PHY361 - PC7 : Le Spin 1/2

Voir dans le livre : Chapitre 8 & 12
Objectifs : Manipulation et propriétés de l'observable $\hat{S}.\vec{u}$ Précession de Larmor. Théorème d'Ehrenfest.

Résumé de l'Amphi 7 et Définitions

Le spin de l'électron :

— L'électron possède un degré de liberté supplémentaire associé à son moment cinétique intrinsèque, le spin, objet quantique sans équivalent classique.
— L'expérience de Stern et Gerlach permet de mesurer la projection du spin selon un axe. Celle-ci ne peut prendre que deux valeurs possibles : $\pm\hbar/2$
— Pour plus de proprietés des opérateurs associés, voir Ex1

Quelques Rappels de Magnétostatique :

— Particule de charge q et vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$: Force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

— Dipôle magnétique dans un champ magnétique : moment magnétique $\vec{u}$ et couple $\vec{\Gamma}$

$$\vec{\mu} = iS\vec{u} \text{ et } \vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Quelques rappels sur le formalisme de Dirac :

— Observable $\hat{A}$: opérateur hermitien (ou auto-adjoint) : $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
— Commutateur : $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
— Les états propres et valeurs propre d'un opérateur $\hat{A}$ dont la matrice est A sur une base donnée $\{|\phi_1\rangle \cdots |\phi_n\rangle\}$ avec $A_{ij} = \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_j\rangle$ sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A dans cette même base.

Deux identités trigonométriques utiles :

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a) \;\; \& \;\; \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

1 Propriétés du spin 1/2 (Facultatif)

On considère une particule de spin 1/2 que l'on décrit dans l'espace de Hilbert de dimension deux engendré par les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$. On rappelle que dans cette base, les observables associées aux trois composantes cartésiennes du moment cinétique intrinsèque (ou spin) $\hat{\vec{S}}$ s'écrivent

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et vecteurs propre de ces matrices.

Pour $\hat{S}_z$, on a directement des valeurs propres de $\pm\hbar/2$, et :

$$\hat{S}_z|+\rangle_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_z \ \& \ \hat{S}_z|-\rangle_z = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle_z$$

pour $\hat{S}_y$, les valeurs propres sont aussi $\pm\hbar/2$, donc le vecteurs propres sont solution de :

$$\boxed{\hat{S}_y|\pm\rangle_y = \pm\hbar/2|\pm\rangle_y}$$

Donc pour $|+\rangle_y = a_+|+\rangle_z + a_-|-\rangle_z$ on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} \Rightarrow a_- = ia_+ \Rightarrow |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + i|-\rangle_z)$$

et de même,

$$|-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - i|-\rangle_z) \Rightarrow \boxed{|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z)}$$

Enfin, pour $\hat{S}_x$, les valeurs propres sont toujours $\pm\hbar/2$, donc le vecteurs propres sont solution de

$$\hat{S}_x|\pm\rangle_x = \pm\hbar/2|\pm\rangle_x \ \Rightarrow \boxed{|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z)}$$

---

2. Calculer les 3 commutateurs.

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_x\hat{S}_z] &= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{-ih^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i\hbar\hat{S}_y
\end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{[\hat{S}_z\hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_x\hat{S}_y] &= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{ih^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{i\hbar\hat{S}_z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_y\hat{S}_z] &= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{h^2}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{ih^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{i\hbar\hat{S}_x}
\end{aligned}$$

3. On considère l'état initial $|+\rangle_z$ quelles sont les résultats possible de la mesure du spin selon x ? Quelles sont les probabilités associées ? Dans quel état est le système après la mesure ?

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z) \quad \Rightarrow |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

donc, les deux résultats possible de la mesure du spin selon x sont $\pm\hbar/2$ avec une probabilité de 50% dans les deux cas.
Après la mesure $+\hbar/2$ le système se trouve dans l'état :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z)$$

Après la mesure $-\hbar/2$ le système se trouve dans l'état :

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z - |-\rangle_z)$$

2 L'observable $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$

On considère un vecteur unitaire

$$\vec{u} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

repéré par les angles sphériques θ et φ et on s'intéresse à l'observable $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$ associée à la projection du spin dans la direction de $\vec{u}$.

4. Exprimer la matrice de l'opérateur $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$.

Comme vu en amphi, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u} &= \hat{S}_x u_x + \hat{S}_y u_y + \hat{S}_z u_z \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une matrice hermitienne, donc d'une observable.

5. Montrer que dans la base $\{|\pm\rangle'_z = \exp(\mp i\varphi/2)|\pm\rangle_z\}$ l'opérateur $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$ prend la forme d'une matrice symétrique réelle que l'on écrira sous la forme $(\hbar/2)\hat{M}$.

Il s'agit de la même démarche que celle employée en amphi : en jouant sur la phase relative des deux vecteurs de base, on peut se débarrasser du facteur de phase des éléments de matrice non diagonaux (tandis que les éléments de matrice diagonaux sont évidemment inchangés). En utilisant

$${}'_z\langle+| = \exp(i\varphi/2)_z\langle+|$$

on obtient en effet :

$$ {}_z'\langle +|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|-\rangle_z' = e^{i\varphi/2}{}_z\langle +|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|-\rangle_z e^{i\varphi/2} = (\hbar/2)e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\sin\theta = (\hbar/2)\sin\theta $$

On obtiendrait évidemment le même résultat pour l'élément de matrice conjugué

$$ {}_z'\langle -|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|+\rangle_z' = (\hbar/2)\sin(\theta) $$

Quant aux éléments de matrice diagonaux, les termes de phase provenant du bra et du ket se neutralisent :

$$ {}_z'\langle +|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|+\rangle_z' = e^{i\varphi/2}{}_z\langle +|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|+\rangle_z e^{-i\varphi/2} = {}_z\langle +|\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}|+\rangle_z = (\hbar/2)\cos(\theta) $$

Finalement, la matrice de l'observable $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$ dans la base $\{|+\rangle_z', |-\rangle_z'\}$ s'écrit bien $(\hbar/2)\hat{M}$ avec

$$ \hat{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} $$

---

6. A quelle transformation géométrique de l'espace à deux dimension la matrice $\hat{M}$ correspond-elle ?

Il s'agit d'une matrice orthogonale. Son déterminant étant égal à -1, il ne s'agit pas d'une matrice de rotation (dont le déterminant serait égal à $+1$) mais d'une symétrie par rapport à une droite.

---

7. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$. On exprimera les vecteurs propres obtenus, notés $|\pm\rangle_{\vec{u}}$, d'abord dans la base $\{|+\rangle_z', |-\rangle_z'\}$, puis dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$.

Méthode Directe dans la base $\{|+\rangle_z', |-\rangle_z'\}$:

$\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u} = (\hbar/2)\hat{M}$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique, donc de :

$$ \lambda^2 - cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 $$

donc on a

$$ \lambda = \pm 1 $$

Les états propre associés sont solution de :

$$ M \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha_\pm \\ \beta_\pm \end{pmatrix} $$

donc :

$$ \begin{pmatrix} \alpha_\pm \cos(\theta) + \beta_\pm \sin(\theta) \\ \alpha_\pm \sin(\theta) - \beta_\pm \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\alpha_\pm \\ \pm\beta_\pm \end{pmatrix} $$

soit pour α_+ et β_+ :

$$ \frac{\beta_+}{\alpha_+} = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) $$

et pour α_- et β_-

$$\frac{\beta_-}{\alpha_-} = \frac{-1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donc comme $|\alpha_\pm|^2 + |\beta_\pm|^2 = 1$, on a :

$$|+\rangle_{\vec{u}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle'_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle'_z$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle'_z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle'_z$$

Soit dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$:

$$|+\rangle_{\vec{u}} = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = -e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

Méthode Directe $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ **:**

$\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u} = (\hbar/2)\hat{M}$. Les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique, donc de :

$$\lambda^2 - cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

donc on a

$$\lambda = \pm 1$$

Les états propre associés sont solution de :

$$M\begin{pmatrix}\alpha_\pm \\ \beta_\pm\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\alpha_\pm \\ \beta_\pm\end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{pmatrix}\alpha_\pm\cos(\theta) + \beta_\pm e^{-i\varphi}\sin(\theta) \\ \alpha_\pm e^{i\varphi}\sin(\theta) - \beta_\pm\cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm\alpha_\pm \\ \pm\beta_\pm\end{pmatrix}$$

soit pour α_+ et β_+ :

$$\frac{\beta_+}{\alpha_+} = e^{i\varphi}\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = e^{i\varphi}\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = e^{i\varphi}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et pour α_- et β_-

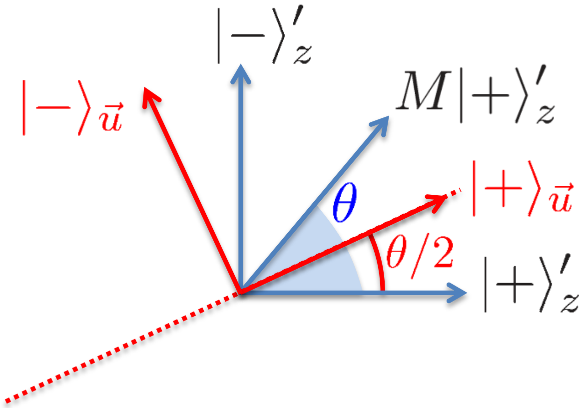
$$\frac{\beta_-}{\alpha_-} = e^{i\varphi}\frac{-1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -e^{i\varphi}\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = -e^{i\varphi}\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Donc comme $|\alpha_\pm|^2 + |\beta_\pm|^2 = 1$, on a :

$$|+\rangle_{\vec{u}} = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = -e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

Méthode Géométrique :

L'image du vecteur $(1,0)$ par la symétrie associée à la matrice $\hat{M}$ est le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Le vecteur définissant l'axe de la symétrie correspond à la bissectrice, soit $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$. Ce dernier vecteur est inchangé par la symétrie. C'est donc un vecteur propre de $\hat{M}$ associé à la valeur propre $+1$.



Le vecteur orthogonal $(-\sin\theta/2, \cos\theta/2)$ est perpendiculaire à l'axe de la symétrie. Il est donc changé en son opposé sous l'action de $\hat{M}$: c'est un vecteur propre associé à la valeur propre -1. Comme tout ceci se passe dans la base $\{|+\rangle'_z, |-\rangle'_z\}$, on en déduit l'expression des deux vecteurs propres de $\hat{M}$ associés aux valeurs propres respectives $+1$ et -1.

$$|+\rangle_{\vec{u}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle'_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle'_z$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle'_z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle'_z$$

soit, dans la base initiale

$$|+\rangle_{\vec{u}} = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$
$$|-\rangle_{\vec{u}} = -e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

On vérifie que ces deux vecteurs sont bien orthonormés. On a finalement

$$(\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u})|\pm\rangle_{\vec{u}} = \pm(\hbar/2)|\pm\rangle_{\vec{u}}$$

Les valeurs propres de $(\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u})$ sont donc $\pm\hbar/2$, ce qui n'est pas une surprise. L'axe $\vec{u}$ jouant le même rôle que l'axe z, il est normal que les valeurs propres de $(\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u})$ soient les mêmes que celles de $\hat{S}_z$.

8. Calculer la valeur moyenne de $\hat{\vec{S}}$ lorsque le système est dans l'état $|+\rangle_{\vec{u}}$.

On a :

$$\begin{aligned}
{}_{\vec{u}}\langle+|\hat{S}_x|+\rangle_{\vec{u}} &= \left(e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\varphi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{-i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin(\theta)\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\vec{u}}\langle +|\hat{S}_y|+\rangle_{\vec{u}} &= \left(e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{-i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), e^{-i\varphi/2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} -ie^{i\varphi/2}\sin(\theta/2) \\ ie^{-i\varphi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2i}\left(e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{-i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin(\theta)\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

Pour S_z, on peut procéder de même, ou bien simplement remarquer que la probabilité de mesurer $+\hbar/2$ est égale à $\cos^2\theta/2$ tandis que celle de mesurer $-\hbar/2$ est égale à $\sin^2\theta/2$. D'où

$$\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos(\theta)$$

On reconnaît dans $\langle\vec{S}\rangle$ les trois composantes cartésiennes du vecteur unitaire $\vec{u}$, soit $\langle\vec{S}\rangle = (\hbar/2)\vec{u}$.

9. (Facultatif) Montrer qu'à une phase globale près, tout état d'un espace de Hilbert à deux dimension peut s'écrire sous la forme du vecteur $|+\rangle_{\vec{u}}$.

Tout état $|\psi\rangle$ de l'espace de Hilbert pourra s'écrire

$$|\psi\rangle = a_+|+\rangle_z + a_-|-\rangle_z$$

où a_+ et a_- sont deux nombres complexes tels que $|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$.
Il existe donc un nombre $\theta \in [0,\pi]$ tel que

$$|a_+| = \cos(\theta/2) \text{ et } |a_-| = \sin(\theta/2)$$

On peut alors poser

$$a_+ = \exp(i\phi_+)\cos(\theta/2) \text{ et } a_- = \exp(i\phi_-)\sin(\theta/2)$$

Enfin, à une phase globale près, on peut toujours supposer que $\phi_+ + \phi_- = 0$.
En appelant alors $\varphi \in [0, 2\pi[$ la phase du nombre complexe $a_-a_+^* \propto \exp(i(\phi_- - \phi+))$, on peut remplacer $\phi_\pm$ par $\mp\varphi/2$. On obtient alors

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

ce qui est exactement l'expression que nous avons obtenue pour l'état $|+\rangle_{\vec{u}}$. A tout vecteur d'état, on peut donc faire correspondre un vecteur unitaire unique $\vec{u}$. En d'autres termes, l'état du système sera entièrement déterminé par la connaissance des valeurs moyennes $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ et $\langle S_z\rangle$.

3 Précession de Larmor

On place le système dans un champ magnétique uniforme B_0 orienté selon l'axe z. L'hamiltonien s'écrit donc

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B} = -\gamma B_0\hat{S}_z = \omega_0\hat{S}_z$$

où γ est le rapport gyromagnétique et $\omega_0 = -\gamma B_0$.

10. Quels sont les états propres et les niveaux d'énergie du système ?

On a calculé les états propre et valeurs propres de $\hat{S}_z$ dans l'exercice 1 donc on a :

$$\hat{H}|+\rangle_z = \frac{\hbar\omega_0}{2}|+\rangle_z \;\;\&\;\; \hat{H}|-\rangle_z = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|-\rangle_z$$

11. On prépare le système dans l'état initial $|\psi(0)\rangle = |+\rangle_{\vec{u}}$. Donner l'expression de l'état $|\psi(t)\rangle$ décrivant l'évolution du système au cours du temps.

C'est une application directe de la méthode générale de résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un hamiltonien indépendant du temps : on développe l'état initial dans une base propre de $\hat{H}$, puis on fait évoluer chaque composante avec le facteur de phase $\exp(-iE_n t/\hbar)$ approprié. Ici, on obtient

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_{\vec{u}} = e^{-i\varphi/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

ce qui nous donne

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\varphi/2}e^{-i\omega_0 t/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i\varphi/2}e^{i\omega_0 t/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z$$

12. Que peut-on dire de l'évolution de $\langle\vec{S}\rangle$ au cours du temps ?

On remarque que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle_z + e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle_z = |+\rangle_{\vec{u}(t)}$$

où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire défini par les angles sphériques $(\theta,\, \varphi(t))$ avec :

$$\varphi(t) = \varphi + \omega_0 t$$

D'apès la question 8, on sait que

$$\langle\vec{S}\rangle = (\hbar/2)\vec{u}(t)$$

va donc décrire un mouvement de précession autour de l'axe z à la fréquence de Larmor ω_0, exactement comme le cas classique qui a été vu en amphi.

4 Théorème d'Ehrenfest

13. (Démonstration du Théorème d'Ehrenfest) :
On considère $\hat{A}$ un opérateur ne dépendant pas du temps. En exprimant de manière générale la dérivée de $\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ par rapport au temps, montrer que :

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle$$

On obtient
$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \frac{d\langle\psi(t)|}{dt}\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{A}\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt}$$
Mais on sait d'après l'équation de Schrödinger que
$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle$$
d'où l'on déduit
$$\frac{d\langle\psi(t)|}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\hat{H}$$
où l'on a utilisé le fait que $\hat{H}$ était hermitien. On obtient donc
$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\hat{H}\hat{A}|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|\hat{A}\hat{H}|\psi(t)\rangle$$
soit
$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle$$
C'est ce qu'on appelle le théorème d'Ehrenfest.

14. Appliquer le résultat obtenu au cas de l'observable $\hat{\vec{S}}$ et retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Calculons d'abord les commutateurs des composantes cartésienne de $\hat{\vec{S}}$ avec l'hamiltonien.

$$\begin{aligned}[]
[\hat{S}_x,\hat{H}] &= [\hat{S}_x,\omega_0\hat{S}_z] = \omega_0[\hat{S}_x,\hat{S}_z] = -i\hbar\omega_0\hat{S}_y \\
[\hat{S}_y,\hat{H}] &= [\hat{S}_y,\omega_0\hat{S}_z] = \omega_0[\hat{S}_y,\hat{S}_z] = i\hbar\omega_0\hat{S}_x \\
[\hat{S}_z,\hat{H}] &= [\hat{S}_z,\omega_0\hat{S}_z] = 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème d'Ehrenfest, on en déduit

$$\begin{cases} \frac{d\langle S_x\rangle}{dt} = -\omega_0\langle S_y\rangle \\ \frac{d\langle S_y\rangle}{dt} = \omega_0\langle S_x\rangle \\ \frac{d\langle S_z\rangle}{dt} = 0 \end{cases}$$

On retrouve exactement les équations classiques de la précession de Larmor qui ont été vues en amphi. Le vecteur $\langle\vec{S}\rangle$ va donc décrire un mouvement de précession autour de l'axe z, comme obtenu par une autre méthode à l'exercice précédent.