules et on a à la fois $\mathfrak{M} \vDash \phi$ et $\mathfrak{M} \vDash \neg\phi$. Contradiction. □

Question 4.4. *La preuve de la question 4.3 fonctionne-t-elle encore pour une signature Σ arbitraire (non-vide) ? Sinon, quel est l'obstacle ?*

Solution : Dans la preuve nous avons utilisé le fait que deux modèles dénombrables sont en bijection et donc satisfont les mêmes formules. Ça n'est pas vrai sur une signature arbitraire car la bijection ne préserve pas nécessairement l'interprétation des relations (ça n'est pas un *isomorphisme*). La question 4.2 en est une illustration : deux ordres partiels dénombrables ne sont pas nécessairement isomorphes. □

Question 4.5. *Existe-t-il une théorie dont les modèles sont exactement ceux qui sont finis et pairs ?*

Solution : Non. Par contradiction, supposons qu'il existe une telle théorie. Elle admet un modèle (n'importe quel modèle fini pair), par le théorème de Löwenheim-Skolem elle admet donc un modèle dénombrable, et n'admet donc pas que des modèles finis. □