

# Mécanique Quantique

PHY361

Recueil de contrôles

Philippe Grangier et Manuel Joffre

Juin 2023

**Ce document n'est pas autorisé lors du contrôle écrit**

## Liste des contrôles du recueil

- X2021 : Une expérience d'interférences / Lara et le méchant roi
- X2020 : Fullerènes / Intrication de trois particules
- X2018 : Etats comprimés / Interférences et intrication
- X2017 : Echo de spin / Réflexion dépendant du spin

*Pour vous aider dans le choix des contrôles à traiter au fur et à mesure de l'avancement du cours, les zones grisées du tableau ci-dessous indiquent les séances (amphi et/ou PC) plus particulièrement couverts par les différents problèmes du recueil. Le symbole • indique le thème principal abordé par l'exercice correspondant.*

Séance	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X2021/1			•						
X2021/2									•
X2020/1	•								
X2020/2									•
X2018/1					•				
X2018/2						•			
X2017/1							•		
X2017/2			•						

## CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 361

Mercredi 29 juin 2022, durée : 2 heures

*Documents autorisés : livre de cours, copies des diapositives montrées en cours, énoncés et corrigés de PC et de DM, notes personnelles. Les problèmes 1 et 2 sont indépendants, et le barème est indicatif. Les correcteurs et correctrices seront sensibles à la présentation des copies ainsi qu'à la concision et précision des réponses.*

**Problème 1. Une mystérieuse expérience (7 points)**

Il y a quelques années un journal a publié une proposition d'expérience proche de celle représentée Figure 1(a), en affirmant qu'elle remettait en question les bases de la mécanique quantique. Il s'agit d'une expérience d'interférence (biprisme de Fresnel), dans laquelle une grille formée de fils horizontaux très fins (*i.e.* de largeur  $\ell$  très inférieure à l'interfrange  $w$ ) est placée sur les franges noires de la figure d'interférence. Les deux faisceaux se séparent ensuite et atteignent deux détecteurs éloignés, à droite de la figure.

On peut alors faire le raisonnement (erroné) suivant :

- on vérifie que toute la lumière incidente sur le dispositif atteint les détecteurs, ce qui n'est possible que s'il y a bien des franges noires ; sans cela la grille (fils de largeur  $\ell \ll w$ ) intercepterait une partie de la lumière ;
- si les photons arrivent un par un on les détecte soit sur le détecteur du haut soit sur celui du bas ; on peut donc aussi identifier le chemin suivi, alors que d'après l'argument ci-dessus on a simultanément des interférences.

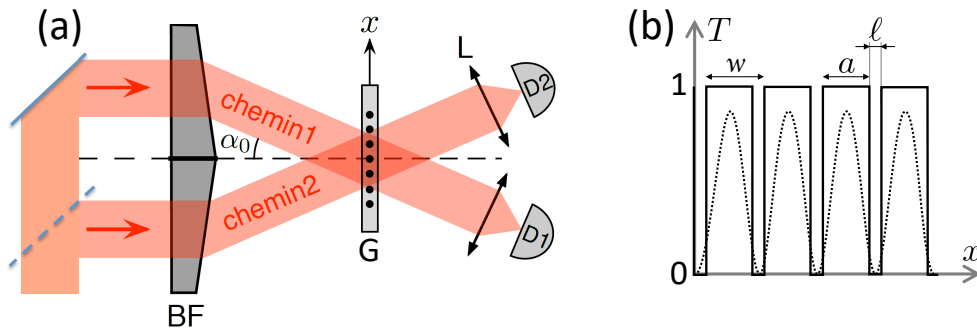


FIGURE 1 – (a) Schéma de l'expérience, comportant un biprisme de Fresnel (BF) et donnant lieu à des franges d'interférence selon la coordonnée transverse  $x$ . Le faisceau issu de chacun des chemins est alors focalisé à l'aide d'une lentille (L) sur une photodiode (D1, D2). Une grille (G), constituée de fils de largeur  $\ell$  espacés d'une distance  $w$  égale à l'interfrange, est placée dans la zone où les deux faisceaux interfèrent. (b) Transmission de la grille en fonction de  $x$  (traits pleins), représentée en regard de la densité de probabilité (pointillés).

Si on croit ce raisonnement on peut observer des interférences **et** connaître le chemin suivi, en contradiction avec les bases de la mécanique quantique ! Mais où est l'erreur ?

1. Afin de résoudre ce paradoxe, nous allons d'abord établir de manière générale une relation liant le contraste des franges d'interférence à la connaissance du chemin suivi dans un interféromètre (pas nécessairement celui représenté ci-dessus). On appelle  $\psi_1(\vec{r})$  et  $\psi_2(\vec{r})$  les amplitudes de probabilité associées aux deux chemins suivis dans l'interféromètre et on se place dans une région de l'espace où ces amplitudes de probabilité peuvent être approximées par des ondes planes  $\psi_1(\vec{r}) = \phi_1 e^{i\vec{k}_1 \vec{r}}$  et  $\psi_2(\vec{r}) = \phi_2 e^{i\vec{k}_2 \vec{r}}$ , où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont réels et constants sur la zone observée. La fonction d'onde totale au point  $\vec{r}$  s'écrit alors  $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$ .

1.a On caractérise le contraste des franges d'interférence à l'aide de la quantité

$$C = \frac{\max_{\vec{r}} |\psi(\vec{r})|^2 - \min_{\vec{r}} |\psi(\vec{r})|^2}{\max_{\vec{r}} |\psi(\vec{r})|^2 + \min_{\vec{r}} |\psi(\vec{r})|^2}. \quad (1)$$

où  $\max_{\vec{r}}$  et  $\min_{\vec{r}}$  désignent les maxima et minima lorsque  $\vec{r}$  varie. Vérifier simplement que  $C = 1$  correspond à des franges d'interférences de visibilité maximale, et  $C = 0$  à la disparition des interférences.

**1.b** On suppose ensuite que l'on peut interrompre un des faisceaux et n'observer que l'autre, et on définit

$$P = \frac{|\psi(\vec{r})|_{\text{voie 1 seulement}}^2 - |\psi(\vec{r})|_{\text{voie 2 seulement}}^2}{|\psi(\vec{r})|_{\text{voie 1 seulement}}^2 + |\psi(\vec{r})|_{\text{voie 2 seulement}}^2} = \frac{|\psi_1(\vec{r})|^2 - |\psi_2(\vec{r})|^2}{|\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2}. \quad (2)$$

Justifier qualitativement que  $P$  caractérise la connaissance du chemin suivi dans l'interféromètre, et en particulier que  $|P| = 1$  si le chemin est connu, tandis que  $P = 0$  si le chemin est inconnu.

**1.c** Exprimer  $P$  et  $C$  en fonction de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , supposés réel et positifs.

**1.d** En déduire que  $P^2 + C^2$  prend une valeur constante que l'on déterminera puis commenter le résultat obtenu.

**2.** On revient maintenant au dispositif de la Figure 1, dans lequel on ne peut pas mettre de détecteurs au niveau des franges d'interférences, pour éviter de perturber l'information sur le chemin suivi ; toutes les mesures sont donc faites à l'aide de D1 et D2, situées dans une zone où les faisceaux ne se recouvrent plus.

Afin de mesurer le contraste des franges d'interférence, on peut alors translater la grille et enregistrer le signal détecté par D1 et D2 en fonction de la position  $\delta x$  de la grille, qui permet ainsi d'échantillonner le signal d'interférence. La transmission de la grille représentée Figure 1(b) prend les valeurs  $T = 0$  sur les fils, et  $T = 1$  entre les fils. Les quantités  $C$  et  $P$  introduites à la question précédente doivent alors être remplacées par

$$C = \frac{\max_{\delta x} |\psi(\vec{r}_{D1})|^2 - \min_{\delta x} |\psi(\vec{r}_{D1})|^2}{\max_{\delta x} |\psi(\vec{r}_{D1})|^2 + \min_{\delta x} |\psi(\vec{r}_{D1})|^2} \quad \text{et} \quad P = \frac{|\psi(\vec{r}_{D1})|_{\text{voie 1 seulement}}^2 - |\psi(\vec{r}_{D1})|_{\text{voie 2 seulement}}^2}{|\psi(\vec{r}_{D1})|_{\text{voie 1 seulement}}^2 + |\psi(\vec{r}_{D1})|_{\text{voie 2 seulement}}^2}, \quad (3)$$

où  $\vec{r}_{D1}$  désigne la position du détecteur D1,  $\max_{\delta x}$  et  $\min_{\delta x}$  désignant les valeurs maximales et minimales obtenues en faisant varier la position  $\delta x$  de la grille (on pourrait écrire des relations équivalentes pour D2).

**2.a** Pensez-vous que l'on puisse observer par cette méthode des franges d'interférence bien contrastées si la largeur  $\ell$  des fils de la grille est très inférieure à la période  $w$  de la grille ?

**2.b** On suppose dorénavant que la largeur  $\ell$  des fils de la grille est non négligeable devant  $w$  (voire du même ordre) et on notera  $a = w - \ell$  la largeur des fentes ainsi disposées sur le trajet du faisceau. Expliquer pour quelle raison il devient alors faux d'affirmer qu'un photon détecté en D1 est nécessairement passé par le chemin 1.

**2.c** La Figure 2 représente les résultats expérimentaux obtenus selon la procédure expérimentale décrite ci-dessus, dans le cas où l'interfrange prend la valeur  $w = 87 \mu\text{m}$ . On commentera aussi complètement que possible les résultats expérimentaux présentés sur la Figure 2(d), à la lumière des réponses obtenues aux questions précédentes.

**2.d question 'bonus' facultative.** En utilisant les points expérimentaux de la Figure 2(d), identifier les valeurs de  $a$  correspondant aux expériences (a), (b) et (c).

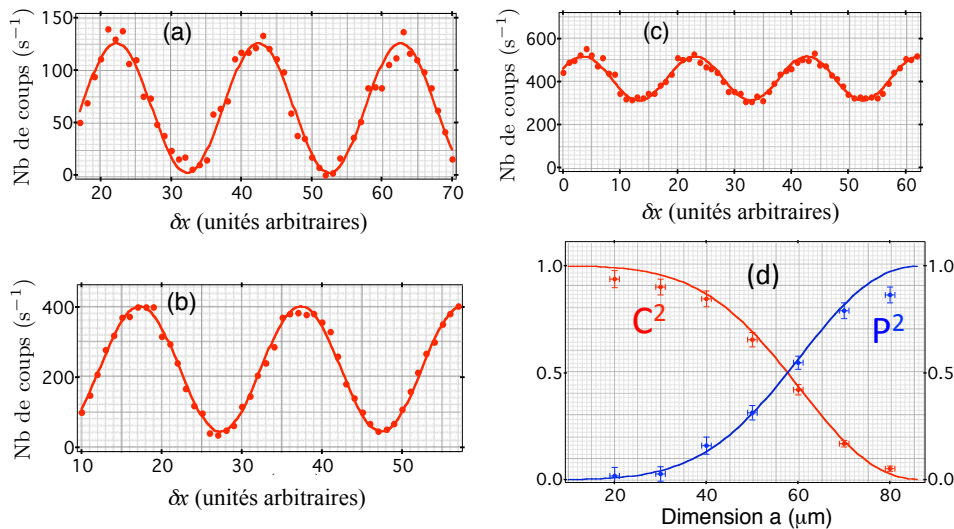


FIGURE 2 – (a, b, c) Représentation du signal détecté sur D1 en fonction de la position  $\delta x$  (en unités arbitraires) pour trois valeurs différentes de la largeur  $a$  des fentes. Les lignes continues sont ajustées sur les points expérimentaux. (d) Représentation des grandeurs  $C^2$  et  $P^2$  déduites des mesures expérimentales.

## Problème 2 : Lara et le méchant roi (13 points)

Lara est retenue prisonnière sur l'île d'un méchant roi et, pour regagner sa liberté, elle doit résoudre une énigme quantique selon le scénario suivant :

- **Etape 1** : Lara prépare une particule de spin  $1/2$  dans l'état de son choix.
- **Etape 2** : Le roi s'empare de la particule puis effectue en l'absence de Lara une mesure d'une composante cartésienne du spin (tenue secrète à ce stade) : soit  $S_x$ , soit  $S_y$ , soit  $S_z$ .
- **Etape 3** : La particule est restituée à Lara qui peut effectuer une mesure de son choix.
- **Etape 4** : Le roi convoque alors Lara, et lui indique laquelle des trois composantes du spin il a mesurée, sans révéler le résultat obtenu. Lara retrouvera sa liberté si elle annonce le résultat obtenu par le roi.

Pour traiter le problème, on se place dans l'espace de Hilbert de dimension 2 engendré par les états  $|+\rangle_z$  et  $|-\rangle_z$ , vecteurs propres de l'observable  $\hat{S}_z$ . On rappelle que les vecteurs propres associés aux observables  $\hat{S}_x$  et  $\hat{S}_y$  s'écrivent respectivement

$$|\pm\rangle_x = \frac{|+\rangle_z \pm |-\rangle_z}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |\pm\rangle_y = \frac{|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

**1.** On suppose dans cette partie que Lara adopte une stratégie très simple : elle prépare le spin dans l'état  $|+\rangle_z$  lors de l'étape 1 et elle mesure la composante  $S_z$  lors de l'étape 3.

**1.a** On suppose dans un premier temps que le roi a lui aussi choisi de mesurer  $S_z$ . Quel(s) résultat(s) peut-il obtenir ? Quel est l'état du système après la mesure ?

**1.b** Quel résultat obtient alors Lara à l'issue de l'étape 3 ? Peut-elle alors deviner à l'étape 4 le résultat obtenu par le roi à l'étape 2 ?

**1.c** On suppose maintenant que le roi a choisi de mesurer  $S_x$ . Quel(s) résultat(s) peut-il obtenir et avec quelles probabilités ? Discuter dans chacun des cas possibles le résultat de la mesure effectuée par Lara.

**1.d** Qu'en est-il si le roi a choisi de mesurer  $S_y$  ?

**1.e** Expliquer pour quelle raison physique Lara ne peut pas donner la bonne réponse au roi de façon certaine.

**1.f** Sachant que le roi choisit aléatoirement et de manière équiprobable la composante mesurée parmi  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$ , montrer que Lara a seulement deux chances sur trois de trouver la bonne réponse.

**2.** Afin d'améliorer ses chances de succès, Lara décide de mesurer à l'étape 3 la projection du spin selon un vecteur unitaire  $\vec{u}$  bien choisi. Les vecteurs propres de l'observable correspondante,  $\vec{S} \cdot \vec{u}$ , seront notés  $|+\rangle_{\vec{u}}$  et  $|-\rangle_{\vec{u}}$ . On suppose en outre que, lors de l'étape 1, Lara choisit de préparer la particule dans l'état  $|+\rangle_{\vec{u}}$ .

On admet qu'on peut se limiter au cas où les coordonnées cartésiennes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  du vecteur  $\vec{u}$  sont toutes trois des grandeurs positives ou nulles. On rappelle les expressions

$$|+\rangle_{\vec{u}} = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle_z + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle_z \quad \text{et} \quad |-\rangle_{\vec{u}} = -e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle_z + e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle_z, \quad (5)$$

où l'on a utilisé les coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ , définies par  $u_x = \cos \varphi \sin \theta$ ,  $u_y = \sin \varphi \sin \theta$  et  $u_z = \cos \theta$ .

**2.a** On suppose dans les questions 2.a, 2.b et 2.c que le roi mesure la quantité  $S_z$ . Donner les résultats de mesure possibles ainsi que les probabilités associées, que l'on exprimera à l'aide de  $u_z = \cos \theta$ .

**2.b** Discuter dans chacun des cas possibles le résultat de la mesure (suivant  $\vec{u}$ ) effectuée par Lara à l'étape 3 et exprimer les probabilités correspondantes en fonction de  $u_z$ .

**2.c** Quelle est la probabilité, notée  $\mathcal{P}_z$ , que Lara obtienne le même résultat que le roi ?

**2.d** En déduire sans calcul la probabilité  $\mathcal{P}_x$  (resp.  $\mathcal{P}_y$ ) que Lara obtienne le même résultat que le roi dans le cas où ce dernier a choisi de mesurer  $S_x$  (resp.  $S_y$ ).

**2.e** Sachant que le roi choisit aléatoirement et de manière équiprobable la composante mesurée parmi  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$ , déterminer la probabilité  $\mathcal{P}$  que Lara obtienne le même résultat que le roi. On vérifiera en outre que l'on

retrouve bien le résultat obtenu en 1.f dans le cas particulier où  $\vec{u}$  est aligné selon l'axe  $z$ .

**2.f** On admet que les chances de succès sont optimales lorsque Lara choisit une configuration telle que  $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y = \mathcal{P}_z$ . Déterminer le vecteur  $\vec{u}$  correspondant, puis commenter la valeur de la probabilité de succès  $\mathcal{P}$  ainsi obtenue.

**3.** Les résultats obtenus plus haut n'étant pas complètement satisfaisants, Lara décide d'exploiter ses connaissances en mécanique quantique pour concevoir une stratégie plus subtile. Dans son laboratoire elle peut aussi préparer des états intriqués, ce qui lui fournit une piste : pourquoi ne pas préparer un état intriqué entre deux particules de spin  $1/2$ , donner l'une d'entre elles au roi à l'étape 2, puis effectuer une mesure portant sur l'état des deux particules à l'étape 3 ?

Pour rendre compte de cette nouvelle approche, on se place dans l'espace produit tensoriel  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_R \otimes \mathcal{E}_L$ , où  $R$  désigne la particule remise au roi tandis que  $L$  désigne la particule conservée par Lara. On utilisera la base tensorielle  $\{|R : +\rangle_z \otimes |L : +\rangle_z, |R : +\rangle_z \otimes |L : -\rangle_z, |R : -\rangle_z \otimes |L : +\rangle_z, |R : -\rangle_z \otimes |L : -\rangle_z\}$ , qui sera simplement notée  $\{|+\rangle_z |+\rangle_z, |+\rangle_z |-\rangle_z, |-\rangle_z |+\rangle_z, |-\rangle_z |-\rangle_z\}$  par la suite.

Pour l'étape 1, Lara décide de préparer l'état intriqué

$$|\Psi\rangle = \frac{|+\rangle_z |+\rangle_z + |-\rangle_z |-\rangle_z}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Pour l'étape 3, Lara mesure une grandeur physique associée à l'observable  $\hat{A}$ , dont les valeurs propres  $a_1, a_2, a_3$ , et  $a_4$  sont distinctes et correspondent aux vecteurs propres (orthonormés) respectifs

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z |+\rangle_z + \frac{e^{i\pi/4} |+\rangle_z |-\rangle_z + e^{-i\pi/4} |-\rangle_z |+\rangle_z}{2} \quad (7)$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z |+\rangle_z - \frac{e^{i\pi/4} |+\rangle_z |-\rangle_z + e^{-i\pi/4} |-\rangle_z |+\rangle_z}{2} \quad (8)$$

$$|\Phi_3\rangle = \frac{e^{-i\pi/4} |+\rangle_z |-\rangle_z + e^{i\pi/4} |-\rangle_z |+\rangle_z}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z |-\rangle_z \quad (9)$$

$$|\Phi_4\rangle = -\frac{e^{-i\pi/4} |+\rangle_z |-\rangle_z + e^{i\pi/4} |-\rangle_z |+\rangle_z}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z |-\rangle_z \quad (10)$$

**3.a** On suppose dans cette question et la suivante que le roi mesure la grandeur  $S_z$  à l'étape 2. Le problème devant maintenant être traité dans l'espace produit tensoriel, il faut invoquer le postulat de la mesure dans le cas général. Ecrire l'expression des projecteurs  $\hat{\Pi}_\pm$  associés aux résultats de mesure possibles, puis en déduire les probabilités de mesure ainsi que l'état du système de deux particules à l'issue de la mesure.

**3.b** En déduire les résultats de la mesure de  $A$  effectuée par Lara à l'étape 3 dans chacun des cas possibles, puis montrer que Lara peut déterminer avec certitude le résultat obtenu par le roi à l'étape 2 dès lors qu'elle est informée à l'étape 4 que c'est bien  $S_z$  qui a été mesurée.

**3.c** Que devient le raisonnement précédent si le roi a mesuré  $S_x$  à la place de  $S_z$  ? On calculera les probabilités correspondantes en distinguant soigneusement les différents cas.

**3.d** On admet que l'on obtient un résultat similaire si le roi a mesuré  $S_y$  à la place de  $S_x$ , à condition d'échanger les rôles joués par  $a_1$  et  $a_2$ . Que peut-on en conclure sur les chances de succès qu'offre cette stratégie, pour les trois mesures possibles du roi ?

**3.e** Un raisonnement hâtif basé sur les résultats précédents pourrait conduire à la conclusion que Lara connaît les résultats des trois mesures  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$  effectuées par le roi, alors que ces opérateurs ne commutent pas. Pouvez-vous expliquer en quoi ce raisonnement est erroné ?

## CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 361

Mercredi 29 juin 2022, durée : 2 heures

**Problème 1. Une mystérieuse expérience**

**1.a** La visibilité des franges est maximale si  $\min_{\vec{r}} |\psi(\vec{r})|^2 = 0$ , ce qui donne bien  $C = 1$ . Au contraire on ne voit pas de franges si le min est égal au max, d'où  $C = 0$ .

**1.b** Le chemin est connu lorsque l'une des amplitudes de probabilité s'annule, et dans ce cas on a bien  $|P| = 1$ . Au contraire  $P = 0$  quand  $|\psi_1(\vec{r})|^2 = |\psi_2(\vec{r})|^2$ , ce qui fait que le chemin suivi ne peut pas être déterminé.

**1.c** On obtient

$$P = \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}.$$

Par ailleurs

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + 2\text{Re} \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r}) = \phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1\phi_2 \cos((\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}),$$

d'où l'on déduit

$$C = \frac{(\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1\phi_2) - (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2)}{\phi_1^2 + \phi_2^2 + 2\phi_1\phi_2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2} = \frac{2\phi_1\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}.$$

**1.d**

$$P^2 + C^2 = \frac{(\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 + 4(\phi_1\phi_2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} = \frac{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} = 1$$

Comme on pouvait s'y attendre les quantités caractérisant les interférences et la connaissance du chemin suivi évoluent en sens inverse, et si  $P$  ou  $C$  vaut 1 alors l'autre vaut 0.

**2.a** Si les fils de la grille sont très fins le déplacement de la grille dans le champ d'interférence ne modifiera pas l'intensité transmise, et on aura donc  $C = 0$ . Si on veut que le déplacement de la grille ait un effet notable les fils doivent avoir une certaine largeur, non négligeable devant l'interfrange, de sorte que la largeur restante  $a = w - \ell$  soit elle-même petite devant la période  $w$ . Le signal pourra ainsi être convenablement échantillonné.

**2.b** Si  $a$  devient petit il faut prendre en compte la diffraction du faisceau lumineux, avec un angle de diffraction de l'ordre de  $\lambda/a$  (voir cours 9). Or la partie oscillante de la densité de probabilité est en  $\cos(k_{2x} - k_{1x})x = \cos 2\alpha_0 kx = \cos 2\pi 2\alpha_0 x/\lambda$ , ce qui donne un interfrange  $w = \lambda/(2\alpha_0)$ . Si  $a$  est de l'ordre de  $w$ , on voit que l'angle de diffraction est de l'ordre de  $2\alpha_0$ , voire très supérieur si  $a \ll w$ . Ainsi, il sera tout à fait possible qu'un photon issu du chemin 2 soit diffracté vers D1. En outre, on constate donc que plus on échantillonne correctement les franges en diminuant  $a$ , plus ce phénomène sera marqué avec pour conséquence une perte d'information sur le chemin suivi, en accord qualitatif avec la relation  $P^2 + C^2 = 1$  établie plus haut.

**2.c** Comme le montre la Figure 2(d), on observe comme prévu plus haut que le contraste diminue lorsque  $a$  augmente, pour tendre vers 0 lorsque  $a = w$ , correspondant à des fils infiniment fins ( $\ell = w - a \rightarrow 0$ ). A l'inverse, c'est seulement dans cette dernière situation que la grille n'introduit pas de perturbation, permettant d'identifier le chemin suivi ( $P = 1$ ). Lorsque  $a$  tend vers 0, la diffraction l'emporte et on perd l'information sur le chemin suivi ( $a = 0$ ). La symétrie des deux courbes autour de la valeur 0.5 nous indique de plus que  $P^2 + C^2 = 1$ , en accord avec la relation établie dans la question 1.

**2.d** Pour déterminer les valeurs de  $a$  associées aux trois courbes expérimentales, il suffit de mesurer le contraste. On mesure respectivement

$$C \approx \frac{125 - 2}{125 + 2} \approx 0.97, \quad C \approx \frac{400 - 40}{400 + 40} \approx 0.82, \quad C \approx \frac{510 - 310}{510 + 310} \approx 0.24,$$

correspondant à  $C^2 \approx 0.94, 0.67$  et  $0.06$ . A l'aide de la Figure 2(d), on peut en déduire que cela correspond à des fentes de largeurs respectives 20, 50 et 80  $\mu\text{m}$ . Les figures présentées dans ce sujet sont issues de la thèse de Vincent Jacques, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00281163> (2007).

## Problème 2 : Lara et le méchant roi

**1.a** L'état initial étant un état propre de  $\hat{S}_z$ , le résultat de mesure est certain et vaut  $+\hbar/2$ . L'état après la mesure reste  $|+\rangle_z$ .

**1.b** Il en va de même pour Lara qui mesure  $+\hbar/2$ . Lorsqu'elle apprend que le roi a mesuré  $S_z$ , elle peut affirmer avec certitude qu'il a obtenu  $+\hbar/2$ .

**1.c** Dans ce cas, le roi peut obtenir  $\pm\hbar/2$  avec des probabilités

$$\mathcal{P}_{\pm} = |{}_x\langle\pm|+\rangle_z|^2 = \frac{1}{2},$$

l'état après la mesure étant alors  $|\pm\rangle_x$ . Si le roi a mesuré  $+\hbar/2$ , Lara pourra elle aussi obtenir les deux résultats  $\pm\hbar/2$ , avec des probabilités

$$\mathcal{P}'_{\pm} = |{}_z\langle\pm|+\rangle_x|^2 = \frac{1}{2}.$$

Il en va de même si le roi a obtenu  $-\hbar/2$ , avec les probabilités

$$\mathcal{P}''_{\pm} = |{}_z\langle\pm|-\rangle_x|^2 = \frac{1}{2}.$$

Le résultat est ainsi le même dans tous les cas, que le roi ait obtenu  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ . Lara ne dispose donc d'aucune information sur le résultat de la mesure du roi.

**1.d** Les probabilités sont identiques car on a aussi  $|{}_y\langle\pm|\pm\rangle_z|^2 = 1/2$ .

**1.e** Dans le cas où le roi n'a pas choisi la même composante que Lara, cette dernière ne dispose d'aucune information sur l'état de la particule restituée par le roi. Ceci résulte du fait que l'observable  $\hat{S}_z$  ne commute pas avec  $\hat{S}_x$  (ou  $\hat{S}_y$ ), qui correspondent à des grandeurs physiques incompatibles. En effectuant sa mesure de  $S_z$ , Lara a irrémédiablement effacé toute information contenue dans l'état que lui a fourni le roi, et elle apprend trop tard (à l'étape 4) quelle mesure il aurait fallu faire pour connaître l'état de la particule. La difficulté vient du fait qu'il est impossible de déterminer avec une seule mesure l'état d'un système quantique placé dans un état arbitraire.

**1.f** La probabilité de succès est égale à 1 si le roi a choisi la même composante que Lara, et à 1/2 dans les deux autres cas (en supposant que Lara choisit alors sa réponse au hasard puisqu'elle ne dispose d'aucune information). La probabilité que Lara trouve la bonne réponse est donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

**2.a** Le roi peut obtenir  $\pm\hbar/2$  avec les probabilités

$$\mathcal{P}_+ = |{}_z\langle+|+\rangle_{\vec{u}}|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) = \frac{1 + u_z}{2}.$$

$$\mathcal{P}_- = |{}_z\langle-|+\rangle_{\vec{u}}|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1 - u_z}{2}.$$

**2.b** Si le roi obtient  $+\hbar/2$ , le système est projeté dans l'état  $|+\rangle_z$  et Lara peut obtenir les résultats  $\pm\hbar/2$  avec les probabilités

$$\mathcal{P}_{+,+} = |{}_{\vec{u}}\langle+|+\rangle_z|^2 = \frac{1 + u_z}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{+,-} = 1 - \mathcal{P}_{+,+} = \frac{1 - u_z}{2}.$$

Si le roi obtient  $-\hbar/2$ , le système est projeté dans l'état  $|-\rangle_z$  et Lara peut obtenir les résultats  $\pm\hbar/2$  avec les probabilités

$$\mathcal{P}_{-,+} = |{}_{\vec{u}}\langle+|-\rangle_z|^2 = \frac{1 - u_z}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{-,-} = 1 - \mathcal{P}_{-,+} = \frac{1 + u_z}{2}.$$

**2.c** On remarque que la probabilité que Lara obtienne le même résultat que le roi est indépendante du résultat obtenu par le roi et vaut dans les deux cas

$$\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_{+,+} = \mathcal{P}_{-,-} = \frac{1 + u_z}{2}.$$

**2.d** Le choix des axes étant arbitraire, on obtiendra une probabilité  $\mathcal{P}_x = (1 + u_x)/2$  si le roi a choisi de mesurer  $S_x$ . On a de même  $\mathcal{P}_y = (1 + u_y)/2$  si le roi a mesuré  $S_y$ .



**2.e** La probabilité de succès est simplement la moyenne des trois possibilités, soit

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + \mathcal{P}_z}{3} = \frac{1}{2} + \frac{u_x + u_y + u_z}{6}.$$

On retrouve bien  $2/3$  dans le cas où  $u_z = 1$  et  $u_x = u_y = 0$ .

**2.f** Il faut choisir  $u_x = u_y = u_z = 1/\sqrt{3}$  (car  $\vec{u}$  est unitaire), ce qui donne

$$\mathcal{P} = (1 + 1/\sqrt{3})/2 \approx 0.79.$$

Cette valeur est sensiblement supérieure au résultat obtenu plus haut ( $2/3 \approx 0.67$ ), car en choisissant un axe de mesure selon la diagonale du repère  $xyz$  Lara minimise la perte d'information. Mais elle a toujours une chance sur cinq de ne pas trouver le bon résultat.

*Le fait, assez intuitif, que l'optimum est atteint quand on répartit l'erreur de manière symétrique entre les trois composantes peut être démontré à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Compte tenu de la contrainte  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$ , cela revient à minimiser la quantité*

$$\mathcal{L}(u_x, u_y, u_z, \lambda) = u_x + u_y + u_z + \lambda(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1)$$

soit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 1 + 2\lambda u_x = 0,$$

d'où l'on déduit  $u_x = -1/2\lambda$ . En procédant de même avec  $u_y$  et  $u_z$ , on en déduit bien  $u_x = u_y = u_z$ .

**3.a** On a

$$\hat{\Pi}_+ = |+\rangle_z \langle +| \otimes \hat{I}_L \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}_- = |-\rangle_z \langle -| \otimes \hat{I}_L,$$

où  $\hat{I}_L$  représente l'identité dans l'espace  $\mathcal{E}_L$ . L'action de  $\hat{\Pi}_\pm$  sur l'état intriqué donne  $\hat{\Pi}_+ |\Psi\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z / \sqrt{2}$  et  $\hat{\Pi}_- |\Psi\rangle = |-\rangle_z |-\rangle_z / \sqrt{2}$ . Le carré de la norme du vecteur projeté étant égal à  $1/2$ , on en déduit que le roi a une chance sur deux de mesurer  $+\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ), l'état du système devenant alors  $|+\rangle_z |+\rangle_z$  (resp.  $|-\rangle_z |-\rangle_z$ ).

**3.b** Si le roi a mesuré  $+\hbar/2$ , on voit que le produit scalaire  $\langle \Phi_n | (|+\rangle_z |+\rangle_z)$  est non nul seulement pour  $n = 1$  ou  $n = 2$ , auquel cas on obtient  $1/\sqrt{2}$ . Lara a donc une chance sur deux de mesurer  $a_1$  ou  $a_2$ , mais elle n'obtiendra jamais  $a_3$  ou  $a_4$ . A l'inverse, si le roi a mesuré  $-\hbar/2$ , on voit que le produit scalaire  $\langle \Phi_n | (|-\rangle_z |-\rangle_z)$  est non nul seulement pour  $n = 3$  ou  $n = 4$ , auquel cas on obtient  $1/\sqrt{2}$ . Lara a donc une chance sur deux de mesurer  $a_3$  ou  $a_4$ , mais elle n'obtiendra jamais  $a_1$  ou  $a_2$ .

Lorsque Lara est informée que le roi a mesuré  $S_z$ , elle peut donc déterminer avec certitude le résultat obtenu selon qu'elle a obtenu l'une des deux premières ou des deux dernières valeurs propres de  $\hat{A}$ .

**3.c** Si le roi mesure  $S_x$ , il faut remplacer le projecteur par  $\hat{\Xi}_\pm = |\pm\rangle_x \langle \pm| \otimes \hat{I}_L$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_+ |\Psi\rangle &= \frac{x\langle +|+\rangle_z}{\sqrt{2}} |+\rangle_x |+\rangle_z + \frac{x\langle +|-\rangle_z}{\sqrt{2}} |+\rangle_x |-\rangle_z = \frac{|+\rangle_x}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_x |+\rangle_x. \\ \hat{\Xi}_- |\Psi\rangle &= \frac{x\langle -|+\rangle_z}{\sqrt{2}} |-\rangle_x |+\rangle_z + \frac{x\langle -|-\rangle_z}{\sqrt{2}} |-\rangle_x |-\rangle_z = \frac{|-\rangle_x}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|+\rangle_z - |-\rangle_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_x |-\rangle_x. \end{aligned}$$

Le roi a à nouveau une chance sur deux de mesurer  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ , l'état après la mesure étant alors  $|+\rangle_x |+\rangle_x$  ou  $|-\rangle_x |-\rangle_x$  selon le résultat obtenu. Les produits scalaires intervenant dans la mesure de Lara s'écrivent

$$\begin{aligned} \langle {}_x\langle +| {}_x\langle +| | \Phi_1 \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle {}_x\langle +| {}_x\langle +| | \Phi_2 \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{4} = 0 \\ \langle {}_x\langle +| {}_x\langle +| | \Phi_3 \rangle &= \frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle {}_x\langle +| {}_x\langle +| | \Phi_4 \rangle &= -\frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
({}_x\langle -|{}_x\langle -|) |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{4} = 0 \\
({}_x\langle -|{}_x\langle -|) |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
({}_x\langle -|{}_x\langle -|) |\Phi_3\rangle &= -\frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \\
({}_x\langle -|{}_x\langle -|) |\Phi_4\rangle &= \frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Lara a donc une chance sur deux de mesurer  $a_1$  ou  $a_3$  si le roi a obtenu  $+\hbar/2$ , et une chance sur deux de mesurer  $a_2$  ou  $a_4$  si le roi a obtenu  $-\hbar/2$ . A nouveau, Lara est capable de déterminer le résultat du roi, à la seule condition de savoir qu'il a mesuré  $S_x$ .

**3.d** Pour mémoire, si le roi mesure  $S_y$ , il faut remplacer le projecteur par  $\hat{\Sigma}_{\pm} = |+\rangle_y \langle +| \otimes \hat{I}_L$ . On obtient alors

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_+ |\Psi\rangle &= \frac{y\langle +|+\rangle_z}{\sqrt{2}} |+\rangle_y |+\rangle_z + \frac{y\langle +|-\rangle_z}{\sqrt{2}} |+\rangle_y |-\rangle_z = \frac{|+\rangle_y |+\rangle_z - i|-\rangle_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_y |-\rangle_y. \\
\hat{\Sigma}_- |\Psi\rangle &= \frac{y\langle -|+\rangle_z}{\sqrt{2}} |-\rangle_y |+\rangle_z + \frac{y\langle -|-\rangle_z}{\sqrt{2}} |-\rangle_y |-\rangle_z = \frac{|-\rangle_y |+\rangle_z + i|-\rangle_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_y |+\rangle_y.
\end{aligned}$$

Le roi a donc à nouveau une chance sur deux de mesurer  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ , l'état après la mesure étant alors  $|+\rangle_y |-\rangle_y$  ou  $|-\rangle_y |+\rangle_y$  selon le résultat obtenu. Les produits scalaires intervenant dans la mesure de Lara s'écrivent

$$\begin{aligned}
({}_y\langle +|{}_y\langle -|) |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{4} = 0 \\
({}_y\langle +|{}_y\langle -|) |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
({}_y\langle +|{}_y\langle -|) |\Phi_3\rangle &= i\frac{e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
({}_y\langle +|{}_y\langle -|) |\Phi_4\rangle &= -i\frac{e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
({}_y\langle -|{}_y\langle +|) |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
({}_y\langle -|{}_y\langle +|) |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}}{4} = 0 \\
({}_y\langle -|{}_y\langle +|) |\Phi_3\rangle &= i\frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \\
({}_y\langle -|{}_y\langle +|) |\Phi_4\rangle &= -i\frac{e^{-i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le même résultat que pour  $S_x$  à condition d'échanger  $a_1$  et  $a_2$ .

Pour résumer, si le roi a mesuré  $S_z$ , le résultat  $a_1$  ou  $a_2$  (resp.  $a_3$  ou  $a_4$ ) obtenu par Lara lui indique que le roi a mesuré  $+\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ). Si le roi a mesuré  $S_x$ , le résultat  $a_1$  ou  $a_3$  (resp.  $a_2$  ou  $a_4$ ) lui indique que le roi a mesuré  $+\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ). Enfin, si le roi a mesuré  $S_y$ , le résultat  $a_2$  ou  $a_3$  (resp.  $a_1$  ou  $a_4$ ) indique à Lara que le roi a mesuré  $+\hbar/2$  (resp.  $-\hbar/2$ ). Grâce à l'utilisation d'un état intriqué, Lara est donc assurée de déterminer le résultat de la mesure du roi quelle que soit la composante effectivement mesurée.

**3.e** En réalité, la mesure effectuée par Lara ne permet pas de déterminer simultanément les valeurs de  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$ , qui sont évidemment des grandeurs physiques incompatibles. Lara peut seulement déterminer le résultat de la mesure qui a effectivement été réalisée par le roi, et il n'y a donc pas de contradiction avec les principes de la mécanique quantique.

## CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 361

Mercredi 30 juin 2021, durée : 2 heures

*Documents autorisés : livre de cours, copies des diapositives montrées en cours, énoncés et corrigés de PC, notes personnelles. Les exercices 1 et 2 sont indépendants, et le barème est indicatif. Les correcteurs et correctrices seront sensibles à la présentation des copies ainsi qu'à la concision et précision des réponses.*

## 1. INTERFERENCES DE MOLECULES DE FULLERENES (6 points)

On réalise une expérience de diffraction avec des molécules de fullerène  $C_{60}$  (figure 1(a)) à l'aide du dispositif expérimental représenté figure 1(b). Pour cette expérience, l'objet diffractant n'est pas un système de deux fentes d'Young espacées d'une distance  $a$  mais un réseau de période  $a$ . On admet que l'expression de l'interfrange en fonction de  $a$ , de la longueur d'onde et de la distance à l'écran d'observation est la même dans les deux situations, la seule différence étant que les pics d'interférence sont plus étroits lorsqu'on utilise un réseau de diffraction.

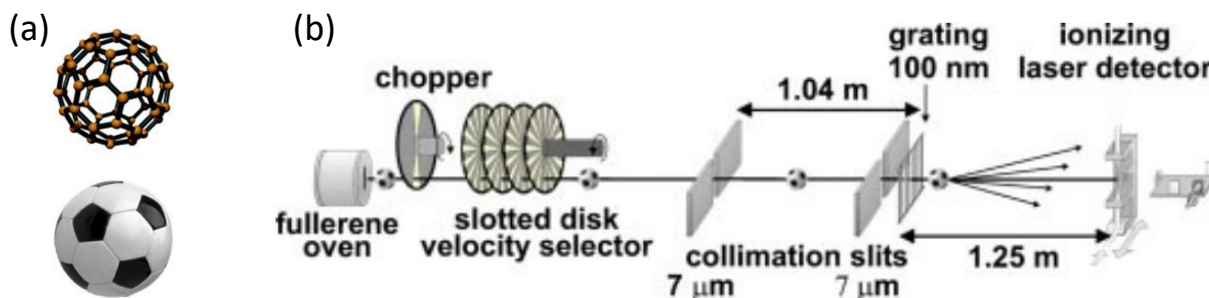


FIGURE 1 – (a) Molécule de fullerène (en haut), constituée de 60 atomes de carbone disposés à la manière des sommets d'un ballon de football (en bas). (b) Dispositif expérimental. Les molécules issues d'un four (*oven*) passent à travers un dispositif destiné à sélectionner leur vitesse (*velocity selector*), puis à travers des fentes de collimation, et ensuite à travers un réseau de diffraction (*grating*) de période  $a = 100$  nm. Elles sont finalement détectées dans le plan d'observation par ionisation à l'aide d'un faisceau laser. La distance entre le réseau et le plan d'observation est de 1.25 m. D'après O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger, *Am. J. Phys.* **71**, 319 (2003).

1. La figure 2(a) représente les distributions de vitesse des molécules. Le pic de droite (1) sur la figure 2(a) est obtenu sans sélecteur de vitesse, tandis que le pic de gauche (2), plus étroit, est obtenu en utilisant le sélecteur de vitesse. En relevant approximativement les valeurs sur les courbes, déterminer dans chacun des deux cas les vitesses moyennes, notées  $\langle v_1 \rangle$  et  $\langle v_2 \rangle$ , ainsi que les écarts quadratiques moyens, notés  $\Delta v_1$  et  $\Delta v_2$ .

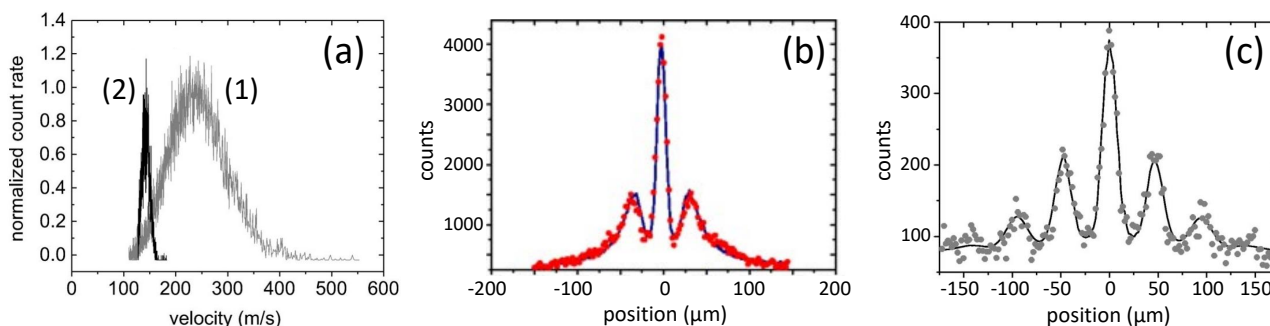


FIGURE 2 – (a) Distributions de vitesses des molécules obtenues sans (1) et avec (2) le sélecteur de vitesse. (b,c) Figures de diffraction observées dans l'expérience.

2. Calculer les longueurs d'onde de de Broglie associées à  $\langle v_1 \rangle$  et  $\langle v_2 \rangle$ , que l'on notera  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , pour une fullerène  $C_{60}$  de masse  $m \approx 1.2 \times 10^{-24}$  kg.

3.a La période du réseau de diffraction est  $a = 100$  nm. Calculer dans les deux cas précédents les angles de diffraction  $\lambda/a$  dans l'ordre 1 du réseau, que l'on notera  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

3.b En déduire dans chacun des cas l'interfrange (*i.e.* la distance entre les pics de diffraction) au niveau du détecteur, situé à  $L = 1.25$  m du réseau (voir figure 1).

4. Commenter les figures de diffraction observées expérimentalement, représentées figures 2(b) et 2(c). On précisera en particulier laquelle de ces deux courbes a été obtenue avec le sélecteur de vitesses. Pouvez-vous expliquer pourquoi la structure de ces deux courbes est différente ?

5. Les molécules  $C_{60}$  ont des degrés de liberté de vibration et de rotation, et elles peuvent donc émettre du rayonnement infrarouge pendant leur trajet dans l'interféromètre. En utilisant ce rayonnement pour faire une image des molécules, on peut *a priori* essayer de connaître le chemin suivi dans l'interféromètre, ce qui ferait disparaître les interférences. Pouvez-vous donner une condition sur la longueur d'onde du rayonnement émis pour que les interférences soient préservées ? Pensez-vous que cette condition soit respectée dans l'expérience ? Discuter.

## 2. INTRICATION DE TROIS PARTICULES DE SPIN 1/2 (14 points)

Nous avons vu en cours le principe des inégalités de Bell, basées sur des mesures effectuées sur deux particules placées dans un état intriqué. Il est intéressant de considérer des états intriqués à trois particules, où le conflit entre la mécanique quantique et le réalisme local est particulièrement flagrant, et apparaît même sans faire appel à une inégalité, comme nous allons le voir dans cet exercice avec trois particules de spins 1/2. Seuls les degrés de liberté de spin seront pris en compte.

On considère dans un premier temps une seule particule de spin 1/2, dont l'état est décrit dans un espace de Hilbert de dimension 2 engendré par les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ , vecteurs propres de l'opérateur  $\hat{S}_z$  pour les valeurs propres respectives  $+\hbar/2$  et  $-\hbar/2$ . On introduit pour simplifier les grandeurs sans dimension  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  définies de sorte que

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{X}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{Y}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{Z}.$$

Dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , on peut donc écrire les matrices

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.a Quels résultats peut-on obtenir lors d'une mesure de  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  ou  $\hat{Z}$  ?

1.b Montrer que  $\hat{X}^2 = \hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}$ , où  $\hat{I}$  est l'opérateur identité. Retrouver ce résultat par un autre argument utilisant votre réponse à la question 1.a.

1.c Montrer que  $\hat{X}\hat{Y} = -\hat{Y}\hat{X} = i\hat{Z}$ , puis écrire les relations similaires obtenues par permutations circulaires de  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$ .

*On considère dans la suite de l'exercice trois particules de spin 1/2, dont les états sont mesurés respectivement par Alice, Bob et Charlie. On décrit le système à l'aide de l'espace produit tensoriel  $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathcal{E}_c$ , où chacun des espaces  $\mathcal{E}_a$ ,  $\mathcal{E}_b$  et  $\mathcal{E}_c$  est un espace de dimension 2 comme celui utilisé lors de la question précédente. On considérera dans la suite des observables de type produit tensoriel comme par exemple  $\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Z}$  correspondant à la situation où Alice effectue une mesure de  $X$ , Bob une mesure de  $Y$  et Charlie une mesure de  $Z$ . On prendra garde à bien conserver l'ordre des trois termes du produit tensoriel tout au long de l'exercice. La question 8 peut être traitée indépendamment des questions qui la précèdent.*

2. Rappeler la dimension de l'espace  $\mathcal{E}_H$ , ainsi qu'une base possible de cet espace.

3.a On rappelle la relation générale vue en cours permettant de calculer le produit de deux produits tensoriels d'opérateurs :  $(\hat{A} \otimes \hat{B} \otimes \hat{C})(\hat{A}' \otimes \hat{B}' \otimes \hat{C}') = \hat{A}\hat{A}' \otimes \hat{B}\hat{B}' \otimes \hat{C}\hat{C}'$ . On introduit les observables agissant dans  $\mathcal{E}_H$

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}, \\ \hat{V} &= \hat{Y} \otimes \hat{X} \otimes \hat{Y}, \\ \hat{W} &= \hat{Y} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{X}.\end{aligned}$$

En vous aidant des résultats obtenus plus haut, montrer que  $\hat{U}\hat{V} = \hat{V}\hat{U}$ .

3.b De même, montrer que  $\hat{U}\hat{W} = \hat{W}\hat{U}$  et  $\hat{V}\hat{W} = \hat{W}\hat{V}$ , et donc que les trois observables  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  et  $\hat{W}$  commutent entre elles. On pourra avancer un argument simple sans faire explicitement le calcul.

3.c Montrer que chacune des trois observables  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  ou  $\hat{W}$  a pour valeurs propres  $\pm 1$ . En déduire qu'on peut associer à l'ensemble des trois grandeurs physiques  $(U, V, W)$  huit triplets de valeurs propres  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . En admettant que ces huit triplets sont réalisés, montrer que les huit vecteurs propres associés constituent une base de l'espace de Hilbert à trois particules.

4.a Montrer que l'observable  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}$  commute avec  $\hat{U}$ , puis donner un argument simple permettant d'en déduire qu'elle commute également avec  $\hat{V}$  et  $\hat{W}$ .

4.b Montrer que  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X} = \epsilon \hat{U}\hat{V}\hat{W}$ , où l'on déterminera la valeur de  $\epsilon$ .

5.a On considère l'état

$$|\chi\rangle = \frac{|+++\rangle - |--\rangle}{\sqrt{2}},$$

où  $|\pm\rangle$  sont les états propres de  $\hat{Z}$ , et où on utilise la notation abrégée  $|\pm\pm\pm\rangle = |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$  pour les éléments de la base tensorielle. Vérifier que  $\hat{X}|\pm\rangle = |\mp\rangle$  et  $\hat{Y}|\pm\rangle = \pm i|\mp\rangle$ . En déduire que  $|\chi\rangle$  est un vecteur propre commun de  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  et  $\hat{W}$  associé au triplet  $(+1, +1, +1)$ .

5.b Le système est préparé dans l'état  $|\chi\rangle$ . Quels sont les résultats des mesures de  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ ,  $\hat{W}$  et  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}$  ?

6. Dans cette question, on cherche à interpréter le résultat précédent dans le cadre d'un modèle réaliste local. On désigne par  $x = \pm 1$  (resp.  $y = \pm 1$ ) les résultats des mesures de  $X$  (resp.  $Y$ ), tels qu'ils apparaissent pour chaque particule lors des mesures effectuées par Alice, Bob et Charlie. Dans un modèle réaliste local,  $x$  et  $y$  possèdent des valeurs qui sont définies et qui valent soit  $+1$  soit  $-1$  pour chaque particule avant la mesure. On appelle  $x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c$  les valeurs de ces variables cachées lorsque le système est préparé dans l'état  $|\chi\rangle$ .

6.a Exprimer le produit des résultats des mesures de  $U$ ,  $V$  et  $W$  en fonction de  $x_a, x_b$  et  $x_c$ .

6.b En se plaçant dans l'état  $|\chi\rangle$  des questions 5.a et 5.b, le résultat de la question 6.a est-il compatible avec les prédictions de la mécanique quantique ?

7. On introduit la grandeur sans dimension associée à l'observable

$$\hat{T}(\alpha) = \hat{X} \cos \alpha + \hat{Y} \sin \alpha$$

correspondant à la valeur du spin (divisé par  $\hbar/2$ ) selon l'axe du plan  $xOy$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x$ . Une mesure de  $X$  correspond ainsi au cas  $\alpha = 0$  tandis qu'une mesure de  $Y$  correspond au cas  $\alpha = \pi/2$ . On rappelle que les valeurs propres associées à l'observable  $\hat{T}(\alpha)$  sont également de la forme  $\epsilon = \pm 1$  et correspondent aux vecteurs propres

$$|\psi_{\alpha;\epsilon}\rangle = \frac{\epsilon e^{-i\alpha/2} |+\rangle + e^{i\alpha/2} |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Une autre façon de comprendre l'expérience décrite dans cet exercice est alors de considérer les corrélations entre les résultats des mesures d'Alice, Bob et Charlie effectuées selon les angles respectifs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . On appellera  $a, b$  et  $c$  les résultats respectifs de ces mesures.

7.a Le système étant préparé dans l'état  $|\chi\rangle$  (cf 5.a), calculer la probabilité  $\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b, \gamma:c)$  pour qu'Alice, Bob et Charlie obtiennent respectivement les résultats  $a, b, c$  en faisant des mesures selon les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ .

7.b En déduire les probabilités des résultats de deux mesures  $\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b), \mathcal{P}(\alpha:a, \gamma:c), \mathcal{P}(\beta:b, \gamma:c)$ , et des résultats d'une seule mesure  $\mathcal{P}(\alpha:a), \mathcal{P}(\beta:b), \mathcal{P}(\gamma:c)$ .

7.c En utilisant les résultats des questions 7.a et 7.b, montrer simplement que si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  ou  $\pi$ , Bob et Charlie peuvent prédire avec certitude le résultat d'Alice en se communiquant leurs résultats. Cette conclusion est-elle surprenante ?

8. *Cette question est indépendante de 6. et 7.* On souhaite préparer l'état  $|\chi\rangle = (|++\rangle - |--\rangle)/\sqrt{2}$  évoqué plus haut en partant d'un état initial  $|++\rangle$  où les spins sont tous trois préparés dans l'état  $|+\rangle$ .

8.a : Indiquer qualitativement d'après le cours comment faire évoluer un spin unique de l'état  $|+\rangle$  à l'état  $|\phi\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$ . On suppose dans la suite qu'on a appliqué cette même transformation aux 3 spins, quel est alors l'état du système ? Comment se compare-t-il à l'état  $|\chi\rangle$  souhaité ?

8.b : Dans cette question et la suivante on ne considère que les deux premiers spins, et on se place donc dans l'espace de Hilbert correspondant. On fait interagir ces deux spins à l'aide du Hamiltonien  $\hat{H} = \hbar g \hat{Z} \otimes \hat{Y}$ , que l'on applique pendant un temps  $\tau$  choisi tel que  $g\tau = \pi/4$ . On suppose ici que l'état initial s'écrit  $|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes |\phi\rangle$ , où  $|\phi\rangle$  est l'état défini à la question précédente. Déterminer l'état  $|\psi(t)\rangle$  pour  $t \leq \tau$ , puis l'état  $|\psi(\tau)\rangle$ . On rappelle que les états propres de  $\hat{Y}$  s'écrivent  $|\psi_Y:\pm\rangle = (\pm e^{-i\pi/4}|+\rangle + e^{i\pi/4}|-\rangle)/\sqrt{2}$ .

8.c : Reprendre la question 8.b pour l'état initial  $|\psi'(0)\rangle = |-\rangle \otimes |\phi\rangle$ .

8.d : En supposant finalement que le premier spin est aussi dans l'état  $|\phi\rangle$ , déterminer l'état final des deux spins (on pourra utiliser le principe de superposition linéaire).

8.e : Comment peut-on alors procéder pour préparer l'état  $|\chi\rangle$  ?

## CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 361

Mercredi 30 juin 2021, durée : 2 heures

## Correction

## 1. INTERFERENCES DE MOLECULES DE FULLERENES

1. On a approximativement  $\langle v_1 \rangle = 240$  m/s,  $\Delta v_1 = 60$  m/s, et  $\langle v_2 \rangle = 145$  m/s,  $\Delta v_2 = 10$  m/s.

2. On a  $\lambda_1 = 6.63 \cdot 10^{-34} / (240 \cdot 1.2 \cdot 10^{-24}) = 2.3 \cdot 10^{-12}$  m, et  $\lambda_2 = 6.63 \cdot 10^{-34} / (145 \cdot 1.2 \cdot 10^{-24}) = 3.8 \cdot 10^{-12}$  m.

3.a On a  $\theta_1 = 2.3 \cdot 10^{-5} = 23 \mu\text{rad}$ , et  $\theta_2 = 3.8 \cdot 10^{-5} = 38 \mu\text{rad}$ .

3.b On en déduit les interfranges attendus  $L\theta = \lambda L/a$  qui sont donc  $i_1 = 1.25 \times 23 \cdot 10^{-6} = 29 \mu\text{m}$ , et  $i_2 = 1.25 \times 38 \cdot 10^{-6} = 47.5 \mu\text{m}$ .

4. Le cas (1) sans sélecteur correspond donc à la figure 2(b), et le cas (2) avec sélecteur à la figure 2(c). De plus les franges de la figure 2(b) sont brouillées plus rapidement à cause de la plus grande dispersion de vitesse en l'absence de sélecteur. On observe enfin un plus grand nombre de coups en l'absence de sélecteur car le flux de particules est plus important.

5. La résolution spatiale d'un système d'imagerie est au mieux de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda_{opt}$  du rayonnement émis, qui doit donc être plus grande que la séparation spatiale entre les différents chemins de l'interféromètre. Il faut donc que  $\lambda_{opt}$  soit nettement plus grand que le pas du réseau  $a = 100$  nm, donc supérieur à quelques  $\mu\text{m}$ , ce qui est satisfait pour les longueurs d'onde infrarouges correspondant aux transitions entre des niveaux de rotation ou de vibration de la molécule  $\text{C}_{60}$ .

## 2. INTRICATION DE TROIS PARTICULES DE SPIN 1/2

1.a Les résultats de mesure possibles sont les valeurs propres des matrices associées. Pour ces trois matrices la trace est nulle et le déterminant est égal à  $-1$ , donc les valeurs propres sont  $+1$  et  $-1$ .

1.b On peut montrer le résultat demandé en calculant le produit des matrices. On peut aussi écrire  $\hat{X}|\pm\rangle = |\mp\rangle$ . Donc  $\hat{X}^2|\pm\rangle = \hat{X}|\mp\rangle = |\pm\rangle$ . De même  $\hat{Y}^2|\pm\rangle = \hat{Y}(\pm i)|\mp\rangle = (\mp i)(\pm i)|\pm\rangle = |\pm\rangle$  et  $\hat{Z}^2|\pm\rangle = \hat{Z}(\pm)|\pm\rangle = (\pm)(\pm)|\pm\rangle = |\pm\rangle$ , d'où le résultat demandé. Par ailleurs, on peut aussi remarquer qu'une mesure de  $X$  donnant pour résultat  $\pm 1$ , une mesure de  $X^2$  donnera  $(\pm 1)^2 = 1$ . On obtiendra donc avec certitude le résultat 1, ce qui signifie que l'observable  $\hat{X}^2$  est nécessairement l'identité. Il en va de même pour  $\hat{Y}^2$  et  $\hat{Z}^2$ .

1.c On obtient le résultat demandé par un simple produit de matrices, ou encore en écrivant

$$\hat{X}\hat{Y}|\pm\rangle = \hat{X}(\pm i)|\mp\rangle = \pm i|\pm\rangle = i\hat{Z}|\pm\rangle$$

et

$$\hat{Y}\hat{X}|\pm\rangle = \hat{Y}|\mp\rangle = \mp i|\pm\rangle = -i\hat{Z}|\pm\rangle,$$

d'où le résultat demandé. Par permutation circulaire, on en déduit  $\hat{Y}\hat{Z} = -\hat{Z}\hat{Y} = i\hat{X}$  et  $\hat{Z}\hat{X} = -\hat{X}\hat{Z} = i\hat{Y}$ .

2. L'espace des états est de dimension  $2 \times 2 \times 2 = 8$  et est engendré par les 8 vecteurs  $|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$ .

3.a En utilisant 1.b et 1.c, on obtient

$$\hat{U}\hat{V} = (\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y})(\hat{Y} \otimes \hat{X} \otimes \hat{Y}) = \hat{X}\hat{Y} \otimes \hat{Y}\hat{X} \otimes \hat{Y}\hat{Y} = i\hat{Z} \otimes (-i\hat{Z}) \otimes \hat{I} = \hat{Z} \otimes \hat{Z} \otimes \hat{I}.$$

$$\hat{V}\hat{U} = (\hat{Y} \otimes \hat{X} \otimes \hat{Y})(\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}) = \hat{Y}\hat{X} \otimes \hat{X}\hat{Y} \otimes \hat{Y}\hat{Y} = -i\hat{Z} \otimes i\hat{Z} \otimes \hat{I} = \hat{Z} \otimes \hat{Z} \otimes \hat{I}.$$

Donc  $\hat{U}\hat{V} = \hat{V}\hat{U}$ .

3.b Ces trois observables diffèrent simplement par le fait que la mesure de  $X$  est confiée à Alice, Bob ou Charlie. Les trois particules (ou les trois expérimentateurs) jouant le même rôle, la commutation entre  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$  permet d'en déduire par permutation circulaire que les trois observables commutent entre elles.

3.c Les valeurs propres de  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  étant  $\pm 1$ , il en va de même pour  $\hat{U} = \hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}$ ,  $\hat{V} = \hat{Y} \otimes \hat{X} \otimes \hat{Y}$  et  $\hat{W} = \hat{Y} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{X}$ . Les trois observables commutent entre elles, il est possible de construire une base propre commune, chaque espace propre commun étant associé à l'un des triplets  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Comme on admet que les 8 triplets distincts sont effectivement réalisés, on dispose ainsi de 8 vecteurs propres orthogonaux entre eux, qui forment bien une base puisque l'espace de Hilbert est de dimension 8.

4.a D'après 1.b et 1.c, on a

$$(\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X})(\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}) = (\hat{X}\hat{X}) \otimes (\hat{X}\hat{Y}) \otimes (\hat{X}\hat{Y}) = \hat{I} \otimes i\hat{Z} \otimes i\hat{Z} = -\hat{I} \otimes \hat{Z} \otimes \hat{Z}.$$

De même

$$(\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y})(\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}) = (\hat{X}\hat{X}) \otimes (\hat{Y}\hat{X}) \otimes (\hat{Y}\hat{X}) = \hat{I} \otimes (-i\hat{Z}) \otimes (-i\hat{Z}) = -\hat{I} \otimes \hat{Z} \otimes \hat{Z}.$$

Donc  $[\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}, \hat{U}] = 0$ . Par permutation circulaire, il en va de même pour le commutateur avec  $\hat{V}$  et  $\hat{W}$ .

4.b En utilisant le résultat obtenu plus haut pour le produit  $\hat{U}\hat{V}$ , on obtient

$$\hat{U}\hat{V}\hat{W} = (\hat{Z} \otimes \hat{Z} \otimes \hat{I})(\hat{Y} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{X}) = (\hat{Z}\hat{Y}) \otimes (\hat{Z}\hat{Y}) \otimes \hat{X} = (-i\hat{X}) \otimes (-i\hat{X}) \otimes \hat{X} = -\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X},$$

où l'on a utilisé l'expression  $\hat{Z}\hat{Y} = -i\hat{X}$  obtenue en 1.c. On en déduit  $\epsilon = -1$ .

5.a Sachant que  $\hat{X}|+\rangle = |-\rangle$ ,  $\hat{X}|-\rangle = |+\rangle$ ,  $\hat{Y}|+\rangle = i|-\rangle$ ,  $\hat{Y}|-\rangle = -i|+\rangle$ , on a

$$\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}|++\rangle = i^2|--\rangle = -|--\rangle$$

et

$$\hat{X} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{Y}|--\rangle = (-i)(-i)|++\rangle = -|++\rangle.$$

On en déduit

$$\hat{U}|\chi\rangle = (-|--\rangle + |++\rangle)/\sqrt{2} = |\chi\rangle.$$

Par permutation circulaire, on obtient le même résultat pour  $\hat{V}$  et  $\hat{W}$ . L'état  $|\chi\rangle$  est donc un vecteur propre commun associé au triplet  $(+1, +1, +1)$ .

5.b En utilisant la relation précédente  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X} = -\hat{U}\hat{V}\hat{W}$ , on déduit que  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}|\chi\rangle = -|\chi\rangle$ . L'état du système est donc un état propre des 4 observables considérés. Le résultat des mesures est alors certain avec pour valeurs respectives 1, 1, 1 et  $-1$ .

6.a Le produit des trois résultats s'écrit  $(x_a y_b y_c)(y_a x_b y_c)(y_a y_b x_c) = x_a y_a^2 x_b y_b^2 x_c y_c^2 = x_a x_b x_c$  car  $y_{a,b,c} = \pm 1$ .

6.b D'après les prédictions de la mécanique quantique, si le système est placé dans l'état  $|\chi\rangle$  alors  $U = V = W = 1$  d'où l'on déduit  $x_a x_b x_c = 1$ . Or, toujours d'après la mécanique quantique, une mesure directe de cette dernière grandeur via  $\hat{X} \otimes \hat{X} \otimes \hat{X}$  doit donner  $-1$ , ce qui est contradictoire. Les prédictions du modèle réaliste local sont donc en contradiction flagrante avec celles de la mécanique quantique.

7.a La probabilité d'obtenir le résultat  $(a, b, c)$  en mesurant selon les directions  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est :

$$\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b, \gamma:c) = |(\langle\psi_{\alpha:a}|\otimes\langle\psi_{\beta:b}|\otimes\langle\psi_{\gamma:c}|)|\chi\rangle|^2$$

où  $|\psi_{\alpha:a}\rangle \otimes |\psi_{\beta:b}\rangle \otimes |\psi_{\gamma:c}\rangle$  est l'état propre associé au résultat de la mesure. Pour la composante  $|++\rangle$  de  $\chi$ , on obtient le produit scalaire

$$(\langle\psi_{\alpha:a}|\otimes\langle\psi_{\beta:b}|\otimes\langle\psi_{\gamma:c}|)|++\rangle = \langle\psi_{\alpha:a}|+\rangle\langle\psi_{\beta:b}|+\rangle\langle\psi_{\gamma:c}|+\rangle = abc e^{i(\alpha+\beta+\gamma)/2}/(2\sqrt{2}).$$

De même, pour la composante  $|--\rangle$  de  $|\chi\rangle$ , on obtient

$$(\langle\psi_{\alpha:a}|\otimes\langle\psi_{\beta:b}|\otimes\langle\psi_{\gamma:c}|)|--\rangle = \langle\psi_{\alpha:a}|-\rangle\langle\psi_{\beta:b}|-\rangle\langle\psi_{\gamma:c}|-\rangle = e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)/2}/(2\sqrt{2}).$$



En prenant la différence entre ces termes, en divisant par  $\sqrt{2}$ , puis en calculant le carré du module, on obtient

$$\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b, \gamma:c) = \frac{|e^{i(\alpha+\beta+\gamma)/2}abc - e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)/2}|^2}{16} = \frac{1 - abc \cos(\alpha + \beta + \gamma)}{8}.$$

7.b En sommant sur les résultats ignorés on obtient  $\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b) = \mathcal{P}(\alpha:a, \gamma:c) = \mathcal{P}(\beta:b, \gamma:c) = 1/4$ , et  $\mathcal{P}(\alpha:a) = \mathcal{P}(\beta:b) = \mathcal{P}(\gamma:c) = 1/2$ .

7.c Si  $\alpha+\beta+\gamma = 0$  ou  $\pi$ , la probabilité conditionnelle du résultat  $a$  pour Alice est  $\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b, \gamma:c) = (1 \pm abc)/2$ , donc Bob et Charlie peuvent prédire avec certitude le résultat d'Alice en se communiquant leurs résultats (une probabilité vaut 0, et l'autre 1). Cette conclusion est une conséquence de l'intrication des 3 particules et n'est pas compatible avec un modèle réaliste local, qui dirait ici que  $\mathcal{P}(\alpha:a, \beta:b, \gamma:c) = 1/2$ . Elle est surprenante si on ignore la mécanique quantique, mais ne l'est plus si on la connaît.

8.a On sait d'après le cours qu'un champ magnétique orienté selon l'axe  $y$  donne lieu à un hamiltonien proportionnel à  $\hat{S}_y$  et donc à  $\hat{Y}$ . Le système subit alors des oscillations de Larmor, la valeur moyenne du spin tournant autour de l'axe  $y$ . Comme le spin est initialement orienté selon l'axe  $z$ , il se retrouve au bout d'un quart de période orienté selon l'axe  $-x$  (si on a orienté le champ dans le bon sens), ce qui correspond à l'état  $|\phi_i\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$ . Si on applique cette même transformation aux trois spins on obtient l'état  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes |\phi_3\rangle$  qui est un état factorisé, alors que l'état  $|\chi\rangle$  est intriqué.

8.b On a en utilisant les données de l'énoncé

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes ((e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4})|\psi_{Y:+}\rangle - (e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4})|\psi_{Y:-}\rangle)/2 = |+\rangle \otimes (i \sin(\pi/4)|\psi_{Y:+}\rangle - \cos(\pi/4)|\psi_{Y:-}\rangle)$$

Le système est ainsi décomposé sur deux états propres de  $\hat{H}$  d'énergies  $\pm \hbar g$ . On en déduit

$$|\psi(t)\rangle = |+\rangle \otimes (i \sin(\pi/4)e^{-igt}|\psi_{Y:+}\rangle - \cos(\pi/4)e^{igt}|\psi_{Y:-}\rangle) = |+\rangle \otimes (\cos(gt - \pi/4)|+\rangle - \cos(gt + \pi/4)|-\rangle)$$

Comme  $g\tau = \pi/4$ , on en déduit  $|\psi(\tau)\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$ .

8.c Finalement si l'état initial est  $|\psi(t=0)\rangle = (|+\rangle - |-\rangle) \otimes (|+\rangle - |-\rangle)/2$  on obtient par superposition linéaire  $|\psi(\tau)\rangle = (|++\rangle + |--\rangle)/\sqrt{2}$  (attention au changement de signe!).

8.e Si on applique pendant un temps  $\tau$  le hamiltonien  $\hbar g \hat{Z} \otimes \hat{Y} \otimes \hat{I}$  à l'état initial  $|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$ , le troisième spin n'est pas affecté : il est simplement *spectateur*. A l'issue de cette interaction, les résultats obtenus plus haut nous permettent donc d'affirmer que le système se retrouve dans l'état

$$\frac{|++\rangle + |--\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\phi\rangle = \frac{|+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |\phi\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle \otimes |\phi\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Partant de ce nouvel état initial, appliquons maintenant au système l'hamiltonien  $\hbar g \hat{Z} \otimes \hat{I} \otimes \hat{Y}$ , également pendant une durée  $\tau$ . C'est maintenant le second spin qui sera spectateur. Le couplage entre les spins d'Alice et de Charlie ayant exactement la même forme que celui entre les deux premiers spins étudiés plus haut, on peut directement appliquer les résultats précédents et affirmer que l'état  $|+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |\phi\rangle$  évoluera vers l'état  $|+++\rangle$  tandis que  $|-\rangle \otimes |-\rangle \otimes |\phi\rangle$  évoluera vers l'état  $---\rangle$ . Par superposition, on en déduit que l'état final sera bien l'état recherché,

$$|\chi\rangle = \frac{|+++\rangle - ---\rangle}{\sqrt{2}}.$$

## CONTRÔLE NON CLASSANT DU COURS DE PHYSIQUE PHY 361

Mercredi 3 juillet 2019, durée : 2 heures

*Documents autorisés : cours, copies des diapositives montrées en cours, énoncés et corrigés de PC, notes personnelles.*

*Les parties 1 et 2 sont indépendantes, et le barème est indicatif. Les correcteurs et correctrices seront sensibles à la présentation des copies, ainsi qu'à la concision et à la précision des réponses.*

## 1 Etats comprimés d'un oscillateur harmonique (8 points)

On considère un oscillateur harmonique à une dimension que l'on traite à l'aide des grandeurs sans dimension  $X = x/\ell$  et  $P = \ell p_x/\hbar$ , proportionnelles à la position  $x$  et à l'impulsion  $p_x$ , où l'on a introduit la longueur caractéristique  $\ell = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ . Le hamiltonien du problème s'écrit alors

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{X}^2 + \hat{P}^2 \right) = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right),$$

avec  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ,  $\hat{a} = (\hat{X} + i\hat{P})/\sqrt{2}$  et  $\hat{a}^\dagger = (\hat{X} - i\hat{P})/\sqrt{2}$ . On donne le commutateur  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$ , où  $\hat{I}$  est l'opérateur identité. On rappelle que les valeurs propres de l'observable  $\hat{N}$  sont les entiers  $n \in \mathbb{N}$ . La base propre correspondante est notée  $\{|n\rangle\}$ , associée aux fonctions de Hermite  $\varphi_n(X)$ . On rappelle que ces fonctions sont réelles et on donne  $\varphi_0(X) = e^{-X^2/2}/\pi^{1/4}$ . On rappelle enfin les relations

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (\text{pour } n \geq 1) \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (\text{pour } n \geq 0).$$

1. Donner les valeurs propres  $E_n$  et les vecteurs propres du hamiltonien  $\hat{H}$ .
2. Rappeler sans démonstration la parité des fonctions  $\varphi_n(x)$ .
3. Le système étant placé dans un état  $|\psi_0\rangle$  arbitraire, donner la borne inférieure du produit  $\Delta X \Delta P$ .
4. On place le système dans l'état  $|\psi_0\rangle$  avec  $\psi_0(X) = e^{-X^2/(2u^2)}/(\pi u^2)^{1/4}$ , où  $u$  est un nombre réel strictement positif. On rappelle que cette fonction gaussienne correspond à  $\Delta X = u/\sqrt{2}$ . Que peut-on dire de  $\Delta P$  dans ce cas? L'état  $|\psi_0\rangle$  est-il un état propre de  $\hat{H}$ ?
5. On décompose l'état  $|\psi_0\rangle$  défini ci-dessus selon l'expression

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n\rangle.$$

Ecrire le coefficient  $c_n$  sous forme d'une intégrale, et en déduire que ce coefficient est nul lorsque  $n$  est impair.

6. A l'aide du formulaire disponible en fin d'exercice, exprimer pour  $n$  pair le coefficient  $c_n$  en fonction de la grandeur  $r = \ln u$ . On posera  $n = 2k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ .

7. Donner l'expression de l'état  $|\psi(t)\rangle$  de l'oscillateur à un instant  $t$  quelconque, sachant que  $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$ .
8. Exprimer  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  en fonction de  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ , puis montrer que les valeurs moyennes de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  sont nulles dans l'état  $|\psi(t)\rangle$ .
9. A l'aide du formulaire, exprimer en fonction de  $r = \ln u$  la valeur moyenne  $\langle N \rangle$  de  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  dans l'état  $|\psi(t)\rangle$ .
10. Exprimer  $\hat{X}^2$  et  $\hat{P}^2$  en fonction de  $\hat{N}$ ,  $\hat{a}\hat{a}$ , et  $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ .
11. *Question bonus, dont le résultat pourra être admis* : Montrer en utilisant le formulaire que

$$\langle \psi(t) | \hat{a}\hat{a} | \psi(t) \rangle^* = \langle \psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | \psi(t) \rangle = \sinh(r) \cosh(r) e^{2i\omega t}.$$

12. En déduire l'expression des valeurs moyennes de  $\hat{X}^2$  et  $\hat{P}^2$  en fonction de  $r$  et de  $t$ .
13. Quelle est la valeur du produit  $\Delta X \Delta P$  ? Ce produit peut-il atteindre la valeur minimale imposée par l'inégalité de Heisenberg ? Montrer que dans ce cas  $\Delta X$  ou  $\Delta P$  peuvent prendre une valeur inférieure à celle obtenue plus haut dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Pouvez-vous justifier le nom d'état "comprimé" donné à  $|\psi(t)\rangle$  ?
14. Pour pouvoir observer de tels effets quantiques sur un oscillateur mécanique, il faut que l'énergie d'un quantum d'oscillation  $h\nu = \hbar\omega$  soit plus grande que l'énergie d'agitation thermique  $k_B T$ , où  $T$  est la température en Kelvin (K) et  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K est la constante de Boltzmann. Certains nano-oscillateurs ont des fréquences d'oscillation de l'ordre de  $\nu = 1$  GHz, et les meilleurs cryostats actuels atteignent des températures minimales de 10 mK. Est-il alors possible d'entrer dans un régime où les oscillations mécaniques deviennent quantiques ?

## Formulaire

Pour  $k \in \mathbb{N}$  et avec  $u = e^r$ , on donne les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2k}(x) \psi_0(x) dx = \sqrt{\frac{2u}{1+u^2}} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!} \left( \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)^k = \frac{\tanh^k(r)}{\sqrt{\cosh(r)}} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{\tanh^{2k}(r)}{\cosh(r)} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} = \sinh^2(r) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tanh^{2k+1}(r)}{\cosh(r)} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} = \sinh(r) \cosh(r)$$


---

## 2 Interférences et intrication (12 points)

### A. Question préliminaire

On rappelle que l'état de polarisation d'un photon peut être décrit dans un espace de Hilbert de dimension 2 dont une base possible est constituée des deux états  $|h\rangle$  et  $|v\rangle$  correspondant respectivement à une polarisation linéaire horizontale ( $h$ ) ou verticale ( $v$ ). On définit les états  $|d\rangle = (|v\rangle + |h\rangle)/\sqrt{2}$  et  $|g\rangle = (|v\rangle - |h\rangle)/\sqrt{2}$  correspondant à une polarisation linéaire\* orientée respectivement à  $45^\circ$  à droite ( $d$ ) ou à  $45^\circ$  à gauche ( $g$ ). On note  $\mathcal{P}_h$ ,  $\mathcal{P}_v$ ,  $\mathcal{P}_d$  et  $\mathcal{P}_g$  les probabilités

---

\*On veillera à ne pas confondre les états  $|g\rangle$  et  $|d\rangle$  définis ici avec des états de polarisation circulaire parfois désignés par les mêmes symboles mais qui correspondent à des coefficients complexes dans la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ .

pour que la polarisation du photon soit respectivement  $h$  (horizontal),  $v$  (vertical),  $d$  ( $45^\circ$  à droite), ou  $g$  ( $45^\circ$  à gauche). On définit alors :

$$C_{hv} = \mathcal{P}_h - \mathcal{P}_v \quad \text{et} \quad C_{dg} = \mathcal{P}_d - \mathcal{P}_g.$$

1. Montrer que  $|C_{hv}| = 1$  si on est certain du résultat dans la base de mesure  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ , et que  $|C_{dg}| = 1$  si on est certain du résultat dans la base de mesure  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$ .
2. On définit les opérateurs  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ . Ces opérateurs sont-ils hermitiens ? Quels sont leurs valeurs propres et leurs états propres ?
3. Montrer que pour un état  $|\psi\rangle$  quelconque, on a  $C_{hv} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$  et  $C_{dg} = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ .
4. On utilisera la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$  dans toute la suite du problème et on pose  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Montrer que  $C_{hv}^2 + C_{dg}^2 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)^2$ .
5. En déduire que  $C_{hv}^2 + C_{dg}^2 \leq 1$  pour tout état  $|\psi\rangle$  (on pourra borner la quantité  $(2\text{Re}(\alpha\beta^*))^2$ ).
6. Donner une interprétation physique de cette inégalité en vous aidant du résultat de la première question.

## B. Interférences en lumière polarisée

1. On considère le dispositif de la figure 1(a), appelé cube polariseur, possédant les propriétés suivantes
  - La lumière polarisée suivant la direction notée  $h$  (dans le plan du dessin) est transmise
  - La lumière polarisée suivant la direction notée  $v$  (perpendiculaire au plan du dessin) est réfléchi

On envoie sur ce cube un photon dans l'état de polarisation  $|\psi\rangle = \alpha|h\rangle + \beta|v\rangle$ . Quelle sont les probabilités que ce photon soit transmis ou réfléchi ?

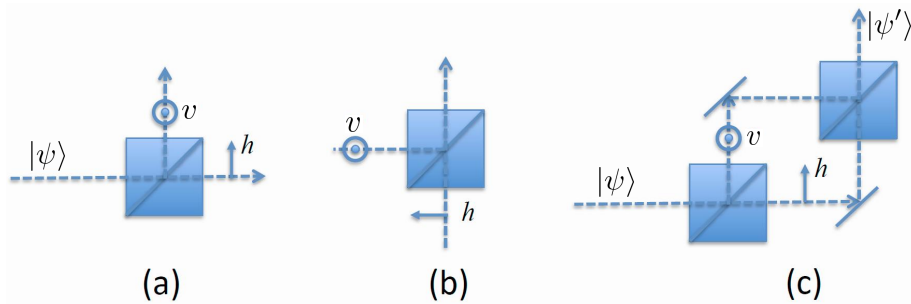


Figure 1: Montages utilisant des cubes polariseurs.

2. Le cube polariseur a en fait deux entrées et deux sorties, et peut aussi “recombinaison” deux faisceaux lumineux de polarisations orthogonales (figure 1(b)). Justifier que dans cette situation les deux faisceaux à l’entrée sortent du cube par la voie indiquée sur la figure. *On admettra que le cube redirige ainsi les faisceaux, sans modifier leur état de polarisation.*
3. On assemble deux cubes polariseurs comme indiqué sur la figure 1(c). Lors de leur propagation entre les deux cubes les faisceaux subissent des déphasages  $\varphi_h$  et  $\varphi_v$ , correspondant

aux transformations  $|h\rangle \rightarrow e^{i\varphi_h}|h\rangle$ , et  $|v\rangle \rightarrow e^{i\varphi_v}|v\rangle$ . L'état  $|\psi\rangle$  défini plus haut devient alors

$$|\psi'\rangle = \alpha e^{i\varphi_h} |h\rangle + \beta e^{i\varphi_v} |v\rangle$$

en sortie du dispositif. On mesure dans la base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  la polarisation du photon décrit par l'état  $|\psi'\rangle$  (*i.e.* en sortie du dispositif). Montrer que les probabilités  $\mathcal{P}_d$  et  $\mathcal{P}_g$  dépendent du déphasage  $\varphi = \varphi_h - \varphi_v$  entre les deux “chemins” possibles entre les deux polariseurs.

4. Sachant que le paramètre  $\varphi$  peut être contrôlé en déplaçant un miroir placé sur le trajet d'un des deux faisceaux de la figure 1(c), expliquer pour quelle raison le dispositif 1(c) est appelé un “interféromètre de polarisation”.
5. On mesure maintenant la polarisation du photon décrit par l'état  $|\psi'\rangle$  dans la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ . Que valent les probabilités  $\mathcal{P}_h$  et  $\mathcal{P}_v$  ? Dépendent-elles du déphasage  $\varphi$  ? Pouvez-vous interpréter ce résultat en terme de connaissance du “chemin suivi” dans l'interféromètre ?
6. Calculer les quantités  $C_{hv}$  et  $C_{dg}$  pour l'état  $|\psi'\rangle$ . En considérant des valeurs bien choisies de  $|\alpha|$  et  $|\beta|$ , on montrera qu'on peut passer d'un comportement “ondulatoire” (observation des interférences) à un comportement “corpusculaire” (connaissance du chemin suivi) en fonction de l'état de polarisation  $|\psi\rangle$  à l'entrée du dispositif.

Ceci suggère une nouvelle possibilité pour tester les limites de la mécanique quantique: si le photon envoyé dans l'interféromètre est intriqué avec un autre photon éloigné, pourquoi ne pas observer les interférences, tout en utilisant cet autre photon pour connaître le chemin suivi ? Cette possibilité est étudiée dans la question suivante.

### C. Interférences en lumière polarisée et intrication

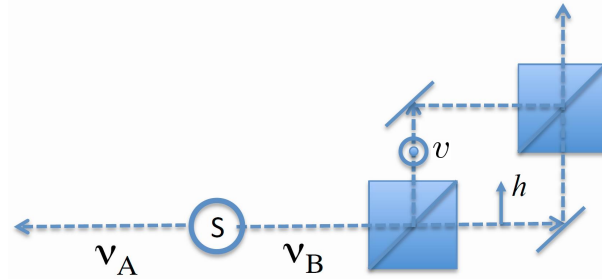


Figure 2: Interférométrie avec des photons intriqués. Les états de polarisations des photons  $\nu_A$  et  $\nu_B$  sont mesurés à l'aide d'autres polariseurs et détecteurs (non représentés sur la figure).

On suppose maintenant que le photon  $\nu_B$  envoyé dans l'interféromètre de la question B est intriqué avec un autre photon  $\nu_A$ , et que l'état fourni par la source S de paires de photons intriqués est

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_A : h\rangle \otimes |\nu_B : h\rangle + |\nu_A : v\rangle \otimes |\nu_B : v\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|hh\rangle + |vv\rangle),$$

où l'on a utilisé les notations abrégées introduites dans le cours. La mesure du photon  $\nu_B$  étant effectuée en aval de l'interféromètre de polarisation, on utilisera dans la suite l'état

$$|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi_h} |hh\rangle + e^{i\varphi_v} |vv\rangle).$$

1. La polarisation du photon  $\nu_A$  est analysée par un polariseur orienté suivant la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ . Quels résultats peut-on trouver pour cette mesure, et avec quelles probabilités?
2. Même question pour le photon  $\nu_B$  en sortie d'interféromètre, en mesurant sa polarisation soit dans la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ , soit dans la base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$ . Ces probabilités dépendent-elles de la valeur de  $\varphi$  ?
3. On détecte maintenant les deux photons  $\nu_A$  et  $\nu_B$ , en utilisant la même base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$  pour chacun d'entre eux. Quelles sont les probabilités de détections conjointes  $\mathcal{P}_{hh}$ ,  $\mathcal{P}_{hv}$ ,  $\mathcal{P}_{vh}$  et  $\mathcal{P}_{vv}$  ? Que peut-on en conclure quant au chemin suivi dans l'interféromètre ?
4. On utilise maintenant les bases  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$  pour  $\nu_A$  et  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  pour  $\nu_B$ . Calculer les probabilités de détections conjointes  $\mathcal{P}_{hd}$ ,  $\mathcal{P}_{hg}$ ,  $\mathcal{P}_{vd}$  et  $\mathcal{P}_{vg}$  (On pourra d'abord déterminer l'état du système en fonction du résultat de mesure obtenu pour  $\nu_A$ ). Observe-t-on des interférences, c'est-à-dire des variations des probabilités de détection en fonction de  $\varphi$  ?
5. On détecte à nouveau les deux photons conjointement, en utilisant maintenant la même base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  pour les deux photons  $\nu_A$  et  $\nu_B$ . Déterminer les probabilités de détections conjointes  $\mathcal{P}_{dd}$ ,  $\mathcal{P}_{dg}$ ,  $\mathcal{P}_{gd}$  et  $\mathcal{P}_{gg}$ .
6. Interpréter les résultats obtenus ci-dessus en termes de connaissance du chemin suivi dans l'interféromètre, fournie (ou pas) par la détection du photon  $\nu_A$ .

#### **D. Orientation quelconque du polariseur “témoin”**

1. On considère à nouveau la configuration de la question C, mais pour une orientation quelconque  $\theta$  d'analyse de la polarisation du photon  $\nu_A$ , et on note  $|t\rangle = \cos(\theta)|h\rangle + \sin(\theta)|v\rangle$  et  $|u\rangle = -\sin(\theta)|h\rangle + \cos(\theta)|v\rangle$  les états propres correspondants. Ecrire l'état  $|\xi\rangle$  en utilisant la base  $\{|t\rangle, |u\rangle\}$  pour les deux photons.
2. En déduire les valeurs des coefficients  $C_{hv}$  et  $C_{dg}$  pour le photon  $\nu_B$ , en fonction de l'angle  $\theta$  d'analyse du photon  $\nu_A$ . On supposera que l'état  $|t\rangle$  est obtenu pour  $\nu_A$ .
3. Montrer qu'en modifiant  $\theta$  on peut passer de façon continue d'un comportement “corpusculaire” du photon  $\nu_B$  (connaissance du chemin suivi) à un comportement “ondulatoire” (observation des interférences). Conclure.

## CORRECTION

### 1 Etats comprimés d'un oscillateur harmonique (8 points)

1. On a immédiatement  $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$ , avec  $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ , où  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Comme pour tout potentiel pair, les fonctions  $\varphi_n(x)$  sont alternativement paires et impaires, ce qui signifie que  $\varphi_n(x)$  est paire lorsque  $n$  est pair et impaire lorsque  $n$  est impair.
3. D'après la relation d'incertitude de Heisenberg, on a  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ , d'où l'on déduit  $\Delta X \Delta P = (1/\ell)(\ell/\hbar)\Delta x \Delta p_x \geq 1/2$ .
4. Comme  $\psi_0(X)$  est une gaussienne réelle, on sait que la relation de Heisenberg est saturée, donc  $\Delta X \Delta P = 1/2$  et  $\Delta P = 1/(\sqrt{2}u)$ . L'état  $|\psi_0\rangle$  n'est un état propre de  $\hat{H}$  que si  $u = 1$ , auquel cas on reconnaît l'état fondamental  $|0\rangle$ .
5. On a

$$c_n = \langle n | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(X) \psi_0(X) dX.$$

Cette intégrale est nulle pour  $n$  impair car  $\varphi_n(X)$  est impaire et  $\psi_0(X)$  est paire.

6. Le formulaire nous permet d'écrire

$$c_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2k}(X) \psi_0(X) dX = \frac{\tanh^k(r)}{\sqrt{\cosh(r)}} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}.$$

7. On a  $|\psi(t)\rangle = \sum_k c_{2k} e^{-i(2k+1/2)\omega t} |2k\rangle$ .

8. On a

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}.$$

Or

$$\hat{a} |\psi(t)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}(t) \hat{a} |2k\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}(t) \sqrt{2k} |2k-1\rangle$$

où  $c_{2k}(t) = c_{2k} \exp(-i(2k + 1/2)\omega t)$ . La décomposition de  $\hat{a} |\psi(t)\rangle$  sur  $\{|n\rangle\}$  ne comprend donc que des valeurs impaires de  $n$ , tandis que la décomposition du bra  $\langle\psi(t)|$  ne comprend que des valeurs paires de  $n$ . On en déduit que le produit scalaire  $\langle\psi(t)| \hat{a} |\psi(t)\rangle$  est nul. Il en va de même pour la quantité complexe conjuguée  $\langle\psi(t)| \hat{a}^\dagger |\psi(t)\rangle$ . On en déduit que  $\langle X \rangle = \langle P \rangle = 0$ .

9. On a  $\langle N \rangle = \sum_n n |c_n|^2 = \sum_k 2k |c_{2k}|^2 = \sinh^2 r$  d'après le formulaire.
10. On obtient

$$\hat{X}^2 = \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}).$$

Or  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{N} + \hat{I}$ . On en déduit

$$\hat{X}^2 = \frac{1}{2} (2\hat{N} + \hat{I} + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger).$$

De même

$$\hat{P}^2 = -\frac{1}{2} \left( \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \right) = \frac{1}{2} \left( 2\hat{N} + \hat{I} - \hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger \right).$$

11. Appliquons  $\hat{a}$  à l'expression de  $\hat{a}|\psi(t)\rangle$  obtenue plus haut. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{a}^2 |\psi(t)\rangle &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k}(t) \sqrt{2k} \hat{a} |2k-1\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-i(2k+1/2)\omega t} c_{2k} \sqrt{2k} \sqrt{2k-1} |2k-2\rangle \\ &= e^{-2i\omega t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-i(2k+1/2)\omega t} c_{2k+2} \sqrt{2k+1} \sqrt{2k+2} |2k\rangle \end{aligned}$$

où l'on a remplacé  $k$  par  $k+1$  dans la somme. On en déduit

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{a}^2 | \psi(t) \rangle &= e^{-2i\omega t} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k} c_{2k+2} \sqrt{2k+1} \sqrt{2k+2} \\ &= e^{-2i\omega t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tanh^{2k+1} r}{\cosh r} \frac{\sqrt{(2k)!} \sqrt{(2(k+1))!}}{2^k k! 2^{k+1} (k+1)!} \sqrt{2k+1} \sqrt{2k+2} \\ &= e^{-2i\omega t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tanh^{2k+1} r}{\cosh r} \frac{(2(k+1))!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \end{aligned}$$

Le formulaire nous permet d'en déduire le résultat demandé.

12. A l'aide des résultats établis plus haut, on peut écrire

$$\langle X^2 \rangle = \langle N \rangle + \frac{1}{2} + \text{Re} \langle \hat{a}\hat{a} \rangle = \frac{1}{2} + \sinh^2 r + \sinh r \cosh r \cos 2\omega t.$$

On obtient de même

$$\langle P^2 \rangle = \langle N \rangle + \frac{1}{2} - \text{Re} \langle \hat{a}\hat{a} \rangle = \frac{1}{2} + \sinh^2 r - \sinh r \cosh r \cos 2\omega t.$$

13. En écrivant  $\sinh^2 r + 1/2 = (\cosh^2 r + \sinh^2 r)/2$ , on obtient

$$\Delta X^2 \Delta P^2 = ((\cosh^2(r) + \sinh^2(r))^2 - (2 \sinh(r) \cosh(r) \cos(2\omega t))^2)/4$$

qui atteint sa valeur minimale quand  $\cos(2\omega t) = \pm 1$ , avec dans ce cas  $\Delta X \Delta P = 1/2$  qui est le minimum de Heisenberg. On obtient  $\Delta X = e^r/\sqrt{2}$  et  $\Delta P = e^{-r}/\sqrt{2}$  pour  $t = 0$ , et ces valeurs s'inversent pour  $\omega t = \pi/2$ . Les fluctuations de  $X$  et de  $P$  sont ainsi alternativement "comprimées" en dessous de la valeur  $1/\sqrt{2}$  qui correspond à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

14. Il faut comparer  $h\nu = 6.63 \times 10^{-34} \times 10^9 \text{ J} = 6.63 \times 10^{-25} \text{ J}$  et  $k_B T = 1.38 \times 10^{-23} \times 10^{-2} = 1.38 \times 10^{-25} \text{ J}$ . Ceci donne  $k_B T/(h\nu) = 1.38/6.63 \sim 0.2$ . Donc on peut entrer dans le régime quantique.



## 2 Interférences et intrication (12 points)

### A. Question préliminaire

1. Si on est certain du résultat dans l'une des bases, l'une des probabilités vaut 1, et l'autre vaut 0; on a donc  $|C_{hv}| = 1$  ou  $|C_{dg}| = 1$ .
2. Comme les matrices sont des matrices symétriques réelles, les opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont hermitiens. La base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$  est formée d'états propres de  $\hat{A}$  pour les valeurs propres respectives  $+1$  et  $-1$ , tandis que les états  $|d\rangle$  et  $|g\rangle$  sont états propres de  $\hat{B}$  pour les valeurs propres respectives  $+1$  et  $-1$ .
3. En utilisant la base propre de  $\hat{A}$ , on a

$$C_{hv} = \mathcal{P}_h - \mathcal{P}_v = |\langle h|\psi\rangle|^2 - |\langle v|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|(|h\rangle\langle h| - |v\rangle\langle v|)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

On procède de même pour  $C_{dg}$  en utilisant la base propre  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  de  $\hat{B} = |d\rangle\langle d| - |g\rangle\langle g|$ .

4. On a

$$C_{hv} = \mathcal{P}_h - \mathcal{P}_v = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

et

$$C_{dg} = (\alpha^*\beta^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (\alpha^*\beta^*) \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha^*\beta + \beta^*\alpha,$$

ce qui permet d'en déduire le résultat demandé.

5. On obtient l'inégalité demandée en remarquant que  $(2\text{Re}(\alpha\beta^*))^2 \leq 4|\alpha\beta|^2$ .
6. L'inégalité exprime que quand le résultat est certain dans une base ( $|C| = 1$ ) il est totalement aléatoire dans l'autre ( $|C| = 0$ ).

### B. Interférences en lumière polarisée

1. On a  $\mathcal{P}_h = |\alpha|^2$  (transmis) et  $\mathcal{P}_v = |\beta|^2$  (réfléchi).
2. Comme dans le cas (a), le photon polarisé verticalement est réfléchi par le cube tandis que le photon polarisé horizontalement est transmis, de sorte que les deux faisceaux sortent par la voie indiquée sur la figure.
3. On a  $\mathcal{P}_d = |\langle d|\psi'\rangle|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^*e^{i\varphi} + \alpha^*\beta e^{-i\varphi})/2$  et  $\mathcal{P}_g = |\langle g|\psi'\rangle|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2 - \alpha\beta^*e^{i\varphi} - \alpha^*\beta e^{-i\varphi})/2$ . On a bien  $\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_g = 1$ , et  $\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_g = \alpha\beta^*e^{i\varphi} + \alpha^*\beta e^{-i\varphi}$ .
4. Les expressions obtenues pour  $\mathcal{P}_d$  et  $\mathcal{P}_g$  font apparaître des franges sinusoïdales en fonction du paramètre  $\varphi$ , qui peuvent être interprétées comme des franges d'interférence puisqu'elles résultent de la différence de phase entre deux chemins possibles. Le dispositif est donc bien un interféromètre.
5. Les probabilités sont alors simplement  $\mathcal{P}_h = |\alpha|^2$  et  $\mathcal{P}_v = |\beta|^2$ . Elles ne dépendent pas du paramètre  $\varphi$ . La disparition des franges d'interférence peut s'interpréter en remarquant que l'on connaît le chemin suivi par le photon selon que l'on a mesuré une polarisation  $h$  ou  $v$ . Comme dans le cas de l'expérience des fentes d'Young, la connaissance du chemin suivi dans l'interféromètre n'est pas compatible avec l'observation d'interférences.

6. On a  $C_{hv} = \mathcal{P}_h - \mathcal{P}_v = |\alpha|^2 - |\beta|^2$  et  $C_{dg} = 2\text{Re} \alpha\beta^* e^{i\varphi}$ . Le contraste des interférences est maximum quand  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$ , ce qui annule  $C_{hv}$ , et permet à  $|C_{dg}|$  d'atteindre la valeur 1 pour des valeurs appropriées de  $\varphi$ . On a un comportement ondulatoire. Au contraire si l'un des coefficients  $|\alpha|^2$  ou  $|\beta|^2$  est nul, alors le chemin suivi dans l'interféromètre est connu, et les interférences disparaissent. On a un comportement corpusculaire.

### C. Interférences en lumière polarisée et intrication

1. Pour l'état  $|\xi'\rangle$  les résultats sont aléatoires et on peut trouver  $h$  ou  $v$  avec  $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_v = 1/2$ . On peut s'en convaincre en considérant le projecteur  $\hat{\Pi} = |h\rangle\langle h| \otimes \hat{I}_B$  associé au résultat  $h$ , en remarquant que  $\hat{\Pi}|\xi\rangle = |hh\rangle/\sqrt{2}$ , puis en écrivant  $\mathcal{P}_h = \|\hat{\Pi}|\xi\rangle\|^2 = 1/2$ .
2. On a de même  $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_v = 1/2$ . Dans le cas d'une mesure dans la base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$ , on peut considérer le projecteur  $\hat{\Pi} = \hat{I}_A \otimes |d\rangle\langle d|$  associé au résultat  $d$ . On obtient alors

$$\hat{\Pi}|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi_h} |h\rangle \otimes |d\rangle \langle d|h\rangle + e^{i\varphi_v} |v\rangle \otimes |d\rangle \langle d|v\rangle) = \frac{1}{2} (e^{i\varphi_h} |h\rangle + e^{i\varphi_v} |v\rangle) \otimes |d\rangle$$

Le carré de la norme de ce vecteur étant égal à  $1/2$ , on en déduit  $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_g = 1/2$ . Ces valeurs ne dépendent pas de  $\varphi$ . Tout se passe comme si on avait un mélange statistique à poids égaux de  $h$  et  $v$  (pas d'interférences), ou bien de  $d$  et  $g$  (interférences en opposition de phase qui s'annulent en moyenne).

3. Dans l'espace de dimension 4 engendré par les états  $|hh\rangle, |hv\rangle, |vh\rangle$  et  $|vv\rangle$ , seuls les résultats  $hh$  et  $vv$  sont possibles avec des probabilités  $\mathcal{P}_{hh} = \mathcal{P}_{vv} = 1/2$ , et donc  $\mathcal{P}_{hv} = \mathcal{P}_{vh} = 0$ . Dans cette configuration la détection  $h$  ou  $v$  du photon  $\nu_A$  indique le chemin suivi dans l'interféromètre par le photon  $\nu_B$ , et les résultats obtenus directement sur  $\nu_B$  sont bien les mêmes (corrélations parfaites).
4. Lors de la mesure du photon  $\nu_A$  le résultat  $h$  a une chance sur 2 de se produire. Dans ce cas, le système est projeté dans l'état  $|hh\rangle$ , de sorte qu'une mesure du photon  $\nu_B$  dans la base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  donne les deux résultats possibles avec des probabilités égales. On en déduit  $\mathcal{P}_{hd} = \mathcal{P}_{hg} = \mathcal{P}_{vd} = \mathcal{P}_{vg} = 1/4$ . On n'observe pas d'interférences.
5. On a  $\mathcal{P}_{dd} = |\langle dd|\xi'\rangle|^2$ . Or

$$\langle dd|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi_h} \langle dd|hh\rangle + e^{i\varphi_v} \langle dd|vv\rangle) = \frac{e^{i\varphi_v}}{2\sqrt{2}} (1 + e^{i\varphi})$$

ce qui nous donne  $\mathcal{P}_{dd} = (1 + \cos \varphi)/4$ . On obtient le même résultat pour  $\mathcal{P}_{gg}$ . Par ailleurs

$$\langle dg|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi_h} \langle dg|hh\rangle + e^{i\varphi_v} \langle dg|vv\rangle) = \frac{e^{i\varphi_v}}{2\sqrt{2}} (1 - e^{i\varphi})$$

soit  $\mathcal{P}_{dg} = \mathcal{P}_{gd} = (1 - \cos \varphi)/4$ . On observe à nouveau des interférences.

6. Si le photon  $\nu_A$  est détecté la base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ , la mesure permet de savoir par quel chemin le photon  $\nu_B$  est passé dans l'interféromètre, ce qui donne lieu empêche l'observation d'interférences (comme calculé en C.4). A l'inverse, si le photon  $\nu_A$  est détecté la base  $\{|d\rangle, |g\rangle\}$  les interférences réapparaissent (comme calculé en C.5), mais on ne connaît plus le chemin suivi dans l'interféromètre.

#### D. Orientation quelconque du polariseur “témoin”

1. On a  $|h\rangle = \cos \theta |t\rangle - \sin \theta |u\rangle$  et  $|v\rangle = \sin \theta |t\rangle + \cos \theta |u\rangle$ . On en déduit

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\cos \theta |t\rangle - \sin \theta |u\rangle) \otimes |h\rangle + (\sin \theta |t\rangle + \cos \theta |u\rangle) \otimes |v\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|t\rangle \otimes (\cos \theta |h\rangle + \sin \theta |v\rangle) + |u\rangle (-\sin \theta |h\rangle + \cos \theta |v\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|tt\rangle + |uu\rangle) \end{aligned}$$

L'état du photon  $\nu_B$  à l'entrée de l'interféromètre est donc le même que celui obtenu pour le photon  $\nu_A$ .

2. Si l'état  $|t\rangle$  est obtenu pour  $\nu_A$ , le photon  $\nu_B$  est projeté dans l'état  $|t\rangle$ . Il suffit d'appliquer les formules de la partie B avec  $\alpha = \cos \theta$  et  $\beta = \sin \theta$ . On obtient donc  $C_{hv} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$  et  $C_{dg} = \alpha\beta^* e^{i\varphi} + \alpha^*\beta e^{-i\varphi} = \sin 2\theta \cos \varphi$ .
3. En modifiant  $\theta$  on peut effectivement passer progressivement de  $C_{hv} = 1$  et  $C_{dg} = 0$  (connaissance du chemin suivi) à  $C_{hv} = 0$  et  $C_{dg} = 1$  (interférences). Le photon  $\nu_A$  sert de “témoin” du chemin suivi, mais c'est aux dépens des interférences. Parler d'onde ou de corpuscule correspond donc à des images simplificatrices. Les propriétés physiques du photon doivent être décrites par la mécanique quantique.

## CONTRÔLE NON-CLASSANT DE MÉCANIQUE QUANTIQUE

PHY311

du mercredi 4 juillet 2018

*Sujet proposé par Philippe Grangier et Manuel Joffre**Durée : 2 heures (9h00-11h00)*

\* \* \*

*Documents autorisés : livre de cours “Mécanique quantique” de Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard, copies des diapositives présentées en cours, énoncés et corrigés de PC, notes personnelles. Les autres ouvrages imprimés ne sont pas autorisés. Les correcteurs et correctrices seront sensibles à la présentation des copies, ainsi qu’à la concision et à la précision des réponses.*

On rappelle ci-dessous l’expression des matrices associées aux trois composantes cartésiennes de l’observable de spin  $\hat{S}$ , exprimées dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  des deux vecteurs propres de  $\hat{S}_z$ .

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

**Exercice 1 : Echo de spin (15 points)**

Cet exercice porte sur la méthode dite de l’écho de spin, initialement développée dans le cadre de la résonance magnétique nucléaire, puis ultérieurement appliquée en spectroscopie laser non-linéaire et pour manipuler des systèmes quantiques individuels. On s’intéressera ici au cas d’un proton, dont le spin 1/2 sera le seul degré de liberté pris en compte.

**1 Précession de Larmor**

Le système est placé dans le champ magnétique terrestre  $B_0$ , que l’on suppose orienté selon l’axe  $z$ . L’hamiltonien s’écrit donc

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{S}_z \quad (2)$$

avec  $\omega_0 = -\gamma B_0$ , où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique du proton ( $\gamma/(2\pi) \approx 42.6$  MHz/T).

**1.1.** On suppose que le système est placé à l’instant  $t = 0$  dans l’état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle. \quad (3)$$

Donner l’expression de  $|\psi(t)\rangle$  pour  $t \geq 0$ .

1.2. En déduire l'expression de  $\langle S_\alpha \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{S}_\alpha | \psi(t) \rangle$ , pour  $\alpha = x, y$  et  $z$ .

1.3. Rappeler pour quelle raison physique la grandeur  $\langle S_z \rangle(t)$  ne dépend pas du temps.

1.4. Interpréter le mouvement décrit au cours du temps par le vecteur  $\langle \vec{S} \rangle(t) = (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$ .

## 2 Observation expérimentale

En mesurant la tension induite aux bornes d'un solénoïde orienté selon l'axe  $x$ , on a accès à un signal expérimental proportionnel à  $\langle S_x \rangle(t)$  dans un échantillon constitué d'un grand nombre de molécules d'eau (l'atome d'hydrogène de ces molécules fournissant les protons considérés plus haut). La Fig. 1 représente le résultat expérimental ainsi obtenu.

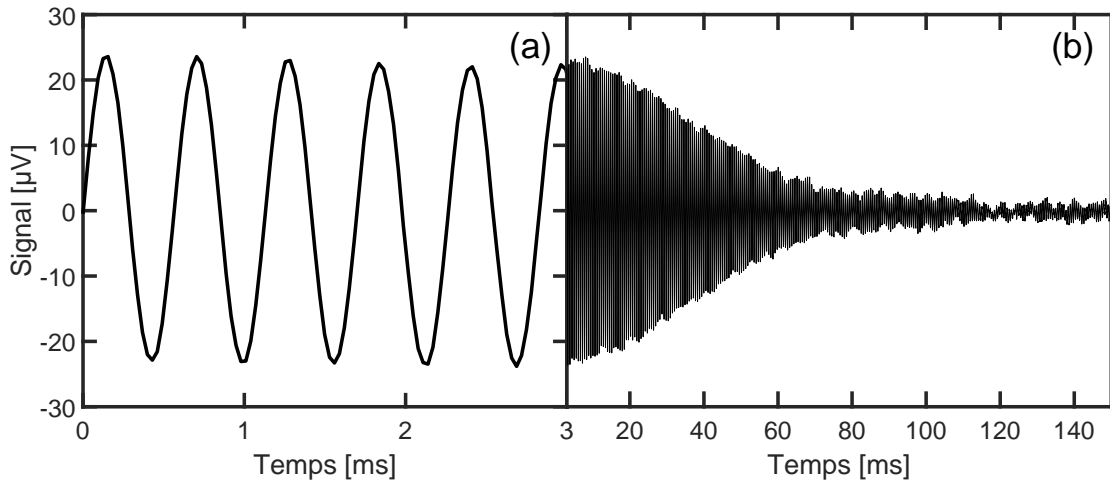


FIGURE 1 – Evolution temporelle du signal mesuré sur deux échelles de temps différentes.

2.1. Commenter la Fig. 1(a) puis estimer les valeurs de  $\omega_0/(2\pi)$  et de  $B_0$ .

Pour expliquer le résultat expérimental observé aux temps longs (Fig. 1(b)), on prend dorénavant en compte le fait que le champ magnétique – tout en restant orienté selon l'axe  $z$  – n'est pas parfaitement uniforme. On appellera  $\langle S_x \rangle_{\omega_0}(t)$  la grandeur calculée dans la première partie de l'exercice pour une valeur donnée de  $\omega_0$  et on admettra que le signal mesuré est proportionnel à

$$s_x(t) = \int \langle S_x \rangle_{\omega_0}(t) f(\omega_0) d\omega_0 \quad (4)$$

où la fonction normée  $f(\omega_0)$  rend compte de la distribution des valeurs de  $\omega_0$  perçues pour les différents protons contribuant au signal. On supposera dans toute la suite que  $f(\omega_0)$  est une fonction gaussienne centrée sur  $\Omega_0$  (prenant la valeur de  $\omega_0$  estimée à la question précédente) et d'écart quadratique moyen  $\Delta\omega_0$ , soit

$$f(\omega_0) = \frac{1}{\Delta\omega_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\omega_0 - \Omega_0)^2}{2\Delta\omega_0^2}\right). \quad (5)$$

On rappelle que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne, selon l'expression ci-dessous

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta\omega_0^2 t^2}{2} - i\Omega_0 t\right). \quad (6)$$

**2.2.** Calculer la valeur de  $s_x(t)$ . On pourra remarquer que  $\sin \omega t = -\text{Im}[\exp(-i\omega t)]$ .

**2.3.** Comparer au résultat expérimental et estimer  $\Delta\omega_0/(2\pi)$ .

**2.4.** En déduire la valeur de  $\Delta B_0/B_0$ , caractérisant l'inhomogénéité du champ magnétique.

**2.5.** La Fig. 2 représente  $\langle \vec{S} \rangle$  pour quelques valeurs de  $\omega_0$ . Donner en fonction de  $\Delta\omega_0$  les valeurs choisies pour les instants  $t_a$ ,  $t_b$  et  $t_c$  (au moins en termes d'ordre de grandeur).

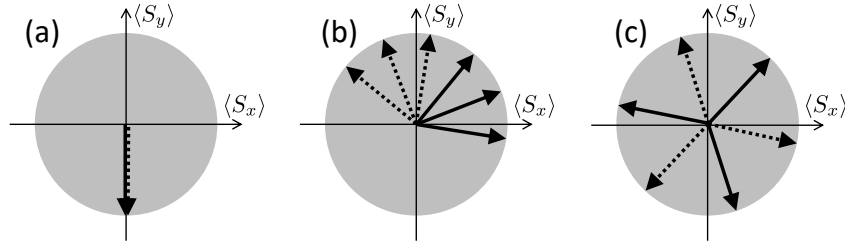


FIGURE 2 – Représentation schématique de la projection de  $\langle \vec{S} \rangle$  dans le plan équatorial de la sphère de Bloch pour quelques valeurs de  $\omega_0$  couvrant l'intervalle  $[\Omega_0 - \Delta\omega_0, \Omega_0 + \Delta\omega_0]$ , pour trois instants  $t = t_a$  (a),  $t = t_b$  (b) et  $t = t_c$  (c). Les flèches en pointillé correspondent à des valeurs  $\omega_0 < \Omega_0$  tandis que les flèches en trait plein correspondent à des valeurs  $\omega_0 > \Omega_0$ .

**2.6.** Donner une explication physique du déclin observé pour le signal expérimental en vous appuyant sur la représentation schématique de la Fig. 2.

### 3 Retournement de l'état du système

À l'instant  $t = T$  on applique au système une transformation appelée *retournement* (dont la nature sera précisée à la partie 4) consistant à échanger les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ . En d'autres termes, si on note  $|\psi(T^-)\rangle = a(T^-)|+\rangle + b(T^-)|-\rangle$  l'état du système juste avant le retournement, alors l'état juste après le retournement s'écrira

$$|\psi(T^+)\rangle = b(T^-)|+\rangle + a(T^-)|-\rangle. \quad (7)$$

Dans un premier temps, on considère à nouveau le cas d'un proton unique dont l'évolution, associée à une valeur donnée de  $\omega_0$ , est gouvernée par l'hamiltonien  $\hat{H}_0$ .

**3.1.** En utilisant le résultat de la question 1.1 à l'instant  $t = T$ , écrire l'expression de  $|\psi(T^-)\rangle$  puis en déduire la valeur de  $|\psi(T^+)\rangle$  juste après le retournement.

**3.2.** En déduire  $|\psi(t)\rangle$  pour  $t \geq T$ .

**3.3.** Calculer la valeur de  $\langle S_x \rangle_{\omega_0}$  pour  $t \geq T$ .

**3.4.** On revient maintenant au cas d'une distribution de protons associés à des valeurs de  $\omega_0$  pondérées par la fonction  $f(\omega_0)$  définie par l'éq. 5. Calculer la moyenne  $s_x(t)$  pour  $t \geq T$ .

**3.5.** Commenter le résultat expérimental représenté à la Fig. 3 et expliquer le nom choisi pour désigner cette méthode. On estimera en outre la valeur de  $T$  utilisée dans l'expérience.

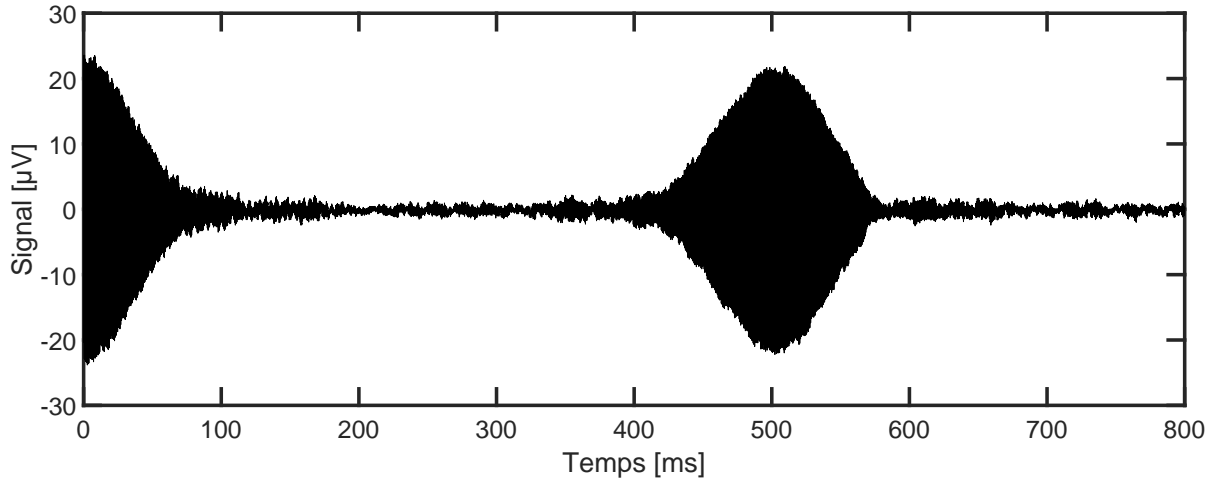


FIGURE 3 – Représentation de l'évolution temporelle complète du signal expérimental, sachant qu'un retournement du système a été effectué à l'instant  $t = T$ .

## 4 Préparation et manipulation de l'état du système

En pratique, l'opération appelée retournement dans la partie précédente n'est pas instantanée mais résulte de l'application pendant une durée bien choisie d'un champ d'amplitude  $B_1$ , tournant dans le plan  $xy$  à la fréquence  $\omega/(2\pi)$ . Pour traiter ce problème de résonance magnétique nucléaire, on se place dorénavant dans un référentiel tournant autour de l'axe  $z$  à la fréquence  $\omega/(2\pi)$ . On rappelle que, dans ce référentiel, l'hamiltonien effectif est indépendant du temps et s'écrit simplement  $\hat{H} = (\omega_0 - \omega)\hat{S}_z + \omega_1\hat{S}_x$  où  $\omega_1$  est proportionnel à  $B_1$ . On supposera en outre que  $|\omega_0 - \omega| \ll \omega_1$  et on utilisera dans toute la suite du problème la forme approchée

$$\hat{H} = \omega_1\hat{S}_x. \quad (8)$$

**4.1.** On pose  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle$ , où

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(-i\frac{\omega_1\hat{S}_x}{\hbar}\tau\right). \quad (9)$$

Vérifier que  $|\psi(t)\rangle$  est bien solution de l'équation de Schrödinger.

**4.2.** Montrer que  $\hat{U}(\tau) = \alpha(\tau)\hat{I} + \beta(\tau)\hat{S}_x$  (où  $\hat{I}$  représente l'identité) et donner l'expression des fonctions  $\alpha(\tau)$  et  $\beta(\tau)$ . On pourra calculer au préalable  $\hat{S}_x^2$  puis s'aider des identités

$$\exp \hat{A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!} \quad \cos \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \quad \sin \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (10)$$

4.3. Déterminer la durée minimale de l'interaction permettant d'effectuer le retournement évoqué plus haut (à une phase globale près).

4.4. Expliquer pour quelle raison on parle d'impulsion  $\pi$  pour décrire ce phénomène.

4.5. En déduire l'effet du retournement sur la valeur moyenne  $\langle \vec{S} \rangle = (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$  de chacun des spins puis donner une explication qualitative du signal observé à la Fig. 3, en vous appuyant sur une représentation similaire à celle de la Fig. 2.

4.6. Sachant que le système est initialement dans l'état  $|+\rangle$ , comment pourrait-on procéder pour préparer le système dans l'état donné par l'éq. 3 ?

## Exercice 2 : Réflexion dépendant du spin (5 points)

On considère dans cet exercice une particule de masse  $m$  se déplaçant le long d'un axe  $Ox$ , en présence d'une marche de potentiel  $V(x)$  telle que  $V(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $V(x) = V_0$  pour  $x > 0$ .

1. On considère le cas d'une particule provenant de la gauche avec une énergie  $E < V_0$ . On pose  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ . En utilisant les conditions de continuité appropriées, montrer que le rapport  $\rho$  entre les amplitudes de probabilité réfléchie et incidente sur la marche s'écrit

$$\rho = \frac{ik + \kappa}{ik - \kappa}, \quad (11)$$

où l'on exprimera  $\kappa$  en fonction de  $E$  et  $V_0$ .

2. Quelle est la probabilité que la particule soit réfléchie par la marche de potentiel ?

On considère dans la suite de l'exercice le cas d'un paquet d'ondes défini à l'instant  $t = 0$  par

$$\psi(x, 0) = f(x)e^{ikx} \quad (12)$$

où la fonction  $f(x)$ , supposée réelle, est nulle pour  $x > 0$  comme représenté Fig. 4 à gauche.

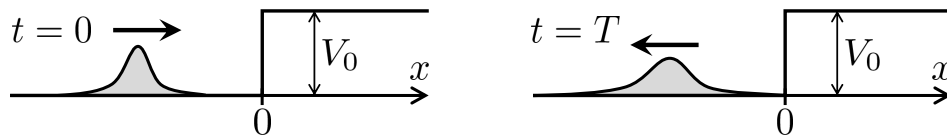


FIGURE 4 – Module du paquet d'ondes avant (à gauche) puis après (à droite) la réflexion.

On suppose que l'incertitude en vecteur d'onde,  $\Delta k$ , obéit aux conditions

$$\Delta k \ll k \quad \text{et} \quad \Delta k \ll \kappa. \quad (13)$$

On admet que dans ce cas, à un instant  $T > 0$  convenablement choisi, la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme du paquet d'onde réfléchi  $\psi(x, T)$  dont le module est représenté Fig. 4 à droite, avec  $\psi(x, T) = \rho \varphi(x, T)$  et

$$\varphi(x, T) = g(x)e^{-iET/\hbar - ikx}, \quad (14)$$



$\rho$  étant la grandeur calculée à la première question. La fonction  $g(x)$ , indépendante de  $V_0$ , est supposée nulle pour  $x > 0$ .

3. Pour quelle raison physique le module maximum de la fonction  $g(x)$  est-il légèrement plus faible que celui de la fonction  $f(x)$  ?

---

On suppose maintenant que la particule possède un spin  $1/2$  et que le potentiel  $V(x)$  dépend du spin de la particule. On se place donc dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E}_{\text{spin}}$ , où  $\mathcal{E}_{\text{spin}}$  est un espace de dimension 2 engendré par les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ , eux-mêmes états propres de l'observable  $\hat{S}_z$ . L'hamiltonien s'écrit dorénavant

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} \otimes \hat{I}_{\text{spin}} + \Theta(\hat{x}) \otimes \left( V_0 \hat{I}_{\text{spin}} + \frac{\delta V}{\hbar} \hat{S}_z \right) \quad (15)$$

où  $\hat{I}_{\text{spin}}$  est l'identité dans l'espace  $\mathcal{E}_{\text{spin}}$  et où  $\Theta(x)$  est la fonction de Heaviside, qui vaut 0 pour  $x$  négatif et 1 pour  $x$  positif. On posera  $V_{\pm} = V_0 \pm \delta V/2$  et on supposera que  $E < V_{\pm}$ . On supposera en outre que l'éq. 13 reste valable lorsqu'on remplace  $\kappa$  par la grandeur  $\kappa_{\pm}$  obtenue en remplaçant  $V_0$  par  $V_{\pm}$ .

4. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , l'état du système s'écrit sous la forme

$$|\Psi_+(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |+\rangle, \quad (16)$$

où  $|\psi(0)\rangle$  est le ket associé à la fonction d'onde  $\psi(x, 0)$  définie par l'éq. 12. Montrer que l'on peut alors chercher la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme

$$|\Psi_+(t)\rangle = |\psi_+(t)\rangle \otimes |+\rangle, \quad (17)$$

où  $|\psi_+(t)\rangle$  obéit à une équation de Schrödinger associée à un hamiltonien  $\hat{H}_+$  agissant dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  et dont on donnera l'expression.

5. En déduire l'expression de  $|\Psi_+(T)\rangle$  à l'aide du ket  $|\varphi(T)\rangle$  associé à la fonction d'onde  $\varphi(x, T)$  définie par l'éq. 14 et d'un nombre  $\rho_+$  dont on donnera l'expression.
6. Quel est l'état à l'instant  $T$  dans le cas où l'état initial est  $|\Psi_-(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |-\rangle$  ?
7. On suppose maintenant que le système est placé dans l'état initial

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes (a_+|+\rangle + a_-|-\rangle). \quad (18)$$

Donner sans calcul l'expression de  $|\Psi(T)\rangle$ , en justifiant votre réponse.

8. On suppose que  $|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |+\rangle_x$ , où  $|+\rangle_x$  est le vecteur propre de  $\hat{S}_x$  associé à la valeur propre  $+\hbar/2$ . Est-il possible de choisir  $\rho_+$  et  $\rho_-$  pour qu'une mesure de  $S_y$  à l'instant  $T$  donne avec certitude la valeur  $+\hbar/2$  ?

## CORRECTION

## Exercice 1 : Echo de spin

## 1 Précession de Larmor

1.1. On a  $\hat{H}_0|\pm\rangle = \pm(\hbar\omega_0/2)|\pm\rangle$ , donc

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle - i\frac{e^{i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle.$$

1.2. On a  $\hat{S}_x|\pm\rangle = (\hbar/2)|\mp\rangle$ , soit

$$\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2} \left( \frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle - i\frac{e^{i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle \right)$$

et

$$\langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \omega_0 t.$$

De même,  $\hat{S}_y|\pm\rangle = \pm i(\hbar/2)|\mp\rangle$ , d'où

$$\hat{S}_y|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2} \left( i\frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle - \frac{e^{i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle \right)$$

et

$$\langle\psi(t)|\hat{S}_y|\psi(t)\rangle = -\frac{\hbar}{2} \cos \omega_0 t.$$

Enfin, on a  $\langle S_z \rangle = (\hbar/2)(1/2 - 1/2) = 0$ .

1.3. Le système est isolé donc l'énergie se conserve. Or  $\langle H \rangle = \omega_0 \langle S_z \rangle$ . C'est donc en raison de la conservation de l'énergie que  $\langle S_z \rangle$  ne dépend pas du temps.

1.4. Le vecteur  $\langle \vec{S} \rangle$ , de norme  $\hbar/2$ , décrit un mouvement de précession de Larmor autour du champ magnétique  $B_0$ . Compte tenu des conditions initiales, ce vecteur décrit un mouvement circulaire dans le plan équatorial à la fréquence  $\omega_0/(2\pi)$ . Sachant que  $\omega_0$  est négatif (car  $\gamma$  est positif), le mouvement s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

## 2 Observation expérimentale

2.1. Le résultat expérimental est en bon accord avec le calcul effectué à la partie précédente pour  $\langle S_x \rangle$ , avec une sinusoïde de période égale ici à environ 600  $\mu\text{s}$ . On en déduit  $|\omega_0|/(2\pi) \approx 1700 \text{ Hz}$

et  $B_0 \approx 4 \times 10^{-5}$  T (ce qui correspond bien à l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre en France).

*Bien que le dispositif expérimental utilisé soit le même, la fréquence obtenue est légèrement inférieure à la valeur mesurée lors du cours en amphi Poincaré. En effet, le champ magnétique effectif varie significativement d'une pièce à l'autre d'un bâtiment en raison d'objets métalliques pouvant se trouver à proximité du dispositif.*

**2.2.** En remplaçant  $\langle S_x \rangle_{\omega_0}$  par la valeur obtenue à la partie précédente, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(t) &= \frac{\hbar}{2} \int f(\omega_0) (\sin \omega_0 t) d\omega_0 \\ &= -\frac{\hbar}{2} \text{Im} \int f(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} d\omega_0 \\ &= -\frac{\sqrt{2\pi}\hbar}{2} \text{Im} g(t) \\ &= \frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{\Delta\omega_0^2 t^2}{2}\right) \sin \Omega_0 t \end{aligned}$$

**2.3.** Le résultat théorique est maintenant en très bon accord avec l'expérience, l'inhomogénéité du champ magnétique permettant d'expliquer le déclin de l'enveloppe de la sinusoïde. L'enveloppe gaussienne atteindra sa mi-hauteur pour  $t_{1/2}$  défini par  $\exp(-\Delta\omega_0^2 t_{1/2}^2/2) = 1/2$ , ou encore  $t_{1/2} = \sqrt{2 \ln 2}/\Delta\omega_0$ . On mesure  $t_{1/2} \approx 40$  ms, soit  $\Delta\omega_0/(2\pi) = \sqrt{2 \ln 2}/(2\pi t_{1/2}) \approx 5$  Hz.

**2.4.** Compte tenu de la valeur de  $|\Omega_0|/(2\pi)$  estimée plus haut, on en déduit  $\Delta\omega_0/|\Omega_0| \approx 3 \times 10^{-3}$ . Sachant que  $\Omega_0$  est proportionnel à  $B_0$ , la valeur obtenue représente également l'inhomogénéité relative du champ magnétique  $\Delta B_0/B_0$ .

**2.5.** Le spin moyen  $\langle \vec{S} \rangle$  va effectuer une précession de Larmor avec une fréquence  $\omega_0/(2\pi)$  dépendant du champ perçu par chaque proton, selon la distribution  $f(\omega_0)$ . Le graphe (a) correspond évidemment à l'instant initial (soit  $t_a = 0$ ), lorsque tous les spins sont alignés. Ultérieurement, les spins vont se déphaser en raison de fréquences différentes, la phase accumulée au bout d'un temps  $t$  étant égale à  $\omega_0 t$ . Compte tenu de l'intervalle  $[\Omega_0 - \Delta\omega_0, \Omega_0 + \Delta\omega_0]$  retenu pour construire la Figure, les phases vont couvrir un intervalle de largeur  $2\Delta\omega_0 t$ . Le cas (b) correspond donc à  $2\Delta\omega_0 t_b \approx \pi$ , soit  $t_b \approx \pi/(2\Delta\omega_0)$ , ou plus simplement  $t_b \sim 1/\Delta\omega_0$ . Dans le cas (c), les spins pointent dans toutes les directions, ce qui indique que  $t_c \gg 1/\Delta\omega_0$ .

**2.6.** À l'instant initial (a), tous les spins sont parfaitement alignés et on a donc évidemment  $s_x = \langle S_x \rangle$ . Ensuite, les spins se déphasent les uns par rapport aux autres. A l'instant  $t_b$ , on voit que la moyenne des différentes flèches représentées sur la Figure aura une longueur sensiblement inférieure à  $\hbar/2$ , ce qui explique le déclin de l'enveloppe du signal  $s_x(t)$  qui atteindra à peu près sa mi-hauteur. Enfin, pour  $t \gg 1/\Delta\omega_0$  (c), les spins pointent dans toutes les directions et la valeur moyenne sera nulle. Le signal s'est complètement atténué en raison de l'interférence destructive entre les spins soumis à des champs magnétiques différents.

### 3 Retournement de l'état du système

**3.1.** On a

$$|\psi(T^-)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 T/2}}{\sqrt{2}} |+\rangle - i \frac{e^{i\omega_0 T/2}}{\sqrt{2}} |-\rangle$$

soit, après échange des états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ ,

$$|\psi(T^+)\rangle = -i\frac{e^{i\omega_0 T/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{-i\omega_0 T/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

**3.2.** On obtient donc, pour  $t \geq T$ ,

$$|\psi(t)\rangle = -i\frac{e^{i\omega_0 T/2}e^{-i\omega_0(t-T)/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{-i\omega_0 T/2}e^{i\omega_0(t-T)/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

ou encore

$$|\psi(t)\rangle = -i\frac{e^{-i\omega_0(t-2T)/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\omega_0(t-2T)/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

**3.3.** On a

$$\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2} \left( -i\frac{e^{-i\omega_0(t-2T)/2}}{\sqrt{2}}|-\rangle + \frac{e^{i\omega_0(t-2T)/2}}{\sqrt{2}}|+\rangle \right)$$

et donc

$$\langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin(\omega_0(t-2T))$$

**3.4.** En procédant comme dans la partie précédente, on obtient

$$\begin{aligned} s_x(t) &= -\frac{\hbar}{2} \int f(\omega_0) (\sin \omega_0(t-2T)) d\omega_0 \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\hbar}{2} \text{Im } g(t-2T) \\ &= -\frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{\Delta\omega_0^2(t-2T)^2}{2}\right) \sin(\Omega_0(t-2T)) \end{aligned}$$

On retrouve donc une sinusoïde de fréquence  $\Omega_0/(2\pi)$ , mais dont l'enveloppe gaussienne est maintenant centrée sur l'instant  $t = 2T$ .

**3.5.** Le résultat expérimental est en parfait accord avec notre calcul : en plus du signal initial au voisinage de  $t = 0$ , on observe maintenant un autre signal oscillant rapidement centré sur un temps positif, ici de l'ordre de 500 ms. Cette valeur de  $2T$  nous permet d'en déduire que  $T$  est de l'ordre de 250 ms. Cette méthode s'appelle l'écho de spin car on observe un écho du signal initial un temps  $T$  après le retournement appliqué à l'instant  $t = T$ .

*En fait, on peut observer que l'amplitude de l'écho est très légèrement plus petite que celle du pic initial. Ce phénomène provient d'autres sources de déphasage, que la méthode d'écho de spin permet justement de mesurer en s'affranchissant de l'inhomogénéité du champ magnétique.*

## 4 Préparation et manipulation de l'état du système

**4.1.** On peut soit dériver l'exponentielle d'opérateur par rapport au temps, soit se placer dans la base  $\{|\pm\rangle_x\}$  qui est la base propre de  $\hat{S}_x$  et donc de  $\hat{U}(\tau)$ . Cette seconde méthode nous donne  $\hat{U}(\tau)|\pm\rangle_x = \exp(\mp i\omega_1\tau/2)|\pm\rangle_x$ . Pour un état initial  $|\psi(t_0)\rangle = a(t_0)|+\rangle_x + b(t_0)|-\rangle_x$ , on a alors

$$\hat{U}(\tau)|\psi(t_0)\rangle = a(t_0)\hat{U}(\tau)|+\rangle_x + b(t_0)\hat{U}(\tau)|-\rangle_x = a(t_0)e^{-i\omega_1(t-t_0)/2}|+\rangle_x + b(t_0)e^{i\omega_1(t-t_0)/2}|-\rangle_x$$

où l'on reconnaît bien la solution de l'équation de Schrödinger exprimée dans la base propre de  $\hat{H}$ .

**4.2.** Remarquons tout d'abord que  $\hat{S}_x^2|\pm\rangle = \hat{S}_x(\hbar/2)|\mp\rangle = (\hbar/2)^2|\pm\rangle$ , soit  $\hat{S}_x^2 = (\hbar/2)^2\hat{I}$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\hat{U}_1(\tau) &= \exp\left(-i\frac{\omega_1\hat{S}_x\tau}{\hbar}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n \theta^n}{\hbar^n n!} \hat{S}_x^n\end{aligned}$$

où on a posé  $\theta = \omega_1\tau$ . En séparant les termes pairs et impairs, on obtient

$$\begin{aligned}\hat{U}(\tau) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{\hbar^{2n} (2n)!} \hat{S}_x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-i(-1)^n \theta^{2n+1}}{\hbar^{2n+1} (2n+1)!} \hat{S}_x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n}}{(2n)!} \hat{I} - \frac{2i}{\hbar} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\theta/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \hat{S}_x \\ &= \hat{I} \cos \frac{\omega_1\tau}{2} - \frac{2i}{\hbar} \hat{S}_x \sin \frac{\omega_1\tau}{2}.\end{aligned}$$

soit  $\alpha(\tau) = \cos(\omega_1\tau/2)$  et  $\beta(\tau) = -(2i/\hbar) \sin(\omega_1\tau/2)$ .

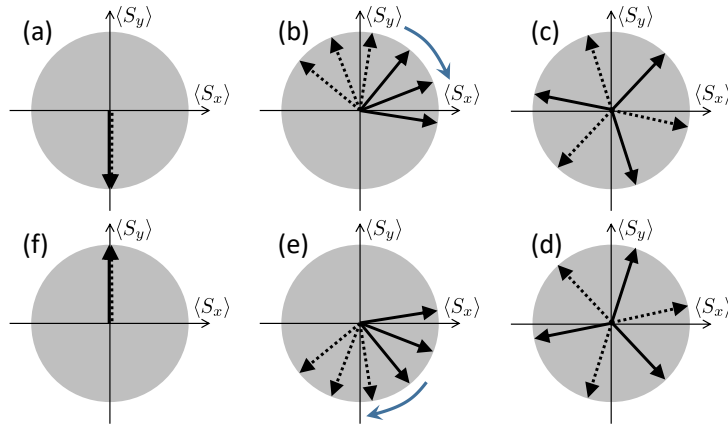
**4.3.** L'opération recherchée ( $|\pm\rangle \rightarrow |\mp\rangle$ ) correspond à l'opérateur  $\hat{S}_x$  (au facteur  $\hbar/2$  près). Pour parvenir à ce résultat, il s'agit donc d'annuler le terme  $\alpha(\tau)$ , ce qui sera réalisé au plus tôt pour  $\omega_1\tau = \pi$ . On a alors

$$\hat{U}(\pi/\omega_1) = -\frac{2i}{\hbar} \hat{S}_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui correspond exactement au retournement recherché (au facteur de phase global  $-i$  près).

**4.4.** En termes de précession de Larmor, on a fait une précession du spin d'un angle égal à  $\pi$  autour de l'axe  $x$ .

**4.5.** Lors d'une rotation d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $x$ ,  $\langle S_x \rangle$  est inchangé tandis que  $\langle S_y \rangle$  et  $\langle S_z \rangle$  sont changés en leurs opposés. Comme  $\langle S_z \rangle$  est nul avant le retournement, on reste donc dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Dans ce plan, le retournement correspond donc à une symétrie par rapport au plan  $\langle S_y \rangle = 0$ , qui change donc l'angle azimutal  $\varphi(t)$  du vecteur  $\langle \vec{S} \rangle$  en son opposé.



Supposons que l'on effectue le retournement à l'instant  $t = t_c$ . Chaque spin est alors transformé par une symétrie autour de l'axe  $\langle S_x \rangle$ , comme représenté en (d) dans la figure ci-dessus. En conséquence de ce retournement, les spins qui étaient en avance se trouvent maintenant en retard, et réciproquement. Ainsi, à l'instant  $2T - t_b$  (e), les spins les plus rapides ont presque rattrapé leur retard pour finalement former un écho à l'instant  $t = 2T$  (f).

**4.6.** Il suffit pour cela d'effectuer une impulsion  $\pi/2$  (correspondant à  $\omega_1 \tau = \pi/2$ ). On a alors

$$\hat{U}(\pi/(2\omega_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{I} - \frac{2i}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

qui produit bien l'état  $(|+\rangle - i|-\rangle)/\sqrt{2}$  à partir de l'état  $|+\rangle$ .

## Exercice 2 : Réflexion dépendant du spin

1. On pose  $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ . Une fonction propre d'énergie  $E$  s'écrit alors  $\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$  pour  $x < 0$  et  $\psi(x) = C \exp(-\kappa x)$  pour  $x > 0$ . La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en  $x = 0$  nous donne

$$\begin{aligned} A + B &= C \\ ik(A - B) &= -\kappa C \end{aligned}$$

soit  $(ik + \kappa)A = (ik - \kappa)B$  et

$$\rho = \frac{B}{A} = \frac{ik + \kappa}{ik - \kappa}.$$

2. Le coefficient de réflexion au sens du courant de probabilité s'écrit  $R = |\rho|^2 = 1$ . La particule est donc réfléchie avec une probabilité égale à 1.
3. C'est une conséquence de l'étalement du paquet d'ondes pendant la durée  $T$  (sachant que  $f(x)$  est réelle). Cet étalement reste modéré car  $\Delta k \ll k$ .
4. Remarquons qu'avec la forme proposée pour  $|\Psi_+(t)\rangle$ , on a

$$\hat{H}|\Psi_+(t)\rangle = \frac{\hat{p}_x^2}{2m}|\psi_+(t)\rangle \otimes |+\rangle + \theta(\hat{x})|\psi_+(t)\rangle \otimes (V_0 + \frac{\delta V}{2})|+\rangle = \left(\hat{H}_+|\psi_+(t)\rangle\right) \otimes |+\rangle$$

où

$$\hat{H}_+ = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V_+ \Theta(\hat{x}).$$

Donc si

$$i\hbar \frac{d|\psi_+(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_+|\psi_+(t)\rangle$$

alors

$$i\hbar \frac{d|\Psi_+(t)\rangle}{dt} = i\hbar \frac{d|\psi_+(t)\rangle}{dt} \otimes |+\rangle = \hat{H}_+|\psi_+(t)\rangle \otimes |+\rangle = \hat{H}|\Psi_+(t)\rangle$$

Ainsi  $|\Psi_+(t)\rangle$  sera bien l'unique solution de l'équation de Schrödinger puisqu'elle satisfait en outre la condition initiale.

5. On aura  $|\Psi_+(T)\rangle = |\psi_+(T)\rangle \otimes |+\rangle$ , où  $|\psi_+(T)\rangle$  est la solution obtenue plus haut en remplaçant  $V_0$  par  $V_+$ . En posant  $\kappa_+ = \sqrt{2m(E - V_+)}/\hbar$  et

$$\rho_+ = \frac{ik + \kappa_+}{ik - \kappa_+}$$

on peut donc écrire  $|\psi_+(T)\rangle = \rho_+ |\varphi(T)\rangle$ .

6. On raisonne de la même manière, en cherchant la solution sous la forme  $|\Psi_-(t)\rangle = |\psi_-(t)\rangle \otimes |-\rangle$ . On obtient alors  $|\Psi_-(T)\rangle = \rho_- |\varphi(T)\rangle \otimes |-\rangle$  avec

$$\rho_- = \frac{ik + \kappa_-}{ik - \kappa_-}$$

et  $\kappa_- = \sqrt{2m(E - V_-)}/\hbar$ .

7. L'équation de Schrödinger étant linéaire, la solution s'exprime simplement à partir de la combinaison linéaire des deux termes intervenant dans la condition initiale, soit

$$\begin{aligned} |\Psi(T)\rangle &= a_+ |\psi_+(T)\rangle \otimes |+\rangle + a_- |\psi_-(T)\rangle \otimes |-\rangle \\ &= |\varphi(T)\rangle \otimes (\rho_+ a_+ |+\rangle + \rho_- a_- |-\rangle) \end{aligned}$$

8. Avec ces conditions initiales, on a

$$|\Psi(T)\rangle = |\varphi(T)\rangle \otimes \left( \frac{\rho_+}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{\rho_-}{\sqrt{2}} |-\rangle \right)$$

Si on choisit les paramètres  $V_+$  et  $V_-$  pour que  $\rho_- = i\rho_+$ , alors  $|\Psi(T)\rangle \propto |\varphi(T)\rangle \otimes |+\rangle_y$  et on est certain de trouver  $+\hbar/2$  lors d'une mesure de  $S_y$ .