Introduction à la programmation et à l'algorithmique (avec Java)

François MORAIN

avec des contributions de Julien CERVELLE et Philippe CHASSIGNET

31 mars 2022

Version 5.3.0 (barbue)

© École Polytechnique

Table des matières

Introduction

Les audacieux font fortune à Java.

Ce polycopié s'adresse à des élèves de première année de l'École polytechnique ayant peu ou pas de connaissances en informatique. Le cours (INF361) consiste à établir les bases de la programmation et de l'algorithmique, en étudiant un langage de programmation, ici Java. On introduit des structures de données simples : scalaires, chaînes de caractères, tableaux, listes, arbres, et des structures de contrôle élémentaires comme l'itération, et la récursivité.

Nous avons choisi Java pour cette introduction à la programmation car c'est un langage typé assez répandu qui permet de s'initier aux diverses constructions présentes dans la plupart des langages de programmation modernes (objets, exceptions). Il est toujours présent dans les téléphones portables (avec Android).

À ces cours sont couplés des séances de travaux dirigés et pratiques qui sont beaucoup plus qu'un complément au cours, puisque c'est en écrivant des programmes que l'on apprend l'informatique.

Comment lire ce polycopié ? La première partie décrit les principaux traits d'un langage de programmation (ici Java), ainsi que les principes généraux de la programmation simple. Une deuxième partie présente quelques grandes classes de problèmes qui sont bien traités à l'aide des ordinateurs. On termine avec des problèmes donnés dans le passé.

Un passage indiqué par une étoile (*) peut être sauté en première lecture.

Remerciements pour les versions 5.[23].* (printemps 2021) : merci à I. Labiad (X2020) pour avoir trouvé des erreurs plus ou moins graves dans la version précédente. M. Mezzaroba a aussi transmis des remarques pertinentes.

Remerciements pour la version 4.2.5 (mars 2019) : encore des typos relevés par A. Tixier, merci !

Remerciements pour la version 4.2.1 (mai 2017) : rien de tel qu'un œil neuf pour répérer des erreurs. Merci donc à Pierre-Évariste Dagand pour sa relecture.

Remerciements pour la version 4.2.0 (mars 2016) : A. Tixier a relevé de nouvelles typos dans la version 4.1.1, merci à elle, ainsi qu'à A. Couvreur pour sa relecture d'un nouveau chapitre.

Le polycopié a été écrit avec LaTeX.

Polycopié, version 5.3.0, 31 mars 2022

Première partie

Introduction à la programmation

Chapitre 1

Les premiers pas en JAVA

Même un programme de 1000 lignes commence par un `main`*.*

Le processeur présent dans un ordinateur est un mécanisme frustre, mais d'une rapidité sans égale pour effectuer des opérations de base sur les bits (0 ou 1). Au début de l'histoire (dès la seconde moitié des années 1940), on "parlait" au processeur dans son langage, appelé *langage machine*, directement en bits (ou en octets). Rapidement, on a inventé des langages plus parlants pour les humains, les *langages assembleurs*, qui sont faciles à traduire en langage machine. Pour structurer la pensée des programmeurs et permettre à de plus en plus d'utilisateurs d'être libérés des contraintes de l'assembleur, qui était généralement associé à une machine donnée, on a inventé des langages de programmation de plus haut niveau, avec des concepts plus puissants visant à l'expressivité. Ces langages sont toujours *traduits* (on dit *compilés*) vers des cibles qui se rapprochent de plus en plus du langage machine. C'est ce que symbolise la figure 1.1.

Java	**a+b**
langage assembleur	**add A, B**
langage machine	**1000110010100000**

FIGURE 1.1 – D'un langage vers la machine.

Sur un ordinateur tournent des *programmes*. Un programme permet de résoudre un problème (numérique ou non), à l'aide d'un ou plusieurs composants (en JAVA, des *classes*), implantant un ou plusieurs algorithmes, accessibles depuis des fonctions (ou *méthodes*).

Dans ce chapitre on donne quelques éléments simples de la programmation avec le langage JAVA : types, variables, affectations. Ce sont des traits communs à tous les langages de programmation. Ce seront des programmes simples formant chacun une seule classe, mais qui appelleront souvent des classes prédéfinies.

1.1 Le premier programme

1.1.1 Écriture et exécution

Commençons par le premier programme qu'on écrit dès qu'on débute dans un nouveau langage de programmation : il s'agit simplement d'afficher `Bonjour !` à l'écran.

Arriver à ce résultat prouve que l'on sait fabriquer un programme simple avec un but simple, et qu'on est arrivé à maîtriser l'environnement de base nécessaire à son exécution.

```
public class Premier{
    public static void main(String[] args){
        System.out.println("Bonjour !");
        return;
    }
}
```

Quel que soit l'environnement utilisé (Unix avec la ligne de commande, outil de développement intégré – IDE), le programme JAVA doit être écrit dans un fichier `Premier.java`. Le compilateur Java va transformer ce programme et créer le fichier `Premier.class`, que la machine virtuelle de JAVA rendra compréhensible pour l'ordinateur.

Cette chaîne de travail, qui paraît compliquée à première vue, est en fait l'une des clefs du succès de JAVA. En effet, le fichier `Premier.class` peut être exécuté sur tous les ordinateurs et tous les systèmes. En clair, une fois compilé sur un ordinateur, il peut être utilisé sur un autre n'ayant même pas le même système.

1.1.2 Analyse de ce programme

Un langage de programmation est comme un langage humain. Il y a un ensemble de lettres avec lesquelles on forme des mots. Les mots forment des phrases, les phrases des paragraphes, ceux-ci forment des chapitres qui rassemblés donnent naissance à un livre. L'alphabet de JAVA est peu ou prou l'alphabet que nous connaissons, avec des lettres, des chiffres, et quelques signes de ponctuation. Les mots seront les *mots-clefs* du langage (comme **`class`**, **`public`**, etc. qui seront indiqués en gras), ou formeront les noms des *variables* que nous utiliserons plus loin. Les phrases seront pour nous des *instructions*, les paragraphes des *fonctions* (appelées *méthodes* dans la terminologie des langages à objets). Les chapitres seront les *classes*, les livres des programmes que nous pourrons exécuter et utiliser.

C'est ce que l'on voit à la figure 1.2, que nous allons commenter plus avant. Le mot clef **`public`** caractérise les constituants de la classe qui sont visibles de l'extérieur de la classe. Nous y reviendrons dans la section 4.4.

En JAVA, tout programme doit être dans une classe, qui peut faire elle-même appel à d'autres classes (des bibliothèques), comme nous le verrons au chapitre 4. Le premier chapitre d'un livre est l'amorce du livre et ne peut généralement être sauté. En JAVA, l'exécution d'un programme débute toujours à partir d'une méthode spéciale, appelée `main` et dont la syntaxe immuable est :

```
    public static void main(String[] args){...}
```

Nous verrons au chapitre 4 ce que veulent dire les mots magiques **`public`**, **`static`** et **`void`**, `args` contient quant à lui des arguments qu'on peut passer au programme. Les accolades { et } servent à constituer un bloc d'instructions ; elles doivent englober les instructions d'une méthode, de même qu'une paire d'accolades doit englober l'ensemble des méthodes d'une classe.

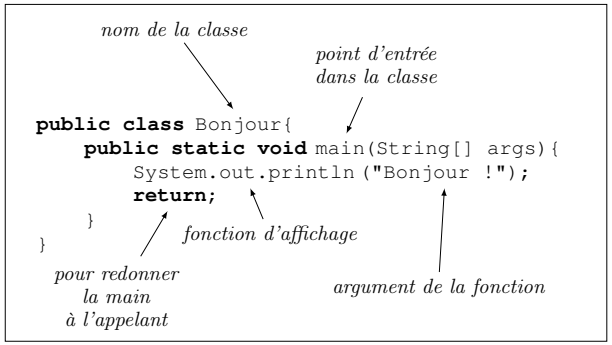


FIGURE 1.2 – Analyse du premier programme.

Notons qu'en JAVA les instructions se terminent toutes par un `;` (point-virgule). Ainsi, dans la suite le symbole `I` signifiera soit une instruction (qui se termine donc par `;`) soit une suite d'instructions (chacune finissant par `;`) placées entre accolades.

La méthode effectuant le travail est la méthode `System.out.println` qui appartient à une classe prédéfinie, la classe `System`. En JAVA, les classes peuvent s'appeler les unes les autres, ce qui permet une approche modulaire de la programmation : on n'a pas à récrire tout le temps la même chose.

Expliquons l'exécution du programme dans cet exemple simple. Insistons sur le fait qu'un ordinateur exécute *séquentiellement* les instructions les unes après les autres. Dans notre cas, l'exécution commence dans la méthode `main`. La première instruction demande d'afficher la chaîne de caractères `"Bonjour !"` à l'écran. Puis l'instruction **`return`** est exécutée, qui permet de sortir de la méthode `main` et le programme s'arrête, car il n'y a plus rien à faire.

Notons que nous avons écrit les instructions de chaque ligne en respectant un décalage bien précis (on parle d'*indentation*). La méthode `System.out.println` étant exécutée à l'intérieur de la méthode `main`, elle est décalée de plusieurs blancs (ici 4) sur la droite. L'indentation permet de bien structurer ses programmes pour en améliorer la lisibilité, elle est systématiquement utilisée partout.

1.2 Les variables

Pour aller au-delà de calculs vraiment très simples, il nous faut un moyen de stocker l'information de façon à la manipuler et la transformer. C'est le rôle des *variables*.

Un *type* en programmation précise l'ensemble des valeurs que peut prendre une variable ; les opérations que l'on peut effectuer sur une variable dépendent de son type. En JAVA, on doit *déclarer* le type d'une variable avant de pouvoir l'utiliser.

1.2.1 Types primitifs

Parmi les types possibles, les plus simples sont les types primitifs : les entiers, les réels, les caractères et les booléens. Nous utiliserons également des types prédéfinis en JAVA (par exemple, des `String`) et nous fabriquerons nos propres types au chapitre 4, ce qui aide à la lisibilité et à la souplesse des programmes que nous écrirons.

Types numériques

Types entiers. Les principaux types entiers sont **`int`** et **`long`**, le premier utilise 32 bits (un bit vaut 0 ou 1, c'est un chiffre binaire) pour représenter un nombre ; sachant que le premier bit est réservé pour coder le signe, un **`int`** peut représenter un entier de l'intervalle $[-2^{31}, 2^{31}-1]$. On peut écrire un entier x de cet intervalle sous forme binaire

$$b_{31}b_{30}\dots b_0$$

avec $b_i \in \{0,1\}$, et le bit b_{31} est interprété comme suit

— si $0 \leqslant x < 2^{31}$, $b_{31} = 0$ et

$$x = b_{30}2^{30} + b_{29}2^{29} + \cdots + b_0.$$

— si $-2^{31} \leqslant x < 0$, $b_{31} = 1$ et

$$x + 2^{31} = b_{30}2^{30} + b_{29}2^{29} + \cdots + b_0.$$

Le type **`long`** permet d'avoir des mots de 64 bits (entiers de l'intervalle $[-2^{63}, 2^{63}-1]$) et donc de travailler sur des entiers plus grands. Il y a aussi les types **`byte`** et **`short`** qui permettent d'utiliser des mots de 8 et 16 bits.

Les opérations suivantes sont définies pour les types entiers :

— opérations de comparaison : égal (==), différent (!=), plus petit (<), plus grand (>)

— la *division euclidienne* de l'entier a par l'entier $b > 0$ permet d'écrire $a = bq + r$ avec q et r uniques tels que $0 \leqslant r < b$. On appelle *quotient* le nombre q et *reste* le nombre r. En Java, ce reste s'obtient à l'aide de l'instruction `a % b` et le quotient par `a/b`. Par suite `2/3;` contient le quotient de la division euclidienne de 2 par 3, c'est-à-dire 0. Par définition, on écrit également que $a = r \bmod q$ (a est *congru* à r modulo q).

— les opérations de calcul comme addition (+), soustraction (−), multiplication ($\star$) ; *stricto sensu*, ces opérations sont en fait définies modulo 2^{32}, mais ce n'est généralement pas gênant.

— les opérations logiques bit à bit : voir ci-dessous pour les opérations sur les booléens.

Les flottants. Les types représentant des réels (en fait seulement des nombres dont le développement binaire est fini) sont **`float`** et **`double`**, le premier se contente d'une précision dite simple, le second donne la possibilité d'une plus grande précision, on dit que l'on a une double précision.

La plupart des opérations arithmétiques courantes sont disponibles pour les flottants en JAVA, y compris des opérations transcendantes (voir la documentation de la classe `Math`).

Ordre de priorité. Les opérations ont un ordre de priorité correspondant aux conventions usuelles. Ainsi l'opération de multiplication a une plus grande priorité que l'addition, ce qui signifie que les multiplications sont faites avant les additions. La présence de parenthèses permet de mieux contrôler le résultat. Par exemple

```
3 + 5 * 6
```

est évalué à 33 ; par contre

```
(3 + 5) * 6
```

est évalué à 48. Une expression a toujours un type et le résultat de son évaluation est une valeur ayant ce type.

Autres types

Les caractères. Les caractères sont déclarés par le type **`char`** au standard Unicode. Ils sont codés sur 16 bits et permettent de représenter toutes les langues de la planète (les caractères habituels des claviers des langues européennes se codent uniquement sur 8 bits). Le standard Unicode respecte l'ordre alphabétique. Ainsi le code de 'a' est inférieur à celui de 'd', et celui de 'A' à celui de 'D'.

Les booléens. Le type des booléens est **`boolean`** et ses deux valeurs possibles sont **`true`** et **`false`**. Les opérations sont **et**, **ou**, et **non** ; elles se notent respectivement `&&`, `||`, `!`. Si `a` et `b` sont deux booléens, le résultat de `a && b` est `true` si et seulement si `a` et `b` sont tous deux égaux à **`true`**. Celui de `a || b` est **`true`** si et seulement si l'un de `a` ou `b` est égal à **`true`**. Enfin `!a` est **`true`** quand `a` est **`false`** et réciproquement. Les booléens sont utilisés dans les conditions décrites à la section 1.4.

Les opérations logiques sont également disponibles sur les types entiers. Donnons les tables de vérité pour les opérations logiques sur des bits 0 ou 1 (il faut imaginer que 0 est faux, 1 est vrai) :

NOT	
1	0
0	1

`!x`

ET	**1**	**0**
1	1	0
0	0	0

`x & y`

OU	**1**	**0**
1	1	1
0	1	0

`x | y`

XOR	**1**	**0**
1	0	1
0	1	0

`x ^ y`

Par exemple, si `a` et `b` sont de type **`int`**, `a & b` (un seul &) désigne l'entier dans lequel le i-ème bit est le résultats du *et logique* entre le bit i de `a` et le bit i de `b`. Il en est de même pour le *ou logique* `a | b`, et le *ou exclusif* `a ^ b` (et donc ce n'est pas la valeur de a^b). À titre d'exemples :

$$11_b \,\&\, 10_b = 10_b, \quad 01_b \mid 00_b = 01, \quad 11_b \hat{}\, 10_b = 01_b.$$

Si `a` est de type **`int`**, la valeur de `~a` est l'entier 32 bits dont tous les bits sont remplacés par leur complément, et qui se calcule par $2^{32} - a - 1$. En effet, si $a = a_{31}2^{31} + \cdots + a_0$, on a

$$\tilde{}a = (1 - a_{31})2^{31} + \cdots + (1 - a_0) = 2^{32} - 1 - a.$$

Par exemple

$$\tilde{}10_b = 2^{32} - 2 - 1 = 11111111111111111111111111111101_b = -3$$

on constate que tous les bits ont été remplacés par leurs opposés.

À titre d'exemple usuel, notons qu'il existe deux façons de calculer $a \bmod 2$, le premier par `a % 2`, le second (généralement plus rapide sur un processeur moderne) par `a & 1`.

Une autre opération intéressante est celle de la multiplication par une puissance de 2, appelée décalage : `a << i` calcule $a \times 2^i$ et `a >> i` calcule $a/2^i$. Ainsi le i-ième bit de a peut se récupérer par `a & (1 << i)` ou bien par `(a >> i) & 1`. Ce genre d'opération permet d'écrire du code très rapide pour certaines opérations sur les entiers.

1.2.2 Déclaration

La déclaration du type des variables est obligatoire en JAVA, mais elle peut se faire à l'intérieur d'une méthode et pas nécessairement au début de celle-ci. Une déclaration se présente sous la forme d'un nom de type suivi soit d'un nom de variable, soit d'une suite de noms de variables séparés par des virgules. En voici quelques exemples :

```
int a, b, c;
float x;
char ch;
boolean u, v;
```

1.2.3 Affectation

On a vu qu'une variable a un nom et un type. L'opération la plus courante sur les variables est l'affectation d'une valeur. Elle s'écrit :

```
x = E;
```

où `E` est une expression qui peut contenir des constantes et des variables. Lors d'une affectation, l'expression `E` est évaluée et le résultat de son évaluation est affecté à la variable `x`. Par exemple

```
double x = 0.0;
x = 1.2 + 3.4;
```

donnera à `x` la valeur 4.6.

Pour une affectation

```
x = E;
```

le type de l'expression `E` et celui de la variable `x` doivent être compatibles, c'est-à-dire identiques, sauf pour un petit nombre de cas : il s'agit alors des conversions implicites de types, qui doivent suivre la hiérarchie de la figure 1.3. Dans tous les cas, le type de `x` ne change pas.

Pour toute opération, on convertit toujours au plus petit commun majorant des types des opérandes. Des conversions explicites sont aussi possibles, et recommandées dans le doute. On peut les faire par l'opération dite de coercion (*cast*) suivante

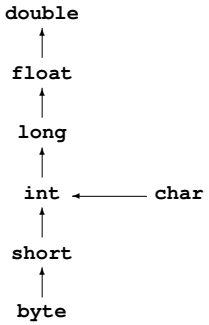


FIGURE 1.3 – Coercions implicites.

```
x = (nom-type) E;
```

L'expression `E` est alors convertie dans le type indiqué entre parenthèses devant l'expression. Pour une affectation, le type du résultat est le type de l'expression à gauche de l'affectation. Il faut donc faire une conversion explicite sur l'expression de droite pour que le résultat soit cohérent avec le type de l'expression de gauche. C'est le cas de l'exemple

```
int x = (int)12.7;
```

où le flottant `12.7` sera converti en entier, soit 12. Par contre, on peut se contenter d'écrire

```
double x = 12;
```

qui va affecter à `x` la valeur 12.0.

Lors d'une affectation

```
x = E;
```

si l'expression `E` contient des variables, leur contenu est égal à la dernière valeur qui leur a été affectée. Par exemple

```
x = 12;
x = x + 5;
```

donnera à `x` la valeur 17.

1.2.4 Incrémentation et décrémentation

Soit `i` une variable de type **`int`**. On peut l'*incrémenter*, c'est-à-dire lui additionner 1 à l'aide de l'instruction :

```
i = i + 1;
```

C'est une instruction tellement fréquente (particulièrement dans l'écriture des boucles, cf. 1.6.1), qu'il existe deux raccourcis : `i++` et `++i`. Dans le premier cas, il s'agit d'une *post-incrémentation*, dans le second d'une *pré-incrémentation*. Expliquons la différence entre les deux. Le code

```
i = 2;
j = i++;
```

donne la valeur 3 à `i` et 2 à `j`, car le code est équivalent à :

```
i = 2;
j = i;
i = i + 1;
```

on incrémente en tout dernier lieu. Par contre :

```
i = 2;
j = ++i;
```

est équivalent quant à lui à :

```
i = 2;
i = i + 1;
j = i;
```

et donc on termine avec `i=3` et `j=3`.

Il existe aussi des raccourcis pour la décrémentation : `i = i-1` peut s'écrire aussi `i--` ou `--i` avec les mêmes règles que pour `++`.

On utilise souvent des raccourcis pour les instructions du type

```
x = x + a;
```

qu'on a tendance à écrire de façon équivalente, mais plus compacte :

```
x += a;
```

1.3 Faire des calculs simples

On peut se servir de JAVA pour réaliser les opérations d'une calculette élémentaire : on affecte la valeur d'une expression à une variable et on demande ensuite l'affichage de la valeur de la variable en question. Bien entendu, un langage de programmation n'est pas fait uniquement pour cela, toutefois cela nous donne quelques exemples de programmes simples ; nous passerons plus tard à des programmes plus complexes.

```
// Voici mon deuxième programme
public class PremierCalcul{
    public static void main(String[] args){
        int a;

        a = 5 * 3;
        System.out.println(a);
        a = 287 % 7;
        System.out.println(a);

        double f = 1.4;

        System.out.println(f * f);
        return;
    }
}
```

Dans ce programme on voit apparaître une variable de nom `a` qui est déclarée au début, et de type **`int`**. La variable ne pourra prendre que des valeurs entières lors de l'exécution du programme. Par la suite, on lui affecte deux fois une valeur qui est ensuite affichée. Les résultats affichés seront 15 et 0. Ensuite, on utilise une variable `f` de type flottant double précision, qui sera initialisée avec la valeur `1.4`, dont le carré sera affiché à l'écran.

Insistons de nouveau sur la façon dont le programme est exécuté par l'ordinateur. Celui-ci lit les instructions du programme une à une en commençant par la méthode `main`, et les traite dans l'ordre où elles apparaissent. Il s'arrête dès qu'il rencontre l'instruction **`return;`**, qui est généralement la dernière présente dans une méthode. Nous reviendrons sur le mode de traitement des instructions quand nous introduirons de nouvelles constructions (itération, récursion).

Pour finir, nous avons utilisé un commentaire en début de programme :

```
// Voici mon deuxième programme
```

Un commentaire est repérable par un `//`. Il ne sert à rien dans l'exécution du programme, mais permet à l'humain qui le lit de le comprendre plus facilement (à condition que le programmeur ait écrit des commentaires pertinents). Nous les utiliserons pour signaler les passages les plus délicats des programmes présentés.

1.4 Expressions booléennes

Pour enrichir le comportement de nos programmes, nous avons besoin de prendre des décisions en fonction de certains calculs, ce que l'on fait à l'aide d'expressions *booléennes*, c'est-à-dire dont l'évaluation donne l'une des deux valeurs **`true`** ou **`false`**.

1.4.1 Opérateurs de comparaison

Les opérateurs booléens les plus simples sont

`==`	`!=`	`<`	`>`	`<=`	`>=`
égal à	différent de	plus petit que	plus grand que	inférieur ou égal à	supérieur ou égal à

Le résultat d'une comparaison sur des variables de type primitif :

```
a == b
```

est égal à **`true`** si l'évaluation de la variable `a` et de la variable `b` donnent le même résultat, il est égal à **`false`** sinon. Par exemple, `(5-2) == 3` a pour valeur `true`, mais `22/7 == 3.14159` a pour valeur `false`.

Remarque : Attention à ne pas écrire `a = b` qui est une affectation et pas une comparaison.

L'opérateur `!=` est l'opposé de ==, ainsi `a != b` prend la valeur **`true`** si l'évaluation de `a` et de `b` donne des valeurs différentes.

Les opérateurs de comparaison <, >, <=, >= ont des significations évidentes lorsqu'il s'agit de comparer des nombres. Noter qu'ils peuvent aussi servir à comparer des caractères ; pour les caractères latins courants c'est l'ordre alphabétique qui est exprimé.

1.4.2 Connecteurs

On peut construire des expressions booléennes comportant plusieurs comparateurs en utilisant les connecteurs `&&`, qui signifie *et*, `||` qui signifie *ou* et `!` qui signifie *non*.

Ainsi `C1 && C2` est évaluée à **`true`** si et seulement si les deux expressions `C1` et `C2` le sont. De même `C1 || C2` est évalué à **`true`** si l'une des deux expressions `C1` ou `C2` l'est.

Par exemple

```
!( ((a<c) && (c<b) && (b<d)) || ((c<a) && (a<d) && (d<b)) )
```

est une façon de tester si deux intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ sont disjoints ou contenus l'un dans l'autre.

Règle d'évaluation : en JAVA, l'évaluation de l'expression `C1 && C2` s'effectue dans l'ordre `C1` puis `C2` si nécessaire ; ainsi si `C1` est évaluée à **`false`** alors `C2` n'est pas évaluée. C'est aussi le cas pour `C1 || C2` qui est évaluée à **`true`** si c'est le cas pour `C1` et ceci sans que `C2` ne soit évaluée. Par exemple l'évaluation de l'expression

```
(3 > 4) && (2/0 > 0)
```

donne pour résultat **`false`** alors que

```
(2/0 > 0) && (3 > 4)
```

donne lieu à une erreur provoquée par la division par zéro et lance une exception (voir section 14.4).

1.5 Instructions conditionnelles

Il s'agit d'instructions permettant de n'effectuer une opération que si une certaine condition est satisfaite ou de programmer une alternative entre deux options.

1.5.1 If-else

La plus simple de ces instructions est celle de la forme :

```
if(C)
    I1
else
    I2
```

Dans cette écriture `C` est une expression booléenne (attention à ne pas oublier les parenthèses autour) ; `I1` et `I2` sont formées ou bien d'une seule instruction ou bien d'une suite d'instructions à l'intérieur d'une paire d'accolades `{ }`. On rappelle que chaque instruction de JAVA se termine par un point-virgule (`;`), symbole qui fait donc partie de l'instruction). Par exemple, les instructions

```
if(a >= 0)
    b = 1;
else
    b = -1;
```

permettent de calculer le signe de `a` et de le mettre dans `b`.

La partie **`else`** `I2` est facultative, elle est omise si la suite `I2` est vide c'est-à-dire s'il n'y a aucune instruction à exécuter dans le cas où `C` est évaluée à **`false`**.

On peut avoir plusieurs branches séparées par des **`else if`** comme par exemple dans :

```
if(a == 0 )       x = 1;
else if (a < 0)   x = 2;
else if (a > -5)  x = 3;
else              x = 4;
```

qui donne 4 valeurs possibles pour `x` suivant les valeurs de `a`.

1.5.2 Forme compacte

Il existe une forme compacte de l'instruction conditionnelle utilisée comme un opérateur ternaire (à trois opérandes) dont le premier est un booléen et les deux autres sont de type primitif. Cet opérateur s'écrit `C ? E1 : E2`. Elle est utilisée quand un **`if else`** paraît lourd, par exemple pour le calcul d'une valeur absolue :

```
x = (a > b)? a - b : b - a;
```

1.5.3 Aiguillage

Quand diverses instructions sont à réaliser suivant les valeurs que prend une variable, plusieurs **`if`** imbriqués deviennent lourds à mettre en œuvre, on peut les remplacer avantageusement par un aiguillage **`switch`**. Un tel aiguillage a la forme suivante dans laquelle `x` est une variable *d'un type primitif* (entier, caractère ou booléen, pas réel) et `a,b,c` sont des constantes représentant des valeurs que peut prendre cette variable. Lors de l'exécution les valeurs après chaque **`case`** sont testées l'une après l'autre jusqu'à

obtenir celle prise par `x` ou arriver à **`default`**, ensuite toutes les instructions sont exécutées en séquence jusqu'à la fin. Par exemple dans l'instruction :

```
switch(x){
case a  : I1
case b  : I2
case c  : I3
default : I4
}
```

si la variable `x` est évaluée à `b` alors toutes les suites d'instructions `I2, I3, I4` seront exécutées, à moins que l'une d'entre elles ne contienne un **`break`** qui interrompt cette suite. Si la variable est évaluée à une valeur différente de `a,b,c` c'est la suite `I4` qui est exécutée.

Pour sortir de l'instruction avant la fin, il faut passer par une instruction **`break`** . Le programme suivant est un exemple typique d'utilisation :

```
switch(c){
case 's':
    System.out.println("samedi est un jour de week-end");
    break;
case 'd':
    System.out.println("dimanche est un jour de week-end");
    break;
default:
    System.out.print(c);
    System.out.println(" n'est pas un jour de week-end");
    break;
}
```

Il permet d'afficher les jours du week-end. Noter l'absence d'accolades dans les différents cas. Si l'on écrit plutôt de façon erronée en oubliant les **`break`** :

```
switch(c){
case 's':
    System.out.println("samedi est un jour de week-end");
case 'd':
    System.out.println("dimanche est un jour de week-end");
default:
    System.out.print(c);
    System.out.println(" n'est pas un jour de week-end");
    break;
}
```

on obtiendra, dans le cas où `c` s'évalue à `'s'` :

```
samedi est un jour de week-end
dimanche est un jour de week-end
s n'est pas un jour de week-end
```

1.6 Itérations

Une itération permet de répéter plusieurs fois la même suite d'instructions. Elle est utilisée pour évaluer une somme, une suite récurrente, le calcul d'un plus grand commun diviseur par exemple. Elle sert aussi pour effectuer des traitements plus informatiques comme la lecture d'un fichier. On a l'habitude de distinguer les *boucles pour* (**for**) des *boucles tant-que* (**while**). Les premières sont utilisées lorsqu'on connaît, lors de l'écriture du programme, le nombre de fois où les opérations doivent être itérées, les secondes servent à exprimer des tests d'arrêt dont le résultat n'est pas prévisible à l'avance. Par exemple, le calcul d'une somme de valeurs pour i variant de 1 à n relève plutôt de la catégorie boucle pour, celui du calcul d'un plus grand commun diviseur par l'algorithme d'Euclide relève plutôt d'une boucle tant-que.

1.6.1 Boucles pour (`for`)

L'itération de type boucle pour en JAVA est un peu déroutante pour ceux qui la découvrent pour la première fois. L'exemple le plus courant est celui où on exécute une suite d'opérations pour `i` variant de `1` à `n`, comme dans :

```
int i;
for(i = 1; i <= n; i++)
    System.out.println(i);
```

Ici, on a affiché tous les entiers entre 1 et n. Prenons l'exemple de $n = 2$ et déroulons les calculs faits par l'ordinateur :

— étape 1 : i vaut 1, il est plus petit que n, on exécute l'instruction
`System.out.println(i);`
et on incrémente i ;
— étape 2 : i vaut 2, il est plus petit que n, on exécute l'instruction
`System.out.println(i);`
et on incrémente i ;
— étape 3 : i vaut 3, il est plus grand que n, on sort de la boucle.

Une forme encore plus courante est celle où on déclare `i` dans la boucle :

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
    System.out.println(i);
```

Dans ce cas, on n'a pas accès à la variable `i` en dehors du corps de la boucle.

Un autre exemple est le calcul de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

qui se fait par

```
double s = 0.0;
for(int i = 1; i <= n; i++)
    s = s + 1/((double)i);
```

La conversion explicite en **double** est ici nécessaire, car sinon la ligne plus naturelle :


```
s = s + 1/i;
```

conduit à évaluer d'abord `1/i` comme une opération entière, autrement dit le quotient de 1 par $i > 1$, i.e., 0. Et la valeur finale de `s` serait toujours 1.0.

La forme générale est la suivante :

```
for(Init; C; Inc)
    I
```

Dans cette écriture `Init` est une initialisation (pouvant comporter une déclaration), `Inc` est une incrémentation, et `C` un test d'arrêt, ce sont des expressions qui ne se terminent pas par un point virgule. Quant à `I`, c'est le corps de la boucle constitué d'une seule instruction ou d'une suite d'instructions entre accolades. `Init` est exécutée en premier, ensuite la condition `C` (une expression) est évaluée : si sa valeur est **true** alors la suite d'instructions `I` est exécutée suivie de l'instruction d'incrémentation `Inc` et un nouveau tour de boucle reprend avec l'évaluation de `C`. Noter que `Init` (tout comme `Inc`) peut être composée d'une seule expression ou bien de plusieurs, séparées par des `,` (virgules).

Noter que les instructions `Init` ou `Inc` de la forme générale (ou même les deux) peuvent être vides. Il n'y a alors pas d'initialisation ou pas d'incrémentation ; l'initialisation peut, dans ce cas, figurer avant le **for** et l'incrémentation à l'intérieur de `I`.

Insistons sur le fait que la boucle

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
    System.out.println(i);
```

peut également s'écrire :

```
for(int i = 1; i <= n; i++)
{
    System.out.println(i);
}
```

pour faire ressortir le bloc d'instructions, ou encore :

```
for(int i = 1; i <= n; i++){
    System.out.println(i);
}
```

ce qui fait gagner une ligne...

1.6.2 Boucles tant que (`while`)

Une telle instruction a la forme suivante :

```
while(C)
    I
```

où `C` est une condition et `I` une instruction ou un bloc d'instructions. L'itération évalue `C` et exécute `I` si le résultat est **true**, cette suite est répétée tant que l'évaluation de `C` donne la valeur **true**.

Un exemple classique de l'utilisation de **while** est le calcul du pgcd de deux nombres par l'algorithme d'Euclide. Cet algorithme consiste à remplacer le calcul de pgcd(a, b) par celui de pgcd(b, r) où r est le reste de la division de a par b et ceci tant que $r \neq 0$.

```
while(b != 0){
    r = a % b;
    a = b;
    b = r;
}
```

Examinons ce qu'il se passe avec $a = 28$, $b = 16$.
— étape 1 : $b = 16$ est non nul, on exécute le corps de la boucle, et on calcule $r = 12$;
— étape 2 : $a = 16$, $b = 12$ est non nul, on calcule $r = 4$;
— étape 3 : $a = 12$, $b = 4$, on calcule $r = 0$;
— étape 4 : $a = 4$, $b = 0$ et on sort de la boucle.

Notons enfin que boucles pour ou tant-que sont presque toujours interchangeables. Ainsi une forme équivalente de

```
double s = 0.0;
for(int i = 1; i <= n; i++)
    s += 1/((double)i);
```

est

```
double s = 0.0;
int i = 1;
while(i <= n){
    s += 1/((double)i);
    i++;
}
```

mais que la première forme est plus compacte que la seconde.

1.6.3 Boucles répéter tant que (do while)

Il s'agit ici d'effectuer l'instruction `I` et de ne la répéter que si la condition `C` est vérifiée. La syntaxe est :

```
do
   I
while(C)
```

À titre d'exemple, le problème de Syracuse est le suivant : soit m un entier plus grand que 1. On définit la suite u_n par $u_0 = m$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n \div 2 & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(la notation $n \div 2$ désigne le quotient de la division euclidienne de n par 2). Il est conjecturé, mais non encore prouvé que pour tout m, la suite prend la valeur 1 au bout d'un temps fini.

Pour vérifier numériquement cette conjecture pour m dans l'intervalle $[10, 1000]$, on écrit le programme JAVA suivant :

```
public class Syracuse{
    public static void main(String[] args){
        int mmin = 10, mmax = 1000;

        for(int m = mmin; m <= mmax; m++){
            int n = m;
            do{
                if((n % 2) == 0)
                    n /= 2;
                else
                    n = 3*n+1;
            } while(n > 1);
        }
        return;
    }
}
```

1.7 Terminaison des programmes

Le programme que nous venons de voir peut être considéré comme étrange, voire dangereux. En effet, si la conjecture était fausse, le programme pourrait ne jamais s'arrêter, on dit qu'il *ne termine pas*. Le problème de la terminaison des programmes est fondamental en programmation. Il faut toujours se demander si le programme qu'on écrit va terminer. D'un point de vue théorique, il est impossible de trouver un algorithme pour faire cela (cf. chapitre 6). D'un point de vue pratique, on doit examiner chaque boucle ou itération et prouver que chacune termine.

Voici une erreur classique, qui imite le mouvement perpétuel :

```
while(true)
    ;
```

Par contre

```
for(i = 0; i >= 0; i++)
    ;
```

s'arrête, car l'opération `i++` incrémente `i`, qui finira par dépasser 2^{31} et sera alors considéré comme négatif.

On s'attachera à prouver que les algorithmes que nous étudions terminent bien.

1.8 Instructions de rupture de contrôle

Il y a trois telles instructions qui sont **return**, **break** et **continue**. L'instruction **return** doit être utilisée dans toutes les fonctions qui calculent un résultat (cf. chapitre suivant).

Les deux autres instructions de rupture sont beaucoup moins utilisées et peuvent être omises en première lecture. L'instruction **break** permet d'interrompre une suite d'instructions dans une boucle pour passer à l'instruction qui suit la boucle dans le texte du programme. Dans l'exemple simple suivant :

```
    for(int i = 0; i < 5; i++){
        if(i == 2)
            break;
        System.out.println(i);
    }
    System.out.println("fini");
```

Le programme affiche

```
0
1
fini
```

L'instruction **continue** a un effet similaire à celui de **break**, mais redonne le contrôle à l'itération suivante de la boucle au lieu d'en sortir. Modifions notre exemple simple :

```
    for(int i = 0; i < 5; i++){
        if(i == 2)
            continue;
        System.out.println(i);
    }
    System.out.println("fini");
```

Nous obtenons maintenant :

```
0
1
3
4
fini
```

1.9 Exemple : la méthode de Newton

On rappelle que si f est une fonction suffisamment raisonnable de la variable réelle x, alors la suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers une racine de f à partir d'un point de départ bien choisi.

Si $f(x) = x^2 - a$ avec $a > 0$, la suite converge vers $\sqrt{a}$. Dans ce cas particulier, la récurrence s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - a)/(2x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

On choisit par exemple $x_0 = a$. La suite (x_n) converge, car elle est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$. On en déduit que la suite $|x_{n+1} - x_n|$ tend vers 0.

Il faut savoir passer de cette description mathématique exacte à une version programmable, qui sera nécessairement approchée. On itère la suite en partant de x_0, et on s'arrête quand la différence entre deux valeurs consécutives est plus petite que $\varepsilon > 0$ donné. Cette façon de faire est plus stable numériquement (et moins coûteuse) que de tester $|x_n^2 - a| \leqslant \varepsilon$. Si on veut calculer $\sqrt{2}$ par cette méthode en JAVA, on écrit :

```
public class Newton{
    public static void main(String[] args){
        double a = 2.0, x, xold, eps;

        x = a;
        eps = 1e-10;
        do{
            // recopie de l'ancienne valeur
            xold = x;
            // calcul de la nouvelle valeur
            x = (xold+a/xold)/2;
            System.out.println(x);
        } while(Math.abs(x-xold) > eps);
        System.out.print("Sqrt(a)=");
        System.out.println(x);
        return;
    }
}
```

ce qui donne :

```
1.5
1.4166666666666665
1.4142156862745097
1.4142135623746899
1.4142135623730949
Sqrt(a)=1.4142135623730949
```

On peut également vérifier le calcul en comparant avec la fonction `Math.sqrt()` de JAVA.

Comment prouve-t-on que cet algorithme termine ? On aborde ici un point parfois épineux. En effet, nous avons montré que la suite (x_n) tend *mathématiquement* vers une limite, et que donc, *mathématiquement*, la différence $|x_n - x_{n-1}|$ tend vers 0. Les flottants utilisés par les langages de programmation sont une pauvre approximation des réels. Il convient donc d'être prudent dans leur utilisation, ce qui est un sujet de recherche et d'applications très riche et important.

Exercices

Exercice 1.1 Pour expérimenter les problèmes de convergence, faites varier la valeur de la constante `eps` du programme.

Exercice 1.2 On considère la suite calculant $1/\sqrt{a}$ par la méthode de Newton, en utilisant $f(x) = a - 1/x^2$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\,(3 - a x_n^2).$$

Écrire une fonction JAVA qui calcule cette suite, et en déduire le calcul de $\sqrt{a}$. Cette suite converge-t-elle plus ou moins vite que la suite donnée ci-dessus ?

Exercice 1.3 On veut calculer une approximation de

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

à ε près en calculant

$$e_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}.$$

On utilisera la majoration :

$$|e - e_N| \leqslant \frac{1}{N \cdot N!}.$$

a) Écrire une méthode qui prend en argument ε et calcule le plus petit entier N tel que $1/(N \cdot N!) \leqslant \varepsilon$.

b) On évalue e_N à l'aide du schéma

$$e_N = 1 + \frac{1}{1}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\,(\cdots)\cdots\right)\right).$$

Écrire la méthode correspondante et la méthode qui calcule e à ε près.

Chapitre 2

Méthodes : théorie et pratique

Il faut de la méthode pour écrire des méthodes.

Nous donnons dans ce chapitre un aperçu général sur les méthodes (fonctions) dans un langage de programmation classique, sans nous occuper de la problématique objet, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 4.

2.1 Pourquoi écrire des méthodes

Reprenons l'exemple du chapitre précédent :

```
public class Newton{
    public static void main(String[] args){
        double a = 2.0, x, xold, eps;

        x = a;
        eps = 1e-10;
        do{
            // recopie de l'ancienne valeur
            xold = x;
            // calcul de la nouvelle valeur
            x = (xold+a/xold)/2;
            System.out.println(x);
        } while(Math.abs(x-xold) > eps);
        System.out.print("Sqrt(a)=");
        System.out.println(x);
        return;
    }
}
```

Nous avons écrit le programme implantant l'algorithme de Newton dans la méthode d'appel (la méthode `main`). Si nous avons besoin de faire tourner l'algorithme pour plusieurs valeurs de a dans le même temps, nous allons devoir recopier le programme à chaque fois. Le plus simple est donc d'écrire une méthode à part, qui ne fait que les calculs liés à l'algorithme de Newton.


```
public class Newton2{

    public static double sqrtNewton(double a, double eps){
        double xold, x = a;

        do{
            // recopie de l'ancienne valeur
            xold = x;
            // calcul de la nouvelle valeur
            x = (xold+a/xold)/2;
            // System.out.println(x); // (1) pour deboguer
        } while(Math.abs(x-xold) > eps);
        return x;
    }

    public static void main(String[] args){
        double r;

        r = sqrtNewton(2, 1e-10);
        System.out.print("Sqrt(2)=");
        System.out.println(r);
        r = sqrtNewton(3, 1e-10);
        System.out.print("Sqrt(3)=");
        System.out.println(r);
    }
}
```

Remarquons également que nous avons séparé le calcul proprement dit de l'affichage du résultat. Si l'on a besoin de déboguer les calculs successifs, on peut décommenter la ligne (1) dans le code.

Écrire des méthodes remplit plusieurs rôles : au-delà de la possibilité de réutilisation des méthodes à différents endroits du programme, le plus important est de clarifier la structure du programme, pour le rendre lisible et compréhensible par d'autres personnes que le programmeur original.

2.2 Comment écrire des méthodes

2.2.1 Syntaxe

Une méthode prend des arguments en paramètres et donne en général un résultat. Elle se déclare par :

```
public static typeRes nomFonction(type1 nom1, ..., typek nomk)
```

Dans cette écriture `typeRes` est le type du résultat.

La *signature* d'une méthode est constituée du nom de la méthode et de la suite ordonnée des types des paramètres.

Le résultat du calcul de la méthode doit être indiqué après un **return**. Il est obligatoire de prévoir une telle instruction dans toutes les branches d'une méthode. L'exécution d'un **return** a pour effet d'interrompre le calcul de la méthode en rendant le résultat à l'appelant.

On fait appel à une méthode par

```
nomFonction(var1, var2, ... , vark);
```

En général cet appel se situe dans une affectation.

En résumé, une syntaxe très courante est la suivante :

```
public static typeRes nomFonction(type1 nom1, ..., typek nomk){
    typeRes r;

    r = ...;
    return r;
}
...
public static void main(String[] args){
    type1 n1;
    type2 n2;
    ...
    typek nk;
    typeRes s;

    ...
    s = nomFonction(n1, n2, ..., nk);
    ...
    return;
}
```

2.2.2 Le type spécial `void`

Le type du résultat peut être **void**, dans ce cas la méthode ne rend pas de résultat. Elle opère par *effet de bord*, par exemple en affichant des valeurs à l'écran ou en modifiant des variables globales (variables de classe) ou la mémoire globale. Il convient d'être prudent quand on écrit des méthodes qui procèdent par effet de bord.

Un exemple typique est celui de la procédure principale :

```
// Voici mon premier programme
public class Premier{
    public static void main(String[] args){
        System.out.println("Bonjour !");
        return;
    }
}
```


Notons que le **return** n'est pas obligatoire dans une méthode de type **void**, à moins qu'elle ne permette de sortir de la méthode dans un branchement. Nous la mettrons souvent pour marquer l'endroit où on sort de la méthode, et par souci d'homogénéité de l'écriture.

2.2.3 La surcharge

En JAVA on peut définir plusieurs méthodes qui ont le même nom à condition que leurs signatures soient différentes. On appelle *surcharge* cette possibilité. Le compilateur doit être à même de déterminer la méthode dont il est question à partir du type des paramètres d'appel. En JAVA, l'opérateur + est surchargé : non seulement il permet de faire des additions, mais il permet de concaténer des chaînes de caractères (voir la section 4.5 pour plus d'information). Par exemple, reprenant le programme de calcul de racine carrée, on aurait pu écrire :

```
    public static void main(String[] args){
        double r;

        r = sqrtNewton(2, 1e-10);
        System.out.println("Sqrt(2)=" + r);
        return;
    }
```

2.3 Visibilité des variables

Les arguments d'une méthode sont passés *par valeur* , c'est-à-dire que leur valeurs sont recopiées lors de l'appel dans des variables locales. Après la fin du travail de la méthode les nouvelles valeurs, qui peuvent avoir été attribuées à ces variables locales, ne sont plus accessibles.

Ainsi il n'est pas possible d'écrire une méthode qui échange les valeurs de deux variables passées en paramètre, sauf à procéder par des moyens détournés peu recommandés.

Considérons l'exemple suivant :

```
// Calcul de circonférence
public class Cercle{
    public static float circonference(float r){
        return 2. * (float)Math.PI * r;
    }
    public static void main(String[] args){
        float c = circonference (1.5);

        System.out.print("Circonférence:  ");
        System.out.println(c);
        return;
    }
}
```

La variable `r` présente dans la définition de `circonference` est *instanciée* au moment de l'appel de la méthode par la méthode `main`. Tout se passe comme si le programme réalisait l'affectation `r = 1.5` au moment d'entrer dans `circonference`.

Regardons ce qui se passe quand on écrit :

```
public class Essai{
    public static int f(int n){
        int m = n+1;

        return 2*m;
    }
    public static void main(String[] args){
        System.out.print("résultat=");
        System.out.println(f(4));
        return;
    }
}
```

La variable `m` n'est connue (on dit *vue*) que par la méthode `f`. En particulier, on ne peut l'utiliser dans la méthode `main` ou toute autre méthode qui serait dans la classe.

Compliquons encore :

```
public class Essai{
    public static int f(int n){
        int m = n+1;

        return 2*m;
    }
    public static void main(String[] args){
        int m = 3;

        System.out.print("résultat=");
        System.out.print(f(4));
        System.out.print(" m=");
        System.out.println(m);
        return;
    }
}
```

Qu'est-ce qui s'affiche à l'écran ? On a le choix entre :

`rÃl'sultat=10 m=5`

ou

`rÃl'sultat=10 m=3`

D'après ce qu'on vient de dire, la variable `m` de la méthode `f` n'est connue que de `f`, donc pas de `main` et c'est la seconde réponse qui est correcte. On peut imaginer que la variable `m` de `f` a comme nom réel `m-de-la-m{\'e}thode-f`, alors que l'autre a pour nom `m-de-la-m{\'e}thode-main`. Le compilateur et le programme ne peuvent donc pas faire de confusion.

2.3.1 Variables de classe

Il existe une façon de partager une variable entre méthodes, en utilisant une *variable de classe*. On peut modifier l'exemple précédent pour introduire la variable `pi`, qui sera connue et partagée par toutes les méthodes présentes dans la classe (ainsi que par tous les objets de la classe, voir chapitre 4).

```
// Calcul de circonférence
public class Cercle{
    public final static float pi = (float)Math.PI;

    public static float circonference(float r){
        return 2. * pi * r;
    }
}
```

Pour des raisons de propreté des programmes, on ne souhaite pas qu'il existe beaucoup de ces variables de classe. L'idéal est que chaque méthode travaille sur ses propres variables, indépendamment des autres méthodes de la classe, autant que cela est possible. Dans notre exemple, il est logique que la classe `Math` dispose d'une variable décrivant π, qui soit non modifiable (i.e., **`final`**), et partagée par tout le monde.

2.4 Quelques conseils pour écrire un (petit) programme

Un beau programme est difficile à décrire, à peu près aussi difficile à caractériser qu'un beau tableau, ou une belle preuve. Il existe quand même quelques règles simples. Le premier lecteur d'un programme est soi-même. Si je n'arrive pas à me relire, il est difficile de croire que quelqu'un d'autre le pourra. On peut être amené à écrire un programme, le laisser dormir pendant quelques mois (années !), puis avoir à le réutiliser. Si le programme est bien écrit, il sera facile à relire.

Grosso modo, la démarche d'écriture de petits ou gros programmes est à peu près la même, à un facteur d'échelle près. On découpe en tranches indépendantes le problème à résoudre, ce qui conduit à isoler des méthodes à écrire. Une fois cette architecture mise en place, il n'y a plus qu'à programmer chacune de celles-ci. Même après un découpage *a priori* du programme en méthodes, il arrive qu'on soit amené à écrire d'autres méthodes. Quand le décide-t-on ? De façon générale, pour ne pas dupliquer du code. Une autre règle simple est qu'un morceau de code ne doit jamais dépasser une page d'écran. Si cela arrive, on doit découper en deux ou plus. La clarté y gagnera.

La méthode `main` d'un programme Java doit ressembler à une sorte de table des matières de ce qui va suivre. Elle doit se contenter d'appeler les principales méthodes du programme. *A priori*, elle ne doit pas faire de calculs elle-même.

Les noms de méthode (comme ceux des variables) ne doivent pas se résumer à une lettre. Il est tentant pour un programmeur de succomber à la facilité et d'imaginer pouvoir programmer toutes les méthodes du monde en réutilisant sans cesse les mêmes noms de variables, de préférence avec un seul caractère par variable. Faire cela conduit rapidement à écrire du code non lisible, à commencer par soi. Ce style de programmation est donc proscrit. Les noms doivent être pertinents. Nous aurions pu écrire le programme concernant les cercles de la façon suivante :

```
public class D{
```

```
    public static float z = (float)Math.PI;

    public static float e(float s){
        return 2. * z * s;
    }

    public static void main(String[] args){
        float y = e(1.5);

        System.out.println(y);
        return;
    }
}
```

ce qui aurait rendu la chose un peu plus difficile à lire.

Un programme doit être aéré : on écrit une instruction par ligne, on ne mégotte pas sur les lignes blanches. De la même façon, on doit commenter ses programmes. Il ne sert à rien de mettre des commentaires triviaux à toutes les lignes, mais tous les points difficiles du programme doivent avoir en regard quelques commentaires. Un bon début consiste à placer au-dessus de chaque méthode que l'on écrit quelques lignes décrivant le travail de la méthode, les paramètres d'appel, etc. Que dire de plus sur le sujet ? Le plus important pour un programmeur est d'adopter rapidement un style de programmation (nombre d'espaces, placement des accolades, etc.) et de s'y tenir.

Finissons avec un programme horrible, qui est le contre-exemple typique à ce qui précède :

```
public class mystere{public static void main(String[] args){
int
z=
Integer.parseInt(args[0]);do{if((z%2)==0)z
/=2;
else z=3*z+1;}while(z>1);}}
```

2.5 Il ne faut pas abuser des fonctions

Il est tentant d'utiliser des fonctions partout. Mais il ne faut pas écrire n'importe quoi. On voit parfois le code suivant :

```
    public static int f(int n){
        // gros calcul compliqu{\'e}
        return ...;
    }
    public static void main(String[] args){
        if(f(5) <= 10)
            TC.println("f(5)="+f(5));
    }
```

Il y a eu deux appels à la fonction `f`, ce qui est coûteux. Une bonne façon est d'écrire :


```
    public static int f(int n){
        // gros calcul compliqu{\'e}
        return ...;
    }
    public static void main(String[] args){
        int r = f(5);
        if(r <= 10)
            TC.println("f(5)="+r);
    }
```

C'est pire si la fonction `f` renvoie un résultat aléatoire :

```
    public static int alea(){
        return valeur_aleatoire;
    }
    public static void main(String[] args){
        if(alea() <= 10)
            TC.println("alea="+alea());
    }
```

où le comportement de la fonction n'est pas du tout conforme à ce que l'on souhaiterait. Cela peut devenir encore pire avec des indices de tableaux, des effets de bords, etc.

Chapitre 3

Tableaux

Donnez-moi un tableau et je programmerai le monde !
Les 4-TRAN.

La possibilité de manipuler des tableaux se retrouve dans tous les langages de programmation ; toutefois JAVA, qui est un langage avec des objets, manipule les tableaux d'une façon particulière que l'on va décrire ici.

3.1 Déclaration, construction, initialisation

L'utilisation d'un tableau permet d'avoir à sa disposition un très grand nombre de variables du même type en utilisant un seul nom et donc en effectuant une seule déclaration. En effet, si on déclare un tableau de nom `tab` et de taille `n` contenant des valeurs de type `typ`, on a à sa disposition les variables `tab[0], tab[1], ..., tab[n-1]` qui se comportent comme des variables ordinaires de type `typ`.

En JAVA, on sépare la déclaration d'une variable de type tableau, la construction effective d'un tableau et l'initialisation du tableau.

La *déclaration* d'une variable de type tableau de nom `tab` dont les éléments sont de type `typ`, s'effectue par [1] :

```
typ[] tab;
```

Lorsqu'on a déclaré un tableau en JAVA on ne peut pas encore l'utiliser complètement. Il est en effet interdit par exemple d'affecter une valeur aux variables `tab[i]`, car il faut commencer par construire le tableau, ce qui signifie qu'il faut réserver de la place en mémoire (on parle d'*allocation mémoire*) avant de s'en servir.

L'opération de *construction* s'effectue en utilisant un **new**, ce qui donne :

```
tab = new typ[taille];
```

Dans cette instruction, `taille` est une constante entière ou une variable de type entier dont l'évaluation doit pouvoir être effectuée à l'exécution. Une fois qu'un tableau est créé avec une certaine taille, celle-ci ne peut plus être modifiée.

On peut aussi regrouper la déclaration et la construction en une seule ligne par :

1. ou de manière équivalente par `typ tab[];`. Nous préférerons la première façon de faire car elle respecte la convention suivant laquelle dans une déclaration, le type d'une variable figure complètement avant le nom de celle-ci. La seconde correspond à ce qui se fait souvent en langage C.


```
typ[] tab = new typ[taille];
```

L'exemple de programme le plus typique est le suivant :

```
int[] tab = new int[10];
for(int i = 0; i < 10; i++)
    tab[i] = i;
```

Pour des tableaux de petite taille on peut en même temps construire et initialiser les valeurs contenues dans le tableau. L'exemple suivant regroupe les 3 opérations de déclaration, construction et initialisation de valeurs en utilisant une affectation suivie de `{, }` :

```
int[] tab = new int[]{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024};
```

Quand vous serez habitués à manipuler ces tableaux, il vous sera possible d'utiliser la syntaxe courte :

```
int[] tab = {1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024};
```

La taille d'un tableau `tab` peut s'obtenir grâce à l'expression `tab.length`. Complétons l'exemple précédent :

```
int[] tab = new int[]{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024};
for(int i = 0; i < tab.length; i++)
    System.out.println(tab[i]);
```

Insistons encore une fois lourdement sur le fait qu'un tableau `tab` de n éléments en JAVA commence nécessairement à l'indice 0, le dernier élément accessible étant `tab[n-1]`.

Si `tab` est un tableau dont les éléments sont de type `typ`, on peut alors considérer `tab[i]` comme une variable de type `typ` et effectuer sur celle-ci toutes les opérations admissibles concernant le type `typ`. Bien entendu l'indice `i` doit être inférieur à la taille du tableau donnée lors de sa construction. JAVA vérifie cette condition à l'exécution et une exception [2] est levée si elle n'est pas satisfaite. Cela protège le programme, même si l'efficacité en est un peu diminuée. L'exécution de

```
int[] tab = new int[]{1, 2};
tab[3] = 7;
```

provoquera ainsi

```
Exception in thread "main"
    java.lang.ArrayIndexOutOfBoundsException: 3
at Tab3.main(Tab3.java:4)
```

qui se décode comme *exception provoquée par un indice en dehors du tableau et qui a pour valeur* 3.

Donnons un exemple simple d'utilisation d'un tableau. Recherchons le plus petit élément dans un tableau donné :

2. cf. section 14.4

```
public static int plusPetit(int[] x){
    int k = 0, n = x.length;
    for(int i = 1; i < n; i++)
        // invariant : k est l'indice du plus petit
        //             élément de x[0..i-1]
        if(x[i] < x[k])
            k = i;
    return x[k];
}
```

On pourrait écrire :

```
public static int plusPetit(int[] x){
    int min = x[0];
    int n = x.length;
    for(int i = 1; i < n; i++)
        // invariant : min est le plus petit
        //             élément de x[0..i-1]
        if(x[i] < min)
            min = x[i];          // (*)
    return min;
}
```

La différence est qu'on manipule une variable temporaire `min` qui est du même type que le tableau `x`. Si recopier une variable de ce type est coûteux, alors la ligne `(*)` introduit un coût inutile.

3.2 Représentation en mémoire et conséquences

La mémoire accessible au programme peut être vue comme un ensemble de cases qui vont contenir des valeurs associées aux variables qu'on utilise. C'est le compilateur qui se charge d'associer aux noms symboliques les cases correspondantes, qui sont repérées par des numéros (des indices dans un grand tableau, appelés encore *adresses*). Le programmeur moderne n'a pas à se soucier des adresses réelles, il laisse ce soin au compilateur (et au programme). Aux temps historiques, la programmation se faisait en manipulant directement les adresses mémoire des objets, ce qui était pour le moins peu confortable[3].

Quand on écrit :

```
int i = 3, j;
```

une case mémoire[4] est réservée pour chaque variable, et celle pour `i` remplie avec la valeur 3. Quand on exécute :

3. Tempérons un peu : dans des applications critiques (cartes à puce par exemple), on sait encore descendre à ce niveau là, quand on sait mieux que le compilateur comment gérer la mémoire. Ce sujet dépasse le cadre du cours, mais est enseigné en année 2.

4. Une case mémoire pour un `int` de Java est formée de 4 octets consécutifs.


```
j = i;
```

le programme va chercher la valeur présente dans la case affectée à `i` et la recopie dans la case correspondant à `j`.

Que se passe-t-il maintenant quand on déclare un tableau ?

```
int[] tab;
```

Le compilateur réserve de la place pour la variable `tab` correspondante, mais pour le moment, aucune place n'est réservée pour les éléments qui constitueront `tab`. C'est ce qui explique que quand on écrit :

```
public class Bug1{
    public static void main(String[] args){
        int[] tab;
        tab[0] = 1;
    }
}
```

on obtient à l'exécution :

```
java.lang.NullPointerException at Bug1.main(Bug1.java:5)
```

C'est une erreur tellement fréquente que les compilateurs récents détectent ce genre de problème à la compilation (si possible).

Quand on manipule un tableau, on travaille en fait de façon indirecte avec lui, comme si on utilisait une armoire pour ranger ses affaires. Il faut toujours imaginer qu'écrire

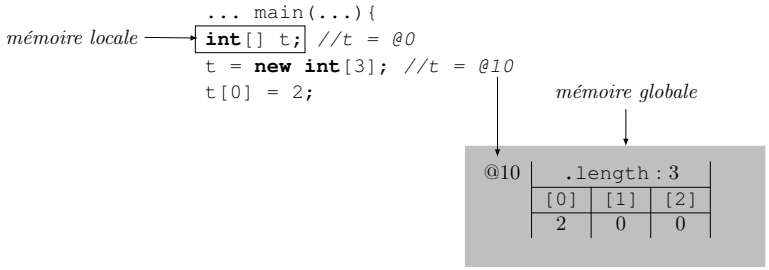
```
tab[2] = 3;
```

veut dire au compilateur "retrouve l'endroit où tu as stocké `tab` en mémoire et mets à jour la case d'indice 2 avec 3". En fait, le compilateur se rappelle d'abord où il a rangé son armoire, puis en déduit quel tiroir utiliser. On parle encore d'*indirection*.

La valeur d'une variable tableau est une *référence*, c'est-à-dire l'adresse où elle est rangée en mémoire. Il est temps de parler de mémoire. Pour simplifier, nous distinguerons deux zones mémoires : la *mémoire globale* est partagée par toutes les fonctions d'un programme en cours d'exécution[5] ; la *mémoire locale* à chaque fonction correspond à une zone de stockage des variables locales.

Par exemple, la suite d'instructions suivante va avoir l'effet indiqué dans la mémoire globale (que nous dessinerons toujours en grisé) et locale :

5. En Unix, on parlerait de processus.



Après allocation, le tableau `t` est repéré par son adresse @10 (qui pourrait correspondre Ãă l'adresse de stockage de `.length`), et les trois cases par les adresses @14, @18 et @22 (par exemple). On remplit alors `t[0]` avec le nombre 2.

Expliquons maintenant ce qui se passe quand on écrit, avec l'idée de faire une copie de `t` :

```
int[] u = t; // u = @10
u[2] = 7;
System.out.println(t[2]);
```

Les variables `u` et `t` désignent le même tableau, en programmation on dit qu'elles *font référence* au même tableau, c'est-à-dire à la même suite d'emplacements dans la mémoire. C'est ce qui explique que modifier `u[2]`, c'est modifier l'emplacement mémoire référencé par `u`, emplacement qui est également référencé par `t`. Et donc le programme affiche la nouvelle valeur de `t[2]`, à savoir 7.

Si on souhaite recopier le contenu d'un tableau dans un autre il faut écrire une fonction :

```
public static int[] copier(int[] x){
    int n = x.length;
    int[] y = new int[n];
    for(int i = 0; i < n; i++)
        y[i] = x[i];
    return y;
}
```

Notons aussi que l'opération de comparaison de deux tableaux `x == y` est évaluée à `true` dans le cas où `x` et `y` référencent le même tableau (par exemple si on a effectué l'affectation `y = x`). Si on souhaite vérifier l'égalité des contenus, il faut écrire une fonction particulière :

```
public static boolean estEgal(int[] x, int[] y){
    if(x.length != y.length) return false;
    for(int i = 0; i < x.length; i++)
        if(x[i] != y[i])
            return false;
    return true;
}
```


Dans cette fonction, on compare les éléments terme à terme et on s'arrête dès que deux éléments sont distincts, en sortant de la boucle et de la fonction dans le même mouvement.

3.3 Tableaux à plusieurs dimensions, matrices

Un tableau à plusieurs dimensions est considéré en JAVA comme un tableau de tableaux. Par exemple, les matrices sont des tableaux à deux dimensions, plus précisément des tableaux de tableaux, que l'on peut interpréter comme des lignes. Leur déclaration peut se faire par :

```
typ[][] tab;
```

On doit aussi le construire à l'aide de **new**. L'instruction :

```
tab = new typ[N][M];
```

construit un tableau à deux dimensions, qui est un tableau de N lignes à M colonnes. L'instruction `tab.length` renvoie le nombre de lignes, alors que `tab[i].length` renvoie la longueur du tableau `tab[i]`, c'est-à-dire le nombre de colonnes.

On peut aussi, comme pour les tableaux à une dimension, faire une affectation de valeurs en une seule fois :

```
int[2][3] tab = new int[][]{{1,2,3},{4,5,6}};
```

qui déclare et initialise un tableau à 2 lignes et 3 colonnes. On peut écrire de façon équivalente :

```
int[][] tab = new int[][]{{1,2,3},{4,5,6}};
```

ou encore simplement :

```
int[][] tab = {{1,2,3},{4,5,6}};
```

Comme une matrice est un tableau de lignes, on peut fabriquer des matrices bizarres. Par exemple, pour déclarer une matrice dont la première ligne a 5 colonnes, la deuxième ligne 1 colonne et la troisième 2, on écrit :

```
public static void main(String[] args){
    int[][] M = new int[3][];
    M[0] = new int[5];
    M[1] = new int[1];
    M[2] = new int[2];
}
```

Par contre, l'instruction :

```
int[][] N = new int[][3];
```

est incorrecte. On ne peut définir un tableau de colonnes.

On peut continuer à écrire un petit programme qui se sert de cela :

```
public class Mat{
    public static void ecrire(int[] t){
        for(int j = 0; j < t.length; j++)
            System.out.println(t[j]);
    }
    public static void main(String[] args){
        int[][] M = new int[3][];

        M[0] = new int[5];
        M[1] = new int[1];
        M[2] = new int[2];
        for(int i = 0; i < M.length; i++)
            ecrire(M[i]);
    }
}
```

Terminons cette section par un schéma de la mémoire globale sur l'exemple

```
int[][] t = new int[][]{{1,2}, {4,5}, {7,8}};
```

et donné à la figure 3.1.

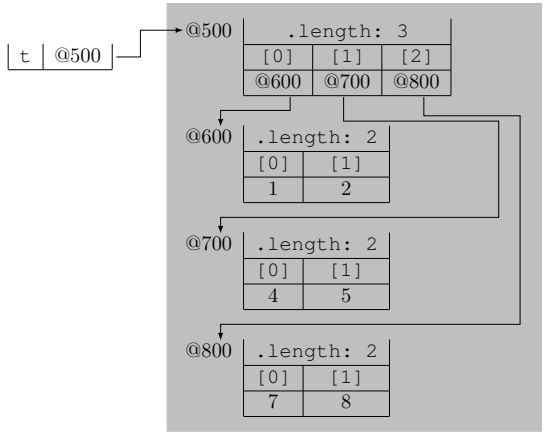


FIGURE 3.1 – Dessin la mémoire pour un tableau bi-dimensionnel.

3.4 Les tableaux comme arguments de fonction

Les valeurs des variables tableaux (les références) peuvent être passées en argument, on peut aussi les renvoyer :

```
public class Tab2{
    public static int[] construire(int n){
        int[] t = new int[n];

        for(int i = 0; i < n; i++)
            t[i] = i;
        return t;
    }

    public static void afficherTableau(int[] t){
        for(int i = 0; i < t.length; i++)
            System.out.println(t[i]);
    }

    public static void afficherTableau2(int[][] t){
        for(int i = 0; i < t.length; i++){
            System.out.print(i+" :");
            for(int j = 0; j < t[i].length; j++)
                System.out.print(" "+t[i][j]);
            System.out.println();
        }
    }

    public static void main(String[] args){
        int[] t = construire(3);

        afficherTableau(t);
        afficherTableau(new int[]{1, 2, 3});
        afficherTableau2(new int[][]{{1, 2, 3}, {4, 5, 6}});
    }
}
```

Insistons : on a créé un tableau dans la fonction `construire`, c'est-à-dire qu'on a demandé un espace mémoire au système. Celui-ci a rendu la référence d'un bloc mémoire qui est alloué globalement, et non localement à la fonction. La fonction `construire` renvoie cette référence, qui peut être utilisée plus loin.

Considérons maintenant le programme suivant :

```
public class Tests{
    public static void f(int[] t){
        t[0] = -10;
```

```
        return;
    }
    public static void main(String[] args){
        int[] t = new int[]{1, 2, 3};
        f(t);
        System.out.println("t[0]="+t[0]);
        return;
    }
}
```

Que s'affiche-t-il ? Pas 1 comme on pourrait le croire, mais -10. En effet, nous voyons là un exemple de *passage par référence* : le tableau `t` n'est pas recopié à l'entrée de la fonction `f`, mais on a donné à la fonction `f` la référence de `t`, c'est-à-dire le moyen de savoir où `t` est gardé en mémoire globale par le programme. On travaille donc sur le tableau `t` lui-même. Cela permet d'éviter des recopies fastidieuses de tableaux, qui sont souvent très gros. La lisibilité des programmes peut s'en ressentir, mais c'est la façon courante de programmer.

3.5 Exemples d'utilisation des tableaux

3.5.1 Algorithmique des tableaux

Nous allons écrire des fonctions de traitement de problèmes simples sur des tableaux contenant des entiers. Les algorithmes de tri que nous verrons à la section 10.2 fournissent d'autres exemples.

Commençons par remplir un tableau avec des entiers aléatoires de $[0, M[$, on écrit :

```
public class Tableaux{

    public final static int M = 128;

    // initialisation
    public static int[] aleatoire(int N){
        int[] t = new int[N];
        for(int i = 0; i < N; i++)
            t[i] = (int)(M * Math.random());
        return t;
    }
}
```

Ici, il faut convertir de force le résultat de `M * Math.random()` en entier de manière explicite, car `Math.random()` renvoie un `double` (entre 0 et 1).

Pour tester facilement les programmes, on écrit aussi une fonction qui affiche les éléments d'un tableau `t`, un entier par ligne, à l'écran :

```
  public static void afficher(int[] t){
      for(int i = 0; i < t.length; i++)
          System.out.println(t[i]);
```



```
      return;
  }
```

Le tableau `t` étant donné, un nombre m est-il élément de `t` ? On écrit pour cela une fonction qui renvoie le plus petit indice i pour lequel `t[i]=m` s'il existe et -1 si aucun indice ne vérifie cette condition :

```
  // renvoie le plus petit i tel que t[i] = m s'il existe
  // et -1 sinon.
  public static int recherche(int[] t, int m){
      for(int i = 0; i < t.length; i++)
          if(t[i] == m)
              return i;
      return -1;
  }
```

Passons maintenant à un problème plus complexe. Le tableau `t` contient des entiers de l'intervalle $[0, M-1]$ qui ne sont éventuellement pas tous distincts. On veut savoir quels entiers sont présents dans le tableau et à combien d'exemplaires. Pour cela, on introduit un tableau auxiliaire `compteur`, de taille M, puis on parcourt `t` et pour chaque valeur `t[i]` on incrémente la valeur `compteur[t[i]]`. De nouveau on utilise une indirection pour remplir le tableau `compteur`.

À la fin du parcours de `t`, il ne reste plus qu'à afficher les valeurs non nulles contenues dans `compteur` :

```
  public static void afficher(int[] compteur){
      for(int i = 0; i < M; i++)
          if(compteur[i] > 0){
              System.out.print(i+" est utilisé ");
              System.out.println(compteur[i]+" fois");
          }
  }

  public static void compter(int[] t){
      int[] compteur = new int[M];
      for(int i = 0; i < M; i++)
          compteur[i] = 0;
      for(int i = 0; i < t.length; i++)
          compteur[t[i]] += 1;
      afficher(compteur);
  }
```

Exercice 3.1 Écrire un programme qui renverse un tableau en place (sans mémoire auxiliaire). Par exemple, si on part du tableau :

```
    int[] t = new int[]{1, 2, 3, 4};
```

on doit trouver `t = {4, 3, 2, 1};` après l'appel du programme.

Exercice 3.2 On suppose que le tableau `t` de taille n ne contient que des 0 et des 1. Écrire un programme qui regroupe les 0 en tête de `t`. Par exemple, si

```
int[] t = new int[]{1, 0, 0, 1, 0, 1};
```

on veut que `t = {0, 0, 0, 1, 1, 1}`. On utilisera une seule passe sur les données, en gérant un indice $0 \leqslant i_0 < n$, ou à chaque instant, `t[0..i0[` ne contient que des 0, et on permutera les cases de `t` au cours de l'algorithme.

3.5.2 Un peu d'algèbre linéaire

Un tableau est la structure de donnée la plus simple qui puisse représenter un vecteur. Un tableau de tableaux représente une matrice de manière similaire. Écrivons un programme qui calcule l'opération de multiplication d'un vecteur par une matrice à gauche. Si v est un vecteur colonne à m lignes et A une matrice $n \times m$, alors $w = Av$ est un vecteur colonne à n lignes. On a :

$$w_i = \sum_{k=0}^{m-1} A_{i,k} v_k$$

pour $0 \leqslant i < n$. On écrit d'abord la multiplication :

```
public static double[] multMatriceVecteur(double[][] A,
                                          double[] v){
    int n = A.length;
    int m = A[0].length;
    double[] w = new double[n];

    // calcul de w = A * v
    for(int i = 0; i < n; i++){
        w[i] = 0;
        for(int k = 0; k < m; k++)
            w[i] += A[i][k] * v[k];
    }
    return w;
}
```

puis le programme principal :

```
public static void main(String[] args){
    int n = 3, m = 4;
    double[][] A = new double[n][m]; // A est n x m
    double[] v = new double[m]; // v est m x 1
    double[] w;

    // initialisation de A
    for(int i = 0; i < n; i++)
        for(int j = 0; j < m; j++)
            A[i][j] = Math.random();
    // initialisation de v
    for(int i = 0; i < m; i++)
        v[i] = Math.random();

    w = multMatriceVecteur(A, v); // (*)

    // affichage
    for(int i = 0; i < n; i++)
        System.out.println("w["+i+"]="+w[i]);
    return;
}
```


Les méthodes données ci-dessous créent la place pour le résultat de leurs calculs. Si on doit effectuer de nombreux calculs, il est préférable de ne pas allouer de mémoire dans les fonctions de base, mais plutôt d'écrire la fonction de multiplication en passant les arguments par effets de bord.

```
// w <- A*v
public static void multMatriceVecteur(double[] w,
                                      double[][] A,
                                      double[] v){
    int n = A.length;
    int m = A[0].length;

    // calcul de w = A * v
    for(int i = 0; i < n; i++){
        w[i] = 0;
        for(int k = 0; k < m; k++)
            w[i] += A[i][k] * v[k];
    }
}
```

Dans le programme principal, on remplacerait la ligne (*) par :

```
    w = new double[n];
    multMatriceVecteur(w, A, v);
```

3.5.3 Le crible d'Ératosthène

On cherche ici à trouver tous les nombres premiers de l'intervalle $[1, N]$. La solution déjà connue des Grecs consiste à écrire tous les nombres de l'intervalle les uns à la suite des autres. Le plus petit nombre premier est 2. On raye alors tous les multiples de 2 plus grands que 2 de l'intervalle, ils ne risquent pas d'être premiers. Le premier nombre qui n'a pas été rayé au-delà du nombre premier courant est lui-même premier, c'est

le suivant à traiter. On raye ainsi les multiples de 3 sauf 3, etc. On s'arrête quand on s'apprête à éliminer les multiples de $p > \sqrt{N}$ (rappelons que tout nombre non premier plus petit que N a un diviseur premier $\leqslant \sqrt{N}$).

Comment modéliser le crible ? On utilise un tableau de booléens `estpremier`, de taille $N+1$, qui représentera l'intervalle $[1, N]$. Il est initialisé à `true` au départ, car aucun nombre n'est rayé. À la fin du calcul, `p` $\geqslant 2$ est premier si et seulement si `estpremier[p] == true`.

Nous coupons le programme en deux morceaux. Le premier réalise le crible, le second extrait les informations du tableau de crible. Le résultat est un tableau d'entiers contenant les nombres premiers.

```
// Retourne le tableau des nombres premiers
// de l'intervalle [2..N]
public static int[] Eratosthene(int N){
    boolean[] estpremier = new boolean[N+1];
    int p, kp, nbp;
    // initialisation
    for(int n = 2; n < N+1; n++)
        estpremier[n] = true;
    // boucle d'élimination
    p = 2;
    while(p*p <= N){
        // élimination des multiples de p
        // on a déjà éliminé les multiples de q < p
        kp = 2*p; // (cf. remarque)
        while(kp <= N){
            estpremier[kp] = false;
            kp += p;
        }
        // recherche du nombre premier suivant
        do{
            p++;
        } while((p*p <= N) && !estpremier[p]); // [cond]
    }
    return extraire(estpremier, N);
}
```

Remarquons que la ligne

```
    kp = 2*p;
```

peut être avantageusement remplacée par

```
    kp = p*p;
```

car tous les multiples de p de la forme up avec $u < p$ ont déjà été rayés du tableau à une étape précédente. La condition `[cond]` peut se simplifier en

```
        } while(!estpremier[p]); // [cond]
```


à condition de prouver qu'il existe toujours un nombre premier entre le dernier nombre premier p utilisé dans la boucle et $\sqrt{N}$, ce qui peut se faire à l'aide d'une version explicite du théorème des nombres premiers, qui dépasse le cadre de ce chapitre. Par contre, on peut simplifier maintenant le programme pour le rendre plus compact :

```
// Retourne le tableau des nombres premiers
// de l'intervalle [2..N]
public static int[] Eratosthene(int N){
    boolean[] estpremier = new boolean[N+1];
    int p, kp, nbp;
    // initialisation
    for(int n = 2; n < N+1; n++)
        estpremier[n] = true;
    // boucle d'élimination
    p = 2;
    while(p*p <= N){
        if(estpremier[p]){
            // élimination des multiples de p
            // on a déjà éliminé les multiples de q < p
            kp = p*p;
            while(kp <= N){
                estpremier[kp] = false;
                kp += p;
            }
        }
        p++;
    }
    return extraire(estpremier, N);
}
```

Il nous reste à écrire la fonction d'extraction des nombres premiers : on parcourt une première fois le tableau `estpremier` pour compter le nombre de nombres qui sont premiers, ce qui nous permet de fabriquer le tableau des nombres premiers avec la bonne taille. Un second parcours nous permet de remplir ce tableau.

```
    public static int[] extraire(boolean[] estpremier, int N){
        int nbp, i;
        int[] tp;
        // comptons tous les nombres premiers <= N
        nbp = 0;
        for(int n = 2; n <= N; n++)
            if(estpremier[n])
                nbp++;
        // mettons les nombres premiers dans un tableau
        tp = new int[nbp];
        i = 0;
        for(int n = 2; n <= N; n++)
            if(estpremier[n])
                tp[i++] = n;
        return tp;
```

```
    }
```

Comment tester ce programme ? On écrit la classe `TestsEratosthene` qui introduit des fonctions de comparaisons de deux tableaux, puis compare une valeur correcte avec une valeur venant du calcul. On remarquera que le test se teste lui-même, à la ligne (1).

```
public class TestsEratosthene{
    public static boolean estEgal(int[] correct, int[] t){
        for(int i = 0; i < t.length; i++)
            if(t[i] != correct[i]){
                System.out.println("Erreur pour l'indice "+i);
                return false;
            }
        return true;
    }

    public static void main(String[] args){
        int[] p10 = new int[]{2, 3, 5, 7};
        System.out.println(estEgal(p10, p10)); // (1)
        System.out.println(estEgal(p10, new int[]{2,2,2,2}));

        int[] tp = Eratosthene.Eratosthene(10);
        System.out.println(estEgal(p10, tp));
    }
}
```

On peut modifier la fonction `extraire` pour compacter l'information. Tous les nombres premiers étant impairs (en excluant 2), on peut se contenter de stocker les demi-différences entre nombres premiers consécutifs. Expérimentalement, ces demi-différences sont plus petites que 256 tant que N est plus petit que 2^{32} (et plus, en fait).

Il existe de nombreuses autres astuces permettant d'accélérer le crible, de façon à en améliorer la complexité théorique ou pratique. Notons pour finir que l'on peut se servir du tableau des nombres premiers pour trouver les petits facteurs de petits entiers. Ce n'est pas la meilleure méthode connue pour trouver des nombres premiers ou factoriser les nombres qui ne le sont pas.

Exercice 3.3 Les nombres pairs sont tous composés (non premiers) à part le nombre 2. Montrer comment modifier les programmes précédents pour accélérer les calculs en sautant les nombres pairs dans le crible.

3.5.4 Jouons à la bataille rangée

On peut également se servir de tableaux pour représenter des objets *a priori* plus compliqués. Nous allons décrire ici une variante simplifiée du célèbre jeu de bataille, que nous appellerons *bataille rangée*. La règle est simple : le donneur distribue 32 cartes (numérotées de 1 à 32) à deux joueurs, sous la forme de deux piles de cartes, faces sur le dessous. À chaque tour, les deux joueurs, appelés Alice et Bob, renvoient la carte du dessus de leur pile. Si la carte d'Alice est plus forte que celle de Bob, elle marque un

point ; si sa carte est plus faible, c'est Bob qui marque un point. Gagne celui des deux joueurs qui a marqué le plus de points à la fin des piles.

Le programme de jeu doit contenir deux phases : dans la première, le programme bat et distribue les cartes entre les deux joueurs. Dans un second temps, le jeu se déroule.

Nous allons stocker les cartes dans un tableau `donne[0..32[` avec la convention que la carte du dessus se trouve en position 31.

Pour la première phase, battre le jeu revient à fabriquer une permutation au hasard des éléments du tableau `donne`. L'algorithme le plus efficace pour cela utilise un générateur aléatoire (la fonction `Math.random()` de JAVA, qui renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1), et fonctionne selon le principe suivant. On commence par tirer un indice j au hasard entre 0 et 31 et on permute `donne[j]` et `donne[31]`. On continue alors avec le reste du tableau, en tirant un indice entre 0 et 30, etc. La fonction JAVA est alors (nous allons ici systématiquement utiliser le passage par référence des tableaux) :

```
    public static void battre(int[] donne){
        int n = donne.length, i, j, tmp;
        for(i = n-1; i > 0; i--){
            // on choisit un entier j de [0..i]
            j = (int)(Math.random() * (i+1));
            // on permute donne[i] et donne[j]
            tmp = donne[i];
            donne[i] = donne[j];
            donne[j] = tmp;
        }
    }
```

La fonction qui crée une donne à partir d'un paquet de `n` cartes est alors :

```
    public static int[] creerJeu(int n){
        int[] jeu = new int[n];
        for(int i = 0; i < n; i++)
            jeu[i] = i+1;
        battre(jeu);
        return jeu;
    }
```

et nous donnons maintenant le programme principal :

```
    public public static void main(String[] args){
        int[] donne;
        donne = creerJeu(32);
        afficher(donne);
        jouer(donne);
    }
```

Nous allons maintenant jouer. Cela se passe en deux temps : dans le premier, le donneur distribue les cartes entre les deux joueurs, Alice et Bob. Dans le second, les

deux joueurs jouent, et on affiche le nom du vainqueur, celui-ci étant déterminé à partir du signe du gain d'Alice (voir plus bas) :

```
public static void jouer(int[] donne){
    int[] jeuA = new int[donne.length/2];
    int[] jeuB = new int[donne.length/2];
    int gainA;
    distribuer(jeuA, jeuB, donne);
    gainA = jouerAB(jeuA, jeuB);
    if(gainA > 0) System.out.println("A gagne");
    else if(gainA < 0) System.out.println("B gagne");
    else System.out.println("A et B sont ex aequo");
}
```

Le tableau `donne[0..31]` est distribué en deux tas, en commençant par Alice, qui va recevoir les cartes de rang pair, et Bob celles de rang impair. Les cartes sont données à partir de l'indice 31 :

```
// donne[] contient les cartes qu'on distribue à partir
// de la fin. On remplit jeuA et jeuB à partir de 0
public static void distribuer(int[] jeuA,
                              int[] jeuB,
                              int[] donne){
    int iA = 0, iB = 0;
    for(int i = donne.length-1; i >= 0; i--)
        if((i % 2) == 0)
            jeuA[iA++] = donne[i];
        else
            jeuB[iB++] = donne[i];
}
```

On s'intéresse au gain d'Alice, obtenu par la différence entre le nombre de cartes gagnées par Alice et celles gagnées par Bob. Il suffit de mettre à jour cette variable au cours du calcul.

```
public static int jouerAB(int[] jeuA, int[] jeuB){
    int gainA = 0;
    for(int i = jeuA.length-1; i >= 0; i--)
        if(jeuA[i] > jeuB[i])
            gainA++;
        else if(jeuA[i] < jeuB[i])
            gainA--;
    return gainA;
}
```

Exercice 3.4 *(Programmation du jeu de bataille)* Dans le jeu de bataille (toujours avec les cartes 1..32), le joueur qui remporte un pli le stocke dans une deuxième pile à côté

de sa pile courante, les cartes étant stockées dans l'ordre d'arrivée (la première arrivée étant mise au bas de la pile), formant une nouvelle pile. Quand il a fini sa première pile, il la remplace par la seconde et continue à jouer. Le jeu s'arrête quand un des deux joueurs n'a plus de cartes. Programmer ce jeu.

3.5.5 Pile d'exécution

On a utilisé ci-dessus un tableau pour stocker une pile de cartes, la dernière arrivée étant utilisée aussitôt. Ce concept de *pile* est fondamental en informatique. L'une des utilisations importantes est de gérer les appels de fonctions dans beaucoup de langages.

Considérons le programme suivant :

```
1  public class Execution{
2      public static int f(int x){
3          int r = x;
4          r = r+1;
5          return r;
6      }
7      public static void main(String[] args){
8          int n = 2;
9          n = f(n);
10         TC.println(n);
11         return;
12     }
13 }
```

Au début de l'exécution du programme, à la ligne 7, l'état de la pile d'exécution est celui de la figure 3.2. On écrit dans la colonne de gauche les noms de variable ou de fonctions (pour aider à la compréhension), et dans celle de droite les valeurs correspondantes, avec la convention suivante : en face d'un nom de fonction, on trouve l'adresse en mémoire où se trouve le début de cette fonction. Ici, la méthode `main` commence à l'adresse 7 ; le tableau d'arguments est **`null`** et la variable `n` contient pour le moment 0.

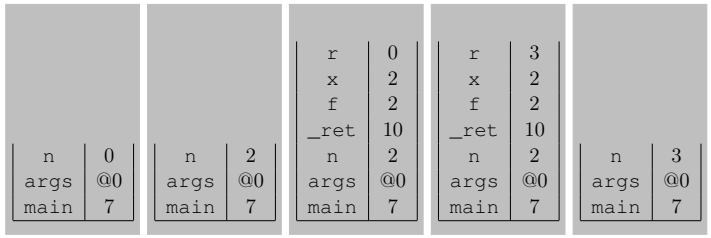
Avant l'appel à `f` à la ligne 9, seule la valeur de `n` a changé. Dès qu'on appelle `f`, la pile se remplit avec de nouveaux arguments : l'adresse où doit revenir l'exécution (ici la ligne 10), l'adresse de la fonction `f`, la valeur du paramètre d'appel `x` de `f`, puis la valeur de la variable `r` locale à `f`. À la ligne 5 avant de quitter `f`, seule la valeur de `r` a changé.

Pour résumer, dans la pile d'exécution, on trouve
- — les arguments d'appels (avec une adresse de retour) ;
- — la mémoire locale allouée à la fonction.

À la fin de l'exécution de la fonction :
- — le morceau de mémoire locale est libéré ;
- — le pointeur d'exécution se place à l'adresse de retour donnée.

On verra au chapitre 6 que l'appel de fonctions récursives ne pose pas de problème supplémentaire.

Pour terminer, nous allons expliquer ce qu'il se passe quand on passe un tableau à une fonction. En gros, il y a deux solutions quand on conçoit le langage. Soit on recopie



Ligne 0 | Ligne 1 | Appel à `f` | Ligne 5 | Ligne 10

FIGURE 3.2 – Pile d'exécution.

tout le tableau dans la pile d'exécution, soit on se contente de passer l'adresse du tableau. La première solution est coûteuse en temps comme en espace (avec des recopies lourdes), la seconde ne l'est pas à condition de savoir utiliser les références comme il faut. C'est cette seconde façon de faire qui est utilisée dans les langages modernes.

Chapitre 4

Classes, objets

Objets inanimés, avez-vous donc une âme ? A. de Lamartine.

Ce chapitre est consacré à l'organisation générale d'une classe en JAVA, car jusqu'ici nous nous sommes plutôt intéressés aux différentes instructions de base du langage.

4.1 Introduction

Nous avons pour le moment utilisé des types primitifs, ou des tableaux constitués d'éléments du même type (primitif). En fonction des problèmes, on peut vouloir agréger des éléments de types différents, en créant ainsi de nouveaux types.

4.1.1 Déclaration et création

On peut créer de nouveaux types en JAVA. Cela se fait par la création d'une *classe*, qui est ainsi la description abstraite d'un ensemble. Par exemple, si l'on veut représenter les points du plan, on écrira :

```
public class Point{
    public int abs, ord;
}
```

Un *objet* de la classe sera une instance de cette classe. Par certains côtés, c'est déjà ce qu'on a vu avec les tableaux :

```
    int[] t;
```

déclare une variable `t` qui sera de type tableau d'entiers. Comme pour les tableaux, on devra allouer de la place pour un objet, par la même syntaxe :

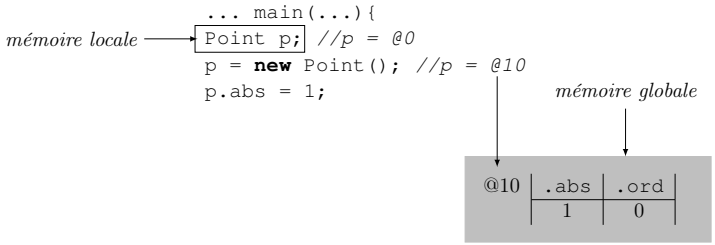
```
    public static void main(String[] args){
        Point p;                // (1)

        p = new Point();        // (2)
        p.abs = 1;
        p.ord = 2;
    }
```


On a déclaré à la ligne (1) une variable `p` de type `Point`. À la ligne (2), on crée une instance de la classe `Point`, un objet ; pour être plus précis, on a fait appel au constructeur implicite de la classe `Point` (nous verrons d'autres constructeurs explicites plus loin). La variable `p` est une référence à cet objet, tout comme pour les tableaux. `abs` et `ord` sont des *champs* d'un objet de la classe ; `p.abs` et `p.ord` se manipulent comme des variables de type entier.

4.1.2 Objet et référence

Insistons sur le fait qu'une variable de type `Point` contient une référence à l'objet créé en mémoire, comme dans le cas des tableaux.

D'un point de vue graphique, on a ainsi (comme pour les tableaux) :



Cela explique que la recopie d'objet doive être considérée avec soin. Le programme suivant :

```
    public static void main(String[] args){
        Point p = new Point(), q;

        p.abs = 1;
        p.ord = 2;
        q = p;
        q.abs = 3;
        q.ord = 4;
        System.out.println(p.abs);
        System.out.println(q.abs);
    }
```

va afficher

```
3
3
```

La variable `q` contient une référence à l'objet déjà référencé par `p`. Pour recopier le contenu de `p`, il faut écrire à la place :

```
    public static void main(String[] args){
        Point p = new Point(), q;
```

```
        p.abs = 1;
        p.ord = 1;
        q = new Point();
        q.abs = p.abs;
        q.ord = q.abs;
        System.out.println(p.abs);
        System.out.println(q.abs);
    }
```

Remarquons que tester `p == q` ne teste en fait que l'égalité des références, pas l'égalité des contenus. Dans l'exemple, les deux références sont différentes, même si les deux contenus sont égaux.

Il est utile de garder à l'esprit qu'un objet est créé une seule fois pendant l'exécution d'un programme. Dans la suite du programme, sa référence peut être passée aux autres variables du même type.

4.1.3 Constructeurs

Par défaut, chaque classe est équipée d'un *constructeur implicite*, comme dans l'exemple donné précédemment. On peut également créer un ou plusieurs constructeurs explicites, pour simplifier l'écriture de la création d'objets. Par exemple, on aurait pu écrire :

```
public class Point{
    public int abs, ord;

    public Point(int a, int o){
        this.abs = a;
        this.ord = o;
    }
    public Point(int a){
        this.abs = a;
        this.ord = 0;
    }
    public static void main(String[] args){
        Point p = new Point(1, 2);
    }
}
```

Le mot clef **this** fait référence à l'objet qui vient d'être créé.

Remarque : quand on déclare un constructeur explicite, on perd automatiquement le constructeur implicite. Dans l'exemple précédent, un appel :

```
    Point p = new Point();
```

provoquera une erreur à la compilation. On peut toutefois redéfinir explicitement un tel constructeur si on le souhaite :


```
    public Point(){
        this.abs = 0;
        this.ord = 0;
    }
```

4.2 Autres composants d'une classe

Une classe est bien plus qu'un simple type. Elle permet également de regrouper les fonctions de base (*méthodes*) opérant sur les objets de la classe, ainsi que diverses variables ou constantes partagées par toutes les méthodes et les objets de la classe.

4.2.1 Méthodes de classe et méthodes d'objet

On n'utilise pratiquement que des méthodes de classe dans ce cours. Une *méthode de classe* n'est rien d'autre que l'expression complète pour méthode, comme nous l'avons utilisé jusqu'à présent. Une telle méthode est associée à la classe dans laquelle elle est définie. D'un point de vue syntaxique, on déclare une telle fonction en la faisant précéder du mot réservé `static`.

On peut ajouter à la classe `Point` des méthodes sur les points et droites du plan (en particulier, en créer), une autre pour manipuler des segments, une troisième pour les polygones etc. Cela donne une structure modulaire, plus agréable à lire, pour les programmes. Par exemple :

```
public class Point{
    ...
    public static void afficher(Point p){
        System.out.print("("+p.x+", "+p.y+")");
    }
}
```

Il existe également des *méthodes d'objet*, qui sont associées à un objet de la classe. L'appel se fait alors par `NomObjet.NomFonction`. Dans la description d'une méthode non statique on fait référence à l'objet qui a servi à l'appel par le nom **this**, comme dans les constructeurs explicites.

Affichons les coordonnées d'un point (voir 4.1.1 pour la définition de la classe `Point`) :

```
    public void afficher(){
        System.out.println(" Point de coordonnées "
                           + this.abs +"  " +  this.ord);
    }
```

qui sera utilisé par exemple comme :

```
    p.afficher();
```

Terminons par une méthode qui renvoie l'opposé d'un point par rapport à l'origine :

```
    public Point oppose(){
        return new Point(- this.abs, - this.ord);
    }
```

4.2.2 Passage par référence

Le même phénomène déjà décrit pour les tableaux à la section 3.4 se produit pour les objets, ce que l'on voit avec l'exemple qui suit :

```
public class Abscisse{
    public int x;

    public static void f(Abscisse a){
        a.x = 2;
        return;
    }

    public static void main(String[] args){
        Abscisse a = new Abscisse();

        a.x = -1;
        f(a);
        System.out.println("a="+a.x);
        return;
    }
}
```

La réponse est `a=2` et non `a=-1`.

4.2.3 Variables de classe

Les variables de classe sont communes à une classe donnée, et se comportent comme les variables globales dans d'autres langages. Considérons le cas (artificiel) où on veut garder en mémoire le nombre de points créés. On va utiliser une variable `nbPoints` pour cela :

```
public class Point{
    public int abs, ord;

    public static int nbPoints = 0;

    public Point(){
        nbPoints++;
    }

    public static void main(String[] args){
        Point P = new Point();
```



```
        System.out.println("Nombre de points créés : "
                           + nbPoints);
    }
}
```

Une *constante* se déclare en rajoutant le mot clef **`final`** :

```
    public final static int promotion = 2018;
```

elle ne pourra pas être modifiée par les méthodes de la classe, ni par aucune autre classe.

4.2.4 Utiliser plusieurs classes

Lorsque l'on utilise une classe dans une autre classe, on doit faire précéder les noms des méthodes de classe du nom de la première classe suivie d'un point.

```
public class Exemple{
    public static void main(String[] args){
        Point p = new Point(0, 0);

        Point.afficher(p);
        return;
    }
}
```

Attention : il est souvent imposé par le compilateur qu'il n'y ait qu'une seule classe **`public`** par fichier. Il nous arrivera cependant dans la suite du poly de présenter plusieurs classes publiques l'une immédiatement à la suite de l'autre.

4.2.5 La méthode spéciale `toString`

En JAVA, la méthode `toString()` d'une classe a une utilisation très particulière. Par exemple, pour `Point`, nous pourrions définir :

```
    public String toString(){
        return "(" + this.abs + ", " + this.ord + ")";
    }
```

Elle permet d'afficher facilement un objet de type `Point`. En effet, si l'on veut afficher le point `p`, il suffit alors d'utiliser l'instruction :

```
    System.out.print(p);
```

et cela affichera le point sous forme d'un couple (x, y).

4.3 Autre exemple de classe

Les classes présentées pour le moment agrégeaient des types identiques. On peut définir la classe des produits présents dans un magasin par :

```
public class Produit{
    public String nom;
    public int nb;
    public double prix;
}
```

On peut alors gérer un stock de produits, et donc faire des tableaux d'objets. On doit d'abord allouer le tableau, puis chaque élément :

```
public class GestionStock{
    public static void main(String[] args){
        Produit[] s;

        s = new Produit[10];     // place pour le tableau
        s[0] = new Produit();    // place pour l'objet
        s[0].nom = "ordinateur portable";
        s[0].nb = 5;
        s[0].prix = 999.99;
    }
}
```

4.4 Public et private

Nous avons déjà rencontré le mot réservé **public** qui permet par exemple à JAVA de lancer un programme dans sa syntaxe immuable :

```
    public static void main(String[] args){...}
```

On doit garder en mémoire que **public** désigne les méthodes, champs, ou constantes qui doivent être visibles de l'extérieur de la classe. C'est le cas de la méthode `afficher` de la classe `Point` décrite ci-dessus. Elles pourront donc être appelées d'une autre classe, ici de la classe `Exemple`.

Quand on ne souhaite pas permettre un appel de ce type, on déclare alors une méthode avec le mot réservé **private**. Cela permet par exemple de protéger certaines variables ou constantes qui ne doivent pas être connues de l'extérieur, ou bien encore de forcer l'accès aux champs d'un objet en passant par des méthodes publiques, et non par les champs eux-mêmes. Par contre, les champs privés sont visibles par toutes les méthodes et objets de la classe. On en verra un exemple avec le cas des `String` à la section 4.5.

4.5 Un exemple de classe prédéfinie : la classe `String`

Une chaîne de caractères est une suite de symboles que l'on peut taper sur un clavier ou lire sur un écran. La déclaration d'une variable susceptible de contenir une chaîne de caractères se fait par

```
String u;
```


Un point important est que l'on ne peut pas modifier une chaîne de caractères, on dit qu'elle est non *mutable*. On peut par contre l'afficher, la recopier, accéder à la valeur d'un des caractères et effectuer un certain nombre d'opérations comme la concaténation, l'obtention d'une sous-chaîne, on peut aussi vérifier l'égalité de deux chaînes de caractères.

La façon la plus simple de créer une chaîne est d'utiliser des constantes comme :

```
String s = "123";
```

On peut également concaténer des chaînes, ce qui est très facile à l'aide de l'opérateur + qui est surchargé :

```
String s = "123" + "x" + "[]";
```

On peut également fabriquer une chaîne à partir de variables :

```
int i = 3;
String s = "La variable i vaut " + i;
```

qui permettra un affichage agréable en cours de programme. Comment comprendre cette syntaxe ? Face à une telle demande, le compilateur va convertir la valeur de la variable `i` sous forme de chaîne de caractères qui sera ensuite concaténée à la chaîne constante. Dans un cas plus général, une expression telle que :

```
MonObjet o;
String s = "Voici mon objet : " + o;
```

donnera le résultat attendu si une méthode d'objet `toString` est disponible pour la classe `MonObjet`. Sinon, l'adresse de `o` en mémoire est affichée (comme pour les tableaux). On trouvera un exemple commenté au chapitre 13.

Voici d'autres exemples :

```
String v = new String(u);
```

recopie la chaîne `u` dans la chaîne `v`.

```
int l = u.length();
```

donne la longueur de la chaîne `u`. Noter que `length` est une fonction sur les chaînes de caractères, tandis que sur les tableaux, c'est une valeur ; ceci explique la différence d'écriture : les parenthèses pour la fonction sur les chaînes de caractères sont absentes dans le cas des tableaux.

```
char x = u.charAt(i);
```

donne à `x` la valeur du i-ème caractère de la chaîne `u`, noter que le premier caractère s'obtient par `u.charAt(0)`.

On peut simuler (artificiellement) le comportement de la classe `String` de la façon suivante, ce qui donne un exemple d'utilisation de **private**.

```
public class Chaine{
    private char[] s;

    public Chaine(char[] t){
        this.s = new char[t.length];
        for(int i = 0; i < t.length; i++)
            this.s[i] = t[i];
    }

    // s.length()
    public int longueur(){
        return s.length;
    }

    // s.charAt(i)
    public char caractere(int i){
        return s[i];
    }
}

public class TestsChaine{
    public static void main(String[] args){
        char[] t = {'a', 'b', 'c'};
        Chaine str = new Chaine(t);

        System.out.println(str.caractere(0)); // correct
        System.out.println(str.s[0]); // erreur
    }
}
```

Ainsi, on sait accéder au i-ième caractère en lecture, mais il n'y a aucun moyen d'y accéder en écriture. On a empêché les classes extérieures à `Chaine` d'accéder à la représentation interne de l'objet. De cette façon, on peut changer celle-ci en fonction des besoins.

```
u.compareTo(v);
```

entre deux `String` a pour résultat un nombre entier négatif si `u` précède `v` dans l'ordre lexicographique (celui du dictionnaire), 0 si les chaînes `u` et `v` sont égales, et un nombre positif si `v` précède `u`.

```
w = u.concat(v); // équivalent de w = u + v;
```

construit une nouvelle chaîne obtenue par concaténation de `u` suivie de `v`. Noter que `v.concat(u)` est une chaîne différente de la précédente.

4.6 Pour aller plus loin

La programmation objet est un paradigme de programmation dans lequel les programmes sont dirigés par les données. Au niveau de programmation du cours, cette façon de programmer apparaît essentiellement comme une différence syntaxique. On verra à la section 14.2 une approche de la généricité qui utilise ces propriétés objets. La notion d'héritage est plus complexe et renvoyée à un cours plus avancé de programmation.

Chapitre 5

Comment écrire un programme

Ce qui se conçoit bien se programme clairement, et les lignes pour l'écrire arrivent aisément.

Ce chapitre a pour but de dégager de grandes constantes dans l'écriture de petits ou de gros programmes, en commençant par les petits. Il vaut mieux prendre de bonnes habitudes tout de suite. Quels sont les buts à atteindre ? On cherche toujours la concision, la modularité interne et externe, la réutilisation éventuelle.

Ajoutons qu'un programme évolue dans le temps, qu'il n'est pas figé, et on doit donc prévoir qu'il va évoluer, que ce soit sous la main du programmeur originel, ou de ses successeurs qui vont devoir en modifier quelques lignes.

5.1 Pourquoi du génie logiciel ?

Le code source de Windows XP représente 50 millions de lignes de code, Linux environ 30 millions. Comment peut-on gérer autant de lignes de code, et autant de programmeurs supposés ?

Dans un article des *Communications of the ACM* (septembre 2006), des données rassemblées par le *Quantitative Software Management* sont présentées. L'étude a porté sur 564 projets récents, réalisés dans 31 entreprises dans 16 branches dans 16 pays. Il en ressort qu'un projet moyen requiert moins de 7 personnes pour une durée inférieure à 8 mois, pour un coût moyen inférieur à 58 homme-mois, avec comme langage encore majoritaire COBOL, en passe d'être détrôné par JAVA, représentant moins de $9,200$ lignes de code.

Depuis l'avènement de l'informatique, de nombreux chercheurs et praticiens s'interrogent sur les aspects d'organisation des gros programmes en grosses équipes. Une des bibles de référence est toujours [Bro95].

5.2 Principes généraux

5.2.1 La chaîne de production logicielle

Le schéma de la figure 5.1 permet de comprendre les différentes phases de la création d'un logiciel conséquent.

Comme on peut le constater, *un logiciel ne se résume pas à la programmation.* Malgré tout, la phase de programmation reste l'endroit où on a le plus de prise sur le produit.

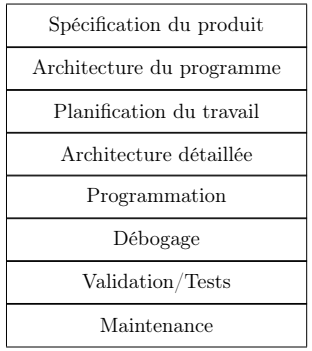


FIGURE 5.1 – La chaîne de production logicielle.

La spécification et la documentation

La phase de spécification est importante et conditionne le reste. Les problèmes que l'on doit se poser sont généralement (la liste n'est pas exhaustive) :

- Sur quelle machine (avec quel système d'exploitation) le programme doit-il tourner ? Y a-t-il des interactions avec d'autres programmes existant ?
- Que doit faire le programme ? Qui doit l'utiliser ?
- Quelles sont les opérations spécifiques ?
- Quel doit être le temps de réponse ?
- À quelles erreurs le programme doit-il pouvoir résister ?

La première question est assez bien réglée par JAVA, qui est *portable*, c'est-à-dire tourne sur toutes les machines.

La documentation d'un programme (petit ou gros) est fondamentale. Il faut commencer à l'écrire dès le début, avec mise à jour à chaque fois qu'on écrit une fonction.

L'architecture du programme

Une architecture excellente peut être gâtée par une programmation médiocre ; une excellente programmation ne peut pas rattraper complètement une architecture désastreuse.

La *division en sous-systèmes* permet de se mettre d'accord sur l'interface (ici pris au sens d'entrée des données, formatage des sorties) en liaison avec le moteur du programmes (fabriquant les données de sortie). Cette phase recense également les bases de données, les problèmes de communications, l'aspect graphique, etc.

C'est dans cette phase que la modularité s'exprime le mieux. On cherche toujours la simplicité, mais aussi une forme de protection contre les changements (surtout dans l'interface). Cela permet de réaliser une bonne division du travail et de minimiser les interactions.

Le chapitre 15 reviendra sur les structures de données et la réalisation de modules réutilisables.

5.2.2 Architecture détaillée

Étudiez l'architecture soigneusement et vérifiez qu'elle marche avant de continuer. La méthode généralement employée est celle de l'analyse descendante et du raffinage. Cette phase doit rester la plus abstraite possible, en particulier elle doit être la plus indépendante possible du langage de programmation choisi. De même, les détails de programmation sont renvoyés au plus tard possible.

Prenons l'exemple simple du comptage du nombre de mots dans un fichier. Les actions nécessaires sont :

- ouvrir le fichier ;
- aller au début du fichier ;
- tant que la fin du fichier n'est pas atteinte
  - lire un mot ;
  - incrémenter le nombre de mots ;
- fermer le fichier ;
- afficher le nombre de mots.

On peut encore raffiner : comment lire un mot, etc.

Rajoutons quelques règles :

- ne pas descendre de niveau tant que vous n'êtes pas convaincu(e)s que le niveau actuel est satisfaisant ;
- si un problème apparaît, c'est sans doute qu'il trouve sa source au niveau immédiatement supérieur. Remonter et régler le problème.

5.2.3 Aspects organisationnels

Planification du travail

Dans son bestseller, *The mythical Man-Month*, F. P. Brooks (qui a conçu le système d'exploitation de l'IBM 360, au début des années 1970), donne quelques règles empiriques pour un "bon" projet.

La répartition du temps devrait être celle-ci :

- 1/3 de spécification ;
- 1/6 de programmation ;
- 1/4 de test (alpha) ;
- 1/4 d'intégration et test (beta).

Il faut également garder en tête la fameuse courbe de la figure 5.2, qui décrit l'état d'avancement vers le but final.

Des outils

Au fil du temps, des outils de programmation confortables et efficaces ont vu le jour, ce sont des *Integrated Development Environments* (IDE), comme ECLIPSE ou NETBEANS. Ces outils permettent de simplifier le travail sur un logiciel, en intégrant éditeur (intuitif, avec aide en ligne notamment), compilateur, tests et documentation automatiques. Cela permet entre autres de respecter les bonnes habitudes de programmation sans effort, de s'intégrer à des produits plus complexes. Leur utilisation est recommandée dans un projet moyen ou gros, et même dans les petits, ils aident à la compréhension et à l'initiation du langage (documentation en ligne, etc.). Ces IDE sont souvent disponibles sur toutes les machines et tous les systèmes.

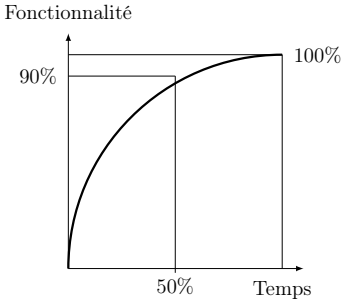


FIGURE 5.2 – Fonctionnalité en fonction du temps.

Outre les IDE, il est relativement facile d'utiliser des outils de travail collaboratif, qui permettent de décentraliser la programmation et d'assurer les copies de sauvegardes. L'un des plus connus est GIT (avec ses extensions gitlab ou github). Notons qu'ils sont également souvent integrés dans les IDE, ce qui facilite encore plus la vie du programmeur.

Profitons-en pour insister sur le fait que ces outils n'ont pas que des finalités informatiques pures et dures. Ce polycopié est par exemple mis dans GIT, ce qui facilite la synchronisation, où que l'auteur se trouve, et même si celui-ci n'a à se coordonner qu'avec lui-même. . . Comme le dit mon collègue D. de Rauglaudre, *un gestionnaire de version est utile dÃÍs que le nombre de programmeurs est supÃérieur ou Ãégal Ãă 1.*

Programmer

La programmation est d'autant plus simple qu'elle découle logiquement de l'architecture détaillée. S'étant mis d'accord sur un certain nombre de tâches, le programme principal est facile à écrire : il se *contente* d'appeler les différentes actions prévues. On peut donc écrire cette fonction en appelant des fonctions qui ne font rien pour le moment. On parle de programmation par stubs (ou *bouchons*), voir figure 5.3. À tout instant, une maquette du programme tourne, et il ne *reste plus* qu'à programmer les bouchons les uns après les autres. Certains IDE permettent de facilement programmer par bouchons, en écrivant directement les prototypes des fonctions, libérant ainsi le programmeur de tâches fastidieuses.

```
public class MaClasse{
    private static int a(int i){
        return 1;
    }
    private static void b(int n){
    }
    private static void c(int k){
    }
```

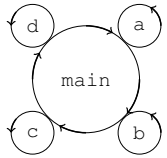


FIGURE 5.3 – Programmation par bouchons.

```
    private static void d(){
    }
    public static void main(String[] args){
        int n = a(1);
        b(n);
        c(n-1);
        d(); // démo
    }
}
```

Cela illustre également un principe fondamental : le test et le débug doivent accompagner l'écriture du programme à chaque instant. Les bugs doivent être corrigés le plus vite possible, car ils peuvent révéler très tôt des problèmes de conception irratrappables par la suite. Remarquons qu'il n'est pas absurde de déclarer toutes ses méthodes **private**, puis de les rendre publiques si le besoin s'en fait sentir.

Règle d'or : il est absurde d'écrire 1000 lignes de code et de les déboguer d'un seul coup.

Déboguer

La programmation fait intervenir trois acteurs : le programme, le programmeur et le bogue.

Déboguer est un art qui demande patience, ingéniosité, expérience, un temps non borné et... du sommeil !

Il est bon de se répéter les lois du débogage dès que tout va mal :

— tout logiciel complexe contient des bogues ;
— le bogue est probablement causé par la dernière chose que vous venez de modifier ;
— si le bogue n'est pas là où vous pensez, c'est qu'il est ailleurs ;
— un bogue algorithmique est beaucoup plus difficile à trouver qu'un bogue de programmation pure.
— on ne débogue pas un programme qui marche !

Au-delà de ces boutades, déboguer relève quand même d'une démarche scientifique : il faut isoler le bogue et être capable de le reproduire. Déboguer est donc très difficile dans les programmes non déterministes (attention aux générateurs aléatoires – mieux vaut les débrancher au départ ; parallélisme, calculs distribués, etc.).

Une façon classique de procéder est d'afficher ou de faire des tests dans le programme, tests qui ne seront activés que dans certains cas, par exemple si une variable de classe `debug` est mise à **`true`**. Des tests de condition (assertions) à l'intérieur des programmes peuvent être utilisés avec profit.

Il existe aussi des outils qui permettent de détecter certains bugs (profileurs, etc.). Notons encore une fois que les IDE contiennent un débogueur intégré, qui permet d'exécuter pas à pas un programme pour localiser les problèmes.

Valider et tester

D'après G. J. Myers [Myc04] : *tester, c'est exécuter le programme dans l'intention d'y trouver des anomalies ou des défauts.*

Le test d'un programme est une activité prenante, et nécessaire, du moins quand on veut réaliser un programme correct, et non pas un produit à vendre au client, à qui on fera payer les corrections et les mises à jour.

Règle d'or : il faut penser à écrire son programme de façon qu'il soit facile à tester.

On sera amené à écrire des programmes fabriquant des jeux de test automatiquement (en JAVA ou langage de script). On doit écrire des tests *avant d'écrire le programme principal*, ce qui facilitera l'écriture de celui-ci, et permettra de contrôler et valider la spécification du programme. Écrire un programme de test permet de le réutiliser à chaque modification du programme principal.

Les tests de fonctionnalité du programme sont impératifs, font partie du projet et sont de la responsabilité immédiate du programmeur. Plus généralement, on parle d'*alpha test* pour désigner les tests faits par l'équipe de développement ; le code est alors gelé, seuls les bogues corrigés. En phase de *beta test*, les tests sont réalisés par des testeurs sélectionnés et extérieurs à l'équipe de développement.

Écrire des tests n'est pas toujours facile. Ils doivent couvrir tous les cas normaux ou anormaux (boîte de verre, boîte noire, etc.). Souvent, tester toutes les branches d'un programme est tout simplement impossible.

On procède également à des tests de non régression, pour contrer la célèbre maxime : *la modification d'un logiciel : un pas en avant, deux pas en arrière.* Ce sont des tests que l'on pratique dès la réussite de la compilation, pour vérifier que des tests (rapides) passent encore. Ils contiennent souvent les instances ayant conduit à des bugs dans le passé. Les tests lourds sont souvent regroupés à un autre moment, par exemple la nuit (ce sont les fameux *night-build*).

Les *tests de validation* permettent de vérifier que l'on a bien fait le logiciel et on valide que l'on a fait le bon logiciel. Ce sont ceux que l'on passe en dernier quand tout le reste est près.

Le test structurel statique (boîte de verre) Il s'agit là d'analyser le code source sans faire tourner le programme. Parmi les questions posées, on trouve :

— **Revues de code :** individuelles ou en groupe ; permet de s'assurer du respect de certains standards de codage.
  — y a-t-il suffisamment de commentaires ?
  — les identifieurs ont-ils des noms pertinents ?
  — le code est-il structuré ?
  — y a-t-il trop de littéraux (variables) ?

  - la taille des fonctions est-elle acceptable ?
  - la forme des décisions est-elle assez simple ?
- **Jeux de tests :** pour toutes les branches du programme (si possible).
- **Preuve formelle :** il s'agit là d'un domaine très vaste, dont certains éléments sont présentés dans les cours qui suivent (notamment analyse statique, preuve de programme).

Heureusement, des outils existent pour faire tout cela, et représentent des sujets de recherche très actifs en France.

Le test fonctionnel (boîte noire) On s'attache ici au comportement fonctionnel d'un programme, sans regarder le contenu du programme. On pratique ainsi souvent des tests aléatoires, pratiques et faciles à programmer, mais qui ne trouvent pas souvent les bogues durs.

Bien sûr, dans certains cas, on peut tester le comportement du programme sur toutes les données possibles. Pour de plus gros programmes, on pratique souvent l'analyse partitionnelle, qui revient à établir des classes d'équivalence de comportement pour les tests et comparer sur une donnée représentative de chaque classe que le comportement est bien celui attendu, incluant le test aux limites.

Donnons quelques exemples :

- Si la donnée $x \in [a, b]$:
  - une classe de valeurs pour $x < a$ (resp. $x > b$) ;
  - n valeurs valides, dont a, b.
- Si x est un ensemble avec $|x| \leqslant X$:
  - cas invalides : $x = \emptyset$, $|x| > X$;
  - n valeurs valides.
- Si $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ (avec r petit) :
  - une classe valide pour chaque x_i ;
  - des classes invalides, comprenant une classe correcte sauf pour un des x_i, pour tous les i.
- Si x est une obligation ou contrainte (forme, syntaxe, sens) : une classe contrainte respectée, une non respectée.

Illustrons ceci par la vérification d'une fonction qui calcule $F(x) = \sqrt{1/x}$. Les classes utilisées pourront être :

- réels négatifs ;
- $x = 0$;
- réels strictement positifs.

Analyser les performances (benchmarks) Mesurer la vitesse de son programme est également une bonne idée. Même si tous les programmes du monde ne peuvent se terminer instantément, essayer de comprendre où on passe son temps est primordial, et un programme rapide est plus vendeur.

On peut écrire un programme de test qui affiche les paramètres pertinents. On peut tester 2 fonctions et produire deux courbes de temps, qu'il reste à afficher et commenter (`xgraphic` ou `gnuplot` en Unix).

Si l'algorithme théorique est en $O(n^2)$, on teste avec n, $2n$, $3n$ et on regarde si le temps varie par un facteur 4, 9. Si le temps est inférieur, c'est qu'il y a une erreur ; s'il est supérieur, c'est qu'on passe du temps à faire autre chose et il faut comprendre

pourquoi. Si le comportement dépend trop de la valeur initiale de n, il y a matière à problème.

Il ne reste plus qu'à commenter, déduire, etc. C'est le côté expérimental de l'informatique.

5.2.4 En guise de conclusion provisoire...

Un programme ressemble à un pont :

- Plus le projet est grand, plus il faut soigner l'architecture et le planning. Les problèmes humains ne peuvent être négligés.
- Découvrir les erreurs très vite est essentiel (ou *la découverte tardive est catastrophique*).
- Les erreurs peuvent être désastreuses (Ariane 5 – 1 milliard de dollars).
- Utiliser des préfabriqués permet de gagner du temps.

Un programme n'est pas un pont :

- Le logiciel est purement abstrait ; il est *invisible*, car il n'est vu que par son action sur un matériel physique.
- Le logiciel est écrit pour être changé, amélioré.
- Le logiciel est en partie réutilisable.
- Le logiciel peut être testé à tout moment de sa création et de sa vie.

5.3 Un exemple détaillé

5.3.1 Le problème

On cherche à calculer le jour de la semaine correspondant à une date donnée dans le calendrier grÃĪgorien, donc en gros depuis dÃĪbut 1583 (en fait depuis le 15 octobre 1582).

Pour écrire un programme de résolution d'un problème, il faut établir une sorte de cahier des charges, qu'on appelle *spécification du programme*. Plus la spécification sera précise, plus le programme final sera facile à écrire et conforme aux attentes. Ici, on entre la date en chiffres sous la forme agréable `jj mm aaaa` et on veut en réponse le nom du jour écrit en toutes lettres.

Avons-nous tout dit ? Non. En particulier, comment les données sont-elles fournies au programme ? Par exemple, le programme doit prendre en entrée au terminal trois entiers j, m, a séparés par des espaces, va calculer J et afficher le résultat sous une forme agréable compréhensible par l'humain qui regarde. Que doit faire le programme en cas d'erreur sur les données en entrée ? Nous indiquons une erreur à l'utilisateur, mais nous ne voulons pas que le programme "plante". Finalement, quel format voulons-nous pour la réponse ? Est-ce que nous voulons que la réponse soit nécessairement en français, ou bien pouvons-nous choisir la langue de la réponse ? Nous allons commencer avec le français, et afficher

```
Le j/m/a est un xxx.
```

Nous allons aussi imaginer que nous pourrons faire évoluer le programme pour donner la réponse dans d'autres langues (cf. section 14.5).

5.3.2 Architecture du programme

Quelle architecture pour ce programme ? Nous devons garder en tête que le programme doit pouvoir être testé dans toutes ses parties. Il doit également avoir une interface conviviale, à la fois pour entrer les données, mais également pour afficher le résultat du calcul. Si l'on veut un programme le plus générique possible, il faut que chacune de ses parties soit la plus indépendante possible des autres. Une analyse descendante possible est la suivante :

— l'utilisateur entre les données ;
— le programme vérifie la validité des données d'entrée et avertit l'utilisateur si tel n'est pas le cas ;
— le programme calcule le jour de la semaine correspondant aux paramètres ;
— le programme affiche ce jour de façon conviviale.

Ce découpage est simple, et il laisse pour plus tard le modèle d'entrée des données et le modèle de sortie. Ceux-ci pourront être changés sans que le cœur du calcul n'ait besoin d'être modifié, c'est l'intérêt de la modularité. De même, nous pourrions remplacer la primitive de calcul par une autre basée sur un algorithme différent, sans avoir à changer les autres morceaux.

Très généralement, les entrées seront des chaînes de caractères, qu'il faudra vérifier. Cette vérification prend deux étapes : dispose-t-on de trois entiers ? Si oui, représentent-ils une date valide ? Ces derniers calculs sont plus faciles à faire sur des entiers. Ainsi, on peut rafiner l'architecture :

— l'utilisateur entre les données sous forme de trois chaînes de caractères ;
— le programme vérifie que les trois chaînes de caractères représentent des entiers ;
— si c'est le cas, on récupère les trois entiers (trois **int** suffiront) et on vérifie qu'ils correspondent bien à une date ;
— le programme calcule le jour de la semaine correspondant aux paramètres ;
— le programme affiche ce jour de façon conviviale.

5.3.3 Programmation

Appliquons le principe de la programmation par stubs. Nous devons progresser incrémentalement, avec à chaque fois des progrès mesurables dans l'utilisation du programme. Le premier squelette qu'on peut écrire et qui permet de démarrer peut être le suivant :

```
public class Jour{

    private
      static boolean donneesCorrectes(int j, int m, int a){
        return true; // stub
    }

    public static String jourDeLaSemaine(int j, int m, int a){
        return "dimanche"; // stub
    }

    public static
      String calculerJour(String sj, String sm, String sa){
```



```
        int j, m, a;

        j = Integer.parseInt(sj);
        m = Integer.parseInt(sm);
        a = Integer.parseInt(sa);
        if(donneesCorrectes(j, m, a))
            return jourDeLaSemaine(j, m, a);
        else
            return null;
    }

    public static void afficherJour(String sj, String sm,
                                    String sa, String sJ){
        System.out.print("Le "+sj+"/"+sm+"/"+sa);
        System.out.println(" est un "+sJ+".");
    }

    public static void main(String[] args){
        String sJ, sj, sm, sa;

        sj = "11";
        sm = "3";
        sa = "2019";
        sJ = calculerJour(sj, sm, sa);
        if(sJ != null)
            afficherJour(sj, sm, sa, sJ);
        else
            System.out.println("Données incorrectes");
    }
}
```

Ce programme ne fait pas grand chose, mais il faut bien commencer par le commencement. Il compile, il s'exécute, et affiche ce qu'on veut pour au moins un exemple connu. Nous avons également décidé qu'en cas de problème, la fonction `calculerJour` renvoie **null**. Noter la convention adoptée pour différencier (dans la tête du programmeur) l'entier `j` et la chaîne `sj`. D'autre part, nous avons converti les chaînes de caractères en entiers à l'aide de la fonction `Integer.parseInt` (nous y reviendrons plus loin).

Armés de ce squelette, nous pouvons commencer à écrire un programme de test, que l'on fera évoluer en même temps que le programme :

```
public class TestsJour{

    private static boolean testerJour(String t){
        String resultat, sJ;
        String[] tab;

        tab = t.split(" ");
        resultat = tab[3];
        sJ = Jour.calculerJour(tab[0], tab[1], tab[2]);
```

```
        if(sJ == null)
            return resultat.equals("erreur");
        else
            return sJ.equals(resultat);
    }

    public static void recette(){
        String[] tests = {"10 3 2019 dimanche",
                          "1 1 1 erreur"};

        for(int i = 0; i < tests.length; i++){
            boolean ok = testerJour(tests[i]);

            System.out.print("Test "+i+" : ");
            System.out.println(ok);
        }
    }

    public static void main(String[] args){
        recette();
    }
}
```

Le programme principal de cette fonction utilise un tableau de chaînes qui contiennent une entrée et la sortie attendue. La fonction `testerJour` appelle la fonction idoine de la classe `Jour` et compare le résultat obtenu à celui qu'elle attend et affiche le résultat du test de comparaison. Une fois cela fait, il sera facile de rajouter des chaînes de test au fur et à mesure de l'écriture du programme. Noter l'utilisation de l'instruction bien pratique :

```
tab = t.split(" ");
```

qui décompose la chaîne `t` en chaînes de caractères séparées par un blanc et renvoie un tableau formé de ces chaînes. Nous avons également anticipé sur un résultat de calcul qui donnerait **`null`**.

Le cœur du programme est le calcul du jour de la semaine basé sur le théorème 1 donné à la fin du chapitre. Seul nous intéresse ici la spécification de cette fonction. Il n'utilise que des données numériques et renvoie une donnée numérique. La fonction correspondante est facile à écrire :

```
  // ENTRÉE: 1 <= j <= 31, 1 <= m <= 12, 1584 < a
  // SORTIE: entier J tel que 0 <= J <= 6, avec 0 pour
  //         dimanche, 1 pour lundi, etc.
  // ACTION: J est le jour de la semaine correspondant à
  //         la date donnée sous la forme j/m/a
  public static int jourZeller(int j, int m, int a){
      int mz, az, e, s, J;

      // calcul des mois/années Zeller
      mz = m-2;
```



```
      az = a;
      if(mz <= 0){
          mz += 12;
          az--;
      }
      // az = 100*s+e, 0 <= e < 100
      s = az / 100;
      e = az % 100;
      // la formule du révérend Zeller
      J = j + (int)Math.floor(2.6*mz-0.2);
      J += e + (e/4) + (s/4) - 2*s;
      // attention aux nombres négatifs
      if(J >= 0)
          J %= 7;
      else{
          J = (-J) % 7;
          if(J > 0)
              J = 7-J;
      }
      return J;
  }
```

Les commentaires indiquent des propriétés supposées satisfaites en entrée et en sortie. Cette fonction suffit-elle à nos besoins ? Il paraît logique d'introduire une fonction un peu générale qui va cacher l'utilisation de la méthode de Zeller, qui ne parle pas nécessairement au lecteur. Par exemple :

```
  public
    final static String[] JOUR = {"dimanche", "lundi", "mardi",
                                  "mercredi", "jeudi",
                                  "vendredi", "samedi"};

  public static String jourDeLaSemaine(int j, int m, int a){
      int jz = jourZeller(j, m, a);

      return JOUR[jz];
  }
```

Ici, nous avons fait le choix de définir des constantes globales (champs statiques) de la classe, que l'on peut exporter et réutiliser dans d'autres contextes. Nous aurions aussi pu garder la correspondance numérique/texte des jours de la semaine à l'intérieur de la fonction `jourDeLaSemaine`. Nous pouvons en parallèle ajouter d'autres tests simples dans `TestsJour.java` :

```
        String[] tests = {"10 3 2019 dimanche",
                          "1 1 1 erreur",
                          "19 3 2015 jeudi",
                          "10 5 2015 dimanche"
        };
```

Il nous faut maintenant remplir les fonctions qui ne faisaient rien, parce que par exemple nous n'avions pas besoin de contrôler nos entrées. Dans le monde réel, où un utilisateur n'est pas nécessairement le programmeur lui-même, il faut prévoir beaucoup de cas d'erreurs, ne serait-ce que pour ne pas perturber l'ordinateur (ou le système).

Ainsi, que doit tester la fonction `donneesCorrectes` ? Que les valeurs de `j`, `m`, et `a` sont correctes. Pour le mois et l'année, c'est facile, mais pour le jour, c'est plus compliqué car on doit faire intervenir le fait que l'année peut être bissextile. On va également utiliser un tableau pour stocker le nombre de jours de chaque mois, ainsi qu'une fonction qui renvoie le nombre de jours dans un mois. Cela nous donne :

```
public
  final static int[] JOURS_DANS_MOIS = {31, 28, 31, 30, 31,
                                        30, 31, 31, 30, 31,
                                        30, 31};
public static boolean estBissextile(int a){
    if((a % 4) != 0)
        return false;
    if((a % 100) != 0)
        return true;
    return ((a % 400) == 0);
}
public static int nbJoursDansMois(int m, int a){
    if((m != 2) || !estBissextile(a))
        return JOURS_DANS_MOIS[m-1];
    else
        return 29;
}
private
  static boolean donneesCorrectes(int j, int m, int a){
    if(a <= 1584)
        return false;
    if((m < 1) || (m > 12))
        return false;
    if((j < 1) || (j > nbJoursDansMois(m, a)))
        return false;
    return true;
}
```

À ce point, nous devons tester les nouvelles fonctions ajoutées. Nous allons donner les fonctions de test pour l'année bissextile, laissant les autres en exercices. Ici, quatre cas sont suffisants pour couvrir tous les branchements du code. La fonction d'appel du test s'écrit simplement :

```
private static void tester_estBissextile(){
    String[] tests = {"1600 true", "1604 true",
                      "1700 false", "1911 false"};

    System.out.println("Tests de Bissextile");
    for(int i = 0; i < tests.length; i++){
        boolean ok = tester_estBissextile(tests[i]);
```



```
        System.out.print("Test "+i+" : ");
        System.out.println(ok);
    }
}
```

La fonction de test elle-même récupère les entrées, appelle la fonction testée et renvoie un booléen qui exprime que le test est réussi ou pas :

```
private static boolean tester_estBissextile(String t){
    String[] tab = t.split(" ");
    int a = Integer.parseInt(tab[0]);
    boolean res = tab[1].equals("true");
    boolean estb = Jour.estBissextile(a);

    return estb == res;
}
```

Une bonne habitude à prendre est de choisir les noms des fonctions de test de façon canonique en fonction du nom de la fonction testée.

Nous allons maintenant décrire comment on peut mettre à jour notre programme de test, simplement en modifiant légèrement le tableau de test :

```
    String[] tests = {"10 3 2019 dimanche",
                      "1 1 1 erreur",
                      "19 3 2015 jeudi",
                      "10 5 2015 dimanche",
                      "32 1 1 erreur",
                      "1 32 1 erreur",
                      "1 1 32 erreur",
                      "-1 1 1 erreur",
                      "28 2 2011 lundi",
                      "29 2 2011 erreur",
                      "29 2 2000 mardi",
                      "29 2 2100 erreur",
                      "29 2 2008 vendredi",
                      "1 1 1500 erreur"
    };
```

Nous avons essayé d'être assez exhaustifs dans le test des cas d'erreurs. Nous avons décidé qu'il n'y avait qu'un seul type d'erreur. Quel que soit le problème dans les données, nous savons seulement qu'il y a eu une erreur, mais ça ne suffit sans doute pas à l'utilisateur. Il est conseillé en général de renvoyer le maximum d'information sur l'erreur rencontrée, ce qui peut permettre au programme de corriger tout seul, ou bien de renseigner suffisament l'utilisateur sur le problème.

Il existe au moins deux façons de signaler des erreurs : dans notre cas, modifier `donneesCorrectes` pour qu'elle renvoie une chaîne de caractères suffit et nous laissons cela comme exercice. L'autre, plus générique, consiste à *lever* une exception (voir plus loin).

Cette solution suffit-elle ? Et que se passe-t-il quand l'utilisateur entre des données qui ne sont pas des nombres ? Ou pas assez de données ? Ce dernier cas est facile à traiter par modification de la fonction principale, qui devient plus réaliste :

```
public static void main(String[] args){
    String s, sj, sm, sa;

    if(args.length < 3){
        System.out.println("Pas assez de données");
        return;
    }
    sj = args[0];
    sm = args[1];
    sa = args[2];
    s = calculerJour(sj, sm, sa);
    if(s != null)
        afficherJour(sj, sm, sa, s);
    else
        System.out.println("Données incorrectes");
    return;
}
```

Le premier problème est résolu de manière différente. Nous avons essentiellement deux choix : ou bien nous vérifions que chaque chaîne d'entrée ne contient que des chiffres, ou bien nous laissons JAVA essayer de lire des entiers et nous renvoyer une erreur si tel n'est pas le cas. Par exemple, l'appel

```
unix% java Jour a b c
```

va provoquer

```
Exception in thread "main" java.lang.NumberFormatException: For input string: "a"
at java.lang.NumberFormatException.forInputString(NumberFormatException.java:48)
at java.lang.Integer.parseInt(Integer.java:447)
at java.lang.Integer.parseInt(Integer.java:497)
at Jour.calculerJour(Jour.java:73)
at Jour.main(Jour.java:97)
```

Comment interprète-t-on cela ? La fonction `Integer.parseInt` a *lancé une exception* car la chaîne de caractères en entrée n'a pu être interprétée par JAVA comme un nombre entier. Le programme appelant n'a pu que renvoyer l'exception au niveau au-dessus et la machine virtuelle de JAVA a alors stoppé le programme en redonnant la main au système. Ce que nous voyons affiché est la pile d'exécution.

Un programme utilisateur ne saurait échouer ainsi (imaginer que ça se passe sur un satellite inaccessible... ou sur votre téléphone). JAVA offre la possibilité de *rattraper cette erreur* de manière plus conviviale. Cela se fait de la manière suivante :

```
public static void main(String[] args){
    String s = null, sj, sm, sa;

    if(args.length < 3){
        System.out.println("Pas assez de données");
        return;
    }
    sj = args[0];
    sm = args[1];
    sa = args[2];
    try{
        s = calculerJour(sj, sm, sa);
    } catch(Exception e){
        System.err.println("Exception: "
                           + e.getMessage());
    }
    if(s != null)
        afficherJour(sj, sm, sa, s);
    else
        System.out.println("Données incorrectes");
    return;
}
```


L'instruction **`try ... catch`** permet en quelque sorte de protéger l'exécution de la fonction qui nous intéresse. La seule façon pour la fonction d'échouer est qu'il y ait une erreur de lecture des données, ici qu'une donnée ne soit pas un entier. Dans notre cas, l'exception sera de type `NumberFormatException` et `parseInt` lève une exception de ce type qui est propagée par `calculerJour`. Cet objet contient un message qui informe sur l'erreur et nous décidons de l'afficher. Remarquez que la variable `s` n'est affectée que si aucune erreur n'est déclenchée. Dans ce cas, elle a la valeur qu'elle avait lors de son initialisation, c'est-à-dire ici **`null`**.

Le bon emploi des exceptions est assez complexe, voir section 14.4.

5.3.4 Tests exhaustifs du programme

Dans certains cas, on peut rêver de faire des tests exhaustifs sur le programme. Ici, rien n'empêche de tester toutes les dates correctes possibles entre 1586 et l'an 5000 par exemple. Le seul problème à résoudre est d'écrire ce programme de test, une fois que l'on "sait" que le 1er janvier 1586 était un mercredi.

Un programme de test doit être le plus indépendant possible du programme à tester. En particulier, il ne faut pas que le programme de test utilise des fonctions du programme testé alors que c'est justement ce que l'on veut tester...

Ici, nous allons seulement utiliser le fait que les fonctions `estBissextile` et `nbJoursDansMois` ont déjà été testées (ce sont les plus faciles à tester) et qu'elles sont correctes. Ensuite, nous allons écrire une fonction qui teste tous les jours d'une année donnée, celle-ci itérant sur les mois et le nombre de jours des mois.

```
// ENTRÉE: j11 est le jour de la semaine qui commence
//         l'année a.
// SORTIE: le jour de la semaine qui suit le 31/12 de
//         l'année a.
public static int testerAnnee(int a, int j11){
    int jj = j11;

    for(int m = 1; m <= 12; m++){
        int jmax = Jour.nbJoursDansMois(m, a);
```

```
        for(int j = 1; j <= jmax; j++){
            // on construit la chaîne de test
            String t = j + " " + m + " " + a;
            t += " " + JourF.jour[jj];
            if(! testerJour(t))
                System.out.println("PB: "+ t);
            // on avance d'un jour
            jj++;
            if(jj == 7)
              jj = 0;
        }
    return jj;
}

public static void testsExhaustifs(){
    int j11 = 3; // mercredi 1er janvier 1586

    for(int a = 1586; a < 2500; a++){
        System.out.println("Test de l'année "+a);
        j11 = testerAnnee(a, j11);
    }
}
```

La fonction `testerAnnee` prend en entrée une année et le jour de la semaine correspondant au 1er janvier de l'année. En sortie, la fonction renvoie le jour de la semaine du 1er janvier de l'année qui suit. À l'intérieur de la fonction, on boucle sur les mois et les jours, ainsi que sur le jour de la semaine.

5.3.5 Est-ce tout ?

Nous avons passé du temps à expliquer comment écrire un programme raisonnable basé sur le calcul du jour de la semaine correspondant à une date. La solution est satisfaisante, mais nous avons figé des choses qui pour le moment empêchent la mise à jour et l'extension du programme, notamment dans l'utilisation des entrées/sorties. Nous continuerons le développement de notre programme au chapitre 14.

5.3.6 Calendrier et formule de Zeller

Nous allons d'abord donner la preuve de la formule due au Révérend Zeller et qui résout notre problème.

Théorème 1 *Le jour J (un entier entre 0 et 6 avec dimanche codé par 0, etc.) correspondant à la date $j/m/a$ est donné par :*

$$J = (j + \lfloor 2.6m' - 0.2 \rfloor + e + \lfloor e/4 \rfloor + \lfloor s/4 \rfloor - 2s) \bmod 7$$

où

$$(m', a') = \begin{cases} (m-2, a) & si\ m > 2, \\ (m+10, a-1) & si\ m \leqslant 2, \end{cases}$$

et s (resp. e) est le quotient (resp. reste) de la division euclidienne de a' par 100, c'est-à-dire $a' = 100s + e$, $0 \leqslant e < 100$.

Commençons d'abord par rappeler les propriétés du calendrier grégorien, qui a été mis en place en 1582 par le pape Grégoire XIII : l'année est de 365 jours, sauf quand elle est bissextile, i.e., divisible par 4, sauf les années séculaires (divisibles par 100), qui ne sont bissextiles que si elles sont divisibles par 400.

Si j et m sont fixés, et comme $365 = 7 \times 52 + 1$, la quantité J avance de 1 chaque année, sauf quand la nouvelle année est bissextile, auquel cas J progresse de 2. Il faut donc déterminer le nombre d'années bissextiles inférieures à a.

Détermination du nombre d'années bissextiles

Lemme 1 *Le nombre d'entiers de $[1, N]$ qui sont divisibles par k est $\delta(N, k) = \lfloor N/k \rfloor$.*

Démonstration : les entiers m de l'intervalle $[1, N]$ divisibles par k sont de la forme $m = kr$ avec $1 \leqslant kr \leqslant N$ et donc $1/k \leqslant r \leqslant N/k$. Comme r doit être entier, on a en fait $1 \leqslant r \leqslant \lfloor N/k \rfloor$. □

Proposition 1 *Le nombre d'années bissextiles dans $]1600, A]$ est*

$$\begin{aligned} B(A) &= \delta(A - 1600, 4) - \delta(A - 1600, 100) + \delta(A - 1600, 400) \\ &= \lfloor A/4 \rfloor - \lfloor A/100 \rfloor + \lfloor A/400 \rfloor - 388. \end{aligned}$$

Démonstration : on applique la définition des années bissextiles : toutes les années bissextiles sont divisibles par 4, sauf celles divisibles par 100 à moins qu'elles ne soient multiples de 400. □

Pour simplifier, on écrit $A = 100s + e$ avec $0 \leqslant e < 100$, ce qui donne :

$$B(A) = \lfloor e/4 \rfloor - s + \lfloor s/4 \rfloor + 25s - 388.$$

Comme le mois de février a un nombre de jours variable, on décale l'année : on suppose qu'elle va de mars à février. On passe de l'année (m, a) à l'année-Zeller (m', a') comme indiqué ci-dessus.

Détermination du jour du 1er mars

Ce jour est le premier jour de l'année Zeller. Posons $\mu(x) = x \bmod 7$. Supposons que le 1er mars 1600 soit n, alors il est $\mu(n+1)$ en 1601, $\mu(n+2)$ en 1602, $\mu(n+3)$ en 1603 et $\mu(n+5)$ en 1604. De proche en proche, le 1er mars de l'année a' est donc :

$$\mathcal{M}(a') = \mu(n + (a' - 1600) + B(a')).$$

Maintenant, on détermine n à rebours en utilisant le fait que le 1er mars 2015 était un dimanche. On trouve $n = 3$.

1er avril	1er mars+3
1er mai	1er avril+2
1er juin	1er mai+3
1er juillet	1er juin+2
1er août	1er juillet+3
1er septembre	1er août+3
1er octobre	1er septembre+2
1er novembre	1er octobre+3
1er décembre	1er novembre+2
1er janvier	1er décembre+3
1er février	1er janvier+3

TABLE 5.1 – Calculs des premiers jours de chaque mois.

Le premier jour des autres mois

On peut précalculer le décalage entre le jour du 1er mars et le jour du 1er des mois suivants, ce qui nous donne la table 5.1. Ainsi, si le 1er mars d'une année est un vendredi, alors le 1er avril est un lundi, et ainsi de suite.

On peut résumer ce tableau par la formule $\lfloor 2.6m' - 0.2 \rfloor - 2$, d'où :

Proposition 2 *Le 1er du mois m' est :*

$$\mu(1 + \lfloor 2.6m' - 0.2 \rfloor + e + \lfloor e/4 \rfloor + \lfloor s/4 \rfloor - 2s)$$

et le résultat final en découle.

Chapitre 6

Récursivité

Existe-t-il deux catégories d'hommes ?
Oui, ceux qui pensent qu'il y a deux catégories
d'hommes, et les autres.
D'après une chronique de J.-C. Carrière sur France Inter, 2003.

Jusqu'à présent, nous avons programmé des fonctions simples, qui éventuellement en appelaient d'autres. Rien n'empêche d'imaginer qu'une fonction puisse s'appeler elle-même. C'est ce qu'on appelle une fonction *récursive*. L'intérêt d'une telle fonction peut ne pas apparaître clairement au premier abord, ou encore faire peur. D'un certain point de vue, elles sont en fait proches du formalisme des relations de récurrence en mathématique. Bien utilisées, les fonctions récursives permettent dans certains cas d'écrire des programmes beaucoup plus lisibles, et permettent d'imaginer des algorithmes dont l'analyse sera facile et l'implantation récursive aisée. Nous introduirons ainsi plus tard un concept fondamental de l'algorithmique, le principe de *diviser-pour-résoudre*. Les fonctions récursives seront indispensables dans le traitement des types récursifs, qui seront introduits au chapitre 8.

Finalement, on verra que l'introduction de fonctions récursives ne se limite pas à une nouvelle syntaxe, mais qu'elle permet d'aborder des problèmes importants de l'informatique, comme la non-terminaison des problèmes ou plus généralement l'indécidabilité de certains problèmes.

6.1 Premiers exemples

L'exemple le plus simple est celui du calcul de $n!$. Rappelons que $0! = 1! = 1$ et que $n! = n \times (n-1)!$. De manière itérative, on écrit :

```
public static int factorielle(int n){
    int f = 1;
    for(int k = n; k > 1; k--)
        f *= k;
    return f;
}
```

qui implante le calcul par accumulation du produit dans la variable `f`.

De manière récursive, on peut écrire :

```
public static int fact(int n){
```



```
    if(n == 0) return 1; // cas de base
    else return n * fact(n-1);
}
```

On a collé d'aussi près que possible à la définition mathématique. On commence par le cas de base de la récursion, puis on écrit la relation de récurrence.

La syntaxe la plus générale d'une fonction récursive est :

```
public static <type_de_retour> <nomFct>(<args>){
    [déclaration de variables]
    [test d'arrêt]
    [suite d'instructions]
    [appel de <nomFct>(<args'>)]
    [suite d'instructions]
    return <résultat>;
}
```

Regardons d'un peu plus près comment fonctionne un programme récursif, sur l'exemple de la factorielle. L'ordinateur qui exécute le programme voit qu'on lui demande de calculer `fact(3)`. Il va en effet stocker dans un tableau le fait qu'on veut cette valeur, mais qu'on ne pourra la calculer qu'après avoir obtenu la valeur de `fact(2)`. On procède ainsi (on dit qu'on *empile les appels* dans ce tableau, qui est une pile) jusqu'à demander la valeur de `fact(0)` (voir figure 6.1).

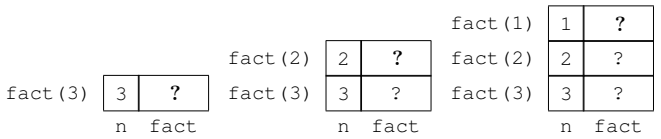


FIGURE 6.1 – Empilement des appels récursifs.

Arrivé au bout, il ne reste plus qu'à *dépiler* les appels, pour de proche en proche pouvoir calculer la valeur de `fact(3)`, cf. figure 6.2.

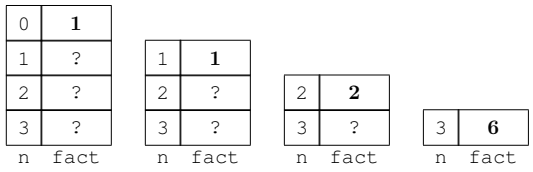


FIGURE 6.2 – Dépilement des appels récursifs.

La récursivité ne marche que si on ne fait pas déborder cette pile d'appels. Imaginez que nous ayons écrit :

```
public static int fact(int n){
    if(n == 0) return 1; // cas de base
    else return n * fact(n+1);
}
```

Nous aurions rempli la pièce du sol au plafond sans atteindre la fin du calcul. On dit dans ce cas là que la fonction ne termine pas. C'est un problème fondamental de l'informatique de pouvoir *prouver* qu'une fonction (ou un algorithme) termine, à l'instar des travaux des mathématiciens, qui cherchent des preuves de théorèmes.

Exercice 6.1 On considère la fonction Java suivante :

```
public static int f(int n){
    if(n > 100)
        return n - 10;
    else
        return f(f(n+11));
}
```

Montrer que la fonction renvoie 91 si $n \leqslant 100$ et $n - 10$ si $n > 100$.

6.2 Des exemples moins élémentaires

La récursivité apporte beaucoup en terme d'expressivité. Notons que les cas de *récursivité terminale* le sont moins : ce sont des cas où la fonction ne contient qu'une boucle **for** déguisée.

6.2.1 Écriture binaire des entiers

Prenons un cas où la récursivité apporte plus. Rappelons que tout entier strictement positif n peut s'écrire sous la forme

$$n = \sum_{i=0}^{p} b_i 2^i = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \cdots + b_p 2^p, \quad b_i \in \{0, 1\}$$

avec $p \geqslant 0$. L'algorithme naturel pour récupérer les chiffres binaires (les b_i) consiste à effectuer la division euclidienne de n par 2, ce qui nous donne $n = 2q_1 + b_0$, puis celle de q par 2, ce qui fournit $q_1 = 2q_2 + b_1$, etc. Supposons que l'on veuille afficher à l'écran les chiffres binaires de n, dans l'ordre naturel, c'est-à-dire les poids forts à gauche, comme on le fait en base 10. Pour $n = 13 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$, on doit voir

```
1101
```

La fonction la plus simple à écrire est :


```
public static void binaire(int n){
    while(n != 0){
        System.out.print(n%2);
        n = n/2;
    }
    return;
}
```

Malheureusement, elle affiche plutôt :

```
1011
```

c'est-à-dire l'ordre inverse. On aurait pu également écrire la fonction récursive (c'est un cas de rÃĺcursivité terminale) :

```
public static void binaireRec(int n){
    if(n > 0){
        System.out.print(n%2);
        binaireRec(n/2);
    }
    return;
}
```

qui affiche elle aussi dans l'ordre inverse. Regardons une *trace* du programme, c'est-à-dire qu'on en déroule le fonctionnement, de façon analogue au mécanisme d'empilement/dépilement :

1. On affiche 13 modulo 2, c'est-à-dire b_0, puis on appelle `binaireRec`(6).
2. On affiche 6 modulo 2 ($= b_1$), et on appelle `binaireRec`(3).
3. On affiche 3 modulo 2 ($= b_2$), et on appelle `binaireRec`(1).
4. On affiche 1 modulo 2 ($= b_3$), et on appelle `binaireRec`(0). Le programme s'arrête après avoir dépilé les appels.

Il suffit de permuter deux lignes dans le programme précédent

```
public static void binaireRec2(int n){
    if(n > 0){
        binaireRec2(n/2);
        System.out.print(n%2);
    }
    return;
}
```

pour que le programme affiche dans le bon ordre ! Où est le miracle ? Traçons l'exécution :

1. On appelle `binaireRec2`(6).
2. On appelle `binaireRec2`(3).
3. On appelle `binaireRec2`(1).
4. On appelle `binaireRec2`(0), qui ne fait rien.

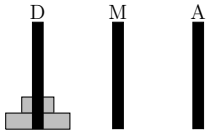
3.' On revient au dernier appel, et maintenant on affiche $b_3 = 1 \bmod 2$;
2.' on affiche $b_2 = 3 \bmod 2$, etc.

C'est le programme qui nous a épargné la peine de nous rappeler nous-mêmes dans quel ordre nous devions faire les choses. On aurait pu par exemple les réaliser avec un tableau qui stockerait les b_i avant de les afficher. Nous avons laissé à la pile de récursivité cette gestion.

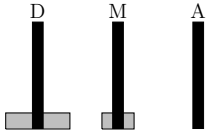
6.2.2 Les tours de Hanoï

Il s'agit là d'un jeu inspiré par une fausse légende créée par le mathématicien français Édouard Lucas. Il s'agit de trois poteaux sur lesquels peuvent coulisser des rondelles de taille croissante. Au début du jeu, toutes les rondelles sont sur le même poteau, classées par ordre décroissant de taille à partir du bas. Il s'agit de faire bouger toutes les rondelles, de façon à les amener sur un autre poteau donné. On déplace une rondelle à chaque fois, et on n'a pas le droit de mettre une grande rondelle sur une petite. Par contre, on a le droit d'utiliser un troisième poteau si on le souhaite. Nous appellerons les poteaux D (départ), M (milieu), A (arrivée).

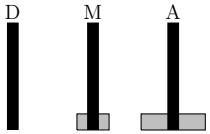
La résolution du problème avec deux rondelles se fait à la main, à l'aide des mouvements suivants. La position de départ est :



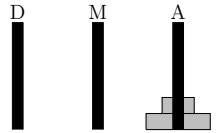
On commence par déplacer la petite rondelle sur le poteau M :



À ce point là, on peut déplacer le disque de D sur le poteau A, ou bien celui de M sur le poteau A. Dans le dernier cas, on n'a pas progressé vers la solution, on a simplement échangé les rôles de M et A. Le seul mouvement pertinent est le premier suggéré :



et enfin la petite rejoint la grande :



La solution générale s'en déduit (cf. figure 6.3). Le principe est de solidariser les $n-1$ plus petites rondelles. Pour résoudre le problème, on fait bouger ce tas de $n-1$ pièces du poteau D vers le poteau M (à l'aide du poteau A), puis on bouge la grande rondelle vers A, puis il ne reste plus qu'à bouger le tas de M vers A en utilisant D. Dans ce dernier mouvement, la grande rondelle sera toujours en dessous, ce qui ne créera pas de problème.

Imaginant que les poteaux D, M, A sont de type entier, on arrive à la fonction suivante :

```
public static void Hanoi(int n, int D, int M, int A){
    if(n > 0){
        Hanoi(n-1, D, A, M);
        System.out.println("On bouge "+D+" vers "+A);
        Hanoi(n-1, M, D, A);
    }
}
```

Dans cette forme, l'algorithme est très facile à analyser. Appelons $H(n)$ le nombre de mouvements à faire pour résoudre le problème avec n disques. On a $H(1) = 1$, et on voit que la fonction vérifie la récurrence

$$H(n) = 2H(n-1) + 1$$

puisqu'il y a deux appels récursifs avec $n-1$ disques et un mouvement de disque entre les deux. Écrivant $H(n) + 1 = 2(H(n-1) + 1)$, on trouve que $H(n) = 2^n - 1$.

Pour finir, le lecteur très motivé peut essayer d'écrire la solution du problème de façon itérative. Ou bien prouver que le programme ci-dessous [1] fait ce qui est demandé :

```
public static void main(String[] args){
    int n = Integer.parseInt(args[0]);

    for(int x=1; x < (1 << n); x++){
        int D = (x&x-1)%3, A = ((x|x-1)+1)%3;
        System.out.println("On bouge "+D+" vers "+A);
    }
}
```

1. cf. http://stackoverflow.com/questions/2209860 ou wikipedia – section solutions binaires.

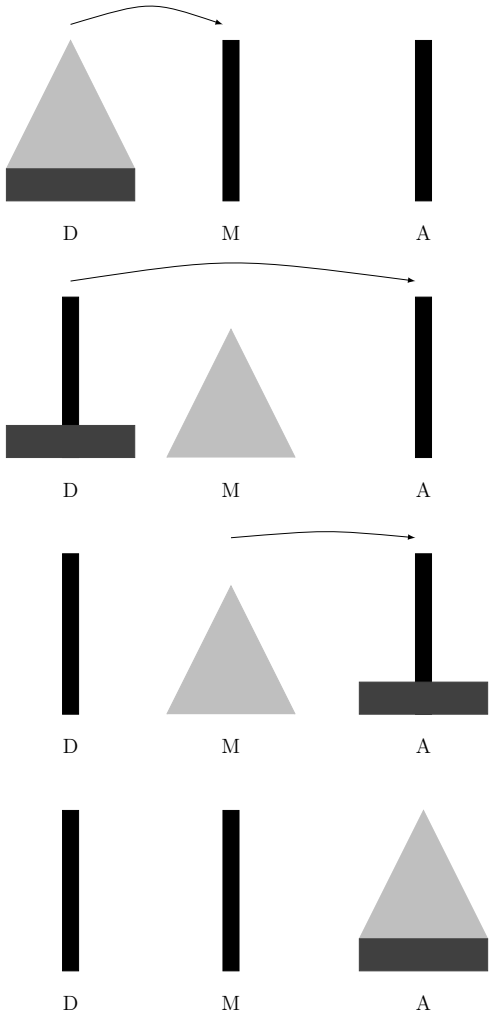


FIGURE 6.3 – Les tours de Hanoi.

6.3 Un piège subtil : les nombres de Fibonacci

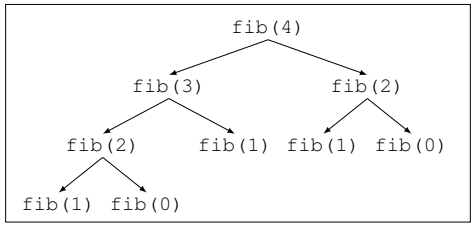
Supposons que nous voulions écrire une fonction qui calcule le n-ième terme de la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Le programme naturellement récursif est simplement :

```
public static int fib(int n){
    if(n <= 1) return n; // cas de base
    else return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

On peut tracer l'arbre des appels pour cette fonction, qui généralise la pile des appels :



Le programme marche, il termine. Le problème se situe dans le nombre d'appels à la fonction. Si on note $A(n)$ le nombre d'appels nécessaires au calcul de F_n, il est facile de voir que ce nombre vérifie la récurrence :

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2)$$

qui est la même que celle de F_n. Rappelons le résultat suivant :

Proposition 3 *Avec $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618\ldots$ (nombre d'or), $\phi' = (1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618\ldots$:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \phi'^n\right) = \Theta(\phi^n).$$

(La notation $\Theta()$ sera rappelée au chapitre suivant.)

On fait donc un nombre exponentiel d'appels à la fonction.

Une façon de calculer F_n qui ne coûte que n appels est la suivante. Comme la récurrence est d'ordre 2, il est logique de calculer avec des couples de valeurs consécutives. On calcule de proche en proche les valeurs du couple (F_i, F_{i+1}). Voici le programme :

```
public static int fib(int n){
    int i, u, v, w;

    // u = F(0); v = F(1)
```

```
        u = 0; v = 1;
        for(i = 2; i <= n; i++){
            // u = F(i-2); v = F(i-1)
            w = u+v;
            u = v;
            v = w;
        }
        return v;
    }
```

Exercice 6.2 Montrer que l'on peut calculer F_n avec $O(\log n)$ opérations sur les entiers.

Exercice 6.3 (Numérotation de Cantor) On numérote les couples d'entiers positifs suivant le tableau esquissé ci-dessous :

$x\backslash y$	0	1	2	$\cdots$
0	0	2	5	$\cdots$
1	1	4	$\cdots$	$\cdots$
2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$				

Soit $f(x, y)$ la fonction qui associe au couple (x, y) son numéro dans la table. Trouver les équations déterminant $f(x, y)$ de proche en proche et programmer la fonction récursive correspondante.

Exercice 6.4 (Fonction d'Ackerman) On la définit de la façon suivante :

$$Ack(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } m = 0, \\ Ack(m-1,1) & \text{si } n = 0, \\ Ack(m-1, Ack(m,n-1)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$Ack(1,n) = n+2,$$
$$Ack(2,n) = 2n+3,$$
$$Ack(3,n) = 8 \cdot 2^n - 3,$$
$$Ack(4,n) = 2^{\left.2^{2^{\cdots^2}}\right\}n},$$
$$Ack(4,4) > 2^{65536} > 10^{80}$$

nombre bien plus grand que le nombre estimé de particules dans l'univers.

6.4 Fonctions mutuellement récursives

Rien n'empêche d'utiliser des fonctions qui s'appellent les unes les autres, du moment que le programme termine. Nous allons en donner maintenant des exemples.

6.4.1 Pair et impair sont dans un bateau

Commençons par un exemple un peu artificiel : nous allons écrire une fonction qui teste la parité d'un entier n de la façon suivante : 0 est pair ; si $n > 0$, alors n est pair si et seulement si $n-1$ est impair. De même, 0 n'est pas impair, et $n > 1$ est impair si et seulement si $n-1$ est pair. Cela conduit donc à écrire les deux fonctions :

```
    // n est pair ssi (n-1) est impair
    public static boolean estPair(int n){
        if(n == 0) return true;
        else return estImpair(n-1);
    }

    // n est impair ssi (n-1) est pair
    public static boolean estImpair(int n){
        if(n == 0) return false;
        else return estPair(n-1);
    }
```

qui remplissent l'objectif fixé.

6.4.2 Développement du sinus et du cosinus

Supposons que nous désirions écrire la formule donnant le développement de $\sin nx$ sous forme de polynôme en $\sin x$ et $\cos x$. On va utiliser les formules

$$\sin nx = \sin x \cos(n-1)x + \cos x \sin(n-1)x,$$

$$\cos nx = \cos x \cos(n-1)x - \sin x \sin(n-1)x$$

avec les deux cas d'arrêt : $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Cela nous conduit à écrire deux fonctions, qui renvoient des chaînes de caractères écrites avec les deux variables `S` pour $\sin x$ et `C` pour $\cos x$.

```
public static String DeveloppperSin(int n){
    if(n == 0) return "0";
    else{
        String g = "S*(" + DeveloppperCos(n-1) + ")";
        return g + "+C*(" + DeveloppperSin(n-1) + ")";
    }
}

public static String DeveloppperCos(int n){
    if(n == 0) return "1";
    else{
        String g = "C*(" + DeveloppperCos(n-1) + ")";
        return g + "-S*(" + DeveloppperSin(n-1) + ")";
    }
}
```

L'exécution de ces deux fonctions nous donne par exemple pour $n = 3$:

```
sin(3*x)=S*(C*(C*(1)-S*(0))-S*(S*(1)+C*(0)))+C*(S*(C*(1)-S*(0))+C*(S*(1)+C*(0)))
```

Bien sûr, l'expression obtenue n'est pas celle à laquelle nous sommes habitués. En particulier, il y a trop de 0 et de 1. On peut écrire des fonctions un peu plus compliquées, qui donnent un résultat simplifié pour $n = 1$:

```
public static String DeveloppperSin(int n){
    if(n == 0) return "0";
    else if(n == 1) return "S";
    else{
        String g = "S*(" + DeveloppperCos(n-1) + ")";
        return g + "+C*(" + DeveloppperSin(n-1) + ")";
    }
}

public static String DeveloppperCos(int n){
    if(n == 0) return "1";
    else if(n == 1) return "C";
    else{
        String g = "C*(" + DeveloppperCos(n-1) + ")";
        return g + "-S*(" + DeveloppperSin(n-1) + ")";
    }
}
```

ce qui fournit :

```
sin(3*x)=S*(C*(C)-S*(S))+C*(S*(C)+C*(S))
```

Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines. Simplifier cette expression est une tâche complexe, qui sera traitée dans les cours ultérieurs.

6.5 Le problème de la terminaison

Nous avons vu combien il était facile d'écrire des programmes qui ne s'arrêtent jamais. On aurait pu rêver de trouver des algorithmes ou des programmes qui prouveraient cette terminaison à notre place. Hélas, il ne faut pas rêver.

Théorème 2 (Gödel) *Il n'existe pas de programme qui décide si un programme quelconque termine.*

Expliquons pourquoi de façon informelle, en trichant avec JAVA. Supposons que l'on dispose d'une fonction `Termine` qui prend un programme écrit en JAVA et qui réalise la fonctionnalité demandée : `Termine(fct)` renvoie **`true`** si `fct` termine et **`false`** sinon. On pourrait alors écrire le code suivant :

```
public static void f(){
    while(Termine(f))
        ;
}
```


C'est un programme bien curieux. En effet, termine-t-il ? Ou bien `Termine(f)` renvoie **`true`** et alors la boucle **`while`** est activée indéfiniment, donc il ne termine pas. Ou bien `Termine(f)` renvoie **`false`** et alors la boucle **`while`** n'est jamais effectuée, donc le programme termine. Nous venons de rencontrer un problème *indécidable*, celui de l'arrêt. Classifier les problèmes qui sont ou pas décidables représente une part importante de l'informatique théorique.

Exercices

Exercice 6.5 Parmi les trois fonctions données ci-dessous, lesquelles terminent pour toute valeur possible de l'entrée et pourquoi ?

```
    public static int f(int z){
        if(z <= 0) return 0;
        else return f(z - 1) * f(z - 3);
    }

    public static int g(int w){
        if(w == 1) return 1;
        else{
            if((w % 2) == 1) return g(w/2);
            else return g(w/3);
        }
    }

    public static void h(int a){
        if(a <= 3) return 1;
        else{
            if(h(a/2) == 1) return 2;
            else return 3;
        }
    }
```

Exercice 6.6 Justifiez en quelques mots ce qu'affiche le programme suivant.

```
public class Exo{

    public static void f(int[] t, int n){
        if(n >= 0)
            t[n] = t[n] * t[n];
            f(t, n-1);
        }
    }

    public static void main(String[] args)
        int[] t = new int[]{1, 2, 3, 4};
        int n;

        n = 2;
        f(t, n);
        System.out.println(n);
        for(int i = 0; i < t.length; i++)
            System.out.println(t[i]);
    }
}
```

Chapitre 7

Introduction à la complexité des algorithmes

Qu'est-ce que la complexité ?
À première vue, c'est un phénomène quantitatif,
l'extrême quantité d'interactions et d'interférences
entre un très grand nombre d'unités.
Edgar Morin (Introduction à la pensée complexe, 2005).

L'utilisateur d'un programme se demande souvent combien de temps mettra son programme à s'exécuter sur sa machine. Ce problème est concret, mais mal défini. Il dépend de la machine, du système d'exploitation, de ce qu'on fait en parallèle, etc.

D'un point de vue abstrait, il faut se demander comment fonctionne le programme, quel modèle de calcul il utilise (séquentiel, parallèle, vectoriel, etc.). On peut également se fixer un problème et se demander quelle est la méthode la plus rapide pour le résoudre. Nous allons voir dans ce chapitre comment on peut commencer à s'attaquer au problème, en s'intéressant à la complexité des algorithmes.

7.1 Complexité des algorithmes

La complexité (temporelle) d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires (affectations, comparaisons, opérations arithmétiques) effectuées par un algorithme. Ce nombre s'exprime en fonction de la taille n des données. On s'intéresse au coût exact quand c'est possible, mais également au coût moyen (que se passe-t-il si on moyenne sur toutes les exécutions du programme sur des données de taille n), au cas le plus favorable, ou bien au cas le pire. On dit que la complexité de l'algorithme est $O(f(n))$ où f est d'habitude une combinaison de polynômes, logarithmes ou exponentielles. Ceci reprend la notation mathématique classique, et signifie que le nombre d'opérations effectuées est borné par $cf(n)$, où c est une constante, lorsque n tend vers l'infini.

Considérer le comportement à l'infini de la complexité est justifié par le fait que les données d'entrée des algorithmes sont souvent de grande taille et qu'on se préoccupe surtout de la croissance de cette complexité en fonction de la taille des données. Une question systématique à se poser est : que devient le temps de calcul si on multiplie la taille des données par 2 ? De cette façon, on peut également comparer les algorithmes entre eux.

Les algorithmes usuels peuvent être classés en un certain nombre de grandes classes de complexité.

- Les algorithmes sous-linéaires, dont la complexité est en général en $O(\log n)$. C'est le cas de la recherche d'un élément dans un ensemble ordonné fini de cardinal n.
- Les algorithmes en complexité $O(n)$ (algorithmes linéaires) ou en $O(n \log n)$ sont considérés comme rapides, comme l'évaluation de la valeur d'une expression composée de n symboles ou les algorithmes optimaux de tri.
- Plus lents sont les algorithmes de complexité située entre $O(n^2)$ et $O(n^3)$, c'est le cas de la multiplication des matrices et de certains algorithmes de parcours de graphe.
- Au delà, les algorithmes polynomiaux en $O(n^k)$ pour $k > 3$ sont considérés comme lents, sans parler des algorithmes exponentiels (dont la complexité est supérieure à tout polynôme en n) que l'on s'accorde à dire impraticables dès que la taille des données est supérieure à quelques dizaines d'unités.

La recherche de l'algorithme ayant la plus faible complexité, pour résoudre un problème donné, fait partie du travail régulier de l'informaticien. Il ne faut toutefois pas tomber dans certains excès, par exemple proposer un algorithme excessivement alambiqué, développant mille astuces et ayant une complexité en $O(n^{1,99})$, alors qu'il existe un algorithme simple et clair de complexité $O(n^2)$. Surtout, si le gain de l'exposant de n s'accompagne d'une perte importante dans la constante multiplicative : passer d'une complexité de l'ordre de $n^2/2$ à une complexité de $10^{10} n \log n$ n'est pas vraiment une amélioration. Les critères de clarté et de simplicité doivent être considérés comme aussi importants que celui de l'efficacité dans la conception des algorithmes.

7.2 Calculs élémentaires de complexité

Donnons quelques règles simples concernant ces calculs. Tout d'abord, le coût d'une suite de deux instructions est la somme des deux coûts :

$$T(P;Q) = T(P) + T(Q).$$

Plus généralement, si l'on réalise une itération, on somme les différents coûts :

$$T(\text{for(i = 0 ; i < n ; i++) P(i) ;}) = \sum_{i=0}^{n-1} T(P(i)).$$

Si f et g sont deux fonctions positives réelles, on écrit

$$f = O(g)$$

si et seulement si le rapport f/g est borné à l'infini :

$$\exists n_0, \quad \exists K, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant f(n) \leqslant K g(n).$$

Autrement dit, f ne croît pas plus vite que g. On utilise également les notations : $f = \Theta(g)$ si $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

Les règles de calcul simples sur les O sont les suivantes (n'oublions pas que nous travaillons sur des fonctions de coût, qui sont **à valeurs positives**) : si $f = O(g)$ et $f' = O(g')$, alors

$$f + f' = O(g + g'), \quad ff' = O(gg').$$

On montre également facilement que si $f = O(n^k)$ et $h = \sum_{i=1}^{n} f(i)$, alors $h = O(n^{k+1})$ (approximer la somme par une intégrale).

7.3 Quelques algorithmes sur les tableaux

7.3.1 Recherche du plus petit élément dans un tableau

Reprenons l'exemple suivant :

```
public static int plusPetit(int[] t){
    int k = 0, n = t.length;

    for(int i = 1; i < n; i++)
        // invariant : k est l'indice du plus petit
        // élément de t[0..i-1]
        if(t[i] < t[k])
            k = i; // (1)
    return k;
}
```

Dans cette fonction, on exécute $n-1$ tests de comparaison. La complexité est donc $n - 1 = O(n)$.

On peut également se demander combien de fois on passe dans la ligne (1) du programme. Cette question est plus compliquée, car elle dépend fortement des données d'entrée. Si le tableau `t` est trié dans l'ordre croissant, 0 fois ; s'il est classé dans l'ordre décroissant, $n-1$ fois. On a donc prouvé le cas le meilleur et le cas le pire. On peut également prouver, mais c'est plus difficile, que la complexité en moyenne (c'est-à-dire si on fait la moyenne du nombre d'exécutions sur toutes les données, c'est-à-dire toutes les permutations de taille n, donc $n!$ en tout) est $O(\log n)$. On renvoie au livre de Knuth [1] [Knu73b, §1.2.10] pour la démonstration qui illustre l'utilisation de séries génératrices dans l'analyse des algorithmes.

7.3.2 Recherche dichotomique

Si `t` est un tableau d'entiers de taille n, dont les éléments sont triés (par exemple par ordre croissant) on peut écrire une fonction qui cherche si un entier donné se trouve dans le tableau. Comme le tableau est trié, on peut procéder par dichotomie : cherchant à savoir si x est dans `t[g..d[`, on calcule $m = (g + d)/2$ et on compare x à `t[m]`. Si $x = t[m]$, on a gagné, sinon on réessaie avec `t[g..m[` si $t[m] > x$ et dans `t[m+1..d[` sinon. Voici la fonction JAVA correspondante :

```
// on cherche si x est dans t[g..d[; si oui on renvoie ind
// tel que t[ind] = x; si non, on renvoie -1.
public static int rechercheDichotomique(long[] t, long x,
                                        int g, int d){
  int ind = -1;

  while(g < d){
      // tant que [g..d[ n'est pas vide
      int m = (g+d)/2;

      if(t[m] == x){
          ind = m;
          break; // on sort
      }
      else if(t[m] > x)
          // on cherche dans [g..m[
          d = m;
      else
          // on cherche dans [m+1..d[
          g = m+1;
  }
  return ind;
}

public static int rechercheDicho(long[] t, long x){
    return rechercheDichotomique(t, x, 0, t.length);
}
```

Notons que l'on peut écrire cette fonction sous forme récursive, ce qui la rapproche de l'idée de départ :

```
// recherche de x dans t[g..d[
public static int dichoRec(long[] t, long x, int g, int d){
    if(g >= d) // l'intervalle est vide      (*)
        return -1;
    int m = (g+d)/2;
    if(t[m] == x)
        return m;
    else if(t[m] > x)
        return dichoRec(t, x, g, m);
    else
        return dichoRec(t, x, m+1, d);
}
```

Le nombre maximal de comparaisons de `long` [2] à effectuer pour un tableau de taille n est :

$$T(n) = 2 + T(n/2).$$

Pour résoudre cette récurrence, on écrit $n = 2^k$, ce qui conduit à

$$T(2^k) = T(2^{k-1}) + 2 = \cdots = T(1) + 2k$$

1. prix Turing 1974

2. Nous ignorons ici le coût du test `g >= d` à la ligne `(*)`.

d'où un coût en $O(k) = O(\log n)$.

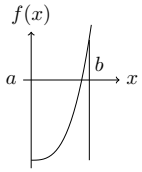
On verra dans les chapitres suivants d'autres calculs de complexité, temporelle ou bien spatiale.

7.4 Diviser pour résoudre

C'est là un paradigme fondamental de l'algorithmique. Quand on ne sait pas résoudre un problème, on essaie de le couper en morceaux qui seraient plus faciles à traiter. Nous allons donner quelques exemples classiques, qui seront complétés par d'autres dans les chapitres suivants du cours.

7.4.1 Recherche d'une racine par dichotomie

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$:



Il existe donc une racine x_0 de f dans l'intervalle $[a, b]$, qu'on veut déterminer de sorte que $|f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour ε donné. L'idée est simple : on calcule $f((a + b)/2)$. En fonction de son signe, on explore $[a, m]$ ou $[m, b]$.

Par exemple, on commence par programmer la fonction f :

```
public static double f(double x){
    return x*x*x-2;
}
```

puis la fonction qui cherche la racine :

```
// f(a) < 0, f(b) > 0
public static double racineDicho(double a, double b,
                                 double eps){
    double m = (a+b)/2;
    double fm = f(m);

    if(Math.abs(fm) <= eps)
        return m;
    if(fm < 0) // la racine est dans [m, b]
        return racineDicho(m, b, eps);
    else // la racine est dans [a, m]
        return racineDicho(a, m, eps);
}
```


7.4.2 Exponentielle binaire

Cet exemple va nous permettre de montrer que dans certains cas, on peut calculer la complexité dans le meilleur cas ou dans le pire cas, ainsi que calculer le comportement de l'algorithme en moyenne.

Supposons que l'on doive calculer x^e avec x appartenant à un groupe quelconque. On peut calculer cette quantité à l'aide de $e - 1$ multiplications par x, mais on peut faire mieux en utilisant les formules suivantes :

$$x^0 = 1, x^e = \begin{cases} (x^{e/2})^2 & \text{si } e \text{ est pair,} \\ x(x^{(e-1)/2})^2 & \text{si } e \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par exemple, on calcule

$$x^{11} = x(x^5)^2 = x(x(x^2)^2)^2,$$

ce qui coûte 5 multiplications (en fait 3 carrés et 2 multiplications).

La fonction évaluant x^e avec x de type **long** correspondant aux formules précédentes est :

```
public static long Exp(long x, int e){
    if(e == 0) return 1;
    else{
        if((e%2) == 0){
            long y = Exp(x, e/2);
            return y * y;
        }
        else{
            long y = Exp(x, e/2);
            return x * y * y;
        }
    }
}
```

Soit $E(e)$ le nombre de multiplications réalisées pour calculer x^e. En traduisant directement l'algorithme, on trouve que :

$$E(e) = \begin{cases} E(e/2) + 1 & \text{si } e \text{ est pair,} \\ E(e/2) + 2 & \text{si } e \text{ est impair.} \end{cases}$$

Écrivons $e > 0$ en base 2, soit $e = 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0 = 2^{n-1} + e'$ avec $n \geqslant 1$, $b_i \in \{0, 1\}$. On récrit donc :

$$\begin{aligned} E(e) &= E(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0) = E(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1) + b_0 + 1 \\ &= E(b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2) + b_1 + b_0 + 2 = \cdots = E(b_{n-1}) + b_{n-2} + \cdots + b_0 + (n-1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} b_i + n - 1. \end{aligned}$$

On pose $\nu(e') = \sum_{i=0}^{n-2} b_i$. On peut se demander quel est l'intervalle de variation de $\nu(e')$. Si $e = 2^{n-1}$, alors $e' = 0$ et $\nu(e') = 0$, et c'est donc le cas le plus favorable de l'algorithme. À l'opposé, si $e = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1$, $\nu(e') = n - 1$ et c'est le cas le pire.

Reste à déterminer le cas moyen (à n fixé), ce qui conduit à estimer la quantité :

$$\overline{\nu}(e') = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{b_0 \in \{0,1\}} \sum_{b_1 \in \{0,1\}} \cdots \sum_{b_{n-2} \in \{0,1\}} \left(\sum_{i=0}^{n-2} b_i \right).$$

On peut récrire cela comme :

$$\overline{\nu}(e') = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum b_0 + \sum b_1 + \cdots + \sum b_{n-2} \right)$$

où les sommes sont toutes indexées par les 2^{n-1} $(n-1)$-uplets formés par tous les $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-2})$ possibles dans $\{0,1\}^{n-1}$. Toutes ces sommes sont égales par symétrie, d'où :

$$\overline{\nu}(e') = \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}} b_0.$$

Cette dernière somme ne contient que les valeurs pour $b_0 = 1$ et les b_i restant prenant toutes les valeurs possibles, d'où finalement :

$$\overline{\nu}(e') = \frac{n-1}{2^{n-1}} 2^{n-2} = \frac{n-1}{2}.$$

Autrement dit, un entier de $n-1$ bits a en moyenne $(n-1)/2$ chiffres binaires égaux à 1.

En conclusion, à n fixé, l'algorithme a un coût moyen (sur tous les e possibles de $[2^{n-1}, 2^n - 1]$)

$$\overline{E}(e) = n + (n-1)/2 - 1 = \frac{3}{2}n + c$$

avec $n = \lfloor \log_2 e \rfloor$ et c une constante.

7.4.3 Recherche simultanée du maximum et du minimum

L'idée est de chercher simultanément ces deux valeurs, ce qui va nous permettre de diminuer le nombre de comparaisons nécessaires. La remarque de base est qu'étant donnés deux entiers a et b, on les classe facilement à l'aide d'une seule comparaison, comme programmé ici. La fonction renvoie un tableau de deux entiers, dont le premier s'interprète comme une valeur minimale, le second comme une valeur maximale.

```
// SORTIE: renvoie un couple u = (x, y) avec
// x = min(a, b), y = max(a, b)
public static int[] comparerDeuxEntiers(int a, int b){
    int[] u = new int[2];
    if(a < b){
        u[0] = a; u[1] = b;
    }
    else{
        u[0] = b; u[1] = a;
    }
    return u;
}
```


Une fois cela fait, on procède récursivement : on commence par chercher les couples min-max des deux moitiés, puis en les comparant entre elles, on trouve la réponse sur le tableau entier :

```
// min-max pour t[g..d[
public static int[] minMax(int[] t, int g, int d){
    int gd = d-g;
    if(gd == 1){
        // min-max pour t[g..g+1[ = t[g], t[g]
        int[] u = new int[2];

        u[0] = u[1] = t[g];
        return u;
    }
    else if(gd == 2)
        return comparerDeuxEntiers(t[g], t[g+1]);
    else{ // gd > 2
        int m = (g+d)/2;
        int[] tg = minMax(t, g, m); // min-max de t[g..m[
        int[] td = minMax(t, m, d); // min-max de t[m..d[
        int[] u = new int[2];
        if(tg[0] < td[0])
            u[0] = tg[0];
        else
            u[0] = td[0];
        if(tg[1] > td[1])
            u[1] = tg[1];
        else
            u[1] = td[1];
        return u;
    }
}
```

Il ne reste plus qu'à écrire la fonction de lancement :

```
public static int[] minMax(int[] t){
    return minMax(t, 0, t.length);
}
```

Examinons ce qui se passe sur l'exemple

```
int[] t = new int[]{1, 4, 6, 8, 2, 3, 6, 0}.
```

On commence par chercher le couple min-max sur $t_g = \{1, 4, 6, 8\}$, ce qui entraîne l'étude de $t_{gg} = \{1, 4\}$, d'où $u_{gg} = (1, 4)$. De même, $u_{gd} = (6, 8)$. On compare 1 et 6,

puis 4 et 8 pour finalement trouver $u_g = (1, 8)$. De même, on trouve $u_d = (0, 6)$, soit au final $u = (0, 8)$.

Soit $T(k)$ le nombre de comparaisons nécessaires pour $n = 2^k$. On a $T(1) = 1$ et $T(2) = 2T(1) + 2$. Plus généralement, $T(k) = 2T(k-1) + 2$. D'où

$$\begin{aligned} T(k) &= 2^2T(k-2) + 2^2 + 2 = \cdots = 2^uT(k-u) + 2^u + 2^{u-1} + \cdots + 2 \\ &= 2^{k-1}T(1) + 2^{k-1} + \cdots + 2 = 2^{k-1} + 2^k - 2 = n/2 + n - 2 = 3n/2 - 2. \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 7.1 On se donne une suite d'entiers distincts a_0, a_1, …, a_{n-1}. On suppose que cette suite est *circulairement triée* (dans l'ordre croissant), c'est-à-dire qu'il existe un entier i, $0 \leqslant i < n$ tel que a_i, a_{i+1}, …, a_{n-1}, a_0, a_1, …, a_{i-1} soit triée dans l'ordre croissant. Par exemple, les suites

$$(3, 4, 7, 0, 1, 2), (0, 1, 3), (2, 3, 1)$$

sont de ce type.

a) Écrire une fonction

```
public static int trouverDebut(int[] a){...}
```

qui renvoie l'indice de début d'une telle suite à l'aide de $O(n)$ opérations. On pourra s'aider d'un dessin.

b) Écrire une fonction

```
public static int trouverDebutRapidement(int[] a){...}
```

qui atteint le même résultat à l'aide de $O(\log n)$ opérations. On fournira une explication détaillée de l'algorithme ainsi qu'une justification du temps de calcul.

Deuxième partie

Structures de données classiques

Chapitre 8

Listes chaînées

La société est une chaîne. Salut les maillons ! Coluche.

Pour le moment, nous avons utilisé des structures de données *statiques*, c'est-à-dire dont la taille est connue à la compilation (tableaux de taille fixe) ou bien à l'exécution mais fixée une fois pour toute, comme dans :

```
public static int[] f(int n){
    int[] t = new int[n];
    return t;
}
```

Cette écriture est déjà un confort pour le programmeur, confort qu'on ne trouve pas dans tous les langages.

Parfois, on ne peut pas prévoir la taille des objets avant leur construction, et il est dans ce cas souhaitable d'avoir à sa disposition des moyens d'extension de la place mémoire qu'ils occupent. Songez par exemple à un système de fichiers sur disque. Il est hors de question d'imposer à un fichier d'avoir une taille fixe, et il faut prévoir de le construire par morceaux, en ayant la possibilité d'en rajouter ou d'en enlever si besoin est. C'est là qu'on trouve un intérêt à introduire des structures de données dont la taille augmente (ou diminue) de façon *dynamique*, c'est-à-dire pendant l'exécution.

Gérer la mémoire au plus juste est également une problématique qu'on retrouve quand on traite des matrices creuses (c'est-à-dire avec peu de coefficients non nuls ; on en rencontre souvent en calcul numérique ou en cryptographie), des polynômes creux (cf. chapitre 13).

Nous allons décrire une structure (appelée *liste chaînée*) qui permet de *chaîner* des *maillons* (contenant de l'information), de façon à pouvoir y accéder de proche en proche. En Java, le lien entre maillons (ces blocs contenant l'information) ne sera rien d'autre que la référence du bloc suivant en mémoire. Nous allons dans ce chapitre utiliser essentiellement des listes chaînées contenant des entiers pour simplifier notre propos.

8.1 Spécification de la classe `ListeChainee`

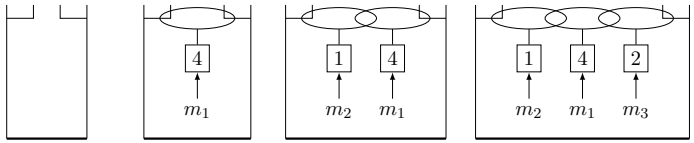
Nous allons procéder du *haut vers le bas*, en décrivant les fonctionnalités attendues de notre future classe `ListeChainee`, puis nous discuterons les implantations possibles.


```
public void ajouterEnTete(int c){...}
public void ajouterEnQueue(int c){...}
public int enleverEnTete(){...}
public int enleverEnQueue(){...}
public boolean estVide(){...}
public void afficher(){...}
```

Le premier programme de test est :

```
public TestsListeChainee{
    public static void main(String[] args){
        ListeChainee li = new ListeChainee();
        li.ajouterEnTete(4);                    // [1]
        li.ajouterEnTete(1);                    // [2]
        li.ajouterEnQueue(2);                   // [3]
        li.afficher();                          // [4]
    }
}
```

À ce point là, et en l'absence d'implantation concrète, qu'avons-nous fait ? Nous avons créé une liste vide, puis avons créé un ordre de remplissage. Une façon imagée de voir une telle structure est sous la forme de deux crochets (le gauche et le droit, ou encore la *tête* et la *queue*) qui un jour recevront des maillons (cf. figure 8.1 (a)). On crée alors le premier maillon m_1 à la ligne [1], qui est suspendu entre les deux crochets (cf. (b)). Ce maillon contient le nombre 4. On construit alors un maillon m_2 contenant 1 à la ligne [2], qu'on accroche entre le crochet de tête et le premier maillon, à sa droite (cf. (c)). À la ligne [3], on ajoute entre le crochet de queue et le maillon m_1 le maillon m_3 qui contient 2 (cf. (d)).



(a) liste vide (b) avec m_1 (c) avec m_2 (d) avec m_3

FIGURE 8.1 – Insertion des maillons.

On peut afficher les contenus des maillons dans l'ordre où ils se trouvent dans la structure, soit de la tête vers la queue :

```
1 4 2
```

Nous allons maintenant expliquer comment implanter efficacement une telle structure. On peut bien sûr utiliser un tableau (de taille variable), ce que nous allons détailler d'abord. Une façon plus efficace sera d'utiliser une représentation dynamique.

8.2 Utilisation d'un tableau de taille variable

Bien sûr, quand on ne connaît pas la taille à l'avance, on peut se contenter de faire évoluer la taille du tableau, en la calculant au plus juste. Cela donne un objet avec comme champ un tableau. On écrit alors les premières primitives, en prenant garde au cas où `t` serait nul :

```
public class ListeTab{
    private int[] t;

    public ListeTab(){
        this.t = null;
    }
    public boolean estVide(){
        return this.t == null;
    }
    public void afficher(){
        if(!this.estVide()){
            for(int i = 0; i < this.t.length; i++)
                TC.println(this.t[i]);
        }
    }
```

Pour ajouter un élément en tête, il faut créer un nouveau tableau qui recopie les éléments en les décalant de 1, puis ajoute le nouveau contenu, en prenant garde au cas où le tableau est vide au départ :

```
    public void ajouterEnTete(int c){
        // création d'un tableau avec une case de plus
        int[] tt;
        if(this.estVide())
            tt = new int[1];
        else
            tt = new int[this.t.length+1];
        // remplissage
        for(int i = 0; i < tt.length-1; i++)
            tt[i+1] = this.t[i];
        // on ajoute le nouvel entier
        tt[0] = c;
        this.t = tt;
    }
```

De façon symétrique, on écrit la suppression en tête :

```
    public int enleverEnTete(){
        // création d'un tableau avec une case en moins
        int[] tt;
        if(this.t.length == 1)
            tt = null;
        else{
            tt = new int[this.t.length-1];
            // recopie
            for(int i = 0; i < this.t.length-1; i++)
                tt[i] = this.t[i+1];
        }
        int c = this.t[0];
        this.t = tt;
        return c;
    }
```


Ces deux opérations coûtent cher : en effet, si on a un tableau de longueur n, chacune d'entre elles coûte $O(n)$ recopies, précédées d'une nouvelle allocation mémoire. Le code suivant :

```
    ListeTab li = new ListeTab();
    for(int i = 0; i < n; i++)
        li.ajouterEnTete(i);
```

prendrait alors $O(n^2)$ opérations, ce qu'on peut considérer comme loin de l'optimal.

Nous laissons au lecteur intéressé l'écriture des fonctions `ajouterEnQueue` et `enleverEnQueue`.

Cette façon de faire est-elle à proscrire définitivement ? Pas tout à fait. Si l'on se contente de faire des ajouts en queue, la stratégie optimale est de créer un tableau de taille 4 (par exemple), de le remplir et si on déborde, d'allouer un tableau de taille 2 fois supérieure, et souvent ne jamais désallouer pour ré-allouer un tableau plus petit. Suivant les contextes, des variantes de cette approche sont possibles.

8.3 Maillon et chaînes

Nous allons commencer par une chaîne qui ne contient qu'un crochet, avant de décrire la version avec deux crochets. À chaque étape, nous nous poserons également des questions de complexité, c'est-à-dire quel est le coût de chaque opération, avec en objectif de réduire celui-ci.

Une *chaîne* (on dit plus souvent *liste chainée*) d'entiers est une structure abstraite qu'on peut voir comme une suite de *maillons* (plus souvent *cellules*) contenant des informations et reliées entre eux. Chaque maillon contient un couple formé d'une donnée, et de la référence au maillon suivant, comme dans un jeu de piste. C'est le système d'exploitation de l'ordinateur qui renvoie les adresses des objets.

8.3.1 Mise en place

Il est logique d'organiser notre travail en deux classes. La classe `Maillon` gère très simplement les maillons, sans hypothèse sur l'organisation ultérieure en chaîne, ce qui la rendra réutilisable dans la classe `ListeChainee` qui choisit une organisation de ces maillons.

La raison d'être de cette programmation en deux niveaux, indépendamment de séparer la problématique liste de son implantation ? La difficulté vient du fait que le code (assez naturel) :

```
    public void afficher(){
        if(this != null){
            ...
        }
    }
```

est un non-sens en JAVA, car si la méthode est appelée, c'est que **this** représente un objet existant.

On commence par donner les constituants des deux classes avant de procéder plus avant.

La classe `Maillon`

Un maillon contient une donnée et la référence du maillon suivant. C'est l'embryon de notre chaîne :

```
public class Maillon{
    public int contenu;
    public Maillon suivant;
    public Maillon(int c, Maillon m){
        this.contenu = c;
        this.suivant = m;
    }
}
```

La classe `ListeChainee`

La classe `ListeChainee` traite des séquences de maillons. Un objet de la classe `ListeChainee` va contenir un maillon. La création se fait par initialisation du premier maillon à **`null`** ; le test de vacuité s'en déduit simplement :

```
public class ListeChainee{
    private Maillon tete;
    public ListeChainee(){
        this.tete = null;
    }
    public boolean estVide(){
        return this.tete == null;
    }
```

8.3.2 Principes des interactions entre les deux classes

Nous décidons que nous voulons programmer des objets et des méthodes associées pour la classe `ListeChainee`. Que faisons-nous pour la classe `Maillon` ? On peut la programmer en objet, mais alors tous les appels depuis `ListeChainee` ne pourront se faire qu'après un test à **`null`**. De plus, cela va rendre `Maillon` indissociable de `ListeChainee`, ces deux classes fonctionneront en symbiose. Par exemple, tester si

une liste chaînée contient un entier donné s'écrit dans `ListeChainee` (c'est aussi un exemple de parcours, voir plus loin) :

```
    public boolean contient(int x){
        if(this.tete == null) // test explicite
            return false;
        else
            return this.tete.contient(x); // délégation
    }
```

qui apelle la méthode correspondante dans la classe `Maillon` :

```
    public boolean contient(int x){
        if(this.contenu == x)
            return true;
        else{
            if(this.suivant == null)
                return false;
            else
                return this.suivant.contient(x);
        }
    }
```

On constate également pas mal de duplication de code avec plusieurs tests à **`null`**.

On peut décider que la classe `Maillon` sera programmée avec essentiellement des méthodes de classe. Dans ce cas, elle devient indépendante de la classe `ListeChainee` et peut être utilisée dans des contextes différents. La classe `ListeChainee` ne travaille alors presque exclusivement que par délégation à la classe `Maillon`. Notons que les tests unitaires sur la classe `Maillon` seront plus faciles à écrire. Cette façon de programmer est généralement utilisée dans les bibliothèques prédéfinies des langages classiques. Reprenant notre exemple, on écrit alors dans `ListeChainee` :

```
    public boolean contient(int x){
        return Maillon.contient(this.tete, x);
    }
```

qui délègue dans la `Maillon` à :

```
    public static boolean contient(Maillon m, int x){
        if(m == null)
            return false;
        else{
            if(m.contenu == x)
                return true;
            else
                return contient(m.suivant, x);
        }
    }
```

Cette fois, la programmation dans `ListeChainee` est réduite au minimum, `Maillon` fait tout, et il n'y pas de duplication de code. C'est cette approche que nous allons utiliser dans la suite du chapitre et dans celui sur les arbres.

Ajouter un maillon

Pour ajouter un nouvel entier dans une liste chaînée, on crée un nouveau maillon qu'on branche sur l'ancien :

```
    public void ajouterEnTete(int i){
        this.tete = new Maillon(i, this.tete);
    }
```

Illustrons ce mécanisme lors de l'exécution du programme suivant :

```
public class TestsListeChainee{
    public static void main(String[] args){
        ListeChainee ch = new ListeChainee();
        ch.ajouterEnTete(3);    // [1]
        ch.ajouterEnTete(12);   // [2]
        ch.ajouterEnTete(4);    // [3]
    }
}
```

Le premier maillon contenant 3 se trouve accroché (figure 8.2, (b)) ; on crée alors le deuxième maillon contenant 12 (en (c)) et on l'accroche au maillon déjà installé, puis on prend sa place sur le crochet (position finale en (d)).

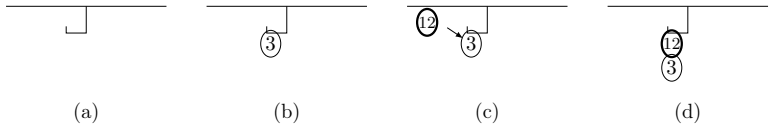
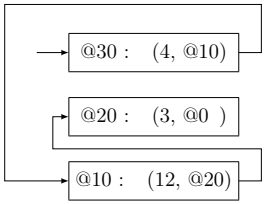


FIGURE 8.2 – Insertion.

On a l'habitude de rajouter des flèches pour lier les maillons, la première flèche désignant le point d'entrée dans le jeu de piste, ce qui va nous conduire à la structure :



Examinons ce qui se passe ligne à ligne dans le programme. Quand on crée le premier maillon (ligne [1]), on obtient (par exemple) :

```
ch = [tete=@20] -> @20:[contenu=3; suivant=@0] -> @0
```

La valeur de `ch` est la référence en mémoire de la tête de la chaîne (donc un maillon), qui vaut ici `@20`. Après la ligne [2], on obtient :

```
ch = [tete=@10] -> @10:[contenu=12; suivant=@20] ->
                   @20:[contenu=3; suivant=@0] -> @0
```

et `ch.tete` vaut `@10`. À la fin du programme, on a :

```
ch = [tete=@30] -> @30:[contenu=4; suivant=@10] ->
                   @10:[contenu=12; suivant=@20] ->
                   @20:[contenu=3; suivant=@0] -> @0
```

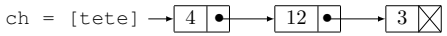
et `tete` contient `@30`. Quand le contexte est clair, on peut simplifier le dessin en

```
ch = [tete=@30] -> @30:[4, @10] -> @10:[12, @20] -> @20:[3, @0] -> @0
```

Dans la plupart des cas, et quand on a bien saisi le mécanisme, on peut abstraire les listes chaînées jusqu'à obtenir :

```
ch = [tete] -> @30:4 -> @10:12 -> @20:3 -> @0
```

ou encore



pour aboutir finalement à

```
ch = [tete] -> 4 -> 12 -> 3 -> null
```

avec la convention JAVA que **`null`** représente l'adresse @0. On dit que le case contenant 4 *pointe* sur la case contenant 12, etc.

Faire des dessins est primordial quand on veut comprendre les structures de données récursives !

Parcours

Parcourir une chaîne, c'est examiner tous les maillons les uns après les autres, une fois et une seule, dans l'ordre de la chaîne, ce qui garantira un coût linéaire en la taille de la liste. Le parcours le plus simple est celui où on se contente d'afficher les entiers contenus dans les maillons. Dans la classe `ListeChainee`, on écrit :

```
    public void afficher(){
        Maillon.afficher(this.tete);
    }
```

avec (dans la classe `Maillon`) une méthode :

```
public static void afficher(Maillon m){
    while(m != null){
        TC.println(m.contenu);
        m = m.suivant;
    }
}
```

Remarquons que cette fonction ne détruit pas l'information en mémoire, mais se contentent de l'explorer de proche en proche. Ici, l'appel se fait (dans le `main` de `TestsListeChainee`) par :

```
ch.afficher();
```

On peut également récrire la fonction sous forme récursive :

```
public static void afficher(Maillon m){
    if(m != null){
        TC.println(m.contenu);
        afficher(m.suivant);
    }
}
```

L'avantage est alors de pouvoir écrire facilement une fonction qui affiche les éléments dans l'ordre inverse, simplement en permutant deux lignes (mais au prix d'une pile de taille $O(n)$) :

```
public static void afficher(Maillon m){
    if(m != null){
        afficher(m.suivant);
        TC.println(m.contenu);
    }
}
```

Donnons un autre exemple de parcours, celui qui permet de calculer la *longueur* d'une chaîne, qui est le nombre de maillons de la chaîne. Par convention, la chaîne vide a pour longueur 0. Pour déterminer la longueur, on peut écrire au choix une des fonctions qui suivent, par exemple dans la classe `Maillon`, en utilisant de nouveau un parcours :

```
public static int longueur(Maillon m){
    int lg = 0;

    while(m != null){
        lg++;
        m = m.suivant;
    }
    return lg;
}
```


On peut écrire également ce même calcul de façon récursive, qui a l'avantage d'être plus compacte, mais également de coller de plus près à la définition récursive de la liste chaînée : une liste est ou bien vide, ou bien elle contient au moins une cellule, sur laquelle on peut effectuer une opération avant d'appliquer la méthode au reste de la liste. Cela donne la fonction :

```
public static int longueurRec(Maillon m){
    if(m == null) // test d'arrêt
        return 0;
    else
        return 1 + longueurRec(m.suivant);
}
```

Dans tous les cas, on crée, dans la classe `ListeChainee`, une fonction qui délègue les calculs à la fonction de `Maillon` :

```
public int longueur(){
    return Maillon.longueur(this.tete);
}
```

Copies

Il s'agit de définir ici de quoi on parle. Il existe plusieurs types de copies. Au minimum, on doit récupérer une chaîne dans laquelle les maillons sont dans le même ordre que la chaîne de départ. Mais il peut y avoir partage ou pas des maillons. Il convient là aussi de faire des dessins pour comprendre ce que l'on veut. Le code suivant fait une copie de la référence de la chaîne

```
ListeChainee ch1 = ...;
ListeChainee ch2 = ch1;
```

On appelle cela une *copie légère* (ou *superficielle*) (*shallow copy* en anglais) et correspond à la situation suivante en mémoire :

```
ch1 = [tete] -> @30:4 -> @10:12 -> @20:3 -> @0
ch2 = [tete] -> @30:4 -> @10:12 -> @20:3 -> @0
```

On peut également parler de *partage*.

A contratio, on parle de copie *profonde* (*deep copy* en anglais) quand on copie en créant de nouveaux maillons.

Pour copier à l'endroit, il est beaucoup plus compact de procéder récursivement : si on veut copier `ch=(c, suivant)`, on copie à l'endroit la chaîne `suivant` à laquelle on rajoute `c` en tête. Cela donne :

```
public static Maillon copier(Maillon m){
    if(m == null)
        return null;
    else
        return
          new Maillon(m.contenu, copier(m.suivant));
}
```

et la méthode d'objet correspondante dans `ListeChainee` :

```
public ListeChainee copier(){
    return new ListeChainee(Maillon.copier(this.tete));
}
public ListeChainee(Maillon m){
    this.tete = m;
}
```

qui utilise le nouveau constructeur donné.

Exercice 8.1 Écrire la méthode de façon itérative.

Suppression en tête

Pour récupérer l'information en tête de liste (dans `ListeChainee`), on écrit :

```
public int enleverEnTete(){
    int c = this.tete.contenu;
    this.tete = this.tete.suivant;
    return c;
}
```

qui se lit comme : on copie le contenu du maillon de tête, puis on met à sa place le maillon qui le suit immédiatement dans la liste. Remarquons l'hypothèse faite en entrée de la fonction `enleverEnTete`. Nous avons laissé au programmeur la responsabilité de s'assurer que la liste d'entrée est non vide. On peut améliorer le code (en le ralentissant) en testant explicitement que la liste est non vide ; dans ce cas, il serait logique de lancer une exception (cf. 14.4). Par exemple, si on part de :

```
ch = [tete] -> @30:4 -> @10:12 -> @20:3 -> @0
```

on renvoie 4 et le dessin en mémoire devient :

```
ch = [tete] -> @10:12 -> @20:3 -> @0
```

Exercice 8.2 Écrire une méthode qui renvoie une copie nouvelle de la liste privée de son premier élément.

Proposition 4 *La structure de liste chaînée permet une complexité en $O(1)$ pour chacune des opérations `ajouterEnTete` et `enleverEnTete`.*

Suppression de la première occurrence

Le problème ici est de fabriquer une liste `ch2` avec le contenu de la liste `ch1` dont on a enlevé la première occurrence d'une valeur donnée, dans le même ordre que la liste de départ. On peut subdiviser le problème en deux sous-cas. Le premier correspond à celui où la cellule concernée est en tête de liste. Ainsi :

```
ch1 = [tete] -> @10:4 -> @30:12 -> @20:3 -> @40:5 -> null
```

dont on enlève 4 va donner :


```
ch2 = [tete] -> @50:12 -> @60:3 -> @70:5 -> null
```

Dans le cas général, l'élément se trouve au milieu :

```
ch1 = [tete] -> @10:4 -> @30:12 -> @20:3 -> @40:5 -> null
```

si on enlève 3 :

```
ch2 = [tete] -> @50:4 -> @60:12 -> @70:5 -> null
```

Le principe est de copier les maillons de la liste, sauf celui qu'on souhaite enlever.

On peut programmer récursivement ou itérativement (bon exercice !). La méthode récursive peut s'écrire (dans la classe `Maillon`) :

```
public static Maillon supprimerRec(Maillon m, int c){
  if(m == null)
      return null;
  if(m.contenu == c)
      return copier(m.suivant);
  else
      return
         new Maillon(m.contenu, supprimerRec(m.suivant, c));
}
```

Exercice 8.3 Modifier la méthode précédente de façon à enlever toutes les occurrences de `c` dans la liste.

8.3.3 Amélioration de la classe `ListeChainee`

On rajoute un maillon pour la queue de la liste. Ainsi, nous n'aurons plus à parcourir la liste pour ajouter (ou supprimer) des éléments en queue de liste. Il est aisé d'ajouter la gestion de la queue de liste.

```
public class ListeChainee{
    private Maillon tete, queue;

    public ListeChainee(){
        this.tete = null;
        this.queue = null;
    }
    public boolean estVide(){
        return this.tete == null;
    }
```

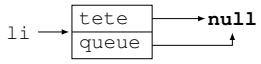
On doit gérer avec soin nos maillons principaux, ceux de tête et de queue. Pour ajouter un nouvel entier, deux cas se présentent : si la liste est vide, on crée un nouveau maillon, et la tête et la queue désignent le même maillon ; si la liste est non vide, seule la tête va être changée.

```
    public void ajouterEnTete(int c){
        if(this.estVide()){
            this.tete = new Maillon(c, null);
            this.queue = this.tete;
        }
        else
            this.tete = new Maillon(c, this.tete);
    }
```

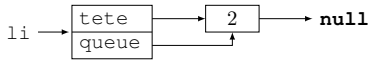
Illustrons les deux cas avec le programme de test :

```
public class TestsListeChainee{
    public static void main(String[] args){
        ListeChainee li = new ListeChainee(); // [1]

        li.ajouterEnTete(2);    // [2]
        li.ajouterEnQueue(1);   // [3]
    }
}
```

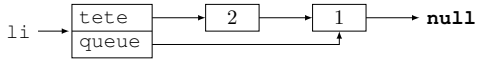
À la création (ligne [1]), la structure ressemble à celle-ci



Après la ligne [2], on a créé un nouveau maillon, la tête de liste pointe sur ce nouveau maillon, ainsi que la queue :



Le maillon contenant 1 est créé à la ligne [3], on met simplement à jour la queue de la liste, ce qui donne :



L'affichage d'une liste dans l'ordre se fait par la méthode habituelle. Il en est de même pour la suppression en tête de liste, la queue de liste n'étant pas affectée.

Passons maintenant à l'ajout en queue, qui demande une gestion particulière, mais évite de parcourir toute la chaîne :

```
    public void ajouterEnQueue(int c){
        if(this.estVide()){
            this.queue = new Maillon(c, null);
            this.tete = this.queue;
        }
        else{
            // on crée un nouveau maillon
            Maillon m = new Maillon(c, null);
```



```
            // on modifie la queue
            this.queue.suivant = m;
            // on met à jour la queue
            this.queue = m;
        }
    }
```

Notons que le coût d'ajouter en queue est désormais $O(1)$.

8.3.4 Listes doublement chaînées

La gestion très serrée de la mémoire peut nécessiter d'autres structures. Par exemple, une *liste doublement chaînée*, où chaque cellule contient l'adresse de la cellule suivante, mais aussi de la précédente, permet d'enlever un maillon en plein milieu de la liste et de raccrocher les wagons d'un côté comme de l'autre en temps constant, ou permettre de fusionner rapidement deux listes. On peut dessiner ainsi

```
li -> 1 <-> 3 <-> 2 <-> 4 -> null
```

On se convainc également que la fonction `enleverEnQueue` est maintenant en $O(1)$.

Exercice 8.4 Modifier la classe `ListeChainee` pour qu'elle code désormais une liste doublement chainée. Écrire les méthodes utiles.

8.3.5 Remarque méthodologique

Il est crucial de comprendre qu'une liste ne s'utilise que quand on a besoin d'ajouter (ou supprimer) en tête ou en queue, ce qui peut se faire en $O(1)$ opérations. Une liste n'est pas faite pour qu'on aille ajouter (ou supprimer) un maillon à la i-ème place, ce qui nécessite $O(i)$ opérations, et ainsi $O(n^2)$ si on itère sur toute la liste ! Bien que souvent disponibles dans une bibliothèque de traitement des listes, nous déconseillons fortement l'utilisation de telles méthodes.

8.4 Gestion chirurgicale de la mémoire

Les listes chaînées sont un moyen abstrait de parcourir la mémoire. On peut imaginer des jeux subtils qui n'altèrent pas le contenu des cases, mais modifient le parcours de celles-ci. Donnons des exemples, qui sont programmés dans la classe `Maillon`.

8.4.1 Ajout et suppression en queue

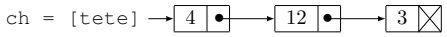
La fonction d'ajout présente une petite complication, puisqu'il faut d'abord parcourir toute la chaîne pour trouver le dernier maillon, pour pouvoir accrocher le nouvel élément à sa place (dans la classe `ListeChainee`) :

```
    public void ajouterEnQueue(int c){
        this.tete = Maillon.ajouterEnQueue(this.tete, c);
    }
```

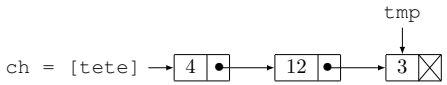
avant d'écrire (dans `Maillon`) :

```
public static void ajouterEnQueue(Maillon m, int c){
    if(m == null)
        return new Maillon(c, null);
    else{
        // on recherche le dernier maillon
        Maillon tmp = m;
        while(tmp.suivant != null)
            tmp = tmp.suivant;
        tmp.suivant = new Maillon(c, null);
        return m;
    }
}
```

Supposons que l'on veuille rajouter 5 à la fin de la liste :



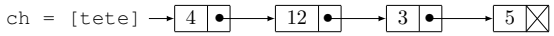
On doit d'abord localiser le dernier maillon `tmp` de la chaîne :



ce maillon satisfaisant

```
tmp.contenu = 3
tmp.suivant = null
```

On crée alors le maillon contenant 5 et on le raccroche à la liste :



Insistons sur le fait que `m` n'est pas une chaîne, mais simplement l'adresse d'un maillon, adresse qui évolue au cours de l'exécution de l'algorithme. En mémoire, le jeu de piste est toujours présent, il a été allongé, et son début est toujours repéré par `l`.

Une version récursive est là aussi possible :

```
public static Maillon ajouterEnQueueRec(Maillon m, int c){
    if(m == null)
        return new Maillon(c, null);
    else{
        m.suivant = ajouterEnQueueRec(m.suivant, c);
        return m;
    }
}
```


Elle est plus technique à écrire, car elle suppose une plus grande maîtrise des références.

La suppression participe d'un mouvement similaire : on doit localiser le dernier maillon, mais aussi l'avant dernier, pour pouvoir décrocher le maillon correctement. Il faut faire attention au cas où le maillon de tête pourrait changer. Le principe est de gérer une variable `pred` qui va contenir l'adresse de l'avant dernier maillon, si celui-ci existe :

```
public int enleverEnQueue(){
    Maillon m = this.tete, pred = null;

    // localisation du dernier maillon
    while(m.suivant != null){
        pred = m;
        m = m.suivant;
    }
    // on récupère le contenu
    int c = m.contenu;
    if(m == this.tete)       // [1]
        // un seul maillon
        this.tete = null;
    else
        // pred -> m -> null
        pred.suivant = null;
    return c;
}
```

On aurait pu remplacer le test de la ligne [1] par :

```
    if(pred == null)
```

Remarquons que les deux opérations d'ajout et suppression en queue sont coûteuses, puisque le parcours initial requiert un temps proportionnel à la longueur de la liste. Si on est appelé à faire cette opération souvent, il vaut mieux utiliser la structure de données de la section 8.3.4.

8.4.2 Insertion dans une liste triée

Il s'agit ici de créer une nouvelle cellule, qu'on va intercaler entre deux cellules existantes. Considérons la liste :

```
ch1 = [tete] -> @10:4 -> @30:12 -> @20:30 -> null
```

qui contient trois cellules avec les entiers 4, 12, 30. On cherche à insérer l'entier 20, ce qui conduit à créer le maillon

```
m = @50:20 -> null
```

On doit insérer ce maillon entre la deuxième et la troisième cellule. Graphiquement, on sépare le début et la fin de la liste en :

```
ch = [tete] -> @10:4 -> @30:12 ->                    @20:30 -> null
```

décrochant chacun des wagons qu'on raccroche

```
ch = [tete] -> @10:4 -> @30:12 ->    [ @50:20 -> ]    @20:30 -> null
```

d'où :

```
ch = [tete] -> @10:4 -> @30:12 -> @50:20 -> @20:30 -> null
```

On programme selon ce principe une méthode qui insère un entier dans une liste déjà triée dans l'ordre croissant :

```
    // on suppose l triée dans l'ordre croissant
    public static Maillon insertion(Maillon m, int c){
        if(m == null)
            return new Maillon(c, null);
        // m = [contenu, suivant]
        if(m.contenu < c){
            // on doit insérer c dans suivant
            m.suivant = insertion(m.suivant, c);
            return m;
        }
        else
            // on met c en tête car <= m.contenu
            return new Maillon(c, m);
    }
```

On constate que le coût est $O(n)$ pour une liste de taille n.

Exercice 8.5 Écrire une méthode de tri d'un tableau en utilisant la méthode précédente.

8.4.3 Inverser les flèches

Plus précisément, étant donnée une liste

```
ch = [tete] -> @10:(4, @30) -> @30:(12, @20) -> @20:(3, @0) -> @0
```

on veut modifier les données de sorte que `l` désigne maintenant :

```
ch = [tete] -> @20:(3, @30) -> @30:(12, @10) -> @10:(4, @0) -> @0
```

Une fois n'est pas coutume, la forme itérative est sans doute un peu plus simple à écrire. On parcours la liste et on inverse de proche en proche.

```
    public static Maillon inverser(Maillon m){
        Maillon mnouv = null, tmp;

        while(m != null){
            // mnouv contient le début de la liste inversée
            tmp = m.suivant;   // on protège
            m.suivant = mnouv; // on branche
            mnouv = m;         // on met à jour
            m = tmp;  // on reprend avec la suite de la liste
        }
        return mnouv;
    }
```


Il est conseillé de suivre pas à pas l'exécution de cette fonction sur l'exemple.

Exercice 8.6 Écrire la méthode `inverser` sous forme récursive.

8.5 Tableau ou liste ?

8.5.1 Principes généraux

On utilise un tableau quand :
- on connaît la taille (ou un majorant proche) à l'avance ;
- on a besoin d'accéder aux différentes cases dans un ordre quelconque (accès direct à `t[i]`) ;
- on n'a pas besoin d'insérer, y compris au début.

On utilise une liste quand :
- on ne connaît pas la taille *a priori* ;
- on n'a pas besoin d'accéder souvent au i-ème élément ;
- on veut pouvoir faire des opérations rapides sur le début ou la fin ;
- on ne veut pas gaspiller de place ; ceci doit être tempéré, car un maillon requiert au minimum la place pour les références d'un ou deux autres maillons.

8.5.2 En JAVA

Une des alternatives classiques aux tableaux de taille fixe est celle connue en JAVA comme la classe `ArrayList` qui permet de gérer des tableaux de taille variable. On obtient la souplesse des tableaux avec un faible surcoût.

Chapitre 9

Arbres

Puisqu'il faut changer les choses
Aux arbres citoyens !
Y. Noah

Les arbres sont une structure très classique utilisée en informatique pour ses propriétés de représentation. Nous allons donner les propriétés de base de ces objets, et nous nous concentrerons sur les plus fréquemment utilisés, les arbres binaires.

9.1 Arbres généraux

9.1.1 Définitions

Un arbre (enraciné, planaire) est défini comme étant soit vide soit une structure contenant une racine r, ainsi qu'un ensemble d'arbres $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ attachés à la racine r. On peut le noter symboliquement : $A = (r, S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Par exemple, la figure 9.1 représente un arbre :

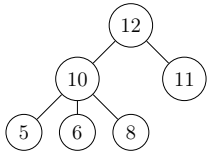


FIGURE 9.1 – Exemple d'arbre.

Les éléments cerclés sont appelés des *nœuds* de l'arbre. Le nœud initial est appelé *racine*. Les nœuds terminaux sont des *feuilles* ; les nœuds non terminaux sont des nœuds *internes*. Tous les nœuds sauf la racine ont un *parent*, les nœuds internes ont au moins un *enfant*, les feuilles n'ont pas d'enfant. Un arbre est dit k-aire si tous les nœuds ont au plus k enfants.

On appelle *hauteur* d'un arbre A le nombre maximal de nœuds trouvés dans un chemin entre la racine et une feuille. Notons $\mathcal{H}(A)$ cette quantité. Par convention, la hauteur de l'arbre vide (ou `null`) est 0 ; la hauteur de l'arbre avec un seul nœud (donc

ne contenant que sa racine) est 1. Si $A = (r, S_1, \ldots, S_n)$, alors

$$\mathcal{H}(A) = 1 + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathcal{H}(S_i). \tag{9.1}$$

Si l'arbre contient n nœuds, sa hauteur est majorée par n (cas d'un arbre filiforme, donc une liste). La borne inférieure est $\log n / \log k$, car c'est la hauteur d'un arbre *complet*, avec $n = k^\ell$, dont toutes les feuilles sont à la même hauteur, comme par exemple celui de la figure 9.2.

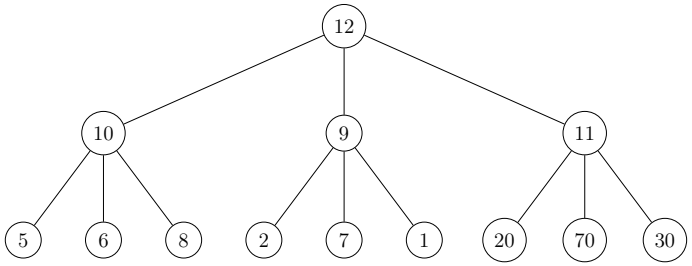
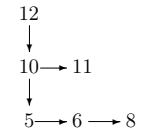


FIGURE 9.2 – Exemple d'arbre ternaire complet.

9.1.2 Représentation en machine

On peut par exemple gérer un tableau d'enfants ou encore une liste d'enfants. Une autre représentation, appelée représentation *enfant gauche et sœur/frère droit*, code un arbre non binaire en arbre binaire (cf. section suivante). Par exemple, l'arbre de la figure 9.1 pourra être codé en machine sous la forme de l'arbre binaire :



Nous laissons en exercice l'écriture des fonctions qui permettent de coder les arbres k-aires de cette façon, en particulier les parcours.

9.2 Arbres binaires

Un *arbre binaire* est défini comme étant soit vide, soit muni d'une racine et d'éventuels enfants gauche et droit, qui sont eux-mêmes des arbres, ce que l'on note $A = (r, G, D)$. Ce sera le cas de l'arbre de la figure 9.3.

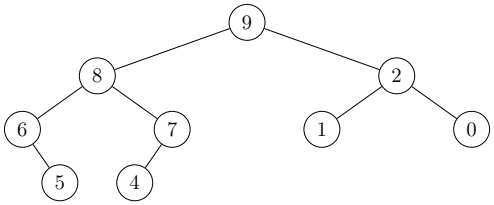


FIGURE 9.3 – Exemple d'arbre binaire.

9.2.1 Représentation en machine

Dans un tableau

Une des représentations possibles est celle d'un tableau des parents, ou à chaque nœud on associe son parent (qui est nécessairement unique). L'arbre de la figure 9.3 serait ainsi codé par

0	1	2	4	5	6	7	8	9
2	2	9	7	6	8	8	9	−1

où -1 est un codage du fait que 9 est la racine de l'arbre. Ce type d'implantation ne respecte pas l'ordre gauche/droite et n'est pas utilisable dans tous les cas de figure. De plus, il faudrait connaître le nombre de nœuds de l'arbre.

De façon dynamique

Pour économiser de la place, il est plus pratique de définir une structure dynamique qui implante un arbre. Comme pour les listes, nous définirons deux classes, la classe `Noeud` qui implante les nœuds d'un arbre et réalise les opérations internes, et la classe `Arbre` au-dessus de `Noeud` qui permet de l'utiliser. On écrit alors :

```
public class Noeud{
    private int contenu;
    public Noeud gauche, droit;

    public Noeud(int r, Noeud g, Noeud d){
        this.contenu = r;
        this.gauche = g;
        this.droit = d;
    }

    public int contenu(){
        return this.contenu;
    }
}
```

De même, nous créons pour l'instant la classe `Arbre` de façon minimale :


```
public class Arbre{
    private Noeud racine;

    public Arbre(){
        this.racine = null;
    }

    public boolean estVide(){
        return this.racine == null;
    }
}
```

Comme dans le cas des listes chaînées, nous séparons l'implantation de base des nœuds de l'implantation de plus haut niveau gérant dans quel ordre et dans quel sens on doit ajouter de nouvelles données. On verra une utilisation de cela à la section 9.3.1.

9.2.2 Trois parcours

On définit classiquement trois *parcours* d'arbre, qui permettent de considérer chaque nœud une fois et une seule dans un ordre particulier. Soit $A = (r, G, D)$ un arbre binaire. L'*ordre préfixe* considère d'abord la racine r, puis les deux sous-arbres gauche G et droit D dans cet ordre ; l'*ordre infixe* parcourt le sous-arbre gauche G, la racine r, le sous-arbre droit D ; l'*ordre postfixe* considère le sous-arbre gauche G, le droit D, puis la racine r. Il est plus facile de programmer ces parcours de façon récursive.

À titre d'exemple, on donne le code Java (dans la classe `Noeud`) des trois parcours où on affiche les données :

```
    public static void afficherPrefixe(Noeud a){
        if(a != null){
            System.out.print(a.contenu());
            afficherPrefixe(a.gauche);
            afficherPrefixe(a.droit);
        }
    }

    public static void afficherInfixe(Noeud a){
        if(a != null){
            afficherInfixe(a.gauche);
            System.out.print(a.contenu());
            afficherInfixe(a.droit);
        }
    }

    public static void afficherPostfixe(Noeud a){
        if(a != null){
            afficherPostfixe(a.gauche);
            afficherPostixe(a.droit);
            System.out.print(a.contenu());
```

```
        }
    }
```

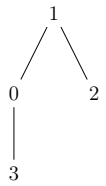
Les méthodes d'appel (ou *lanceurs*) dans `Arbre` sont :

```
    public void afficherPrefixe(){
        afficherPrefixe(this.racine);
    }
    public void afficherInfixe(){
        afficherInfixe(this.racine);
    }
    public void afficherPostfixe(){
        afficherPostfixe(this.racine);
    }
```

On enrichit la classe avec des constructeurs supplémentaires :

```
    // crée un arbre avec une racine et deux sous-arbres
    public Arbre(int c, Arbre g, Arbre d){
        this.racine = new Noeud(c, g.racine, d.racine);
    }

    // crée une feuille
    public Arbre(int c){
        this.racine = new Noeud(c, null, null);
    }
```

La classe suivante permet de construire l'arbre



et de l'afficher suivant les trois parcours. Le programme :

```
public class TestsArbre{

    public static void main(String[] args){
        Arbre a = new Arbre(1,
                            new Arbre(0,
                                      new Arbre(3),
                                      new Arbre()),
                            new Arbre(2));
        a.afficherPrefixe(); System.out.println();
        a.afficherInfixe(); System.out.println();
        a.afficherPostfixe(); System.out.println();
    }
}
```


affichera :

```
1032
3012
3021
```

9.3 Exemples d'utilisation

9.3.1 Arbres binaires de recherche

Un *arbre binaire* de recherche s'écrit $A = (r, G, D)$ vérifiant la propriété que tout élément du sous-arbre gauche G est plus petit ou égal à r, lui-même plus petit que tout élément du sous-arbre droit D. C'est le cas de l'arbre dessiné à la figure 9.4.

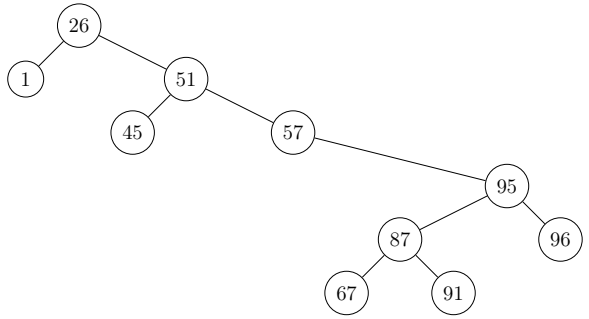


FIGURE 9.4 – Exemple d'arbre binaire de recherche.

Un parcourt infixe d'un tel arbre fournit la liste des valeurs des nœuds des arbres dans l'ordre croissant.

Nous allons modifier notre classe de base pour gérer de tels arbres.

```
public class ABR{
    private Noeud racine;

    public ABR(){
        this.racine = null;
    }

    public boolean estVide(){
        return this.racine == null;
```

```
    }

    public static Noeud inserer(Noeud a, int x){
        if(a == null)
            // on crée une nouvelle feuille
            return new Noeud(x, null, null);
        else if(x <= a.contenu()){
            // on insère dans le sous-arbre gauche
            a.gauche = inserer(a.gauche, x);
            return a;
        }
        else{
            // x > a.racine;
            // on insère dans le sous-arbre droit
            a.droit = inserer(a.droit, x);
            return a;
        }
    }
    // le lanceur
    public void inserer(int x){
        this.racine = inserer(this.racine, x);
    }
}
```

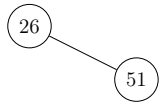
La seule nouveauté est la fonction d'insertion, qui est plus complexe. Celle-ci cherche à insérer en respectant la notion d'ABR. Le cas de base de la récursion est la création d'une feuille. Quand l'arbre a une racine, on effectue l'insertion du côté où x doit se trouver pour respecter la propriété. Cette fonction s'écrit beaucoup plus facilement de façon récursive que de manière itérative.

À titre d'exemple, nous allons créer un ABR à partir du tableau contenu dans la fonction de test suivante :

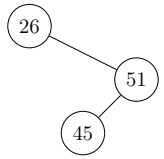
```
  public static void main(String[] args){
    int[] t = new int[]{26, 51, 45, 57, 95, 87, 1, 67, 96, 91};

    ABR A = new ABR();
    for(int i = 0; i < t.length; i++)
      A.inserer(t[i]);
  }
```

et qui va nous permettre de simuler une insertion dynamique de ses éléments, l'un après l'autre. Le premier nœud est

On insère alors 51 dans le sous-arbre droit de 26 :



Pour insérer le 45, on part dans le sous-arbre droit de 26, puis dans le sous-arbre gauche de 51 :



On procède ainsi de proche en proche pour aboutir finalement à la figure 9.4.

Il est instructif de détailler le fonctionnement de l'insertion au niveau de la mémoire, ce qui permettra de mieux comprendre la fonction d'insertion, et notamment les différents **return** qui paraissent inutiles au premier abord. L'insertion de 26 ne pose pas de problème : la ligne 15 décrit l'appel à la création d'un nouveau nœud de racine 26 :

```
A = [racine=@20] -> @20:[contenu=26, gauche=@0, droit=@0]
```

On doit maintenant insérer 51. Comme il est plus grand que le contenu courant à la ligne 16, on passe à la ligne 23, qui demande à insérer 51 dans le fils droit du nœud de contenu 26. L'appel récursif va renvoyer un nouveau nœud de racine 51, dont on va mettre l'adresse à la place du sous-arbre **null**. Ainsi, la mémoire sera :

```
A = [racine=@20] -> @20:[contenu=26, gauche=@0, droit=@30]
@30:[contenu=51, gauche=@0, droit=@0]
```

Pour insérer 45, on part dans le sous-arbre droit de 26, puis dans le sous-arbre gauche de 51 :

```
A = [racine=@20] -> @20:[contenu=26, gauche=@0, droit=@30]
@30:[contenu=51, gauche=@40, droit=@0]
@40:[contenu=45, gauche=@0, droit=@0]
```

On laisse en exercice l'évolution de la mémoire jusqu'à l'arbre final.

La recherche d'un élément dans un ABR se fait suivant le même principe que pour l'insertion : on compare l'élément que l'on cherche au contenu de la racine courante, et on décide en fonction du résultat si on s'arrête ou si on continue à gauche ou à droite. Le programme est le suivant. On ne fera pas plus de tests que la hauteur de l'arbre.

```
    public static Noeud estDans(Noeud n, int x){
        if(n == null)
            return null;
        if(x == n.contenu())
            return n;
        else if(x < n.contenu())
```

```
            return estDans(n.gauche, x);
        else
            return estDans(n.droit, x);
    }
```

et la méthode correspondante dans ABR :

```
    public boolean estDans(int x){
        return estDans(this.racine, x) != null;
    }
```

Il reste à traiter du cas de la suppression d'un nœud dans un ABR. La fonction principale suit le schéma classique de parcours dans un ABR, le seul ajout majeur étant un appel à une méthode qui supprime la racine d'un sous-arbre :

```
    public static Noeud supprimer(Noeud n, int x){
        if(n == null)
            return null;
        else if(x < n.contenu()){
            n.gauche = supprimer(n.gauche, x);
            return n;
        }
        else if(x > n.contenu()){
            n.droit = supprimer(n.droit, x);
            return n;
        }
        else // x = n.contenu()
            return supprimerRacine(n);
    }
```

Comment supprime-t-on une racine ? Le cas le plus simple est celui de la suppression d'une feuille, où on décroche simplement le nœud de son parent ; le résultat est donc un nœud vide. On peut isoler deux autres cas faciles :

pour lesquels on renvoie G (resp. D). On vérifie aisément que la propriété d'ABR est toujours satisfaite dans ces deux cas. Dans le cas général, on fait appel à une méthode qui supprime un nœud complet. Cela donne pour commencer :

```
    // n = (r, G, D)
    public static Noeud supprimerRacine(Noeud n){
        if(estFeuille(n))
            // n = (r, null, null)
            return null;
        else if(n.gauche == null)
```



```
            // n = (r, null, D)
            return n.droit;
        else if(n.droit == null)
            // n = (r, G, null)
            return n.gauche;
        else
            return supprimerRacineInterne(n);
        }
    }
```

À titre d'exemple, la suppression de 45 de notre arbre en exemple conduit à l'arbre de la figure 9.5.

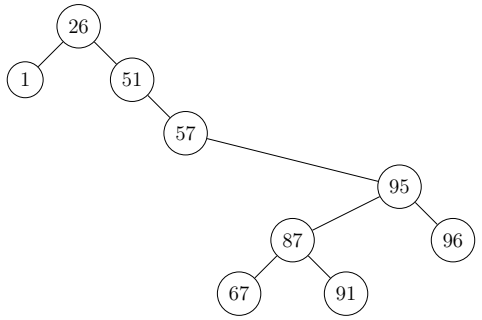


FIGURE 9.5 – Après suppression de 45.

L'idée est de remplacer la racine r par le plus grand descendant dans G, toujours avec dans le but de conserver la propriété d'ABR. Ici, on doit faire de la chirurgie au petit point, car on doit chercher ce descendant, le détacher de son parent et le faire migrer à la place de r. Il paraît plus simple de procéder de manière itérative. On localise d'abord le descendant le plus à droite g dans G. Si $g = (s, gg, gd)$ et que gd soit nul (autrement dit $g = G$), alors la racine de G est elle-même ce descendant et on doit mettre s à la place de r et son enfant gauche est gg ; si gd n'est pas nul, on utilise le fait qu'on a mémorisé le chemin pour aller en ce point, et on doit modifier l'enfant droit correspondant.

```
    // n = (r, G, D) et G, D != null
    public static Noeud supprimerRacineInterne(Noeud n){
        Noeud g = n.gauche, avantg = null;

        // on descend le plus à droite possible
        while(g.droit != null){
            avantg = g;
            g = g.droit;
        }
```

```
        if(avantg == null)
            // G = (s, gg, null)                    [1]
            n.gauche = g.gauche;
        else // avantg -> g = (s, gg, null)
            avantg.droit = g.gauche;
        n.racine = g.racine;
        return n;
    }
```

Par exemple, supposons qu'on veuille supprimer le nœud 95. L'exécution de l'algorithme avant mise à jour est expliquée dans le dessin suivant. Le fils le plus à droite de G est $g = (91, null, null)$. Donc on doit décrocher ce nœud, et le mettre à la place de 95, ce qui donne la figure 9.6.

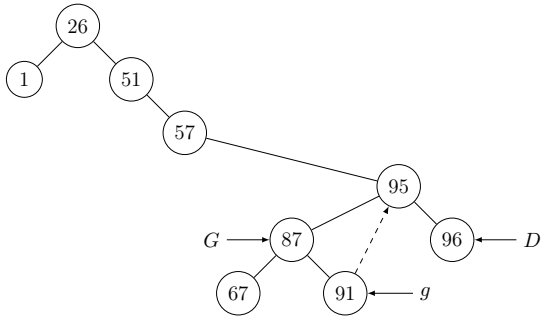


FIGURE 9.6 – On prépare la suppression de 95.

On obtient ainsi la figure 9.7. Si maintenant on enlève 91, on se trouve dans le cas particulier de la ligne [1], et on trouve le dessin de la figure 9.8.

Si l'arbre est équilibré (c'est-à-dire s'il est proche d'un arbre complet, cf. l'exemple de la figure 9.3), le temps d'insertion, de recherche ou suppression sera en $O(\log_2 n)$, c'est-à-dire rapide. Par contre, pour un arbre trop déséquilibré (pensez à l'arbre filiforme), la complexité restera $O(n)$, ce qui n'est pas intéressant. Il existe des techniques pour *équilibrer* les arbres, mais nous ne les détaillerons pas ici. Voir à ce propos [CLRS09]. À titre d'exemple, des opérations de rotation sur l'arbre de la figure 9.4 le transforment en l'arbre de la figure 9.9, qui stocke les mêmes valeurs, mais dans un arbre de recherche plus équilibré.

Pour finir, il faut savoir qu'en moyenne, l'arbre binaire de recherche permettant de stocker une permutation aléatoire de n éléments a pour hauteur $O(\log_2 n)$.

9.3.2 Expressions arithmétiques

On considère ici des expressions arithmétiques faisant intervenir des variables $a..z$, des entiers, des opérateurs binaires $+$, $-$, $*$, $/$, comme par exemple l'expression $x +$

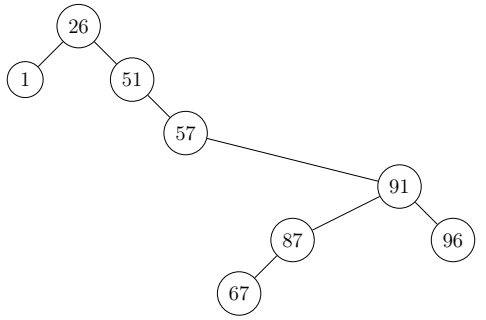


FIGURE 9.7 – Après suppression de 95.

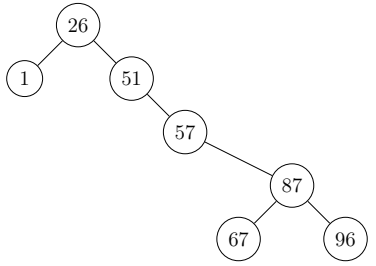


FIGURE 9.8 – Après suppression de 91.

$y/(2z + 1) + t$. Toute expression de ce type peut être représentée par un arbre binaire (de façon non unique), cf. figure 9.10, ou un arbre n-aire (comme dans MAPLE, cf. figure 9.11).

Objets de base, premières opérations

Le début de la classe est

```
public class Expression{
    private char type;
    private int n;
    private Expression gauche, droit;

    public Expression(char type, int n,
                      Expression fg, Expression fd){
        this.type = type;
```

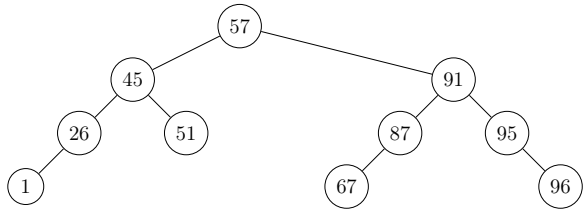


FIGURE 9.9 – L'arbre binaire exemple plus équilibré.

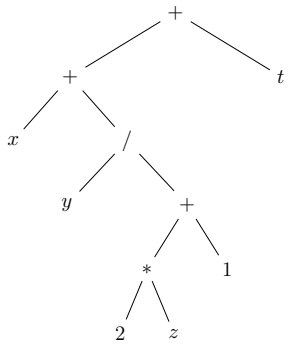


FIGURE 9.10 – Arbre binaire pour l'expression $x + y/(2z + 1) + t$.

```
        this.n = n;
        this.gauche = fg;
        this.droit = fd;
    }

    public static void afficherPrefixe(Expression e){
        if(e != null){
            System.out.print("(");
            if(e.type == 'I')
                System.out.print(e.n + " ");
            else
                System.out.print(e.type + " ");
            afficherPrefixe(e.gauche);
            afficherPrefixe(e.droit);
            System.out.print(")");
```

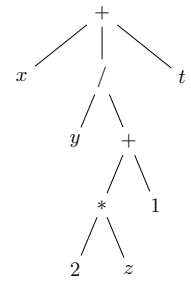



FIGURE 9.11 – Arbre n-naire pour l'expression $x + y/(2z + 1) + t$.

```
        }
    }

    public static Expression copier(Expression e){
        if(e == null)
            return null;
        return new Expression(e.type, e.n,
                              copier(e.gauche),
                              copier(e.droit));
    }
}
```

Passons aux quatre opérations :

```
    public static Expression additionner(Expression e1,
                                         Expression e2){
        return new Expression('+', 0, e1, e2);
    }

    public static Expression soustraire(Expression e1,
                                        Expression e2){
        return new Expression('-', 0, e1, e2);
    }

    public static Expression multiplier(Expression e1,
                                        Expression e2){
        return new Expression('*', 0, e1, e2);
    }

    public static Expression diviser(Expression e1,
                                     Expression e2){
        return new Expression('/', 0, e1, e2);
```

```
    }
```

Un exemple d'utilisation sera :

```
public class TestsExpr{
    public static void main(String[] args){
        Expression e, e1;
        e1 = new Expression('I', 2, null, null);
        e = new Expression('z', 0, null, null);
        e = Expression.multiplier(e1, e);
        e1 = new Expression('I', 1, null, null);
        e = Expression.additionner(e, e1);
        e1 = new Expression('y', 0, null, null);
        e = Expression.diviser(e1, e);
        e1 = new Expression('x', 0, null, null);
        e = Expression.additionner(e1, e);
        e1 = new Expression('t', 0, null, null);
        e = Expression.additionner(e, e1);
        Expression.afficherPrefixe(e);
  }
}
```

ce qui nous donne

```
(+ (+ (x )(/ (y )(+ (* (2 )(z ))(1 ))))(t ))
```

Substitution d'expressions

L'intérêt des arbres apparaît clairement dès qu'on veut substituer une variable par une expression quelconque. En clair, il suffit de brancher l'arbre de substitution partout où la variable apparaît.

```
    public static Expression substituer(Expression e, char v,
                                        Expression f){
        if(e == null)
            return null;
        else{
            if(e.type == v)
                return new Expression(f.type, f.n,
                                      copier(f.gauche),
                                      copier(f.droit);
            return new Expression(e.type, e.n,
                                  substituer(e.gauche, v, f),
                                  substituer(e.droit, v, f));
        }
    }
```

L'exemple :

```
    e1 = new Expression('x', 0, null, null);
```



```
    e1 = Expression.multiplier(e1, e1);
    e  = Expression.substituer(e, 'z', e1);
```

nous donne

```
(+ (+ (x )(/ (y )(+ (* (2 )(* (x )(x )))(1 ))))(t ))
```

Remplacer une variable par une valeur s'appelle *instantiation*. C'est une variante de la substitution générale :

```
    public static Expression instancier(Expression e,
                                        char v, int n){
        if(e == null)
            return null;
        else{
            if(e.type == v)
                return
                  new Expression('I', n,
                                 instancier(e.gauche, v, n),
                                 instancier(e.droit, v, n));
            return new Expression(e.type, e.n,
                                  instancier(e.gauche, v, n),
                                  instancier(e.droit, v, n));
        }
  }
```

L'exécution de :

```
    Expression.instancier(e, 'x', 5);
    Expression.instancier(e, 'y', 2);
    Expression.instancier(e, 't', 3);
    Expression.afficherPrefixe(e);
```

donne

```
(+ (+ (5 )(/ (2 )(+ (* (2 )(* (5 )(5 )))(1 ))))(3 ))
```

Il ne nous reste plus qu'à écrire le code d'évaluation d'une expression numérique :

```
    public static int evaluer(Expression e){
        if(e == null)
                return 0;
         switch(e.type){
            case 'I':
                  return e.n;
            case '+':
                  return evaluer(e.gauche) + evaluer(e.droit);
            case '*':
                  return evaluer(e.gauche) * evaluer(e.droit);
            case '-':
                  return evaluer(e.gauche) - evaluer(e.droit);
```

```
            case '/':
                  return evaluer(e.gauche) / evaluer(e.droit);
            default:
                  System.out.println("Erreur");
        }
          return 0;
    }
```

9.4 Les tas

Nous allons étudier ici une structure de données particulière qui *garantit* que la recherche du plus grand élément d'un tableau de n éléments se fasse en temps $O(1)$ au prix d'un coût de mise à jour en $O(\log_2 n)$. Cette structure se représente graphiquement par un arbre, même si traditionnellement et pour des raisons d'efficacité, cet arbre est stocké dans un tableau.

On dit qu'un tableau `t[0..TMAX]` possède la *propriété de tas* si pour tout $i >$ 0, `t[i]` (un parent) est plus grand que ses deux enfants gauche `t[2*i]` et droit `t[2*i+1]`. Nous supposons ici que les tas sont des tas d'entiers, mais il serait facile de modifier cela.

Le tableau `t = {0, 9, 8, 2, 6, 7, 1, 0, 3, 5, 4}` (rappelons que `t[0]` ne nous sert à rien ici) a la propriété de tas, ce que l'on vérifie à l'aide du dessin à la figure 9.12.

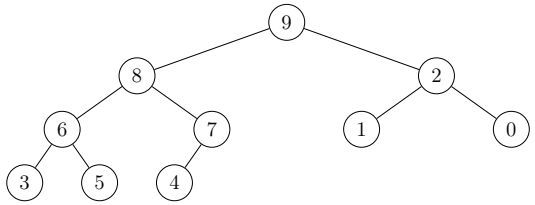


FIGURE 9.12 – Exemple de tas.

Bien que nous puissions nous contenter d'utiliser un tableau ordinaire, il est plus intéressant d'utiliser une classe spéciale, que nous appelerons `Tas`, et qui nous permettra de ranger les éléments de façon dynamique en gérant un indice `n`, qui désignera le nombre d'éléments présents dans le tas :

```
public class Tas{
    private int[] t; // la partie utile est t[1..tmax]
    private int n; // indice du dernier élément

    public Tas(int tmax){
        this.t = new int[tmax+1];
        this.n = 0;
```



```
    }

    public boolean estVide(){
        return this.n == 0;
    }
}
```

La première fonction que l'on peut utiliser est celle qui teste si un tas a bien la propriété qu'on attend :

```
    public boolean estTas(){
        for(int i = this.n; i > 1; i--)
            if(this.t[i] > this.t[i/2])
                return false;
        return true;
    }
```

Proposition 5 *Soit $n \geqslant 1$ et t un tas. On définit la* hauteur *du tas (ou de l'arbre) comme l'entier h tel que $2^h \leqslant n < 2^{h+1}$. Alors*

(i) L'arbre a $h+1$ niveaux, l'élément $t[1]$ se trouvant au niveau 0.

(ii) Chaque niveau, $0 \leqslant \ell < h$, est stocké dans $t[2^\ell..2^{\ell+1}[$ et comporte ainsi 2^ℓ éléments. Le dernier niveau ($\ell = h$) contient les éléments $t[2^h..n]$.

(iii) Le plus grand élément se trouve en `t[1]`.

Exercice 9.1 Écrire une fonction qui à l'entier $i \leqslant n$ associe son niveau dans l'arbre.

On se sert d'un tas pour implanter facilement une *file de priorité*, qui permet de gérer des clients qui arrivent, mais avec des priorités qui sont différentes, contrairement au cas de la Poste. À tout moment, on sait qu'on doit servir le client `t[1]`. Il reste à décrire comment on réorganise le tas de sorte qu'à l'instant suivant, le client de plus haute priorité se retrouve en `t[1]`. On utilise de telles structures pour gérer les impressions en Unix, ou encore dans l'ordonnanceur du système.

Dans la pratique, le tas se comporte comme un lieu de stockage dynamique où entrent et sortent des éléments. Pour simuler ces mouvements, on peut partir d'un tas déjà formé `t[1..n]` et insérer un nouvel élément x. S'il reste de la place, on le met temporairement dans la case d'indice $n+1$. Il faut vérifier que la propriété de tas est encore satisfaite, à savoir que le parent de `t[n+1]` est bien supérieur à son enfant. Si ce n'est pas le cas, on les permute tous les deux. On n'a pas d'autre test à faire, car au cas où `t[n+1]` aurait eu une sœur/frère, on savait déjà qu'il était inférieur à son parent. Ayant permuté parent et enfant, il se peut que la propriété de tas ne soit toujours pas vérifiée, ce qui fait que l'on doit remonter vers l'ancêtre du tas éventuellement.

Illustrons tout cela sur un exemple, celui de la création d'un tas à partir du tableau :

```
    int[] a = new int[]{6, 4, 1, 3, 9, 2, 0, 5, 7, 8};
```

Le premier tas est facile (figure (a)).

L'élément 4 vient naturellement se mettre en position à la fin du tableau et il devient enfant gauche de 6 sans mise à jour nécessaire (fig (b)). On insère alors 1, qui est mis en

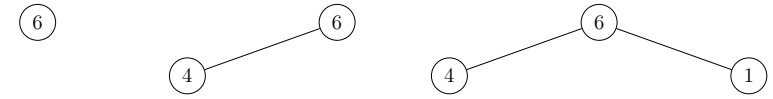


FIGURE 9.13 – Les trois premières étapes d'insertion.

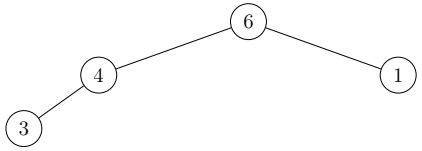


FIGURE 9.14 – Après insertion de 3.

fin de tableau et devient enfant droit de 6, ne nécessitant pas non plus de mise à jour (fig (c)). C'est le cas aussi pour l'insertion de 3 (figure 9.14).
Ces éléments sont stockés dans le tableau

i	1	2	3	4
$t[i]$	6	4	1	3

Pour s'en rappeler, on balaie l'arbre de haut en bas et de gauche à droite.

On doit maintenant insérer 9, ce qui dans un premier temps nous donne le dessin de la figure 9.15.

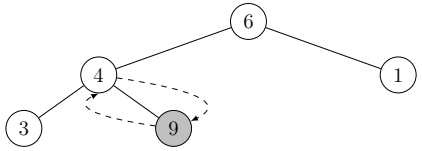


FIGURE 9.15 – Début de l'insertion de 9.

On voit que 9 est plus grand que son parent 4, donc on les permute, figure 9.16. Ce faisant, on voit que 9 est encore plus grand que son parent, donc on le permute, et cette fois, la propriété de tas est bien satisfaite, figure 9.17. Après insertion de tous les éléments de `t`, on retrouve le dessin de la figure 9.12.

Le programme JAVA d'insertion est le suivant :

```
public boolean inserer(int x){
```

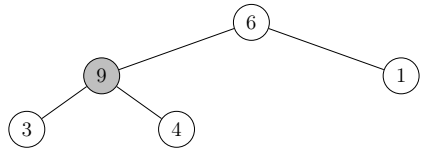



FIGURE 9.16 – Suite de l'insertion de 9.

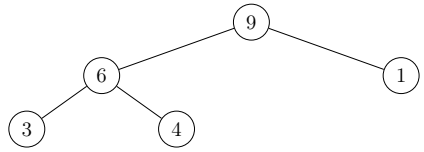


FIGURE 9.17 – Fin de l'insertion de 9.

```
        if(this.n >= this.t.length)
            // il n'y a plus de place
            return false; // ou une exception
        // il y a encore au moins une place
        this.n += 1;
        this.t[this.n] = x;
        this.monter(this.n);
        return true;
    }
```

et utilise la fonction de remontée :

```
    // on vérifie que la propriété de tas est
    // satisfaite à partir de tas.t[k]
    public void monter(int k){
        int v = this.t[k];

        while((k > 1) && (this.t[k/2] <= v)){
            // on est à un niveau > 0 et
            // le parent est <= enfant
            // le parent prend la place de l'enfant
            this.t[k] = this.t[k/2];
            k /= 2;
        }
        // on a trouvé la place de v
        this.t[k] = v;
    }
```

Pour transformer un tableau en tas, on utilise alors :

```
public Tas(int[] a){
    this.t = new int[a.length+1];

    for(int i = 0; i < a.length; i++)
        this.inserer(a[i]);
}
```

Comme la hauteur du tas est $h = O(\log_2 n)$, chaque étape de montée coûte au plus $O(h) = O(\log_2 n)$ opérations, ce qui donne un temps total de $O(n \log n)$ pour la mise en tas d'un tableau. Il existe un algorithme plus simple (cf. exercice 9.3) et plus rapide pour faire ce travail, avec une complexité $O(n)$ et qui n'utilise pas de montée, mais des descentes qui vont être expliquées ci-dessous.

Pour parachever notre travail, il nous faut expliquer comment servir un client. Cela revient à retirer le contenu de la case `t[1]`. Par quoi le remplacer ? Le plus simple est de mettre dans cette case `t[n]` et de vérifier que le tableau présente encore la propriété de tas. On doit donc descendre dans l'arbre.

Reprenons l'exemple précédent. On doit servir le premier client de numéro 9 (figure 9.18), ce qui conduit à mettre au sommet le nombre 4 (figure 9.19) :

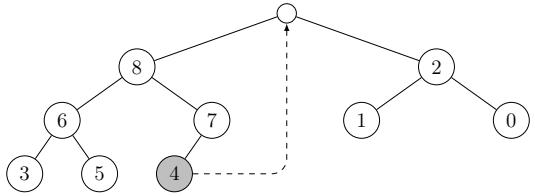


FIGURE 9.18 – On sert 9 et on commence la mise à jour.

On doit maintenant faire redescendre 4 pour rétablir la propriété de tas (figure 9.19). Cela qui conduit à l'échanger avec son plus grand enfant (le gauche, figure 9.20), puis on l'échange avec 7 pour obtenir finalement la figure 9.21.
La fonction de "service" est :

```
public int tacheSuivante(){
    int tache = this.t[1];

    this.t[1] = this.t[this.n];
    this.n -= 1;
    this.descendre(1);
    return tache;
}
```

qui appelle :

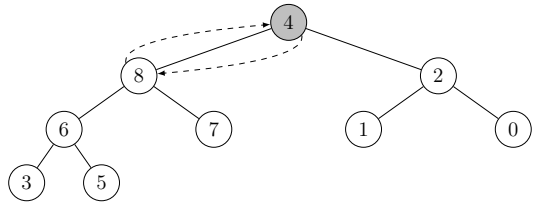


FIGURE 9.19 – On doit permuter 4 avec son enfant gauche 8.

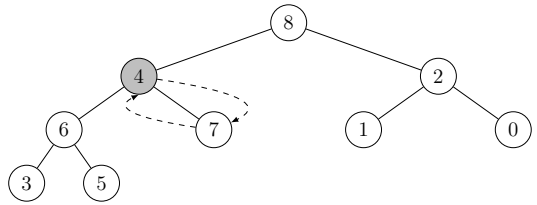


FIGURE 9.20 – On doit permuter 4 et son enfant droit 7.

```
public void descendre(int k){
    int v = this.t[k], j;

    while(k <= this.n/2){
        // k a au moins 1 enfant gauche
        j = 2*k;
        if(j < this.n)
            // k a un enfant droit
            if(this.t[j] < this.t[j+1])
                j++;
        // ici, t[j] est le plus grand des enfants
        if(v >= this.t[j])
            break;
        else{
            // on échange parent et enfant
            this.t[k] = this.t[j];
            k = j;
        }
    }
    // on a trouvé la place de v
    this.t[k] = v;
}
```

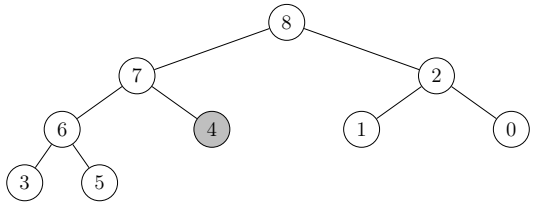


FIGURE 9.21 – 4 est à sa place, la propriété de tas est vérifiée.

Notons qu'il faut gérer avec soin le problème de l'éventuel enfant droit manquant. De même, on n'échange pas vraiment les cases, mais on met à jour les cases parents nécessaires.

Proposition 6 *La complexité des procédures* `monter` *et* `descendre` *est* $O(h)$ *ou encore* $O(\log_2 n)$.

Démonstration : on parcourt au plus tous les niveaux de l'arbre à chaque fois, ce qui fait au plus $O(h)$ mouvements. □

Pour terminer cette section, nous donnons comme dernier exemple d'application un tri rapide, appelé *tri par tas* (en anglais, *heapsort*). L'idée est la suivante : quand on veut trier le tableau `t`, on peut le mettre sous la forme d'un tas, à l'aide du constructeur `tas()` déjà donné. Celle-ci aura un coût $O(n \log_2 n)$, puisqu'on doit insérer n éléments avec un coût $O(\log_2 n)$. Cela étant fait, on permute le plus grand élément `t[1]` avec `t[n]`, puis on réorganise le tas `t[1..n-1]`, avec un coût $O(\log_2(n-1))$. Finalement, le coût de l'algorithme sera $O(nh) = O(n \log_2 n)$. Ce tri est assez séduisant, car son coût moyen est égal à son coût le pire : il n'y a pas de tableaux difficiles à trier. La procédure JAVA correspondante est :

```
public static void triParTas(int[] a){
    Tas tas = new Tas(a);

    for(int k = tas.n; k > 1; k--){
        // a[k..n[ est déjà trié,
        // on trie a[0..k-1]
        // t[1] contient max t[1..k] = max a[0..k-1]
        a[k-1] = tas.t[1];
        tas.t[1] = tas.t[k];
        tas.n -= 1;
        tas.descendre(1);
    }
    a[0] = tas.t[1];
}
```


Nous verrons d'autres tris au chapitre 10.

Cette utilisation d'un tableau comme représentant un arbre complet est couramment utilisée en calcul formel, par exemple dans les arbres de produit. Nous renvoyons à [GG99] pour cela.

Exercices

Exercice 9.2 Soit A un arbre binaire de recherche avec n nœuds, chaque nœud contenant un entier. On écrira un arbre binaire $A = (r, G, D)$ où r est la racine de A, G et D les sous-arbres gauche et droit respectivement.

a) On considère les deux arbres de la figure 9.22. Quelle est leur hauteur ? Combien ont-ils de nœuds internes, de feuilles ? Pourquoi est-ce que ce sont des arbres binaires de recherche ?

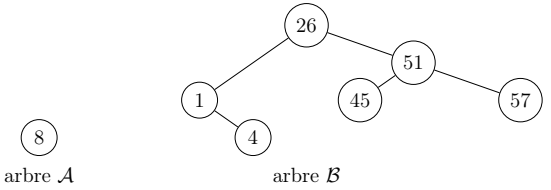


FIGURE 9.22 – Deux arbres.

b) Écrire la classe `ABR`. Celle-ci devra contenir une définition récursive de la structure, un constructeur explicite, ainsi qu'une méthode d'insertion :

```
public static ABR inserer(ABR A, int x){ ... }
```

et une méthode transformant un tableau d'entier en ABR :

```
public static ABR deTableau(int[] t){ ... }
```

On considère l'algorithme suivant, qui *aplatit* l'arbre : si $A = \emptyset$, on ne fait rien ; si $A = (r, G, D)$:

- on aplatit G ;
- on affiche r ;
- on aplatit D.

c) *i)* Que doit afficher l'algorithme sur l'arbre $\mathcal{B}$ de la figure 9.22. Que constate-t-on ?

ii) Démontrer ce résultat en toute généralité.

d) *i)* Écrire la méthode :

```
public static void aplatir(ABR A){ ... }
```

ii) Quel est le nombre d'appels de cette méthode en fonction du nombre de nœuds n ?

e) Modifier la méthode précédente pour qu'elle remplisse un tableau avec le résultat de l'aplatissement :

```
public static int aplatirDansTableau(int[] t, ABR A, int i0){
... }
```

où la méthode prend l'indice `i0` à partir duquel on doit remplir `t` avec le contenu de `A` et renvoie le prochain indice à utiliser. On supposera que `t` a une taille suffisante. On écrira également la méthode d'appel :

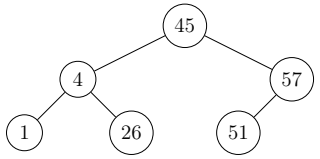
```
public static int[] aplatirDansTableau(ABR A, int n){ ... }
```

qui aplatit un arbre avec n nœuds dans un tableau de n éléments qui est renvoyé par la méthode.

f) Écrire une méthode :

```
public static ABR reconstruire(int[] t){ ... }
```

qui prend en entrée un tableau trié et construit un ABR le plus équilibré possible. Sur l'exemple `t = {1, 4, 26, 45, 51, 57}`, on devra obtenir :



Indication : considérer `t[n/2]`.

Exercice 9.3 Cet exercice a pour but de programmer une version de la mise en tas d'un tableau due à Robert W. Floyd[1] . Dans tout l'exercice, on suppose que les n éléments stockés sont *distincts* et que $n = 2^{h+1} - 1$, où on rappelle que $h \geqslant 0$ est la hauteur du tas et que le tas a $h + 1$ niveaux numérotés $0, 1, \ldots, h$.

La mise en tas du tableau de $n = 7$ éléments

```
int[] a = new int[]{1, 3, 5, 7, 6, 4, 8};
```

par l'algorithme décrit ci-dessous donne le dessin de la figure 9.23. La hauteur du tas

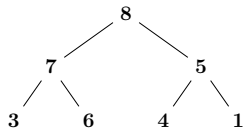


FIGURE 9.23 – Un tas.

1. prix Turing 1978

est $h = 2$, donc le dessin a trois niveaux.

1. On considère l'algorithme suivant de mise en tas : on remplit le tableau par la fin et à chaque ajout, on réorganise le tableau pour former des sous-tas. On remarque que le niveau des feuilles (la seconde moitié du tableau) du tas ne demande aucune opération, car ce sont des tas de taille 1. Sur l'exemple, on trouve donc que le début de l'algorithme conduit à la figure 9.24. On place maintenant le **5**, cf. figure 9.25 où on doit réorganiser le tas de droite en permutant **5** et **8**.

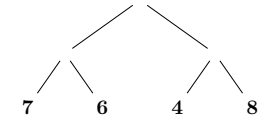


FIGURE 9.24 – Exemple : remplissage des feuilles.

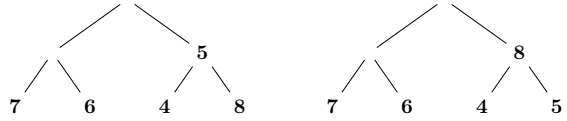


FIGURE 9.25 – Exemple : insertion de **5**.

a) Terminer la mise en tas du tableau donné en exemple en suivant l'algorithme. On dessinera tous les arbres intermédiaires.

b) Programmer cet algorithme en Java à l'aide des primitives vues en cours (pour un tas avec élément maximum à la racine). On demande d'écrire le constructeur :

```
public Tas(int[] tab){ ... }
```

qui construit un tas par l'algorithme donné. Le contenu de `tab` ne doit pas être modifié par la construction du tas.

2. On définit la *profondeur* $P(\alpha)$ du nœud α comme étant la distance à la feuille la plus profonde qu'on peut atteindre à partir de α en descendant : $P(\mathbf{8}) = 2$, $P(\mathbf{1}) = 0$.

Soit α un nœud d'indice i avec $2^\ell \leqslant i < 2^{\ell+1}$ et $0 \leqslant \ell \leqslant h$. On rappelle que $n = 2^{h+1} - 1$. Donner une formule pour $P(\alpha)$ en fonction de h et ℓ.

3. Le but de cette question est de calculer le nombre de comparaisons faites par l'algorithme présenté.

a) On suppose qu'on se place au moment de l'insertion du nœud α d'indice i. On notera $\mathcal{P}(i) = P(\alpha)$ pour simplifier. Dans le cas le pire (qu'on explicitera), donner le nombre de comparaisons à faire pour réorganiser le tas à partir du nœud α.

b) Donner une borne pour le nombre total de comparaisons faites par l'algorithme. On supposera que le cas le pire s'obtient par l'accumulation des pires cas de la descente. *Indication :* on sommera par niveau.

4. Quels sont les intérêts de cette optimisation ?

Troisième partie

Problématiques classiques en informatique

Chapitre 10

Ranger l'information... pour la retrouver

Mal rangé, c'est perdu !
Sagesse populaire.

L'informatique permet de traiter des quantités gigantesques d'information et déjà, on dispose d'une capacité de stockage suffisante pour archiver tous les livres écrits. Reste à ranger cette information de façon efficace pour pouvoir y accéder facilement. On a vu comment construire des blocs de données, d'abord en utilisant des tableaux, puis des objets. C'est le premier pas dans le stockage. Nous allons voir dans ce chapitre quelques-unes des techniques utilisables pour aller plus loin. D'autres manières de faire seront présentées dans les cours de 2e année.

10.1 Recherche en table

Pour illustrer notre propos, nous considérerons deux exemples principaux : la correction d'orthographe (un mot est-il dans le dictionnaire ?) et celui de l'annuaire (récupérer une information concernant un abonné).

10.1.1 Recherche linéaire

La manière la plus simple de ranger une grande quantité d'information est de la mettre dans un tableau, qu'on aura à parcourir à chaque fois que l'on cherche une information.

Considérons le petit dictionnaire contenu dans la variable `dico` du programme ci-dessous :

```
public class Dico{

    public static boolean estDans(String[] dico, String mot){
        boolean estdans = false;

        for(int i = 0; i < dico.length; i++)
            if(mot.compareTo(dico[i]) == 0)
                estdans = true;
        return estdans;
    }

    public static void main(String[] args){
        String[] dico = new String[]{"maison", "bonjour",
                                     "moto", "voiture",
                                     "artichaut", "Palaiseau"};

        if(estDans(dico, args[0]))
            System.out.println("Le mot est présent");
        else
            System.out.println("Le mot n'est pas présent");
    }
}
```


Rappelons que l'instruction `x.compareTo(y)` sur deux chaînes `x` et `y` renvoie 0 en cas d'égalité, un nombre négatif si `x` est avant `y` dans l'ordre alphabétique et un nombre positif sinon. Le programme s'attend à trouver une chaîne de caractères dans la variable `args[0]` (voir la section A.1).
Pour savoir si un mot est dans ce petit dictionnaire, on le passe sur la ligne de commande par

```
unix% java Dico bonjour
```

On parcourt tout le tableau et on teste si le mot donné se trouve dans le tableau ou non. Le nombre de comparaisons de chaînes est ici égal au nombre d'éléments de la table, soit n, d'où le nom de *recherche linéaire*.

Si le mot est dans le dictionnaire, il est inutile de continuer à comparer avec les autres chaînes, aussi peut-on arrêter la recherche à l'aide de l'instruction `break`, qui permet de sortir de la boucle `for`. Cela revient à écrire :

```
        for(int i = 0; i < dico.length; i++)
            if(mot.compareTo(dico[i]) == 0){
                estdans = true;
                break;
            }
```

Si le mot n'est pas présent, le nombre d'opérations restera le même, soit $O(n)$.

10.1.2 Recherche dichotomique

Dans le cas où l'on dispose d'un ordre sur les données, on peut faire mieux, en réorganisant l'information suivant cet ordre, c'est-à-dire en triant, sujet qui formera la section suivante. Supposant avoir trié le dictionnaire (par exemple avec les méthodes de la section 10.2), on peut maintenant y chercher un mot par dichotomie, en adaptant le programme déjà donné au chapitre 7, et que l'on trouvera à la figure 10.1. Comme déjà démontré, le coût de la recherche dans le cas le pire passe maintenant à $O(\log_2 n)$.

Le passage de $O(n)$ à $O(\log_2 n)$ peut paraître anodin. Il l'est d'ailleurs sur un dictionnaire aussi petit. Avec un vrai dictionnaire, tout change. Par exemple, le dictionnaire

```
// recherche de mot dans dico[g..d[
public static boolean dichoRec(String[] dico, String mot,
                               int g, int d){
    int m, cmp;

    if(g >= d) // l'intervalle est vide
        return false;
    m = (g+d)/2;
    cmp = mot.compareTo(dico[m]);
    if(cmp == 0)
        return true;
    else if(cmp < 0)
        return dichoRec(dico, mot, g, m);
    else
        return dichoRec(dico, mot, m+1, d);
}

public static boolean estDansDico(String[] dico,
                                  String mot){
    return dichoRec(dico, mot, 0, dico.length);
}
```

FIGURE 10.1 – Recherche dichotomique.

de P. Zimmermann [1] contient 260688 mots de la langue française. Une recherche d'un mot ne coûte que 18 comparaisons au pire dans ce dictionnaire.

10.1.3 Utilisation d'index

On peut repérer dans le dictionnaire les zones où on change de lettre initiale ; on peut donc construire un *index*, codé dans le tableau `ind` tel que tous les mots commençant par une lettre donnée sont entre `ind[i]` et `ind[i+1]-1`. Dans l'exemple du dictionnaire de P. Zimmermann, on trouve par exemple que le mot `a` est le premier mot du dictionnaire, les mots commençant par `b` se présentent à partir de la position 19962 et ainsi de suite.

Quand on cherche un mot dans le dictionnaire, on peut faire une dichotomie sur la première lettre, puis une dichotomie ordinaire entre `ind[i]` et `ind[i+1]-1`.

Nous laissons la programmation d'index en exercice.

10.2 Trier

Nous avons montré l'intérêt de trier l'information pour pouvoir retrouver rapidement ce que l'on cherche. Nous allons donner dans cette section quelques algorithmes de tri des données. Nous ne serons pas exhaustifs sur le sujet, voir par exemple [Knu73a] pour plus d'informations.

1. http://www.loria.fr/~zimmerma/

Deux grandes classes d'algorithmes existent pour trier un tableau de taille n par comparaison entre les éléments. Ceux dont le nombre de comparaisons est $O(n^2)$ et ceux avec un nombre de comparaisons en $O(n \log n)$. Nous présenterons quelques exemples de chaque. On peut montrer que $O(n \log n)$ est la meilleure complexité possible pour la classe des algorithmes de tri procédant par comparaison (voir par exemple les cours d'année 2).

Pour simplifier la présentation, nous trierons un tableau de n entiers `t` par ordre croissant. Pour un algorithme donné, on pose $C(n)$ le nombre de comparaisons entre éléments du tableau faites par l'algorithme et $A(n)$ le nombre d'affectations.

Si nous devions trier un tableau d'éléments non entiers, il nous suffirait de procéder par indirection. Si `TO` est un tableau d'objets, on lui associerait un tableau auxiliaire `t` de même taille, et on comparerait `t[i]` et `t[j]` en comparant en fait `TO[t[i]]` et `TO[t[j]]`.

10.2.1 Tris élémentaires

Nous présentons ici deux tris possibles, le tri sélection et le tri par insertion. Nous renvoyons à la littérature pour d'autres algorithmes, comme le tri à bulles par exemple.

Le tri sélection

Le premier tri que nous allons présenter est le *tri par sélection*. Ce tri va opérer *en place*, ce qui veut dire que le contenu du tableau `t` va être remplacé par le contenu trié. Le tri consiste à chercher le plus petit élément de `t[0..n[`, soit `t[m]`. À la fin du calcul, cette valeur devra occuper la case 0 de `t`. D'où l'idée de permuter la valeur de `t[0]` et de `t[m]` et il ne reste plus ensuite qu'à trier le tableau `t[1..n[`. On procède ensuite de la même façon.

Le programme est le suivant :

```
public static void triSelection(int[] t){
    int n = t.length, m, tmp;

    for(int i = 0; i < n; i++){
        // invariant: t[0..i[ contient les i plus petits
        //            éléments du tableau de départ
        m = indiceMinimum(t, i);
        // on échange t[i] et t[m]
        tmp = t[i]; t[i] = t[m]; t[m] = tmp;
    }
}
```

On peut remarquer qu'il suffit d'arrêter la boucle à $i = n - 2$ au lieu de $n - 1$, puisque le tableau `t[n-1..n[` sera automatiquement trié.

Notons le rôle du commentaire de la boucle `for` qui permet d'indiquer une sorte de propriété de récurrence toujours satisfaite au moment où le programme repasse par cet endroit pour chaque valeur de l'indice de boucle.

Reste à écrire le morceau qui cherche l'indice du minimum de `t[i..n[`, qui n'est qu'une adaptation d'un algorithme de recherche du minimum global d'un tableau :

```
// recherche de l'indice du minimum de t[i..n[ avec i < n
```

```
public static int indiceMinimum(int[] t, int i){
    int m = i, tmp;

    for(int j = i+1; j < t.length; j++){
        if(t[j] < t[m])                    // (*)
            m = j;
    }
    return m;
}
```

qu'on utilise par exemple dans :

```
public static void main(String[] args){
    int[] t = new int[]{3, 5, 7, 3, 4, 6};

    triSelection(t);
}
```

Analysons maintenant le nombre de comparaisons faites dans l'algorithme. Pour chaque valeur de $i \in [0, n-2]$, on effectue $n-1-i$ comparaisons à l'instruction `(*)`, soit au total :

$$C_S(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$$

comparaisons. L'algorithme fait donc $O(n^2)$ comparaisons. De même, on peut compter le nombre d'échanges. Il y en a 1 par itération, soit un nombre d'affectations $A_S(n) = 3(n-1) = O(n)$.

Le tri par insertion

Ce tri est celui du joueur de cartes qui veut trier son jeu (c'est une idée farfelue en général, mais pourquoi pas). On prend en main sa première carte `t[0]`, puis on considère la deuxième `t[1]` et on la met devant ou derrière la première, en fonction de sa valeur. Après avoir classé ainsi les $i-1$ premières cartes, on cherche la place de la i-ième, on décale alors les cartes pour insérer la nouvelle carte.

Regardons sur l'exemple précédent, la première valeur se place sans difficulté :

3					

On doit maintenant insérer le 5, ce qui donne :

3	5				

puisque $5 > 3$. De même pour le 7. Arrive le 3. On doit donc décaler les valeurs 5 et 7 :

3		5	7		

puis insérer le nouveau 3 :

3	**3**	5	7		

Et finalement, on obtient :

3	3	4	5	6	7

Écrivons maintenant le programme correspondant. La première version est la suivante :


```
public static void triInsertion(int[] t){
    int n = t.length, j, tmp;

    for(int i = 1; i < n; i++){
        // t[0..i-1] est déjà trié
        j = i;
        // recherche la place de t[i] dans t[0..i-1]
        while((j > 0) && (t[j-1] > t[i]))
            j--;
        // si j = 0, alors t[i] <= t[0]
        // si j > 0, alors t[j] > t[i] >= t[j-1]
        // dans tous les cas, on pousse t[j..i-1]
        // vers la droite
        tmp = t[i];
        for(int k = i; k > j; k--)
            t[k] = t[k-1];
        t[j] = tmp;
    }
}
```

La boucle **while** doit être écrite avec soin. On fait décroître l'indice `j` de façon à trouver la place de `t[i]`. Si `t[i]` est plus petit que tous les éléments rencontrés jusqu'alors, alors le test sur $j-1$ serait fatal, j devant prendre la valeur 0. À la fin de la boucle, les assertions écrites sont correctes et il ne reste plus qu'à déplacer les éléments du tableau vers la droite. Ainsi les éléments précédemment rangés dans `t[j..i-1]` vont se retrouver dans `t[j+1..i]` libérant ainsi la place pour la valeur de `t[i]`. Il faut bien programmer en faisant décroître k, en recopiant les valeurs dans l'ordre. Si l'on n'a pas pris la précaution de garder la bonne valeur de `t[i]` sous le coude (on dit qu'on l'a *écrasée*), alors le résultat sera faux.

Dans cette première fonction, on a cherché d'abord la place de `t[i]`, puis on a tout décalé après-coup. On peut condenser ces deux phases comme ceci :

```
public static void triInsertion(int[] t){
    int n = t.length, j, tmp;

    for(int i = 1; i < n; i++){
        // t[0..i-1] est déjà trié
        tmp = t[i];
        j = i;
        // recherche la place de tmp dans t[0..i-1]
        while((j > 0) && (t[j-1] > tmp)){
            t[j] = t[j-1]; j = j-1;
        }
        // ici, j = 0 ou bien tmp >= t[j-1]
        t[j] = tmp;
    }
}
```

On peut se convaincre aisément que ce tri dépend assez fortement de l'ordre initial du tableau `t`. Ainsi, si `t` est déjà trié, ou presque trié, alors on trouve tout de suite que `t[i]` est à sa place, et le nombre de comparaisons sera donc faible. On montre qu'en moyenne, l'algorithme nécessite un nombre de comparaisons égal à $n(n+3)/4-1$, et un cas le pire en $(n-1)(n+2)/2$. C'est donc encore un algorithme en $O(n^2)$, mais avec un meilleur cas moyen.

Exercice 10.1 Pour quelle permutation le minimum (resp. maximum) de comparaisons est-il atteint ? Montrer que le nombre moyen de comparaisons de l'algorithme a bien la valeur annoncée ci-dessus.

10.2.2 Quelques tris rapides

Il existe plusieurs algorithmes dont la complexité atteint $O(n \log n)$ opérations, avec des constantes et des propriétés différentes.

Retour sur le tri sélection

Reprenons le tri sélection déjà donné. N'importe quelle façon de trouver le minimum permet de trier. Il en est ainsi avec les tas introduits à la section 9.4. Avec un tas convenablement initialisé (en $O(n \log n)$ ou $O(n)$) et mis à jour en temps $O(\log n)$, on récupère le minimum du tableau en $O(\log n)$ opérations, ce qui fait un total de $O(n \log n)$ opérations pour trouver n minima consécutifs et fournit ainsi un tri rapide, appelé *heapsort* et dû à John W. J. Williams en 1964.

Le tri par fusion

Ce tri est assez simple à imaginer et il est un exemple classique d'algorithme de type diviser pour résoudre. Pour trier un tableau, on le coupe en deux, on trie chacune des deux moitiés, puis on interclasse les deux sous-tableaux résultant. On peut déjà écrire simplement la fonction implantant cet algorithme :

```
public static int[] triFusion(int[] t){
    if(t.length == 1) return t;
    int m = t.length / 2;
    int[] tg = sousTableau(t, 0, m);
    int[] td = sousTableau(t, m, t.length);

    // on trie les deux moitiés
    tg = triFusion(tg);
    td = triFusion(td);
    // on fusionne
    return fusionner(tg, td);
}
```

en y ajoutant la fonction qui fabrique un sous-tableau à partir d'un tableau :

```
// on crée un tableau contenant t[g..d[
public static int[] sousTableau(int[] t, int g, int d){
    int[] s = new int[d-g];
    for(int i = g; i < d; i++)
        s[i-g] = t[i];
    return s;
}
```


On commence par le cas de base, c'est-à-dire un tableau de longueur 1, donc déjà trié. Sinon, on trie les deux tableaux `t[0..m[` et `t[m..n[` puis on doit recoller les deux morceaux. Dans l'approche suivie ici, on renvoie un tableau contenant les éléments du tableau de départ, mais dans le bon ordre. Cette approche est coÃżteuse en allocations mémoire et recopies, mais suffit pour la présentation.

Exercice 10.2 Pour coder cet algorithme par effets de bord, on demande d'écrire une fonction :

```
public static void triFusion(int[] t, int g, int d){...}
```

qui remplace `t[g..d[` par son contenu trié.

Il nous reste à expliquer comment on fusionne deux tableaux triés dans l'ordre. Reprenons l'exemple du tableau :

```
int[] t = new int[]{3, 5, 7, 3, 4, 6};
```

Dans ce cas, la moitié gauche triée du tableau est `tg = {3, 5, 7}`, la moitié droite est `td = {3, 4, 6}`. Pour reconstruire le tableau fusionné, noté `f`, on commence par comparer les deux valeurs initiales de `tg` et `td`. Ici elles sont égales, on décide de mettre en tête de `f` le premier élément de `tg`. On peut imaginer deux pointeurs, l'un qui pointe sur la case courante de `tg`, l'autre sur la case courante de `td`. Au départ, on a donc la situation (a) de la figure 10.2. À la deuxième étape, on a déplacé les deux pointeurs, ce qui donne la situation (b).

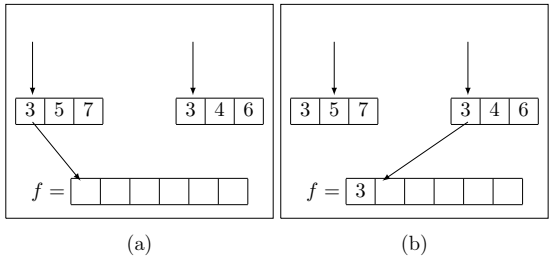


FIGURE 10.2 – Exemple du tri par insertion.

Pour programmer cette fusion, on va utiliser deux indices `g` et `d` qui vont parcourir les deux tableaux `tg` et `td`. On doit également vérifier que l'on ne sort pas des tableaux. Cela conduit au code suivant :

```
// SORTIE: un tableau résultant de l'interclassement
//         de tg et td
public static int[] fusionner(int[] tg, int[] td){
    int[] f = new int[tg.length + td.length];
    int g = 0, d = 0; // indices de parcourt de tg et td

    for(int k = 0; k < f.length; k++){
        // f[k] est la case à remplir
        if(g >= tg.length) // g est invalide
            f[k] = td[d++];
        else if(d >= td.length) // d est invalide
            f[k] = tg[g++];
        else // g et d sont valides
            if(tg[g] <= td[d])
                f[k] = tg[g++];
            else // tg[g] > td[d]
                f[k] = td[d++];
    }
    return f;
}
```

Le code est rendu compact par utilisation systématique des opérateurs de post-incrémentation. Le nombre de comparaisons dans la fusion de deux tableaux de taille n est $O(n)$.

Appelons $C_F(n)$ le nombre de comparaisons de l'algorithme complet. Si $n = 2^k$, on a :

$$C_F(n) = \underbrace{2\,C_F(n/2)}_{\text{appels récursifs}} + \underbrace{n}_{\text{comparaisons}}$$

qui se résout en écrivant :

$$\frac{C_F(n)}{n} = \frac{C_F(n/2)}{n/2} + 1,$$

d'oÃź $C_F(2^k) = k\,2^k = O(n \log n)$ et le résultat reste vrai pour n qui n'est pas une puissance de 2. C'est le coût, quel que soit le tableau `t`.

Que reste-t-il à dire ? Tout d'abord, la place mémoire nécessaire est $2n$, car on ne sait pas fusionner en place deux tableaux. En conséquence, on a $A_F(n) = 2\,A_F(n/2) + 2n$, ce qui conduit également à $A_F(n) = O(n \log n)$.

D'autre part, il existe une version non récursive de l'algorithme de tri par fusion qui consiste à trier d'abord des paires d'éléments, puis des quadruplets, etc. Nous laissons cela à titre d'exercice.

Le tri rapide (quicksort)

Nous allons présenter l'algorithme *quicksort*, qui travaille en place, avec une bonne complexité moyenne en $O(n \log n)$, mais avec un cas le pire en $O(n^2)$. Cet algorithme

est dû à Tony R. Hoare [2] .

L'idée de base est la suivante. Soit T un ensemble d'entiers et p un élément de T, qu'on appelle *pivot*. On peut toujours partitionner T sous la forme

$$T = T_l \cup \{p\} \cup T_r$$

avec $T_l = \{t[i] \leqslant p\}$, $T_r = \{t[i] > p\}$. Si `t` est un tableau et que p est un élément de ce tableau, on peut partitionner les éléments de t sous une forme identique. Considérons notre tableau exemple

```
int[] t = new int[]{3, 5, 7, 3, 4, 6};
```

et choisissons comme pivot $p = 4$. On peut alors réorganiser en

```
t = {3, 3,      4,      6, 7, 5};
```

Nous avons isolé le 4 pour mettre en lumière les deux sous-tableaux T_l et T_r qui encadrent le 4 (l'ordre des éléments dans T_l et T_r sera justifié ci-dessous). Si on veut trier `t`, il ne reste plus qu'à trier T_l et T_r ; on constate également que 4 est déjà à sa place dans le tableau final trié. Remarquons également que ce tri peut être fait *en place*.

Dans notre exemple, le tri de T_l ne pose pas de difficulté. Pour T_r, on choisit par exemple $p = 6$, ce qui conduit à :

```
t = {3, 3, 4,    5, 6, 7};
```

et le tableau est trié.

Reste à expliquer comment choisir le pivot pour trier le tableau `t[g..d[`. Le plus simple est de choisir simplement $p = t[g]$. Pour comprendre comment fonctionne le partitionnement, nous allons dans un premier temps utiliser un tableau auxiliaire $u[g..d[$ qui va recevoir le partitionnement de $t[g..d[$ pour le pivot $p = t[g]$. On gère deux entiers l et r tels que pour un indice $g \leqslant i < d$, $u[g..l[$ contienne $\{t[j] \leqslant p, j < i\}$ et $u[r..d[$ contienne $\{t[j] > p, j < i\}$. Les valeurs initiales sont $l = g + 1 \leqslant r = d$ car $u[g]$ va contenir $t[g]$. Pour $i > g$, on compare $t[i]$ à p. Si $t[i] \leqslant p$, on rajoute $t[i]$ dans la partie gauche, et on fait croître l :

```
u[l++] = t[i];
```

Si au contraire $t[i] > p$, on fait décroître r :

```
u[--r] = t[i];
```

Quand on a fini de parcourir toutes les valeurs de i, on a $l = r$. Permutant $u[l-1]$ et $u[g]$, toutes les valeurs de $u[i]$ pour $g \leqslant i < l$ sont plus petites que le pivot (désormais dans $u[l-1]$). Il ne restera plus qu'à trier $u[g..l-1[$ et $u[l..d[$. Regardons sur notre exemple à la figure 10.3. Nous donnons le premier partitionnement, puis le second pour la partie la plus grande, avec évolution des indices et trajectoire du pivot en gras, avec utilisation de tableaux auxiliaires.

La considération de l'exécution dans des tableaux auxiliaires montre qu'en fait, on peut opérer *en place* sans utilisation de ces tableaux auxiliaires. Le jeu sur les indices

2. prix Turing 1980

j	0	1	2	3	4	5	
$t=$	3	5	7	3	4	6	
$i=0, u=$							$l=0, r=6$
$i=1, u=$	**3**						$l=1, r=6$
$i=2, u=$	**3**					5	$l=1, r=5$
$i=3, u=$	**3**				7	5	$l=1, r=4$
$i=4, u=$	**3**	3			7	5	$l=2, r=4$
$i=5, u=$	**3**	3		4	7	5	$l=2, r=3$
$i=6, u=$	**3**	3	6	4	7	5	$l=2, r=2$
$i=6, u=$	3	**3**	6	4	7	5	$l=2, r=2$
$i=2, v=$							$l=2, r=6$
$i=3, v=$			**6**				$l=3, r=6$
$i=4, v=$			**6**	4			$l=4, r=6$
$i=5, v=$			**6**	4		7	$l=4, r=5$
$i=6, v=$			**6**	4	5	7	$l=5, r=5$
$i=6, v=$			5	4	**6**	7	$l=5, r=5$

FIGURE 10.3 – Exécution de quicksort.

reste le même, à ceci près qu'il suffit d'utiliser directement l comme indice de boucle pour comparer $t[l]$ et p à chaque itération : si $t[l] \leqslant p$, il est déjà à sa place dans le partitionnement, sinon, on le stocke dans la partie droite en faisant varier r et en échangeant $t[l]$ et $t[r]$. On s'arrête quand $l = r$. Donnons le programme correspondant :

```
public static int indicePivot(int[] t, int g, int d){
    return g;
}

public static void quicksort(int[] t){
    quicksort(t, 0, t.length);
}

public static void quicksort(int[] t, int g, int d){
    if((d-g) > 1){ // t[g..g[ ou t[g..g+1[ triés
        int indp = indicePivot(t, g, d);
        int p = t[indp];
        echanger(t, g, indp); // inutile si indp == g
        int l = g+1, r = d;
        while(l < r){
            // t[g..l[ contient les t[i] <= p pour i < l
            // t[r..d[ contient les t[i]  > p pour i < l
            if(t[l] <= p)
                // t[l] est à sa place
                l++;
            else // t[l] > p va à droite
                echanger(t, l, --r);
                // on n'incrémente pas l
```



```
                // ce qui fait qu'un nouveau test
                // sera fait dans la prochaine itération
            }
            // t[i] <= p pour g <= i < l
            // t[i] >  p pour r < i < d et r = l
            echanger(t, g, l-1);  // t[l-1] = t[g]
            quicksort(t, g, l-1); // tri de t[g..l-1[
            quicksort(t, l, d);   // tri de t[l..d[
        }
    }
```

Dans un cas très idéal, à chaque itération, les deux sous-tableaux sont de taille moitié. Ce qui fait que le nombre de comparaisons $C_Q(n)$ va vérifier

$$C_Q(n) = 2\,C_Q(n/2) + n$$

ce qui nous donnera $C_Q(n) = O(n \log_2 n)$ puisque c'est notre récurrence familière. Pour le nombre d'affectations $A_Q(n)$, la réponse sera plus compliquée, puisque le nombre d'échanges dépend fortement de la distribution des éléments dans le tableau.

Il existe de nombreuses variantes de quicksort pour prendre en compte la distribution des données (par exemple, de nombreuses valeurs égales, etc.), ce qui permet de donner une meilleure complexité dans le cas le pire. Nous renvoyons par exemple à [CLRS09] pour cela.

Exercice 10.3 Nous avons choisi ci-dessus de prendre comme pivot le premier élément du tableau. Dans quel cas est-ce sous-optimal ? Comment y remédier ?

10.3 Hachage*

Revenons maintenant au stockage de l'information, dans un esprit proche de celui de la recherche en table. On peut également voir cela comme une approche dynamique du rangement, les informations à ranger arrivant l'une après l'autre. Nous allons présenter ici le hachage dit *ouvert*.

Dans le cas du dictionnaire, on pourrait aussi remplacer un tableau unique par 26 tableaux, un par lettre de début de mot, ou encore un tableau pour les mots commençant par `aa`, etc. On aurait ainsi $26^2 = 676$ tableaux, idéalement se partageant tout le dictionnaire, chaque tableau contenant $260688/676 \approx 385$ mots. Une recherche de mot couterait le coût de localisation du tableau auxiliaire, puis une dichotomie dans un tableau de taille 385.

Supposons qu'on ait à stocker N éléments. On peut essayer de fabriquer M tables ayant à peu près N/M éléments, à condition de savoir localiser facilement la table dans laquelle chercher. Arrivé là, pourquoi ne pas passer à la limite ? Cela revient à fabriquer N tables ayant 1 élément, et il ne reste plus qu'à localiser la table. Remarquons en passant qu'une table de tables à 1 élément serait avantageusement remplacée par un tableau tout court.

Pour localiser l'élément dans sa table, il faut donc savoir comment calculer une fonction de l'élément qui donne un entier qui sera l'indice dans le tableau. Expliquons comment ce miracle est possible. Si `c` est un caractère, on peut le représenter par son caractère unicode, qu'on obtient simplement par `(int)c`. Si `s` est une chaîne de

caractères de longueur n, on calcule une fonction de tous ces caractères. En JAVA, on peut tricher et utiliser le fait que si `x` est un objet, alors `x.hashCode()` renvoie un entier.

Une fois qu'on dispose d'un nombre $h(z)$ pour un objet z, on peut s'en servir comme indice de stockage dans un tableau `t`. On peut fixer la taille de `t`, soit T, si l'on dispose d'une borne sur le nombre d'éléments à stocker. Nous verrons plus loin comment fixer cette borne.

Considérons un exemple simple, celui où on veut ranger un ensemble $\mathcal{Z}$ d'entiers strictement positifs dans une *table de hachage*, représentée ici par le tableau `t[0..T[` initialisé à 0. Comment insère-t-on z dans le tableau ? Idéalement, on le place à l'indice $h(z)$ de `t`.

Essayons avec l'ensemble $\mathcal{Z} = \{11, 59, 32, 44, 31, 26, 19\}$. On va prendre une table de taille 10 et $h(z) = z \bmod 10$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$										

Le premier élément à mettre est 11, qu'on met dans la case $h(11) = 1$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$		11								

On continue avec 59, 32, 44 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$		11	32		44					59

Avec 31 arrive le problème : la case $h(31) = 1$ est déjà occupée. Qu'à cela ne tienne, on cherche la première case vide à droite, ici la case 3 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$		11	32	**31**	44					59

On met alors 26 dans la case 6 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$		11	32	31	44		26			59

Pour 19, on doit faire face à un nouveau problème : la case 9 est occupée, et on doit mettre 19 ailleurs, on la met dans la case 0, en considérant que le tableau `t` est géré de façon circulaire.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t[i]$	**19**	11	32	31	44		26			59

Les fonctions implantant cet algorithme sont :

```
public class HachageEntier{
    private final static int T = 10;
    private static int[] t = new int[T];
```



```
    public static void initialiser(){
        for(int i = 0; i < T; i++)
            t[i] = 0;
    }

    public static int hash(int z){
        return (z % T);
    }

    public static void inserer(int z){
        int hz = hash(z);

        while(t[hz] != 0)
            hz = (hz+1) % T;
        t[hz] = z;
    }

    public static void main(String[] args){
        int[] u = new int[]{11, 59, 32, 44, 31, 26, 19};

        initialiser();
        for(int i = 0; i < u.length; i++)
            inserer(u[i]);
    }
}
```

Si l'on doit chercher un élément dans la table, on procède comme pour l'insertion, mais en s'arrêtant quand on trouve la valeur cherchée ou bien un 0.

```
    public static boolean estDans(int z){
        int hz = hash(z);

        while((t[hz] != 0) && (t[hz] != z))
            hz = (hz+1) % T;
        return (t[hz] == z);
    }
```

Exercice 10.4 Comment programmer la suppression d'un élément dans une table de hachage ?

Donnons maintenant un cas un peu plus réaliste, celui d'un annuaire, composé d'abonnés ayant un nom et un numéro de téléphone :

```
public class Abonne{
    private String nom;
    private int tel;

    public static Abonne creer(String n, int t){
```

```
        Abonne ab = new Abonne();

        ab.nom = n;
        ab.tel = t;
        return ab;
    }
}
```

Le hachage se fait comme précédemment :

```
public class HachageAnnuaire{
    private final static int T = 101;
    private static Abonne[] t = new Abonne[T];

    public static int hash(String nom){
        return Math.abs(nom.hashCode()) % T;
    }

    public static void inserer(String nom, int tel){
        int h = hash(nom);

        while(t[h] != null)
            h = (h+1) % T;
        t[h] = Abonne.creer(nom, tel);
    }

    public static int rechercher(String nom){
        int h = hash(nom);

        while((t[h] != null) && (! nom.equals(t[h].nom)))
            h = (h+1) % T;
        if(t[h] == null)
            return -1;
        else
            return t[h].tel;
    }

    public static void initialiser(){
        for(int i = 0; i < t.length; i++)
            t[i] = null;
        inserer("dg", 4001);
        inserer("dgae", 4002);
        inserer("de", 4475);
        inserer("cdtpromo", 5971);
        inserer("kes", 4822);
        inserer("bobar", 4824);
        inserer("scola", 4154);
        inserer("dix", 3467);
    }
```



```
    public static void main(String[] args){
        initialiser();
        System.out.println(rechercher("bobar"));
        System.out.println(rechercher("dg"));
    }
}
```

On peut montrer le résultat suivant :

Théorème 3 *On appelle N le nombre d'éléments déjà présents dans la table et on pose $\alpha = N/T$. Alors le nombre d'opérations à faire est :*
$1/2 + 1/(2(1-\alpha))$ *pour une recherche avec succès,*
$1/2 + 1/(2(1-\alpha)^2)$ *pour une recherche avec échec.*

Par exemple, si $\alpha = 2/3$, on fait 2 ou 5 opérations. Cela permet de stocker un ensemble de M éléments à l'aide d'un tableau de $3/2M$ entiers et le test d'appartenance se fait en $O(1)$ opérations.

Il existe d'autres techniques de hachage. Par exemple celle qui consiste à gérer les collisions en utilisant des listes chaînées.

Terminons avec quelques applications du hachage. Dans le logiciel de calcul formel MAPLE, il faut calculer une adresse dans la mémoire pour n'importe quel type d'objet. La comparaison est très simple par calcul d'adresse, même sur de gros objets. Dans les navigateurs, le hachage permet de repérer les URL parcourues récemment (donc mises en grisé). De la même façon, les moteurs de recherche comme GOOGLE, doivent stocker plusieurs milliards de chaînes de caractères, ce qui n'est possible qu'avec du hachage.

Chapitre 11

Algorithmique du texte

La rose des origines n'existe plus que par son nom,
et nous n'en conservons plus que des noms vides.
U. Ecco, Le nom de la rose.

Rechercher une phrase dans un texte est une tâche que l'on demande à n'importe quel programme de traitement de texte, à un navigateur, un moteur de recherche, etc. C'est également une part importante du travail accompli régulièrement en bio-informatique. C'est la base du *text-mining*.

Vues les quantités de données gigantesques que l'on doit parcourir, il est crucial de faire cela le plus rapidement possible. Dans certains cas, on n'a même pas le droit de lire plusieurs fois les données.

11.1 Rechercher dans du texte

Pour modéliser le problème, nous supposons que nous travaillons sur un texte T (un tableau de caractères `char[]`, plutôt qu'un objet de type `String` pour alléger un peu les programmes) de longueur n dans lequel nous recherchons un motif M (un autre tableau de caractères) de longueur m que nous supposerons plus petit que n. Nous appelerons *occurence en position* $i \geqslant 0$ la propriété `T[i]=M[0]`, ..., `T[i+m-1]=M[m-1]`.

Recherche naïve

C'est l'idée la plus naturelle : on essaie toutes les positions possibles du motif en dessous du texte. Comment tester qu'il existe une occurrence en position i ? Il suffit d'utiliser un indice j qui va servir à comparer `M[j]` à `T[i+j]` de proche en proche :

```
public static boolean occurrence(char[] T, char[] M, int i){
    for(int j = 0; j < M.length; j++)
        if(T[i+j] != M[j]) return false;
    return true;
}
```

Nous utilisons cette primitive dans la fonction suivante, qui teste toutes les occurences possibles :


```
public static void naif(char[] T, char[] M){
    System.out.print("Occurrences en position :");
    for(int i = 0; i < T.length-M.length; i++)
        if(occurrence(T, M, i))
            System.out.print(" "+i+",");
    System.out.println("");
}
```

Si `T` contient les caractères de la chaîne `"il fait beau aujourd'hui"` et `M` ceux de `"au"`, le programme affichera

```
Occurrences en position: 10, 13,
```

Le nombre de comparaisons de caractères effectuées est au plus $(n-m)m$, puisque chacun des $n-m$ appels à `occurence` en demande m. Si m est négligeable devant n, on obtient un nombre de l'ordre de nm. Le but de la section qui suit est de donner un algorithme faisant moins de comparaisons. Notons que l'on peut adapter cet algorithme au cas où `T` est lu à la volée (et donc pas stocké ou stockable en mémoire).

Algorithme linéaire de Karp-Rabin

Supposons que S soit une fonction (non nécessairement injective) qui donne une valeur numérique à une chaîne de caractères quelconque, que nous appelerons *signature* (nous en donnons deux exemples ci-dessous). Si deux chaînes de caractères C_1 et C_2 sont identiques, alors $S(C_1) = S(C_2)$. Réciproquement, si $S(C_1) \neq S(C_2)$, alors C_1 ne peut être égal à C_2. Insistons lourdement sur le fait que $S(C_1) = S(C_2)$ n'implique pas $C_1 = C_2$. L'idée est d'utiliser des fonctions S pour lesquelles il y a peu de *faux positifs* : $S(C_1) = S(C_2)$ mais $C_1 \neq C_2$.

Le principe de l'algorithme de Karp [1]-Rabin [2] utilise cette idée de la façon suivante : on remplace le test d'occurrence $T[i..i+m-1] = M[0..m-1]$ par $S(T[i..i+m-1]) = S(M[0..m-1])$. Le membre de droite de ce test est constant, on le précalcule donc et il ne reste plus qu'à effectuer $n-m$ calculs de S et comparer la valeur $S(T[i..i+m-1])$ à cette constante. En cas d'égalité, on soupçonne une occurrence et on la vérifie à l'aide de la fonction `occurrence` présentée ci-dessus. Le nombre de calculs à effectuer est simplement $1+n-m$ évaluations de S.

Voici la fonction qui implante cette idée. Nous préciserons la fonction de signature S plus loin (codée ici sous la forme d'une fonction `signature`) :

```
public static void KR(char[] T, char[] M){
    int n, m;
    long hT, hM;

    n = T.length;
    m = M.length;
```

1. prix Turing 1985
2. prix Turing 1976

```
    System.out.print("Occurrences en position :");
    hM = signature(M, m, 0);
    for(int i = 0; i < n-m; i++){
        hT = signature(T, m, i);
        if(hT == hM){
            if(occurrence(T, M, i))
                System.out.print(" "+i+",");
            else
                System.out.print(" ["+i+"],");
        }
    }
    System.out.println("");
}
```

La fonction de signature est critique. Il est difficile de fabriquer une fonction qui soit à la fois injective et rapide à calculer. On se contente d'approximations. Soit `X` un texte de longueur `m`. En JAVA ou d'autres langages proches, il est généralement facile de convertir un caractère en nombre. Le codage unicode représente un caractère sur 16 bits et le passage du caractère `c` à l'entier est simplement `(int)c`. La première fonction à laquelle on peut penser est celle qui se contente de faire la somme des caractères représentés par des entiers :

```
    public static long signature(char[] X, int m, int i){
        long s = 0;

        for(int j = i; j < i+m; j++)
            s += (long)X[j];
        return s;
    }
```

Avec cette fonction, le programme affichera :

```
Occurrences en position: 10, 13, [18],
```

où on a indiqué les fausses occurrences par des crochets. On verra plus loin comment diminuer la probabilité d'avoir de telles occurences.

Pour accélérer le calcul de la signature, on remarque que l'on peut faire cela de manière incrémentale. Plus précisément :

$$S(X[1..m]) = S(X[0..m-1]) - X[0] + X[m],$$

ce qui remplace m additions par 1 addition et 1 soustraction à chaque étape (on a confondu $X[i]$ et sa valeur en tant que caractère).

Une fonction de signature qui présente moins de collisions s'obtient à partir de ce que l'on appelle une fonction de hachage, dont la théorie est présentée à la section 10.3. On prend p un nombre premier et B un entier. La signature est alors :

$$S(X[0..m-1]) = (X[0]B^{m-1} + \cdots + X[m-1]B^0) \bmod p.$$

C'est l'évaluation du polynôme $X[0]Y^{m-1} + \cdots + X[m-1]$ en la valeur $Y = B$. On montre que la probabilité de collisions est alors $1/p$. Typiquement, $B = 2^{16}, p = 2^{31}-1 = 2147483647$.

L'intérêt de cette fonction est qu'elle permet un calcul incrémental (comme pour la première fonction proposée), puisque :

$$S(X[i+1..i+m]) = BS(X[i..i+m-1]) - X[i]B^m + X[i+m],$$

qui s'évalue d'autant plus rapidement que l'on a précalculé $B^m \bmod p$. Le nombre de calculs effectués est $O(n+m)$, ce qui représente une amélioration notable par rapport à la recherche naïve.

Les fonctions correspondantes sont :

```
    public static long B = ((long)1) << 16, p = 2147483647;

    // calcul de S(X[i..i+m-1])
    public static long signature2(char[] X, int i, int m){
        long s = 0;

        for(int j = i; j < i+m; j++)
            s = (s * B + (int)X[j]) % p;
        return s;
    }

    // S(X[i+1..i+m]) = B S(X[i..i+m-1])-X[i] B^m + X[i+m]
    public static long signatureIncr(char[] X, int m, int i,
                                     long s, long Bm){
        long ss;

        ss = ((int)X[i+m]) - ((((int)X[i]) * Bm)) % p;
        if(ss < 0) ss += p;
        ss = (ss + B * s) % p;
        return ss;
    }

    public static void KR2(char[] T, char[] M){
        int n, m;
        long Bm, hT, hM;

        n = T.length;
        m = M.length;
        System.out.print("Occurrences en position :");
        hM = signature2(M, 0, m);
        // calcul de Bm = B^m mod p
        Bm = B;
        for(int i = 2; i <= m; i++)
```

```
            Bm = (Bm * B) % p;
        hT = signature2(T, 0, m);
        for(int i = 0; i < n-m; i++){
            if(i > 0)
                hT = signatureIncr(T, m, i-1, hT, Bm);
            if(hT == hM){
                if(occurrence(T, M, i))
                    System.out.print(" "+i+",");
                else
                    System.out.print(" ["+i+"],");
            }
        }
        System.out.println("");
    }
```

Cette fois, le programme ne produit plus de collisions :

```
Occurrences en position : 10, 13,
```

Remarques complémentaires

Des algorithmes plus rapides existent, comme par exemple ceux de Knuth-Morris-Pratt ou Boyer-Moore (voir [BBC92, CHL01]). Il est possible également de chercher des chaînes proches du motif donné, par exemple en cherchant à minimiser le nombre de lettres différentes entre les deux chaînes.

La recherche de chaînes est tellement importante qu'Unix possède une commande `grep` qui permet de rechercher un motif dans un fichier. À titre d'exemple :

```
unix% grep int Essai.java
```

affiche les lignes du fichier `Essai.java` qui contiennent le motif `int`. Pour afficher les lignes ne contenant pas `int`, on utilise :

```
unix% grep -v int Essai.java
```

On peut faire des recherches plus compliquées, comme par exemple rechercher les lignes contenant un 0 ou un 1 :

```
unix% grep [01] Essai.java
```

Le dernier exemple est :

```
unix% grep "int .*[0-9]" Essai.java
```

qui est un cas d'expression régulière. Elles peuvent être décrites en termes d'automates, ce qui est le thème de la section qui va suivre. Pour plus d'informations sur la commande `grep`, tapez

```
unix% man grep
```

dans un terminal.

11.2 Du mot au motif

Le type de question que l'on se pose est le suivant : la chaîne `"Vive INF361X"` contient-elle des mots (i.e., une suite de lettres), des nombres (i.e., une suite de chiffres), un motif lettre-chiffre-lettre ?

Pour repérer un mot, on lit caractère par caractère et on assemble le mot tant que l'on n'a pas lu un blanc (ou un séparateur). On opère de la même façon pour un nombre. Pour un motif plus complexe, il faut enchaîner plusieurs fonctions. On va considérer qu'il n'existe que trois types de caractères : L(ettre), C(hiffre), S(éparateur).

11.2.1 La classe `Lecteur`

On se donne une classe pour faciliter la lecture des caractères les uns après les autres.

```
public class Lecteur{
    private char[] T;
    // indice du prochain caractère à lire
    private int index;

    // on stocke la chaîne dans un tableau
    public Lecteur(String s){
        this.T = s.toCharArray();
        this.index = 0;
    }

    // est-ce qu'on a fini de lire ?
    public boolean fini(){
        return this.index >= this.T.length;
    }

    public char caractereCourant(){
        return this.T[this.index];
    }

    public char caractereSuivant(){
        return this.T[this.index++];
    }
```

À titre d'exemple simple d'utilisation, l'affichage d'une chaîne caractère par caractère s'écrirait :

```
    public static void afficher(String s){
        Lecteur L = new Lecteur(s);
        while(! L.fini())
            System.out.print(L.caractereSuivant());
    }
```

Lecture d'un mot

Bien sûr, on souhaite réaliser des opérations plus ambitieuses. On se donne pour cela quelques primitives supplémentaires.

```
// c = 'M' (mot/lettre) ou 'N' (nombre/chiffre)
    public boolean bonType(char c){
        if(c == 'M')
            return Character.isLetter(this.caractereCourant());
        else if(c == 'N')
            return Character.isDigit(this.caractereCourant());
        else
            return false;
}
```

Puis on lit un mot, qui est une suite de lettres.

```
    // on cherche le mot suivant
    public String motSuivant(){
        while(!this.fini() && !this.bonType('M'))
            this.caractereSuivant();
        if(this.fini())
            return null;
        else
            return this.lireMot();
    }
    // on suppose que le caractère courant est une lettre
    public String lireMot(){
        String s = "";
        while(!this.fini() && this.bonType('M'))
            s += this.caractereSuivant();
        return s;
    }
```

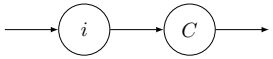
Lecture d'un nombre

Ces fonctions sont les pendants des fonctions sur les mots.

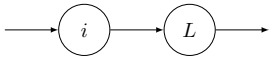
```
    // on cherche le nombre suivant
    public String nombreSuivant(){
        while(!this.fini() && !this.bonType('N'))
            this.caractereSuivant();
        if(this.fini())
            return null;
        else
            return this.lireNombre();
    }
    // on suppose que le caractère courant est un chiffre
    public String lireNombre(){
        String s = "";
        while(!this.fini() && this.bonType('N'))
            s += this.caractereSuivant();
        return s;
    }
```


Lecture de motifs

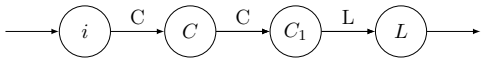
Supposons que nous recherchions un motif fixe comme `CCL` (deux chiffres suivis d'une lettre) ; il suffit d'examiner tous les triplets de caractères, et on trouvera le motif `"61X"` dans `"Vive INF361X"`. Avant d'aller plus loin, introduisons les dessins suivants, correspondant à des *automates finis* simples. On imagine que le programme lit caractère par caractère et *part* dans l'état i quand il commence la lecture. S'il lit un chiffre, il passe dans l'état C et sort.



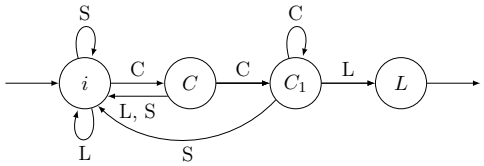
La lecture d'une lettre se fait de façon similaire :



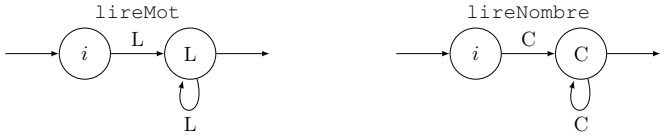
Pour lire le motif `CCL`, il suffit de relier les boîtes entre elles, en enlevant les états initiaux intermédiaires :



Ce dessin n'est pas complet. Que se passe-t-il si on ne lit pas le caractère attendu ? Dans l'état C_1, si on ne lit pas un L, alors on peut reboucler si on lit un chiffre, sinon, sortir en erreur si on lit un séparateur. Cela permet d'écrire plus généralement :

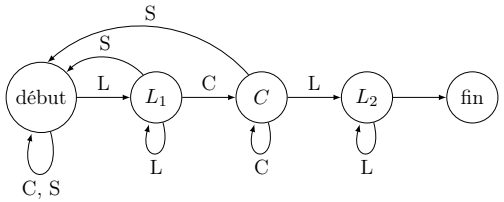


On peut écrire des automates traitant des mots ou des nombres :



Si le premier lit une lettre, alors il avance dans l'état L et il y reste tant qu'il lit des lettres. Dès qu'il rencontre un autre type de caractère, il sort. On interprète de même la lecture des chiffres. À ce dessin correspond l'enchaînement des fonctions déjà décrites.

On est prêt à traiter un exemple plus compliqué : on veut une suite non vide de lettres (Mot) suivie d'une suite non vide de chiffres (Nombre) suivie d'une suite non vide de lettres (Mot), soit le motif `MNM` en abrégé, ce qui donnera `"INF361X"`. Construisons l'automate MNM.



que l'on interprète ainsi :

— si on lit une lettre, on avance à l'*état* L_1 ; sinon on reste au départ ;
— L_1 : tant qu'on lit une lettre, on reste à l'état L_1 ;
— si on lit un chiffre, on passe à l'état C ; sinon on renvoie au départ ;
— C : tant qu'on lit un chiffre, on reste à l'état C ;
— si on lit une lettre, on va à L_2 ; sinon on revient au départ ;
— L_2 : tant qu'on lit une lettre, on reste à l'état L_2 ;
— si on lit autre chose qu'une lettre, on s'arrête, on a fini.

De l'automate, on déduit aisément le programme associé.

```
public String rechercherMotifMNM(){
    String s = "";
    while(!this.fini()){
        s = "";
        if(this.bonType('M')){
            // {\'e}tat L1
            s = this.lireMot();
            if(!this.fini() && this.bonType('N')){
                // {\'e}tat C
                s += this.lireNombre();
                if(!this.fini() && this.bonType('M')){
                    // {\'e}tat L2
                    s += this.lireMot();
                    TC.println(s);
                }
            }
        }
        else this.caractereSuivant();
    }
    return s;
}
```


Programmation d'un automate plus général

Cette fois, on veut écrire un programme qui peut reconnaître une chaîne finie sur les lettres `M` et `N`. On utilise la fonction auxiliaire :

```
public String lire(char c){
    if(c == 'M')
        return this.lireMot();
    else if(c == 'N')
        return this.lireNombre();
    else
        return null;
}
```

puis la fonction principale :

```
public String rechercherMotif(String motif){
    String s = "";
    while(!this.fini()){
        for(int i = 0; i < motif.length(); i++){
            if(this.bonType(motif.charAt(i)))
                s += this.lire(motif.charAt(i));
            else{
                s = "";
                break;
            }
        }
        if(s != "")
            return s;
        this.caractereSuivant();
    }
    return s;
}
```

11.3 Arbre des suffixes

Le problème de départ est de stocker un dictionnaire sous la forme la plus compacte possible. Historiquement, la mémoire des ordinateurs était faible. Aujourd'hui, ce sont plutôt les quantités de données qui sont énormes.

11.3.1 Mise en place

Le principe d'un *arbre des suffixes* est le suivant. Dans un premier temps, on construit un arbre n-aire, dans lequel chaque nœud contient un caractère. Un mot est alors lu comme un chemin dans l'arbre. On utilise un caractère spécial (#) pour repérer la fin d'un mot. On trouvera à la figure 11.1 un petit exemple.

Ce problème va nous donner l'occasion d'implanter un arbre n-aire. Nous définissons la classe `Suffixe` qui code un suffixe comme un nœud ayant pour contenu un caractère

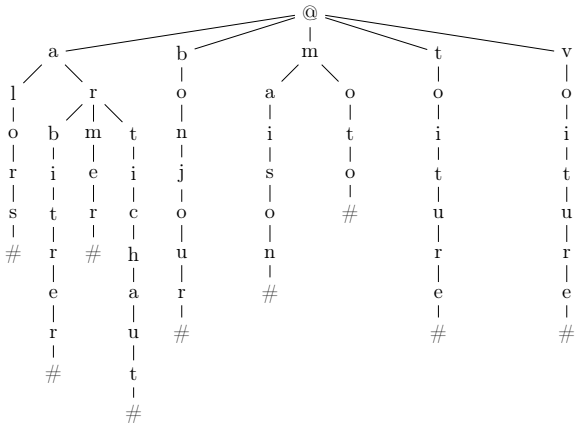


FIGURE 11.1 – Exemple d'arbre des suffixes.

et une liste d'enfants. Nous construisons toujours cette liste, en utilisant des génériques de JAVA :

```
import java.util.*;
public class Suffixe{
    public char c;
    public LinkedList<Suffixe> suffixes;

    public Suffixe(char ch){
        this.c = ch;
        this.suffixes = new LinkedList<Suffixe>();
    }
}
```

Nous ajoutons la classe `ArbreSuffixes` qui permet de traiter globalement un tel arbre :

```
public class ArbreSuffixes{
    private Suffixe racine;

    public ArbreSuffixes(){
        this.racine = new Suffixe('@');
    }
}
```

Pour appréhender la structure, on commence par écrire une méthode qui nous servira

dans la suite, et qui crée une branche de l'arbre à partir d'un mot et d'un indice dans ce mot :

```
    public void ajouterBranche(String mot, int i){
        Suffixe suf = this;

        // on ajoute les caractères les uns après les autres
        for( ; i < mot.length(); i++){
            Suffixe s = new Suffixe(mot.charAt(i));
            suf.suffixes.add(s);
            // on met à jour
            suf = s;
        }
        // on termine
        suf.suffixes.add(new Suffixe('#'));
    }
```

La partie délicate est celle de l'insertion d'un mot dans la structure. Expliquons la démarche. On parcourt les lettres du mot une à une et on les compare aux lettres contenues dans la branche dont le première caractère correspond à celui du mot. On progresse dans la lecture tant qu'il y a coïncidence entre l'arbre et le mot. Dès qu'on trouve une différence, on crée un nouveau suffixe. On écrit (dans `Suffixe.java`) :

```
    public void inserer(String mot, int i){
        Suffixe suf = this;

        if(i == mot.length()){
            // on a fini
            suf.suffixes.add(new Suffixe('#'));
            return;
        }
        for(Suffixe s : suf.suffixes)
            if(s.c == mot.charAt(i)){
                s.inserer(mot, i+1);
                return; // pas besoin de continuer
            }
        // on n'a pas trouvé
        suf.ajouterBranche(mot, i);
    }
```

On ajoute alors une méthode de lancement :

```
    public void inserer(String mot){
        this.inserer(mot, 0);
    }
```

qui est appelée dans la classe `ArbreSuffixes` par :

```
    public void inserer(String mot){
        this.racine.inserer(mot);
    }
```

La fonction de test est :

```
public class TestsArbreSuffixes{
    public static void main(String[] args){
        String[] dico = new String[]{
            "alors", "arbitrer", "armer",
            "artichaut", "bonjour", "maison",
            "moto", "toiture", "voiture"
        };
        ArbreSuffixes as = new ArbreSuffixes();
        for(int i = 0; i < dico.length; i++)
            as.inserer(dico[i]);
        as.afficherMots();
    }
}
```

Il nous reste à donner la méthode d'affichage des mots, qui utilise un parcours d'arbre classique, avec une astuce : un tampon qui contient la chaîne rencontrée lors de la descente.

```
    public static void afficherMots(Suffixe suf, String buf){
        if(suf.c == '#')
            System.out.println(buf);
        else
            for(Suffixe s : suf.suffixes)
                afficherMots(s, buf + s.c);
    }
```

qu'on appelle de `ArbreSuffixes` à l'aide de :

```
    public void afficherMots(){
        Suffixe.afficherMots(this.racine, "");
    }
```

Exercice 11.1 Écrire une fonction :

```
    public boolean estDans(String mot){ ... }
```

qui détermine si un mot se trouve dans le dictionnaire.

11.3.2 Compactage

Pour aller plus loin et gagner en place, on compacte l'arbre en partageant les suffixes (conjugaisons en français, etc.). Dans notre cas, cela donne le dessin de la figure 11.2.

La structure ainsi modifiée s'appelle un graphe dirigé acyclique (*directed acyclic graph* – DAG). La compaction de l'arbre peut se faire à la volée en utilisant du hachage.

Que peut-on améliorer encore ? On peut ordonner chaque branche en fonction de leurs probabilités d'apparition.

Une des applications historiques est celle de la correction orthographique. Le programme `epelle` de P. Zimmermann contient un dictionnaire de 260 689 mots français

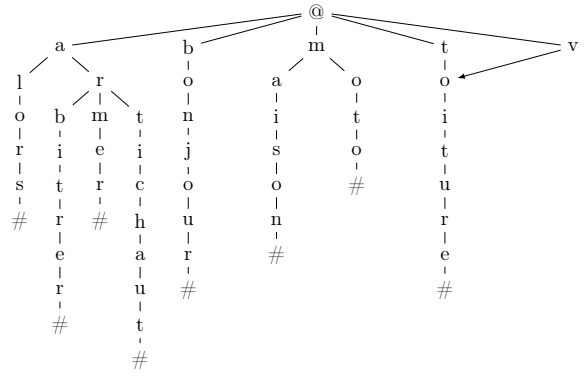


FIGURE 11.2 – Arbre compacté.

(avec accents et toutes les conjugaisons). Le dictionnaire occupe 505 614 caractères, alors que tous les mots "développés" en contiennent 2 952 153, soit un gain d'un facteur 5.

Chapitre 12

Recherche exhaustive

Pour chercher une aiguille dans une botte foin,
il faut d'abord trouver une botte de foin.

Ce que l'ordinateur sait faire de mieux, c'est traiter très rapidement une quantité gigantesque de données. Cela dit, il y a des limites à tout, et le but de ce chapitre est d'expliquer sur quelques cas ce qu'il est raisonnable d'attendre comme temps de résolution d'un problème. Cela nous permettra d'insister sur le coût des algorithmes et sur la façon de les modéliser.

12.1 Le problème du sac-à-dos

Considérons le problème suivant, appelé *problème du sac-à-dos* : on cherche à remplir un sac-à-dos avec un certain nombre d'objets de façon à le remplir exactement. Comment fait-on ?

On peut modéliser ce problème de la façon suivante : on se donne n entiers strictement positifs a_i et un entier S. Existe-t-il des nombres $x_i \in \{0,1\}$ tels que

$$S = x_0a_0 + x_1a_1 + \cdots + x_{n-1}a_{n-1} \,?$$

Si x_i vaut 1, c'est que l'on doit prendre l'objet a_i, et on ne le prend pas si $x_i = 0$.

Un algorithme de recherche des solutions doit être capable d'énumérer rapidement tous les n uplets de valeurs des x_i. Nous allons donner quelques algorithmes qui pourront être facilement modifiés pour chercher des solutions à d'autres problèmes numériques : équations du type $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$ avec f quelconque, ou encore $\max f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ sur un nombre fini de x_i.

12.1.1 Premières solutions

Si n est petit et fixé, on peut s'en tirer en utilisant des boucles `for` imbriquées qui permettent d'énumérer les valeurs de x_0, x_1, …, x_{n-1}. Voici ce qu'on peut écrire pour $n = 3$:

```
// Solution brutale
public static void sacADos3(int[] a, int S){
    int N;

    for(int x0 = 0; x0 < 2; x0++)
```



```
            for(int x1 = 0; x1 < 2; x1++)
                for(int x2 = 0; x2 < 2; x2++){
                    N = x0 * a[0] + x1 * a[1] + x2 * a[2];
                    if(N == S)
                        System.out.println(""+x0+x1+x2);
                }
    }
```

Cette version est gourmande en calculs, puisque N est calculé dans la dernière boucle, alors que la quantité $x_0a_0 + x_1a_1$ ne dépend pas de x_2. On écrit plutôt :

```
public static void sacADos3b(int[] a, int S){
    int N0, N1, N2;

    for(int x0 = 0; x0 < 2; x0++){
        N0 = x0 * a[0];
        for(int x1 = 0; x1 < 2; x1++){
            N1 = N0 + x1 * a[1];
            for(int x2 = 0; x2 < 2; x2++){
                N2 = N1 + x2 * a[2];
                if(N2 == S)
                    System.out.println(""+x0+x1+x2);
            }
        }
    }
}
```

On peut encore aller plus loin, en ne faisant aucune multiplication, et remarquant que deux valeurs de N_i diffèrent de a_i. Cela donne :

```
public static void sacADos3c(int[] a, int S){
    for(int x0 = 0, N0 = 0; x0 < 2; x0++, N0 += a[0])
       for(int x1 = 0, N1 = N0; x1 < 2; x1++, N1 += a[1])
          for(int x2 = 0, N2 = N1; x2 < 2; x2++, N2 += a[2])
             if(N2 == S)
                System.out.println(""+x0+x1+x2);
}
```

Arrivé ici, on ne peut guère faire mieux. Le problème majeur qui reste est que le programme n'est en aucun cas évolutif. Il ne traite que le cas de $n = 3$. On peut bien sûr le modifier pour traiter des cas particuliers fixes, mais on doit connaître n à l'avance, au moment de la compilation du programme.

12.1.2 Deuxième approche

Les x_i doivent prendre toutes les valeurs de l'ensemble $\{0, 1\}$, soit 2^n. Toute solution peut s'écrire comme une suite de bits $x_0x_1 \dots x_{n-1}$ et donc s'interpréter comme un entier unique de l'intervalle $I_n = [0, 2^n[$, à savoir

$$x_0 2^0 + x_1 2^1 + \cdots + x_{n-1} 2^{n-1}.$$

Parcourir l'ensemble des x_i possibles ou bien cet intervalle est donc la même chose.

On connaît un moyen simple de passer en revue tous les éléments de I_n, c'est l'addition. Il nous suffit ainsi de programmer l'addition binaire sur un entier représenté comme un tableau de bits pour faire l'énumération. On additionne 1 à un registre, en propageant à la main la retenue. Pour simplifier la lecture des fonctions qui suivent, on a introduit une fonction qui affiche les solutions :

```
// affichage de i sous forme de sommes de bits
public static afficher(int i, int[] x){
    System.out.print("i="+i+"=");
    for(int j = 0; j < n; j++)
        System.out.print(""+x[j]);
    System.out.println("");
}

public static void parcourta(int n){
    int retenue;
    int[] x = new int[n];

    for(int i = 0; i < (1 << n); i++){
        afficher(i, x);
        // simulation de l'addition
        retenue = 1;
        for(int j = 0; j < n; j++){
            x[j] += retenue;
            if(x[j] == 2){
                x[j] = 0;
                retenue = 1;
            }
            else break; // on a fini
        }
    }
}
```

(L'instruction `1<<n` calcule 2^n.) On peut faire un tout petit peu plus concis en gérant virtuellement la retenue : si on doit ajouter 1 à $x_j = 0$, la nouvelle valeur de x_j est 1, il n'y a pas de retenue à propager, on s'arrête et on sort de la boucle ; si on doit ajouter 1 à $x_j = 1$, sa valeur doit passer à 0 et engendrer une nouvelle retenue de 1 qu'elle doit passer à sa voisine. On écrit ainsi :


```
public static void parcourtb(int n){
    int[] x = new int[n];

    for(int i = 0; i < (1 << n); i++){
        afficher(i, x);
        // simulation de l'addition
        for(int j = 0; j < n; j++){
            if(x[j] == 1)
                x[j] = 0;
            else{
                x[j] = 1;
                break; // on a fini
            }
        }
    }
}
```

La boucle centrale étant écrite, on peut revenir à notre problème initial, et au programme de la figure 12.1.

Combien d'additions fait-on dans cette fonction ? Pour chaque valeur de i, on fait au plus n additions d'entiers (en moyenne, on en fait d'ailleurs $n/2$). Le corps de la boucle est effectué 2^n fois, le nombre d'additions est $O(n2^n)$.

12.1.3 Code de Gray*

Théorie et implantations

Le code de Gray permet d'énumérer tous les entiers de $I_n = [0, 2^n - 1]$ de telle sorte qu'on passe d'un entier à l'autre en changeant la valeur d'un seul bit. Si k est un entier de cet intervalle, on l'écrit $k = k_0 + k_1 2 + \cdots + k_{n-1} 2^{n-1}$ et on le note $[k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_0]$.

On va fabriquer une suite $G_n = (g_{n,i})_{0 \leqslant i < 2^n}$ dont l'ensemble des valeurs est $[0, 2^n - 1]$, mais dans un ordre tel qu'on passe de $g_{n,i}$ à $g_{n,i+1}$ en changeant *un seul chiffre* de l'écriture de $g_{n,i}$ en base 2.

Commençons par rappeler les valeurs de la fonction ou exclusif (appelé XOR en anglais) et noté $\oplus$. La table de vérité de cette fonction logique est

	0	1
0	0	1
1	1	0

En JAVA, la fonction $\oplus$ s'obtient par `^` et opère sur des mots : si `m` est de type `int`, `m` représente un entier signé de 32 bits et `m ^ n` effectue l'opération sur tous les bits de `m` et `n` à la fois. Autrement dit, si les écritures de m et n en binaire sont :

$$m = m_{31} 2^{31} + \cdots + m_0 = [m_{31}, m_{30}, \dots, m_0],$$

```
// a[0..n[ : existe-t-il x[] tel que
// somme(a[i]*x[i], i=0..n-1) = S ?
public static void sacADosn(int[] a, int S){
    int n = a.length, N;
    int[] x = new int[n];

    for(int i = 0; i < (1 << n); i++){
        // reconstruction de N = somme x[i]*a[i]
        N = 0;
        for(int j = 0; j < n; j++)
            if(x[j] == 1)
                N += a[j];
        if(N == S){
            System.out.print("S="+S+"=");
            for(int j = 0; j < n; j++)
                if(x[j] == 1)
                    System.out.print("+"+a[j]);
            System.out.println("");
        }
        // simulation de l'addition
        for(int j = 0; j < n; j++){
            if(x[j] == 1)
                x[j] = 0;
            else{
                x[j] = 1;
                break; // on a fini
            }
        }
    }
}
```

FIGURE 12.1 – Sac à dos en simulant l'addition.

$$n = n_{31}2^{31} + \cdots + n_0 = [n_{31}, n_{30}, \ldots, n_0]$$

avec m_i, n_i dans $\{0,1\}$, on a

$$m \oplus n = \sum_{i=0}^{31} (m_i \oplus n_i)2^i.$$

On définit maintenant $g_n : [0, 2^n - 1] \to [0, 2^n - 1]$ par $g_n(0) = 0$ et si $i > 0$, $g_n(i) = g_n(i-1) \oplus 2^{b(i)}$ où $b(i)$ est le plus grand entier j tel que $2^j \mid i$. Cet entier existe et $b(i) < n$ pour tout $i < 2^n$. Donnons les valeurs des premières fonctions :

$$g_1(0) = [0], g_1(1) = [1],$$

$$g_2(0) = [00], g_2(1) = [01], g_2(2) = g_2([10]) = g_2(1) \oplus 2^1 = [01] \oplus [10] = [11],$$

$$g_2(3) = g_2([11]) = g_2(2) \oplus 2^0 = [11] \oplus [01] = [10].$$

Écrivons les valeurs de g_3 sous forme d'un tableau qui souligne la symétrie de celles-ci :

i	$g(i)$	i	$g(i)$
0	$000 = 0$	7	$100 = 4$
1	$001 = 1$	6	$101 = 5$
2	$011 = 3$	5	$111 = 7$
3	$010 = 2$	4	$110 = 6$

Cela nous conduit naturellement à prouver que la fonction g_n possède un comportement "miroir" :

Proposition 7 *Si $2^{n-1} \leqslant i < 2^n$, alors $g_n(i) = 2^{n-1} + g_n(2^n - 1 - i)$.*

Démonstration : Notons que $2^n - 1 - 2^n < 2^n - 1 - i \leqslant 2^n - 1 - 2^{n-1}$, soit $0 \leqslant 2^n - 1 - i \leqslant 2^{n-1} - 1 < 2^{n-1}$.

On a

$$g_n(2^{n-1}) = g_n(2^{n-1} - 1) \oplus 2^{n-1} = 2^{n-1} + g_n(2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + g_n(2^n - 1 - 2^{n-1}).$$

Supposons la propriété vraie pour $i = 2^{n-1} + r > 2^{n-1}$. On écrit :

$$\begin{aligned} g_n(i+1) &= g_n(i) \oplus 2^{b(r+1)} \\ &= (2^{n-1} + g_n(2^n - 1 - i)) \oplus 2^{b(r+1)} \\ &= 2^{n-1} + (g_n(2^n - 1 - i) \oplus 2^{b(r+1)}). \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que :

$$g_n(2^n - 1 - i) = g_n(2^n - 1 - i - 1) \oplus 2^{b(2^n - 1 - i)}$$

et $b(2^n - i - 1) = b(i+1) = b(r+1)$. □

On en déduit par exemple que $g_n(2^n - 1) = 2^{n-1} + g_n(0) = 2^{n-1}$.

Proposition 8 *Si $n \geqslant 1$, la fonction g_n définit une bijection de $[0, 2^n - 1]$ dans lui-même.*

Démonstration : nous allons raisonner par récurrence sur n. Nous venons de voir que g_1 et g_2 satisfont la propriété. Supposons-la donc vraie au rang $n \geqslant 2$ et regardons ce qu'il se passe au rang $n + 1$. Commençons par remarquer que si $i < 2^n$, g_{n+1} coïncide avec g_n car $b(i) < n$.

Si $i = 2^n$, on a $g_{n+1}(i) = g_n(2^n - 1) \oplus 2^n$, ce qui a pour effet de mettre un 1 en bit $n + 1$. Si $2^n < i < 2^{n+1}$, on a toujours $b(i) < n$ et donc $g_{n+1}(i)$ conserve le $n + 1$-ième bit à 1. En utilisant la propriété de miroir de la propriété précédente, on voit que g_{n+1} est également une bijection de $[2^n, 2^{n+1} - 1]$ dans lui-même. □

Quel est l'intérêt de la fonction g_n pour notre problème ? Des propriétés précédentes, on déduit que g_n permet de parcourir l'intervalle $[0, 2^n - 1]$ en passant d'une valeur d'un entier à l'autre en changeant seulement un bit dans son écriture en base 2. On trouvera à la figure 12.2 une première fonction JAVA qui réalise le parcours.

On peut faire un peu mieux, en remplaçant les opérations de modulo par des opérations logiques, voir la figure 12.3.

Revenons au sac-à-dos. On commence par calculer la valeur de $\sum x_i a_i$ pour le n-uplet $[0, 0, \ldots, 0]$. Puis on parcourt l'ensemble des x_i à l'aide du code de Gray. Si à l'étape i, on a calculé

$$N_i = x_{n-1}a_{n-1} + \cdots + x_0 a_0,$$

avec $g(i) = [x_{n-1}, \ldots, x_0]$, on passe à l'étape $i + 1$ en changeant un bit, mettons le j-ème, ce qui fait que :

$$N_{i+1} = N_i + a_j$$

si $g_{i+1} = g_i + 2^j$, et

$$N_{i+1} = N_i - a_j$$

si $g_{i+1} = g_i - 2^j$. On différencie les deux valeurs en testant la présence du j-ème bit après l'opération sur `gi`, voir figure 12.4.

Remarques

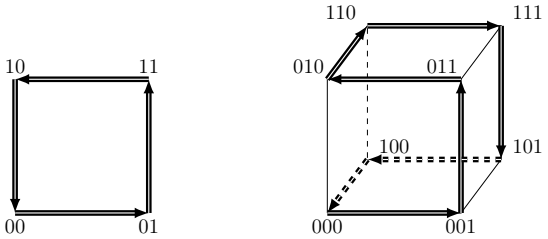
Le code de Gray permet de visiter chacun des sommets d'un hypercube. L'hypercube en dimension n est formé précisément des sommets $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ parcourant tous les n-uplets d'éléments formés de $\{0, 1\}$. Le code de Gray permet de visiter tous les sommets du cube une fois et une seule, en commençant par le point $(0, 0, \ldots, 0)$, et en s'arrêtant juste au-dessus en $(1, 0, \ldots, 0)$. Remarquons que ce parcours ne visite pas nécessairement toutes les arêtes de l'hypercube. C'est pour cela que nous avons dessiné des flèches épaisses pour bien indiquer quelles arêtes sont parcourues.


```
public static void gray(int n){
  int gi = 0;

  affichergi(0, n);
  for(int i = 1; i < (1 << n); i++){
    // on écrit i = 2^j*k, 0 <= j < n, k impair
    int k = i, j;

    for(j = 0; j < n; j++){
      if((k % 2) == 1)
        // k est impair, on s'arrête
        break;
      k /= 2;
    }
    gi ^= (1 << j);
    affichergi(gi, n);
  }
}

public static void afficherAux(int gi, int j, int n){
  if(j >= 0){
    afficherAux(gi >> 1, j-1, n);
    System.out.print((gi & 1));
  }
}

public static void affichergi(int gi, int n){
  afficherAux(gi, n-1, n);
  System.out.println("="+gi);
}
```

FIGURE 12.2 – Affichage du code de Gray.

```
public static void gray2(int n){
  int gi = 0;

  affichergi(0, n);
  for(int i = 1; i < (1 << n); i++){
    // on écrit i = 2^j*k, 0 <= j < n, k impair
    int k = i, j;

    for(j = 0; j < n; j++){
      if((k & 1) == 1)
        // k est impair, on s'arrête
        break;
      k >>= 1;
    }
    gi ^= (1 << j);
    affichergi(gi, n);
  }
}
```

FIGURE 12.3 – Affichage du code de Gray (2è version).



12.1.4 Retour arrière (backtrack)

L'idée est de résoudre le problème de proche en proche. Supposons avoir déjà calculé $S_i = x_0a_0 + x_1a_1 + \ldots + x_{i-1}a_{i-1}$. Si $S_i = S$, on a trouvé une solution et on ne continue pas à rajouter des $a_j > 0$. Sinon, on essaie de rajouter $x_i = 0$ et on teste au cran suivant, puis on essaie avec $x_i = 1$. On fait ainsi des calculs et si cela échoue, on retourne en arrière pour tester une autre solution, d'où le nom *backtrack*.

L'implantation de cette idée est donnée ci-dessous :

```
  // on a déjà calculé Si = sum(a[j]*x[j], j=0..i-1)
  public static void sacADosrec(int[] a, int S, int[] x,
                                int Si, int i){
```



```
public static void sacADosGray(int[] a, int S){
  int n = a.length, gi = 0, N = 0, deuxj;

  if(N == S)
    afficherSolution(a, S, 0);
  for(int i = 1; i < (1 << n); i++){
    // on écrit i = 2^j*k, 0 <= j < n, k impair
    int k = i, j;

    for(j = 0; j < n; j++){
      if((k & 1) == 1)
        // k est impair, on s'arrête
        break;
      k >>= 1;
    }
    deuxj = 1 << j;
    gi ^= deuxj;
    if((gi & deuxj) != 0)
      N += a[j];
    else
      N -= a[j];
    if(N == S)
      afficherSolution(a, S, gi);
  }
}

public static void afficherSolution(int[] a, int S, int gi){
  System.out.print("S="+S+"=");
  for(int i = 0; i < a.length; i++){
    if((gi & 1) == 1)
      System.out.print("+"+a[i]);
    gi >>= 1;
  }
  System.out.println();
}
```

FIGURE 12.4 – Code de Gray pour le sac-à-dos.

```
        nbrec++;
        if(Si == S)
            afficherSolution(a, S, x, i);
        else if(i < a.length){
            x[i] = 0;
            sacADosrec(a, S, x, Si, i+1);
            x[i] = 1;
            sacADosrec(a, S, x, Si+a[i], i+1);
        }
    }
```

On appelle cette fonction avec :

```
    public static void sacADos(int[] a, int S){
        int[] x = new int[a.length];

        nbrec = 0;
        sacADosrec(a, S, x, 0, 0);
        System.out.print("# appels=" + nbrec);
        System.out.println(" // " + (1 << (a.length + 1)));
    }
```

et le programme principal est :

```
    public static void main(String[] args){
        int[] a = new int[]{1, 4, 7, 12, 18, 20, 30};

        sacADos(a, 11);
        sacADos(a, 12);
        sacADos(a, 55);
        sacADos(a, 14);
    }
```

On a ajouté une variable `nbrec` qui mémorise le nombre d'appels effectués à la fonction `sacADosrec` et qu'on affiche en fin de calcul. L'exécution donne :

```
S=11=+4+7
# appels=225 // 256
S=12=+12
S=12=+1+4+7
# appels=211 // 256
S=55=+7+18+30
S=55=+1+4+20+30
S=55=+1+4+12+18+20
# appels=253 // 256
# appels=255 // 256
```


On voit que dans le cas le pire, on fait bien 2^{n+1} appels à la fonction (mais seulement 2^n additions).

On remarque que si les a_j sont tous strictement positifs, et si $S_i > S$ à l'étape i, alors il n'est pas nécessaire de poursuivre. En effet, on ne risque pas d'atteindre S en ajoutant encore des valeurs strictement positives. Il suffit donc de rajouter un test qui permet d'éliminer des appels récursifs inutiles :

```
    // on a déjà calculé Si = sum(a[j]*x[j], j=0..i-1)
    public static void sacADosrec(int[] a, int S, int[] x,
                                  int Si, int i){
        nbrec++;
        if(Si == S)
            afficherSolution(a, S, x, i);
        else if((i < a.length) && (Si < S)){
            x[i] = 0;
            sacADosrec(a, S, x, Si, i+1);
            x[i] = 1;
            sacADosrec(a, S, x, Si+a[i], i+1);
        }
    }
```

On constate bien sur les exemples une diminution notable des appels, dans les cas où S est petit par rapport à $\sum_i a_i$:

```
S=11=+4+7
# appels=63 // 256
S=12=+12
S=12=+1+4+7
# appels=71 // 256
S=55=+7+18+30
S=55=+1+4+20+30
S=55=+1+4+12+18+20
# appels=245 // 256
# appels=91 // 256
```

Terminons cette section en remarquant que le problème du sac-à-dos est le prototype des *problèmes difficiles* au sens de la théorie de la complexité.

12.2 Permutations

Une *permutation* des n éléments 1, 2, ..., n est un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tel que l'ensemble des valeurs des a_i soit exactement $\{1, 2, \ldots, n\}$. Par exemple, $(1, 3, 2)$ est une permutation sur 3 éléments, mais pas $(2, 2, 3)$. Il y a $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ permutations de n éléments.

12.2.1 Fabrication des permutations

Nous allons fabriquer toutes les permutations sur n éléments et les stocker dans un tableau. On procède récursivement, en fabriquant les permutations d'ordre $n-1$ et en rajoutant n à toutes les positions possibles :

```
public static int[][] permutations(int n){
    if(n == 1){
        int[][] t = new int[][]{{0, 1}};

        return t;
    }
    else{
        // tnm1 va contenir les (n-1)!
        // permutations à n-1 éléments
        int[][] tnm1 = permutations(n-1);
        int factnm1 = tnm1.length; // vaut (n-1)!
        int factn = factnm1 * n;   // vaut n!
        int[][] t = new int[factn][n+1];
        int ind = -1; // numéro de la permutation à créer

        // pour toute permutation de (n-1) éléments
        for(int i = 0; i < factnm1; i++)
            // on place n à toutes les places possibles
            for(int j = 1; j <= n; j++){
                ind++; // numéro suivant
                // on recopie tnm1[][1..j[
                for(int k = 1; k < j; k++)
                    t[ind][k] = tnm1[i][k];
                // on place n à la position j
                t[ind][j] = n;
                // on recopie tnm1[][j..n-1]
                for(int k = j; k <= n-1; k++)
                    t[ind][k+1] = tnm1[i][k];
            }
        return t;
    }
```

12.2.2 Énumération des permutations

Le problème de l'approche précédente est que l'on doit stocker les $n!$ permutations, ce qui peut finir par être un peu gros en mémoire. Dans certains cas, on peut vouloir se contenter d'énumérer sans stocker.

On va là aussi procéder par récurrence : on suppose avoir construit une permutation `t[1..i0-1]` et on va mettre dans `t[i0]` les $n-i_0+1$ valeurs non utilisées auparavant,

à tour de rôle. Pour ce faire, on va gérer un tableau auxiliaire de booléens `utilise`, tel que `utilise[j]` est vrai si le nombre j n'a pas déjà été choisi. Le programme est alors :

```
public static void permrec2(int[] t, int n,
                            boolean[] utilise, int i0){
    if(i0 > n)
        afficher(t, n);
    else{
        for(int v = 1; v <= n; v++){
            if(! utilise[v]){
                utilise[v] = true;
                t[i0] = v;
                permrec2(t, n, utilise, i0+1);
                utilise[v] = false;
            }
        }
    }
}

public static void permrec2(int n){
    int[] t = new int[n+1];
    boolean[] utilise = new boolean[n+1];

    permrec2(t, n, utilise, 1);
}
```

Pour $n = 3$, on fabrique les permutations dans l'ordre :

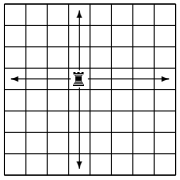
```
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1
```

12.3 Les n reines

Nous allons encore voir un algorithme de backtrack pour résoudre un problème combinatoire. Dans la suite, nous supposons que nous utilisons un échiquier $n \times n$.

12.3.1 Prélude : les n tours

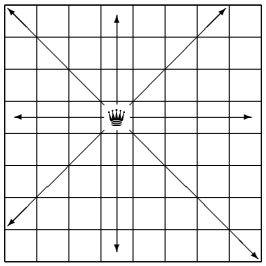
Rappelons quelques notions du jeu d'échecs. Une tour menace toute pièce adverse se trouvant dans la même ligne ou dans la même colonne.



On voit facilement qu'on peut mettre n tours sur l'échiquier sans que les tours ne s'attaquent. En fait, une solution correspond à une permutation de $1..n$, et on sait déjà faire. Le nombre de façons de placer n tours non attaquantes est donc $T(n) = n!$.

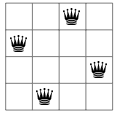
12.3.2 Des reines sur un échiquier

La reine se déplace dans toutes les directions et attaque toutes les pièces (adverses) se trouvant sur la même ligne ou colonne ou diagonales qu'elle.

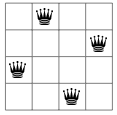


Une reine étant une tour avec un peu plus de pouvoir, il est clair que le nombre maximal de reines pouvant être sur l'échiquier sans s'attaquer est au plus n. On peut montrer que ce nombre est n pour $n = 1$ ou $n \geqslant 4$ [1]. Reste à calculer le nombre $R(n)$ de solutions possibles, et c'est une tâche difficile, et non résolue.

Donnons les solutions pour $n = 4$:



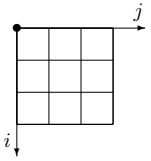
(2413)



(3142)

Expliquons comment résoudre le problème de façon algorithmique. On commence par chercher un codage d'une configuration. Une configuration admissible sera codée par la suite des positions d'une reine dans chaque colonne. On oriente l'échiquier comme suit :

1. Les petits cas peuvent se faire à la main, une preuve générale est plus délicate et elle est due à Ahrens, en 1921 [Ahr21].



Avec ces notations, on démontre :

Proposition 9 *La reine en position (i_1, j_1) attaque la reine en position (i_2, j_2) si et seulement si $i_1 = i_2$ ou $j_1 = j_2$ ou $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$ ou $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$.*

Démonstration : si elles sont sur la même diagonale nord-ouest/sud-est, $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$; ou encore sur la même diagonale sud-ouest/nord-est, $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$. □

On va procéder comme pour les permutations : on suppose avoir construit une solution approchée dans `t[1..i0[` et on cherche à placer une reine dans la colonne `i0`. Il faut s'assurer que la nouvelle reine n'attaque personne sur sa ligne, et personne dans aucune de ses diagonales (fonction `pasDeConflit`). Le code est le suivant :

```
// t[1..i0[ est déjà rempli
public static void reines(int[] t, int n, int i0){
    if(i0 > n)
        afficher(t);
    else{
        for(int v = 1; v <= n; v++)
            if(pasDeConflit(t, i0, v)){
                t[i0] = v;
                reines(t, n, i0+1);
            }
    }
}
public static void reines(int n){
    int[] t = new int[n+1];
    reines(t, n, 0);
}
```

La programmation de la fonction `pasDeConflit` découle de la proposition 9 [2] :

```
// t[1..i0[ est déjà rempli
public static boolean pasDeConflit(int[] t, int i0, int j){
    int x1, y1, x2 = i0, y2 = j;

    for(int i = 1; i < i0; i++){
```

2. On pourrait s'économiser le test `x1 == x2` étant donnée la façon dont on parcourt l'échiquier, mais c'est plus clair ainsi.

```
            // on récupère les positions
            x1 = i;
            y1 = t[i];
            if((x1 == x2) // même colonne
               || (y1 == y2) // même ligne
               || ((x1-y1) == (x2-y2))
               || ((x1+y1) == (x2+y2)))
                return false;
        }
        return true;
    }
```

Notons qu'il est facile de modifier le code pour qu'il calcule le nombre de solutions.

Terminons par un tableau des valeurs connues de $R(n)$ à ce jour [3] :

n	$R(n)$	n	$R(n)$	n	$R(n)$	n	$R(n)$
4	2	10	724	16	14772512	22	2,691,008,701,644
5	10	11	2680	17	95815104	23	24,233,937,684,440
6	4	12	14200	18	666090624	24	227,514,171,973,736
7	40	13	73712	19	4968057848	25	2,207,893,435,808,352
8	92	14	365596	20	39029188884	26	22,317,699,616,364,044
9	352	15	2279184	21	314666222712	27	234,907,967,154,122,528

Vardi a conjecturé que $\log R(n)/(n \log n) \to \alpha > 0$ et peut-être que $\alpha = 1$. Rivin & Zabih ont d'ailleurs mis au point un algorithme de meilleur complexité pour résoudre le problème, avec un temps de calcul de $O(n^2 8^n)$.

12.4 Les ordinateurs jouent aux échecs

Nous ne saurions terminer un chapitre sur la recherche exhaustive sans évoquer un cas très médiatique, celui des ordinateurs jouant aux échecs.

12.4.1 Principes des programmes de jeu

Deux approches ont été tentées pour battre les grands maîtres. La première, dans la lignée de Botvinik, cherche à programmer l'ordinateur pour lui faire utiliser la démarche humaine. La seconde, et la plus fructueuse, c'est d'utiliser l'ordinateur dans ce qu'il sait faire le mieux, c'est-à-dire examiner de nombreuses données en un temps court.

Comment fonctionne un programme de jeu ? En règle générale, à partir d'une position donnée, on énumère les coups valides et on crée la liste des nouvelles positions. On tente alors de déterminer quelle est la meilleure nouvelle position possible. On fait cela sur plusieurs tours, en parcourant un arbre de possibilités, et on cherche à garder le meilleur chemin obtenu.

Dans le meilleur des cas, l'ordinateur peut examiner tous les coups et il gagne à coup sûr. Dans le cas des échecs, le nombre de possibilités en début et milieu de partie

3. https://oeis.org/A000170

est beaucoup trop grand. Aussi essaie-t-on de programmer la recherche la plus profonde possible.

12.4.2 Retour aux échecs

Codage d'une position

La première idée qui vient à l'esprit est d'utiliser une matrice 8×8 pour représenter un échiquier. On l'implante généralement sous la forme d'un entier de type `long` qui a 64 bits, un bit par case. On gère alors un ensemble de tels entiers, un par type de pièce par exemple.

On trouve dans la thèse de J. C. Weill un codage astucieux :

— les cases sont numérotées de 0 à 63 ;
— les pièces sont numérotées de 0 à 11 : pion blanc = 0, cavalier blanc = 1, ..., pion noir = 6, ..., roi noir = 11.

On stocke la position dans le vecteur de bits

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{768})$$

tel que $c_{64i+j+1} = 1$ ssi la pièce i est sur la case j.

Les positions sont stockées dans une table de hachage la plus grande possible qui permet de reconnaître une position déjà vue.

Fonction d'évaluation

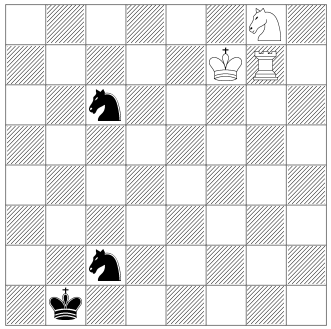
C'est un des secrets de tout bon programme d'échecs. L'idée de base est d'évaluer la force d'une position par une combinaison linéaire mettant en œuvre le poids d'une pièce (reine = 900, tour= 500, etc.). On complique alors généralement la fonction en fonction de stratégies (position forte du roi, etc.).

Bibliothèques de début et fin

Une façon d'accélérer la recherche est d'utiliser des bibliothèques d'ouvertures pour les débuts de partie, ainsi que des bibliothèques de fins de partie.

Dans ce dernier cas, on peut tenter, quand il ne reste que peu de pièces d'énumérer toutes les positions et de classifier les perdantes, les gagnantes et les nulles. L'algorithme est appelé analyse rétrograde et a été décrit par Ken Thompson (l'un des créateurs d'Unix).

À titre d'exemple, la figure ci-dessous décrit une position à partir de laquelle il faut **243 coups** (contre la meilleure défense) à Blanc (qui joue) pour capturer une pièce sans danger, avant de gagner (Stiller, 1998).



Deep blue contre Kasparov (1997)

Le projet a démarré en 1989 par une équipe de chercheurs et techniciens : C. J. Tan, Murray Campbell (fonction d'évaluation), Feng-hsiung Hsu, A. Joseph Hoane, Jr., Jerry Brody, Joel Benjamin. Une machine spéciale a été fabriquée : elle contenait 32 nœuds avec des RS/6000 SP (chip P2SC) ; chaque nœud contenait 8 processeurs spécialisés pour les échecs, avec un système AIX. Le programme était écrit en C pour le IBM SP Parallel System (MPI). La machine était capable d'engendrer $200,000,000$ positions par seconde (ou 60×10^9 en 3 minutes, le temps alloué). Deep blue a gagné 2 parties à 1 contre Kasparov [4].

Deep Fritz contre Kramnik (2002 ; 2006)

C'est cette fois un ordinateur plus raisonnable qui affronte un humain : 8 processeurs à 2.4 GHz et 256 Mo, qui peuvent calculer 3 millions de coups à la seconde. Le programmeur F. Morsch a soigné la partie algorithmique. Kramnik ne fait que match nul (deux victoires chacun, quatre nulles), sans doute épuisé par la tension du match.

Lors de la rencontre de 2006, **Deep Fritz** bat Kramnik 4 à 2, ce qui semble mettre un terme au débat pour le moment, les ordinateurs battant les grands maîtres.

Conclusion

Le début d'année 2016 a marqué une nouvelle étape dans les jeux entre humains et ordinateurs, avec le match de Go entre Lee Sedol et le programme DeepMind de Google. Les techniques employées par le programme appartiennent à la classe des algorithmes de type apprentissage (*machine learning*). Ces algorithmes sont plus adaptés dans le cas d'un nombre trop important d'états à analyser. Les probabilités sont utilisées pour orienter les choix. Ces probabilités peuvent être affinées en apprenant des parties déjà jouées, ou des parties jouées entre le programme et lui-même.

Peut-on déduire de ce qui précède que les ordinateurs sont plus intelligents que les humains ? Certes non, ils *calculent* plus rapidement sur certaines données, c'est tout.

4. `www.research.ibm.com/deepblue`

Pour la petite histoire, les joueurs d'échecs peuvent s'adapter à l'ordinateur qui joue face à lui et trouver des positions qui le mettent en difficulté. Une manière de faire est de jouer systématiquement de façon à maintenir un grand nombre de possibilités à chaque étape. Pour le Go, nous attendrons les prochaines compétitions avec impatience pour voir comment les humains vont s'adapter à la nouvelle donne.

Nous renvoyons aux articles correspondant de Wikipedia pour plus d'informations.

Chapitre 13

Polynômes et transformée de Fourier

Et ignem regunt numeri, Joseph Fourier.

Nous allons donner quelques idées sur la réalisation de bibliothèques de fonctions s'appliquant à un domaine commun, en l'illustrant sur un exemple, celui des calculs sur les polynômes à coefficients entiers. De bonnes références pour les algorithmes décrits dans ce chapitre sont [Knu81, GG99].

Comment écrit-on une bibliothèque ? On commence d'abord par choisir les objets de base, puis on leur adjoint quelques prédicats, des primitives courantes (fabrication, entrées sorties, test d'égalité, etc.). Puis dans un deuxième temps, on construit des fonctions un peu plus complexes, et on poursuit en assemblant des fonctions déjà construites.

13.1 La classe `Polynome`

Nous décidons de travailler sur des polynômes à coeffients entiers, que nous supposerons ici être de type `long` [1]. Un polynôme $P(X) = p_d X^d + \cdots + p_0$ a un *degré* d, qui est un entier positif ou nul si P n'est pas identiquement nul et -1 sinon (par convention).

13.1.1 Définition de la classe

Cela nous conduit à définir la classe, ainsi que le constructeur associé qui fabrique un polynôme dont tous les coefficients sont nuls :

```
public class Polynome{
    private int deg;
    private long[] coeff;
    public Polynome(int d){
        this.deg = d;
        this.coeff = new long[d+1];
    }
}
```

1. *stricto sensu*, nous travaillons en fait dans l'anneau des polynômes à coefficients définis modulo 2^{64}.

Nous faisons ici la convention que les arguments d'appel d'une fonction correspondent à des polynômes dont le degré est exact, et que la fonction renvoie un polynôme de degré exact. Autrement dit, si `P` est un paramètre d'appel d'une fonction, on suppose que `P.deg` contient le degré de P, c'est-à-dire que `P` est nul si `P.deg == -1` et `P.coeff[P.deg]` n'est pas nul sinon.

Nous protégeons également l'accès direct aux champs du degré et des coefficients, pour ne pas faire d'hypothèses fortes sur l'implantation interne des polynômes. On pourrait utiliser une représentation creuse comme présentée au chapitre 8. En interne à la bibliothèque, nous ne nous priverons pas d'accéder directement aux champs privés, même si dans un second temps, on devrait utiliser les fonctions d'accès. Tout dépend de la généricité des algorithmes implantés. Nous pourrions aussi utiliser une interface.

13.1.2 Création, affichage

Quand on construit de nouveaux objets, il convient d'être capable de les créer et manipuler aisément. Nous avons déjà écrit un constructeur, mais il nous faut pouvoir récupérer le degré et les coefficients du polynômes :

```
    public int degre(){
        return this.deg;
    }
    public long coefficient(int i){
        if(i <= this.deg)
            return this.coeff[i];
        else if(i >= 0)
            return 0;
    }
```

Des versions statiques peuvent être facilement écrites ; nous en laissons le soin au lecteur. Nous aurons également besoin de mettre à jour les coefficients :

```
    // suppose que i <= this.deg
    public void setCoefficient(int i, long c){
        this.coeff[i] = c;
    }
```

On pourrait rajouter des tests dans cette fonction, ou bien décider de mettre à jour la taille du polynôme, ou encore lancer une exception en cas de dépassement du degré.

Nous pouvons avoir besoin de copier un polynôme :

```
    public static Polynome copier(Polynome P){
        Polynome Q = new Polynome(P.deg);

        for(int i = 0; i <= P.deg; i++)
            Q.coeff[i] = P.coeff[i];
        return Q;
    }
```

On écrit maintenant une fonction `toString()` qui permet d'afficher un polynôme à l'écran. On peut se contenter d'une fonction toute simple :

```
    public String toString(){
        String s = "";

        for(int i = this.deg; i >= 0; i--)
            s = s.concat("+"+this.coeff[i]+"*X^"+i);
        if(s == "") return "0";
        else return s;
    }
```

Si on veut tenir compte des conventions habituelles (pas d'affichage des coefficients nuls de P sauf si $P = 0$, $1X^1$ est généralement écrit X), il vaut mieux écrire la fonction de la figure 13.1.

13.1.3 Prédicats

Il est commode de définir des prédicats sur les objets. On programme ainsi un test d'égalité à zéro :

```
    public static boolean estNul(Polynome P){
        return P.deg == -1;
    }
```

De même, on ajoute un test d'égalité :

```
    public static boolean estEgal(Polynome P, Polynome Q){
        if(P.deg != Q.deg) return false;
        for(int i = 0; i <= P.deg; i++)
            if(P.coeff[i] != Q.coeff[i])
                return false;
        return true;
    }
```

13.1.4 Premiers tests

Il est important de tester le plus tôt possible la bibliothèque en cours de création, à partir d'exemples simples et maîtrisables. On commence par exemple par écrire un programme qui crée le polynôme $P(X) = 2X + 1$, l'affiche à l'écran et teste s'il est nul :

```
public class TestsPolynome{
  public static void main(String[] args){
      Polynome P;

      // création de 2*X+1
      P = new Polynome(1);
      P.setCoefficient(1, 2);
```



```
    public String toString(){
        String s = "";
        long coeff;
        boolean premier = true;

        for(int i = this.deg; i >= 0; i--){
            coeff = this.coeff[i];
            if(coeff != 0){
                // on n'affiche que les coefficients non nuls
                if(coeff < 0){
                    s = s.concat("-");
                    coeff = -coeff;
                }
                else
                    // on n'affiche "+" que si ce n'est pas
                    // premier coefficient affiché
                    if(!premier) s = s.concat("+");
                // traitement du cas spécial "1"
                if(coeff == 1){
                    if(i == 0)
                        s = s.concat("1");
                }
                else{
                    s = s.concat(coeff+"");
                    if(i > 0)
                        s = s.concat("*");
                }
                // traitement du cas spécial "X"
                if(i > 1)
                    s = s.concat("X^"+i);
                else if(i == 1)
                    s = s.concat("X");
                // à ce stade, un coefficient non nul
                // a été affiché
                premier = false;
            }
        }
        // le polynôme nul a le droit d'être affiché
        if(s == "") return "0";
        else return s;
    }
```

FIGURE 13.1 – Fonction d'affichage d'un polynôme.

```
      P.setCoefficient(0, 1);
      System.out.println("P="+P);
      System.out.println("P == 0 ? " + Polynome.estNul(P));
  }
}
```

L'exécution de ce programme donne alors :

```
P=2*X+1
P == 0 ? false
```

Nous allons avoir besoin d'entrer souvent des polynômes et il serait souhaitable d'avoir un moyen plus simple que de rentrer tous les coefficients les uns après les autres. On peut décider de créer un polynôme à partir d'une chaîne de caractères formatée avec soin. Un format commode pour définir un polynôme est une chaîne de caractères `s` de la forme `"deg s[deg] s[deg-1] ... s[0]"` qui correspondra au polynôme $P(X) = s_{deg}X^{deg} + \cdots + s_0$. Par exemple, la chaîne `"1 1 2"` codera le polynôme $X+2$. La fonction convertissant une chaîne au bon format en polynôme est alors :

```
  public static Polynome deChaine(String s){
      Polynome P;
      long[] tabi = TC.longDeChaine(s);

      P = new Polynome((int)tabi[0]);
      for(int i = 1; i < tabi.length; i++)
          P.coeff[i-1] = tabi[i];
      return P;
  }
```

(la fonction `TC.longDeChaine` appartient à la classe `TC` décrite en annexe) et elle est utilisée dans `TestsPolynome` de la façon suivante :

```
    P = Polynome.deChaine("1 1 2"); // c'est X+2
```

Une analyse syntaxique plus poussée permettrait de rentrer directement ce polynôme sous la forme `X+2`, mais cela dépasse le cadre du présent cours.

Une fois définis les objets de base, il faut maintenant passer aux opérations plus complexes.

13.2 Premières fonctions

13.2.1 Dérivation

La dérivée du polynôme 0 est 0, sinon la dérivée de $P(X) = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i$ est :

$$P'(X) = \sum_{i=1}^{d} i p_i X^{i-1}.$$

On écrit alors la fonction :


```
  public static Polynome deriver(Polynome P){
      Polynome dP;

      if(estNul(P)) return copier(P);
      dP = new Polynome(P.deg - 1);
      for(int i = P.deg; i >= 1; i--)
          dP.coeff[i-1] = i * P.coeff[i];
      return dP;
  }
```

13.2.2 Évaluation ; schéma de Horner

Passons maintenant à l'évaluation du polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i$ en la valeur x. La première solution qui vient à l'esprit est d'appliquer la formule en calculant de proche en proche les puissances de x. Cela s'écrit :

```
  // évaluation de P en x
  public static long evaluer(Polynome P, long x){
      long Px, xpi;

      if(estNul(P)) return 0;
      // Px contiendra la valeur de P(x)
      Px = P.coeff[0];
      xpi = 1;
      for(int i = 1; i <= P.deg; i++){
          // calcul de xpi = x^i
          xpi *= x;
          Px += P.coeff[i] * xpi;
      }
      return Px;
  }
```

Cette fonction fait $2d$ multiplications et d additions. On peut faire mieux en utilisant le schéma de Horner :

$$P(x) = (\cdots((p_d x + p_{d-1})x + p_{d-2})x + \cdots)x + p_0.$$

La fonction est alors :

```
  public static long Horner(Polynome P, long x){
      long Px;

      if(estNul(P)) return 0;
      Px = P.coeff[P.deg];
      for(int i = P.deg-1; i >= 0; i--){
          // à cet endroit, Px contient:
```

```
            // p_d*x^(d-i-1) + ... + p_{i+1}
            Px *= x;
            // Px contient maintenant
            // p_d*x^(d-i) + ... + p_{i+1}*x
            Px += P.coeff[i];
        }
        return Px;
    }
```

On ne fait plus désormais que d multiplications et d additions. Notons au passage que la stabilité numérique serait meilleure, si x était un nombre flottant.

13.2.3 Addition, soustraction

Si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$, $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} q_j X^j$, alors

$$P(X) + Q(X) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} (p_k + q_k) X^k + \sum_{i=\min(n,m)+1}^{n} p_i X^i + \sum_{j=\min(n,m)+1}^{m} q_j X^j.$$

Le degré de $P + Q$ sera inférieur ou égal à $\max(n, m)$ (attention aux annulations).

Le code pour l'addition est alors :

```
    public static Polynome plus(Polynome P, Polynome Q){
        int maxdeg = (P.deg >= Q.deg ? P.deg : Q.deg);
        int mindeg = (P.deg <= Q.deg ? P.deg : Q.deg);
        Polynome R = new Polynome(maxdeg);

        for(int i = 0; i <= mindeg; i++)
            R.coeff[i] = P.coeff[i] + Q.coeff[i];
        // une seule des boucles sera exécutée
        for(int i = mindeg+1; i <= P.deg; i++)
            R.coeff[i] = P.coeff[i];
        for(int i = mindeg+1; i <= Q.deg; i++)
            R.coeff[i] = Q.coeff[i];
        trouverDegre(R);
        return R;
    }
```

Comme il faut faire attention au degré du résultat, qui est peut-être plus petit que prévu, on a dû introduire une nouvelle primitive qui se charge de mettre à jour le degré de P (on remarquera que si P est nul, le degré sera bien mis à -1) :

```
    // vérification du degré
    public static void trouverDegre(Polynome P){
        while(P.deg >= 0){
            if(P.coeff[P.deg] != 0)
                break;
            else
                P.deg -= 1;
        }
    }
```


On procède de même pour la soustraction, en recopiant la fonction précédente, les seules modifications portant sur les remplacements de $+$ par $-$ aux endroits appropriés.

Il importe ici de bien tester les fonctions écrites. En particulier, il faut vérifier que la soustraction de deux polynômes identiques donne 0. Le programme de test contient ainsi une soustraction normale, suivie de deux soustractions avec diminution du degré :

```
public static void testerSous(){
    Polynome P, Q, S;

    P = Polynome.deChaine("1 1 1"); // X+1
    Q = Polynome.deChaine("2 2 2 2"); // 2*X^2+2*X+2
    System.out.println("P="+P+" Q="+Q);
    System.out.println("P-Q="+Polynome.sous(P, Q));
    System.out.println("Q-P="+Polynome.sous(Q, P));

    Q = Polynome.deChaine("1 1 0"); // X
    System.out.println("Q="+Q);
    System.out.println("P-Q="+Polynome.sous(P, Q));
    System.out.println("P-P="+Polynome.sous(P, P));
}
```

dont l'exécution donne :

```
P=X+1 Q=2*X^2+2*X+2
P-Q=-2*X^2-X-1
Q-P=2*X^2+X+1
Q=X
P-Q=1
P-P=0
```

13.3 Deux algorithmes de multiplication

13.3.1 Multiplication naïve

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$, $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} q_j X^j$, alors

$$P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} p_i q_j \right) X^k.$$

Le code correspondant en JAVA est :

```
public static Polynome mult(Polynome P, Polynome Q){
    Polynome R;

    if(estNul(P)) return copier(P);
    else if(estNul(Q)) return copier(Q);
    R = new Polynome(P.deg + Q.deg);
    for(int i = 0; i <= P.deg; i++)
        for(int j = 0; j <= Q.deg; j++)
            R.coeff[i+j] += P.coeff[i] * Q.coeff[j];
    return R;
}
```

13.3.2 L'algorithme de Karatsuba

Nous allons utiliser une approche diviser pour résoudre de la multiplication de polynômes.

Comment fait-on pour multiplier deux polynômes de degré 1 ? On écrit :

$$P(X) = p_0 + p_1 X, \quad Q(X) = q_0 + q_1 X,$$

et on va calculer

$$R(X) = P(X)Q(X) = r_0 + r_1 X + r_2 X^2,$$

avec

$$r_0 = p_0 q_0, \quad r_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0, \quad r_2 = p_1 q_1.$$

Pour calculer le produit $R(X)$, on fait 4 multiplications sur les coefficients, que nous appelerons *multiplication élémentaire* et dont le coût sera l'unité de calcul pour les comparaisons à venir. Nous négligerons les coûts d'addition et de soustraction.

Si maintenant P est de degré $n-1$ et Q de degré $n-1$ (ils ont donc n termes), on peut écrire :

$$P(X) = P_0(X) + X^m P_1(X), \quad Q(X) = Q_0(X) + X^m Q_1(X),$$

où $m = \lceil n/2 \rceil$, avec P_0 et Q_0 de degré $m-1$ et P_1, Q_1 de degré $n-1-m$. On a alors :

$$R(X) = P(X)Q(X) = R_0(X) + X^m R_1(X) + X^{2m} R_2(X),$$

$$R_0 = P_0 Q_0, \quad R_1 = P_0 Q_1 + P_1 Q_0, \quad R_2 = P_1 Q_1.$$

Notons $\mathcal{M}(d)$ le nombre de multiplications élémentaires nécessaires pour calculer le produit de deux polynômes de degré $d-1$. On vient de voir que :

$$\mathcal{M}(2^1) = 4\mathcal{M}(2^0).$$

Si $n = 2^t$, on a $m = 2^{t-1}$ et :

$$\mathcal{M}(2^t) = 4\mathcal{M}(2^{t-1}) = O(2^{2t}) = O(n^2).$$

L'idée de Karatsuba est de remplacer 4 multiplications élémentaires par 3, en utilisant une approche dite évaluation/interpolation. On sait qu'un polynôme de degré n

est complètement caractérisé soit par la donnée de ses $n+1$ coefficients, soit par ses valeurs en $n+1$ points distincts (en utilisant par exemple les formules d'interpolation de Lagrange). L'idée de Karatsuba est d'évaluer le produit PQ en trois points 0, 1 et ∞. On écrit :

$$R_0 = P_0 Q_0,\ R_2 = P_1 Q_1,\ R_1 = (P_0 + P_1)(Q_0 + Q_1) - R_0 - R_1$$

ce qui permet de ramener le calcul des R_i à une multiplication de deux polynômes de degré $m-1$, et deux multiplications en degré $n-1-m$ plus 2 additions et 2 soustractions. Dans le cas où $n = 2^t$, on obtient :

$$\mathcal{K}(2^t) = 3\mathcal{K}(2^{t-1}) = O(3^t) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.585}).$$

La fonction $\mathcal{K}$ vérifie plus généralement l'équation fonctionnelle :

$$\mathcal{K}(n) = 2\mathcal{K}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \mathcal{K}\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

et son comportement est délicat à prédire (on montre qu'elle a un comportement fractal [SF96]).

Première implantation

Nous allons implanter les opérations nécessaires aux calculs précédents. On a besoin d'une fonction qui récupère P_0 et P_1 à partir de P. On écrit donc une fonction :

```
// crée le polynôme
//     P[début]+P[début+1]*X+...+P[fin]*X^(fin-début)
public static Polynome extraire(Polynome P,
                                 int debut, int fin){
    Polynome E = new Polynome(fin-debut);

    for(int i = debut; i <= fin; i++)
        E.coeff[i-debut] = P.coeff[i];
    trouverDegre(E);
    return E;
}
```

Quel va être le prototype de la fonction de calcul, ainsi que les hypothèses faites en entrée ? Nous décidons ici d'utiliser :

```
// ENTRÉE: deg(P) = deg(Q) <= n-1,
//         P.coeff et Q.coeff sont de taille >= n;
// SORTIE: R tq R = P*Q et deg(R) <= 2*(n-1).
public
  static Polynome Karatsuba(Polynome P, Polynome Q, int n){
```

Nous fixons donc arbitrairement le degré de P et Q à $n-1$. Une autre fonction est supposée être en charge de la normalisation des opérations, par exemple en créant des objets de la bonne taille.

On remarque également, avec les notations précédentes, que P_0 et Q_0 sont de degré $m-1$, qui est toujours plus grand que le degré de P_1 et Q_1, à savoir $n-m-1$. Il faudra donc faire attention au calcul de la somme P_0+P_1 (resp. Q_0+Q_1) ainsi qu'au calcul de R_1. La fonction complète est donnée dans la figure 13.2.

Expliquons la remarque 1. On décide pour l'instant d'arrêter la récursion quand on doit multiplier deux polynômes de degré 0 (donc $n=1$).

La remarque 2 est justifiée par notre invariant de fonction : les degrés de `SP` et `SQ` (ou plus exactement la taille de leurs tableaux de coefficients), qui vont être passés à `Karatsuba` doivent être $m-1$. Il nous faut donc modifier l'appel `plus(P0, P1);` en celui `plusKara(P0, P1, m-1);` qui renvoie la somme de `P0` et `P1` dans un polynôme dont le nombre de coefficients est toujours m, quel que soit le dégré de la somme (penser que l'on peut tout à fait avoir $P_0=0$ et P_1 de degré $m-2$). Comme c'est une fonction très particulière, il est assez logique de ne pas l'exporter, donc de la mettre **`private`**.

```
// ENTRÉE: deg(P), deg(Q) <= d.
// SORTIE: P+Q dans un polynôme R tel que R.coeff a taille
//         d+1.
private static Polynome plusKara(Polynome P, Polynome Q,
                                 int d){
    int mindeg = (P.deg <= Q.deg ? P.deg : Q.deg);
    Polynome R = new Polynome(d);

    //PrintK("plusKara("+d+", "+mindeg+"): "+P+" "+Q);
    for(int i = 0; i <= mindeg; i++)
        R.coeff[i] = P.coeff[i] + Q.coeff[i];
    for(int i = mindeg+1; i <= P.deg; i++)
        R.coeff[i] = P.coeff[i];
    for(int i = mindeg+1; i <= Q.deg; i++)
        R.coeff[i] = Q.coeff[i];
    return R;
  }
```

Comment teste-t-on un tel programme ? Tout d'abord, nous avons de la chance, car nous pouvons comparer `Karatsuba` à `mul`. Un programme test prend en entrée des couples de polynômes (P,Q) de degré n et va comparer les résultats des deux fonctions. Pour ne pas avoir à rentrer des polynômes à la main, on construit une fonction qui fabrique des polynômes (unitaires) "aléatoires" à l'aide d'un générateur créé pour la classe :

```
public static Random rd = new Random();
public static Polynome aleatoire(int deg){
    Polynome P = new Polynome(deg);
    P.coeff[deg] = 1;
    for(int i = 0; i < deg; i++)
        P.coeff[i] = rd.nextLong();
    return P;
}
```



```
public static Polynome Karatsuba(Polynome P, Polynome Q,
                                 int n){
    Polynome P0, P1, Q0, Q1, SP, SQ, R0, R1, R2, R;
    int m;

    if(n <= 1)                // (cf. remarque 1)
        return mult(P, Q);
    m = n/2;
    if((n % 2) == 1) m++; // m = ⌈n/2⌉
    // on multiplie P = P0 + X^m * P1 avec Q = Q0 + X^m * Q1
    // deg(P0), deg(Q0) <= m-1
    // deg(P1), deg(Q1) <= n-1-m <= m-1
    P0 = extraire(P, 0, m-1);
    P1 = extraire(P, m, n-1);
    Q0 = extraire(Q, 0, m-1);
    Q1 = extraire(Q, m, n-1);

    // R0 = P0*Q0 de degré 2*(m-1)
    R0 = Karatsuba(P0, Q0, m);

    // R2 = P2*Q2 de degré 2*(n-1-m)
    R2 = Karatsuba(P1, Q1, n-m);

    // R1 = (P0+P1)*(Q0+Q1)-R0-R2
    // deg(P0+P1), deg(Q0+Q1) <= max(m-1, n-1-m) = m-1
    SP = plusKara(P0, P1, m-1);       // (cf. remarque 2)
    SQ = plusKara(Q0, Q1, m-1);
    R1 = Karatsuba(SP, SQ, m);
    R1 = sous(R1, R0);
    R1 = sous(R1, R2);
    // on reconstruit le résultat
    // R = R0 + X^m * R1 + X^(2*m) * R2
    R = new Polynome(2*(n-1));
    for(int i = 0; i <= R0.deg; i++)
        R.coeff[i] = R0.coeff[i];
    for(int i = 0; i <= R2.deg; i++)
        R.coeff[2*m + i] = R2.coeff[i];
    for(int i = 0; i <= R1.deg; i++)
        R.coeff[m + i] += R1.coeff[i];
    trouverDegre(R);
    return R;
  }
```

FIGURE 13.2 – Algorithme de Karatsuba.

La méthode `rd.nextLong()` renvoie un entier "aléatoire" de type `long` fabriqué par le générateur `rd`.

Le programme test, dans lequel nous avons également rajouté une mesure du temps de calcul est alors :

```
// testons Karatsuba sur n polynômes de degré deg
public static void testerKaratsuba(int deg, int n){
    Polynome P, Q, N, K;
    long tN, tK, totN = 0, totK = 0;

    for(int i = 0; i < n; i++){
        P = Polynome.aleatoire(deg);
        Q = Polynome.aleatoire(deg);
        TC.demarrerChrono();
        N = Polynome.mult(P, Q);
        tN = TC.tempsChrono();

        TC.demarrerChrono();
        K = Polynome.Karatsuba(P, Q, deg+1);
        tK = TC.tempsChrono();

        if(! Polynome.estEgal(K, N)){
            System.out.println("Erreur");
            System.out.println("P*Q(norm)=" + N);
            System.out.println("P*Q(Kara)=" + K);
            for(int i = 0; i <= N.deg; i++){
                if(K.coeff[i] != N.coeff[i])
                    System.out.print(" "+i);
            }
            System.out.println("");
            System.exit(-1);
        }
        else{
            totN += tN;
            totK += tK;
        }
    }
    System.out.println(deg+" N/K = "+totN+" "+totK);
}
```

Que se passe-t-il en pratique ? Voici des temps obtenus avec le programme précédent, pour $100 \leqslant deg \leqslant 1000$ par pas de 100, avec 10 couples de polynômes à chaque fois :

```
Test de Karatsuba
100 N/K = 2 48
200 N/K = 6 244
300 N/K = 14 618
400 N/K = 24 969
500 N/K = 37 1028
```



```
600 N/K = 54 2061
700 N/K = 74 2261
800 N/K = 96 2762
900 N/K = 240 2986
1000 N/K = 152 3229
```

Cela semble frustrant, Karatsuba ne battant jamais (et de très loin) l'algorithme naïf sur la plage considérée. On constate cependant que la croissance des deux fonctions est à peu près la bonne, en comparant par exemple le temps pris pour d et $2d$ (le temps pour le calcul naïf est multiplié par 4, le temps pour Karatsuba par 3).

Comment faire mieux ? L'astuce classique ici est de décider de repasser à l'algorithme de multiplication classique quand le degré est petit. Par exemple ici, on remplace la ligne repérée par la remarque 1 en :

```
if(n <= 16)
```

ce qui donne :

```
Test de Karatsuba
100 N/K = 1 4
200 N/K = 6 6
300 N/K = 14 13
400 N/K = 24 17
500 N/K = 38 23
600 N/K = 164 40
700 N/K = 74 69
800 N/K = 207 48
900 N/K = 233 76
1000 N/K = 262 64
```

Le réglage de cette constante est critique et dépend de la machine sur laquelle on opère.

Remarques sur une implantation optimale

La fonction que nous avons implantée ci-dessus est gourmande en mémoire, car elle alloue sans cesse des polynômes auxiliaires. Diminuer ce nombre d'allocations (il y en a $O(n^{1.585})$ également...) est une tâche majeure permettant de diminuer le temps de calcul. Une façon de faire est de travailler sur des polynômes définis par des extraits compris entre des indices de début et de fin. Par exemple, le prototype de la fonction pourrait devenir :

```
public static
    Polynome Karatsuba(Polynome P, int dP, int fP,
                       Polynome Q, int dQ, int fQ, int n){
```

qui permettrait de calculer le produit de $P' = P_{fP}X^{fP-dP} + \cdots + P_{dP}$ et $Q' = P_{fQ}X^{fQ-dQ} + \cdots + Q_{dQ}$. Cela nous permettrait d'appeler directement la fonction sur P'_0 et P'_1 (resp. Q'_0 et Q'_1) et éviterait d'avoir à extraire les coefficients.

Dans le même ordre d'idée, l'addition et la soustraction pourraient être faites *en place*, c'est-à-dire qu'on implanterait plutôt $P := P - Q$.

13.4 Multiplication à l'aide de la transformée de Fourier*

Quel est le temps minimal requis pour faire le produit de deux polynômes de degré n ? On vient de voir qu'il existe une méthode en $O(n^{1.585})$. Peut-on faire mieux ? L'approche de Karatsuba consiste à couper les arguments en deux. On peut imaginer de couper en 3, voire plus. On peut démontrer qu'asymptotiquement, cela conduit à une méthode dont le nombre de multiplications élémentaires est $O(n^{1+\varepsilon})$ avec $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on le souhaite (cf. [Knu81]).

Il existe encore une autre manière de voir les choses. L'algorithme de Karatsuba est le prototype des méthodes de multiplication par évaluation/interpolation. On a calculé $R(0)$, $R(1)$ et $R(+\infty)$ et de ces valeurs, on a pu déduire la valeur de $R(X)$. L'approche de Cooley et Tukey consiste à interpoler le produit R sur des racines de l'unité bien choisies.

13.4.1 Transformée de Fourier

Définition 1 *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et N un entier. La transformée de Fourier est une application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_\omega : & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{C}^N \\ & (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}) & \mapsto & (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{N-1}) \end{array}$$

où

$$\hat{a}_i = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{ij} a_j$$

pour $0 \leqslant i \leqslant N-1$.

Proposition 10 *Si ω est une racine primitive N-ième de l'unité, (i.e., $\omega^N = 1$ et $\omega^i \neq 1$ pour $1 \leqslant i < N$), alors $\mathcal{F}_\omega$ est une bijection et*

$$\mathcal{F}_\omega^{-1} = \frac{1}{N} \mathcal{F}_{\omega^{-1}}.$$

Démonstration : Posons

$$\alpha_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-ik} \hat{a}_k.$$

On calcule

$$N\alpha_i = \sum_k \omega^{-ik} \sum_j \omega^{kj} a_j = \sum_j a_j \sum_k \omega^{k(j-i)} = \sum_j a_j S_{i,j}.$$

Si $i = j$, on a $S_{i,j} = N$ et si $j \neq i$, on a

$$S_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega^{j-i})^k = \frac{1 - (\omega^{j-i})^N}{1 - \omega^{j-i}} = 0,$$

puisque par hypothèse $\omega^{j-i} \neq 1$. □

13.4.2 Application à la multiplication de polynômes

Soient

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i X^i, \quad Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^i$$

deux polynômes dont nous voulons calculer le produit :

$$R(X) = \sum_{i=0}^{2n-1} r_i X^i$$

(avec $r_{2n-1} = 0$). On utilise une transformée de Fourier de taille $N = 2n$ avec les vecteurs :

$$p = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ termes}}),$$

$$q = (q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ termes}}).$$

Soit ω une racine primitive $2n$-ième de l'unité. La transformée de p

$$\mathcal{F}_\omega(p) = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{2n-1})$$

n'est autre que :

$$(P(\omega^0), P(\omega^1), \ldots, P(\omega^{2n-1})).$$

De même pour q, de sorte que le *produit terme à terme* des deux vecteurs :

$$\mathcal{F}_\omega(p) \otimes \mathcal{F}_\omega(q) = (\hat{p}_0\hat{q}_0, \hat{p}_1\hat{q}_1, \ldots, \hat{p}_{2n-1}\hat{q}_{2n-1})$$

donne en fait les valeurs de $R(X) = P(X)Q(X)$ en les racines de l'unité, c'est-à-dire $\mathcal{F}_\omega(R)$! Par suite, on retrouve les coefficients de P en appliquant la transformée inverse.

Un algorithme en pseudo-code pour calculer R est alors :

- poser $N = 2n$; calculer $\omega = \exp(2i\pi/N)$;
- calculer $\mathcal{F}_\omega(p)$, $\mathcal{F}_\omega(q)$;
- calculer $(\hat{r}_0, \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_{2n-1}) = \mathcal{F}_\omega(p) \otimes \mathcal{F}_\omega(q)$;
- récupérer les r_i par

$$(r_0, r_1, \ldots, r_{2n-1}) = (1/N)\mathcal{F}_{\omega^{-1}}(\hat{r}_0, \hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_{2n-1}).$$

13.4.3 Transformée rapide

Transformée multiplicative

Si l'on s'y prend naïvement, le calcul des $\hat{x}_i$ définis par

$$\hat{x}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \omega^{mk}, 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

prend N^2 multiplications [2].

2. On remarque que $\omega^{mk} = \omega^{(mk) \bmod N}$ et le précalcul des ω^i pour $0 \leqslant i < N$ coûte N multiplications élémentaires.

Supposons que l'on puisse écrire N sous la forme d'un produit de deux entiers plus grands que 1, soit $N = N_1N_2$. On écrit alors :

$$m = N_1m_2 + m_1, \quad k = N_2k_1 + k_2$$

avec $0 \leqslant m_1, k_1 < N_1$ et $0 \leqslant m_2, k_2 < N_2$. Cela conduit à récrire :

$$\hat{x}_k = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \omega^{N_2m_1k_1}\omega^{m_1k_2} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{N_1m_2+m_1}\omega^{N_1m_2k_2}.$$

On peut montrer sans grande difficulté que $\omega_1 = \omega^{N_2}$ est racine primitive N_1-ième de l'unité, $\omega_2 = \omega^{N_1}$ est racine primitive N_2-ième. On se ramène alors à calculer :

$$\hat{x}_k = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \omega_1^{m_1k_1}\omega^{m_1k_2} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x_{N_1m_2+m_1}\omega_2^{m_2k_2}.$$

La deuxième somme est une transformée de longueur N_2 appliquée aux nombres

$$(x_{N_1m_2+m_1})_{0\leqslant m_2<N_2}.$$

Le calcul se fait donc comme celui de N_1 transformées de longueur N_2, suivi de multiplications par des facteurs $\omega^{m_1k_2}$, suivies elles-mêmes de N_2 transformées de longueur N_1.

Le nombre de multiplications élémentaires est alors :

$$N_1(N_2^2) + N_1N_2 + N_2(N_1^2) = N_1N_2(N_1 + N_2 + 1)$$

ce qui est en général plus petit que $(N_1N_2)^2$.

Le cas magique $N = 2^t$

Appliquons le résultat précédent au cas où $N_1 = 2$ et $N_2 = 2^{t-1}$. Les calculs que nous devons effectuer sont, pour $0 \leqslant k < N/2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m}(\omega^2)^{mk} + \omega^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1}(\omega^2)^{mk} \\ \hat{x}_{k+N/2} &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m}(\omega^2)^{mk} - \omega^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1}(\omega^2)^{mk} \end{aligned}$$

car $\omega^{N/2} = -1$. Autrement dit, le calcul se divise en deux morceaux, le calcul des moitiés droite et gauche du signe + et les résultats sont réutilisés dans la ligne suivante.

Pour insister sur la méthode, nous donnons ici le pseudo-code en JAVA sur des vecteurs de nombres réels :


```
public static double[] FFT(double[] x, int N, double omega){
    double[] X = new double[N], xx, Y0, Y1;
    double omega2, omegak;

    if(N == 2){
        X[0] = x[0] + x[1];
        X[1] = x[0] - x[1];
        return X;
    }
    else{
        xx = new double[N/2];
        omega2 = omega*omega;
        // extraction des coefficients
        for(m = 0; m < N/2; m++) xx[m] = x[2*m];
        Y0 = FFT(xx, N/2, omega2);
        for(m = 0; m < N/2; m++) xx[m] = x[2*m+1];
        Y1 = FFT(xx, N/2, omega2);
        omegak = 1.; // pour omega^k
        for(k = 0; k < N/2; k++){
            X[k]     = Y0[k] + omegak*Y1[k];
            X[k+N/2] = Y0[k] - omegak*Y1[k];
            omegak = omega * omegak;
        }
        return X;
    }
}
```

Le coût de l'algorithme est alors $F(N) = 2F(N/2) + N/2$ multiplications élémentaires. On résout la récurrence à l'aide de l'astuce suivante :

$$\frac{F(N)}{N} = \frac{F(N/2)}{N/2} + 1/2 = F(1) + t/2 = t/2$$

d'où $F(N) = \frac{1}{2}N\log_2 N$. Cette variante a ainsi reçu le nom de *transformée de Fourier rapide* (*Fast Fourier Transform* ou FFT).

À titre d'exemple, si $N = 2^{10}$, on fait 5×2^{10} multiplications au lieu de 2^{20}.

Remarques complémentaires

Nous avons donné ici une brève présentation de l'idée de la FFT. C'est une idée très importante à utiliser dans tous les algorithmes basés sur les convolutions, comme par exemple le traitement d'images, le traitement du signal, etc.

Il y a des milliards d'astuces d'implantation (comme par exemple éviter les recopies superflues), qui s'appliquent par exemple aux problèmes de précision. C'est une opération tellement critique dans certains cas que du hardware spécifique existe pour traiter des FFT de taille fixe. On peut également chercher à trouver le meilleur découpage possible quand N n'est pas une puissance de 2 (au-delà de simplement prendre la puissance

de 2 la plus proche par excès). Le lecteur intéressé est renvoyé au livre de Nussbaumer [Nus82].

Signalons pour finir que le même type d'algorithme (Karatsuba, FFT) est utilisé dans les calculs sur les grands entiers, comme cela est fait par exemple dans la bibliothèque multiprécision GMP (cf. https://gmplib.org).

13.5 Polynômes creux

Le problème est le suivant. Dans les logiciels de calcul formel comme MAPLE, on travaille avec des polynômes, parfois gros, et on veut gérer la mémoire au plus juste, c'est-à-dire qu'on ne veut pas stocker les coefficients du polynôme $X^{10000}+1$ dans un tableau de 10001 entiers, dont deux cases seulement serviront. Aussi adopte-t-on une représentation *creuse* avec une liste de monômes qu'on interprète comme une somme.

On utilise ainsi une liste de monômes par ordre décroissant du degré. Le type de base et son constructeur explicite sont alors :

```
public class PolyCreux{
    private int degre, valeur;
    private PolyCreux suivant;

    public PolyCreux(int d, int v, PolyCreux p){
        this.degre = d;
        this.valeur = v;
        this.suivant = p;
    }
}
```

Pour tester et déboguer, on a besoin d'une méthode d'affichage :

```
    public static void afficher(PolyCreux p){
        while(p != null){
            System.out.print("("+p.valeur+")*X^"+p.degre);
            p = p.suivant;
            if(p != null) System.out.print("+");
        }
        System.out.println();
    }
```

On peut alors tester via :

```
public class TestsPolyCreux{
    public static void main(String[] args){
        PolyCreux p, q;

        p = new PolyCreux(0, 1, null);
        p = new PolyCreux(17, -1, p);
        p = new PolyCreux(100, 2, p);
        PolyCreux.afficher(p);
```



```
        q = new PolyCreux(1, 3, null);
        q = new PolyCreux(17, 1, q);
        q = new PolyCreux(50, 4, q);
        PolyCreux.afficher(q);
    }
}
```

Et on obtient :

```
(2)*X^100+(-1)*X^17+(1)*X^0
(4)*X^50+(1)*X^17+(3)*X^1
```

Exercice 13.1 Écrire une méthode `Copier` qui fabrique une copie d'un polynôme creux dans le même ordre.

Comment procède-t-on pour l'addition ? On doit en fait créer une troisième liste représentant la fusion des deux listes, en faisant attention au degré des monômes qui entrent en jeu, et en renvoyant une liste qui préserve l'ordre des degrés des monômes. La méthode implantant cette idée est la suivante :

```
  public static PolyCreux additionner(PolyCreux p,
                                      PolyCreux q){
      PolyCreux r;

      if(p == null) return Copier(q);
      if(q == null) return Copier(p);
      if(p.degre == q.degre){
          r = additionner(p.suivant, q.suivant);
          return new PolyCreux(p.degre, p.valeur+q.valeur,r);
      }
      else{
          if(p.degre < q.degre){
              r = additionner(p, q.suivant);
              return new PolyCreux(q.degre, q.valeur, r);
          }
          else{
              r = additionner(p.suivant, q);
              return new PolyCreux(p.degre, p.valeur, r);
          }
      }
  }
```

Sur les deux polynômes donnés, on trouve :

```
(2)*X^100+(4)*X^50+(0)*X^17+(3)*X^1+(1)*X^0
```

Exercice 13.2 Écrire une méthode qui nettoie un polynôme, c'est-à-dire qui enlève les monômes de valeur 0, comme dans l'exemple donné ci-dessus.

Quatrième partie

Pour aller plus loin

Chapitre 14

Introduction au génie logiciel en JAVA

There is no single development, in either technology or management technique, which by itself promises even one order-of-magnitude improvement within a decade in productivity, in reliability, in simplicity.
F. P. Brooks, Jr. *The mythical man-month.*

14.1 Modularité

Le concept de modularité est fondamental en informatique, et c'est une des seules façons de pouvoir gérer les gros programmes ou systèmes. Nous ne nous occupons pas ici de comment on découpe les programmes en modules, mais plutôt quels outils nous pouvons utiliser et comment.

Le concept de classe en JAVA permet déjà une certaine forme de modularité. Une classe permet de regrouper ensemble toutes les fonctions, données, algorithmes qui permettent de résoudre une tâche donnée. Bien sûr, une classe peut utiliser d'autres classes, être utilisée par d'autres, etc. L'élaboration d'une architecture de programme peut souvent être traduite en une suite (ou un arbre) de classes, qui elles-mêmes pourront être implantées. Dans ce cours, nous n'irons pas plus loin, laissant le concept d'héritage à plus tard dans le cursus.

Notons que JAVA permet de regrouper des classes au sein d'un paquetage (**package**). L'intérêt des paquetages est de limiter les conflits de noms de fonction, de classe, en créant des *espaces de nom* et des *espaces d'accessibilité*. Les fonctions publiques de ces paquetages peuvent être importées par l'intermédiaire de l'instruction **import**.

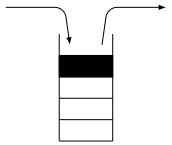
Si nous avons découpé le programme en modules, il est logique de tester chaque module de façon séparée, c'est ce qu'on appelle les *tests unitaires*. Quand on a terminé, on passe aux *tests d'intégration* qui eux testent tout le programme.

14.2 Les interfaces de JAVA

Les interfaces de JAVA sont un mécanisme qui permet de définir le comportement d'une classe par l'intermédiaire des fonctions qui doivent y être programmées. Il s'agit d'une sorte de contrat passé par l'interface avec une classe qui l'implantera. Un programme pourra utiliser une interface, sans réellement savoir quelle classe réalisera l'implantation, du moment que celle-ci est conforme à ce qui est demandé. Nous allons voir deux exemples classiques, ceux des piles et des files.

14.2.1 Piles

Nous avons déjà croisé les piles dans le chapitre 3. Les informations sont stockées dans l'ordre de leur arrivée. Le premier élément arrivé se trouve dans le fond. Le dernier arrivé peut sortir, ainsi qu'il est montré dans le dessin qui suit :



Avant de donner des implantations possibles des piles, nous pouvons nous demander de quoi exactement nous avons besoin. Nous avons besoin de créer ou détruire une pile, empiler l'élément au-dessus de la pile, dépiler l'élément qui est au-dessus. Il est logique de pouvoir tester si une pile est vide ou non. Nous avons en fait défini une pile par le comportement qu'elle doit avoir, pas par sa représentation. On parle classiquement de *type de données abstrait*. On voit que JAVA nous fournit un moyen de traiter ce concept à l'aide d'**interface**. Dans le cas présent, en nous limitant pour l'instant à une pile contenant des entiers de type **int** :

```
public interface Pile{
    public boolean estVide();
    public void empiler(int x);
    public int depiler();
}
```

Un programme de test pour une telle interface commencera par :

```
public class TestsPile{

    public static void testerPile(Pile p){
        for(int n = 0; n < 10; n++)
            p.empiler(n);
        while(! p.estVide())
            System.out.println(p.depiler());
    }
```

et on pourra tester toute classe implantant `Pile`.

Arrêtons-nous un instant sur cette fonction. Nous voyons que nous pouvons écrire du code qui dépend uniquement des propriétés des piles, pas de leur implantation. C'est justement ce dont on a besoin pour travailler à plusieurs : une fois les interfaces spécifiées, les uns peuvent travailler à leur utilisation, les autres à la réalisation concrète des choses.

Nous allons donner deux implantations possibles de cette classe, la première à l'aide d'un tableau, la seconde à l'aide d'une liste. Dans les deux cas, nous cachons la gestion

mémoire à l'intérieur des deux classes. De même, nous ne rendons pas accessible la structure de données utilisée.

Nous pouvons définir la classe `PileTab` en représentant celle-ci par un tableau dont la taille sera créée à la construction et éventuellement agrandie (modulo recopie) lors d'une insertion.

```
public class PileTab implements Pile{

    private int taille, hauteur;
    private int[] t;

    public PileTab(){
        this.taille = 16;
        this.t = new int[this.taille];
        this.hauteur = -1;
    }

    public boolean estVide(){
        return this.hauteur == -1;
    }

    public void empiler(int x){
        this.hauteur += 1;
        if(this.hauteur > this.taille){
            int[] tmp = new int[2 * this.taille];

            for(int i = 0; i < this.hauteur; i++)
                tmp[i] = this.t[i];
            this.taille = 2 * this.taille;
            this.t = tmp;
        }
        this.t[this.hauteur] = x;
    }

    public int depiler(){
        return this.t[this.hauteur--];
    }
}
```

Par convention, la pile vide sera caractérisée par une hauteur égale à -1. Si la hauteur est positive, c'est l'indice où le dernier élément arrivé a été stocké.

On peut également utiliser des listes, l'idée étant de remplacer un tableau de taille fixe par une liste dont la taille varie de façon dynamique. La seule restriction sera la taille mémoire globale de l'ordinateur. Dans ce qui suit, on va utiliser notre classe `ListeEntier` et modifier le type de la pile, qui va devenir simplement :

```
public class PileListe implements Pile{
    private ListeEntier l;

    public PileListe(){
```



```
        this.l = null;
    }

    public boolean estVide(){
        return this.l == null;
    }

    public void empiler(int x){
        this.l = new ListeEntier(x, this.l);
    }

    public int depiler(){
        int c = this.l.contenu;

        this.l = this.l.suivant;
        return c;
    }
}
```

Le programme de test pourra alors contenir la fonction principale suivante :

```
    public static void main(String[] args){
        System.out.println("Avec un tableau");
        testerPile(new PileTab());
        System.out.println("Avec une liste");
        testerPile(new PileListe());
    }
```

14.2.2 Files d'attente

Le premier exemple est celui d'une file d'attente à la Poste. Là, je dois attendre au guichet, et au départ, je suis à la fin de la file, qui avance progressivement vers le guichet. Je suis derrière un autre client, et il est possible qu'un autre client entre, auquel cas il se met derrière moi.

D'un point de vue utilisation, nous n'avons besoin que de l'interface suivante [1] :

```
public interface FIFO{
    public boolean estVide();
    public void ajouter(int x);
    public int supprimer();
}
```

Nous n'allons donner ici que l'implantation de la FIFO par une liste, laissant le cas du tableau et du programme de test en exercice. Le principe est de gérer une liste dont on connaît la tête (appelée ici `debut`) et la référence de la prochaine cellule à utiliser. Les fonctions qui suivent mettent à jour ces deux variables.

1. Nous avons pris le nom anglais FIFO, car File est un mot-clef réservé de JAVA.

```
public class FIFOListe implements FIFO{
    private ListeEntier debut, fin;

    public FIFOListe(){
        this.debut = this.fin = null;
    }

    public boolean estVide(){
        return this.debut == this.fin;
    }

    public void ajouter(int x){
        if(this.debut == null){
            this.debut = new ListeEntier(x, null);
            this.fin = this.debut;
        }
        else{
            this.fin.suivant = new ListeEntier(x, null);
            this.fin = this.fin.suivant;
        }
    }

    public int supprimer(){
        int c = this.debut.contenu;

        this.debut = this.debut.suivant;
        return c;
    }
}
```

14.3 Les génériques

Nous avons utilisé jusqu'à présent des types d'entiers pour simplifier l'exposition. Il n'y a aucun problème à utiliser des piles d'objets si le cas s'en présente.

Il peut être intéressant de chercher à faire un type de pile qui ne dépende pas de façon explicite du type d'objet stocké. En JAVA, on peut réaliser cela avec des types génériques dont nous allons esquisser l'usage.

L'exemple le plus simple est celui d'une liste, qui *a priori* n'a pas besoin de connaître le type de ses éléments. Pour des raisons techniques, faire une pile d'`Object` n'est pas suffisant, car il faut que la liste puisse travailler sur des objets de *même type*, même si ce type n'est pas connu. On peut utiliser la classe `LinkedList` de JAVA de la façon suivante :

```
LinkedList<Integer> l = new LinkedList<Integer>();
```

qui déclare `l` comme étant une liste d'`Integer`. On peut remplacer `Integer` par n'importe quel type. On peut alors utiliser les fonctions classiques :


```
l.add(new Integer("111111"));
Integer n = l.getFirst();
```

Utiliser les classes génériques donne accès à une grande partie de la richesse des bibliothèques de JAVA, offrant ainsi un réel confort au programmeur. À titre d'exemple, la syntaxe :

```
for(Integer a : l)
    System.out.println(a);
```

nous permet d'itérer sur tous les composants de la liste de façon agréable. Nous verrons à la section 15.5.1 comment ce mécanisme nous simplifie la vie.

Notez que la classe `LinkedList` définit une méthode `get(int index)` mais qu'il serait extrémement maladroit de vouloir écrire l'itération sous la forme :

```
for(int i = 0; i < l.size(); i++){
    Integer a = l.get(i);
    System.out.println(a);
}
```

La classe `LinkedList` implante l'interface `List` :

```
LinkedList<Integer> implements List<Integer>{...}
```

et correspond à la définition du modèle "collection séquentielle indexée". Une autre implantation de `List` est `ArrayList` qui correspond à la notion de tableau dynamique (sa taille est doublée automatiquement quand il est plein).

La classe `LinkedList` implante aussi l'interface `Queue` (terme anglais pour file) et on peut écrire ainsi :

```
Queue<Integer> q = new LinkedList<Integer>();
```

Cela dispense les concepteurs de la bibliothèque JAVA d'écrire une implantation particulière de `Queue` alors que `LinkedList` est très bien pour cela. Pour l'utilisateur, cela apporte plus de lisibilité et de sûreté de son code car il ne peut appliquer à `q` que les quelques fonctions définies dans `Queue`.

14.4 Exceptions*

Les exceptions[2] servent à signaler des cas anormaux dans l'exécution d'un programme. On a tous écrit, au moins une fois, un programme qui s'est terminé brutalement sur un message d'erreur comme `ArrayIndexOutOfBoundsException` ou `NullPointerException`. Nous allons voir maintenant comment, au delà de la révélation d'un "bug", un bon usage des exceptions permet d'améliorer la qualité d'un programme.

2. section écrite par P. Chassignet à partir de documents de J. Cervelle

14.4.1 Un exemple

Considérons ce programme, où l'initialisation du tableau `t` pourrait prendre différentes formes :

```
1  public class ExempleExceptions{
2    /**
3     * Cette fonction retourne la plus petite valeur du tableau
4     * argument.
5     * Attention, cette fonction exige t != null && t.length > 0
6     */
7    public static int minimum(int[] t){
8      int min = t[0];
9      for(int i = 1; i < t.length; ++i)
10       if(min > t[i])
11         min = t[i];
12     return min;
13   }
14   public static void main(String[] args){
15     int[] t = ...
16     System.out.println("minimum = " + minimum(t));
17   }
18 }
```

Si on initialise par `int[] t = null;` à la ligne 15, on obtient à l'exécution :

```
Exception in thread "main" java.lang.NullPointerException
        at ExempleExceptions.minimum(ExempleExceptions.java:7)
        at ExempleExceptions.main(ExempleExceptions.java:16)
```

Si on initialise par `int[] t = {};` à la ligne 15, ce qui construit un tableau (non **null**) de taille 0, on obtient à l'exécution :

```
Exception in thread "main" java.lang.ArrayIndexOutOfBoundsException: 0
     at ExempleExceptions.minimum(ExempleExceptions.java:7)
     at ExempleExceptions.main(ExempleExceptions.java:16)
```

Dans les deux cas, JAVA met ainsi fin immédiatement à l'exécution du programme car il n'est pas possible d'accéder à la case 0 du tableau. Il est ensuite très utile de pouvoir récupérer des informations comme la localisation de l'instruction où l'erreur est détectée (la ligne 7 dans `minimum`), mais aussi depuis où la méthode `minimum` a été appelée (ligne 16) et même la valeur 0 de l'indice en cause pour le lancement de `ArrayIndexOutOfBoundsException`.

Considérons maintenant que l'on est le programmeur de cette méthode `minimum` et que l'on a fait le choix de la programmer ainsi après mûre réflexion. En effet, un appel de cette méthode n'a de sens que si on lui passe un tableau bien construit et ayant au moins un élément. On a d'ailleurs précisé cette spécification dans le commentaire externe de la méthode.

Néanmoins, un utilisateur pressé (celui qui a écrit `main` dans l'exemple ci-dessus) pourrait vouloir utiliser la méthode `minimum` sans prendre le temps de lire ou d'analyser le commentaire qui l'accompagne. Il s'expose alors aux deux erreurs illustrées ci-dessus. Dans les deux cas, comme l'exception est issue de l'intérieur de `minimum`, cet utilisateur décidément très superficiel et qui ne doute de rien, pourrait même s'imaginer que l'erreur est de notre faute.

Il est alors préférable d'écrire ainsi :

```
1  /**
2   * Cette fonction exige t != null && t.length > 0.
3   * Dans ce cas, elle retourne la plus petite valeur
4   * du tableau t. Dans le cas contraire, elle lance une
5   * IllegalArgumentException.
6   */
7  public static int minimum(int[] t) {
8    if (t == null)
9      throw new IllegalArgumentException(
10         "un argument NON null est REQUIS comme parametre"
11         + " de minimum");
12   if (t.length < 1)
13     throw new IllegalArgumentException(
14         "il FAUT un tableau de taille minimale 1 comme"
15         + " parametre de minimum");
16   int min = t[0];
17   for (int i = 1; i < t.length; ++i)
18     if (min > t[i])
```

On produit ainsi des messages d'erreur nettement plus explicites sur les responsabilités de chacun :

```
Exception in thread "main" java.lang.IllegalArgumentException: un argument
NON null est REQUIS comme parametre de minimum
     at ExempleExceptionBis.minimum(ExempleExceptionBis.java:9)
     at ExempleExceptionBis.main(ExempleExceptionBis.java:23)
```

ou encore

```
Exception in thread "main" java.lang.IllegalArgumentException: il FAUT
un tableau de taille minimale 1 comme parametre de minimum
     at ExempleExceptionBis.minimum(ExempleExceptionBis.java:12)
     at ExempleExceptionBis.main(ExempleExceptionBis.java:23)
```

14.4.2 Qu'est-ce qu'une exception ?

Le mécanisme de l'exception ne doit pas être confondu avec celui du **return**. Ces deux mécanismes sont en fait complémentaires. Pour une méthode qui prévoit le renvoi d'une valeur, une solution largement pratiquée consiste à réserver une valeur particulière, par exemple `-1` ou **null**, pour signaler un évènement exceptionnel. Ce n'est pas possible

quand toutes les valeurs du type de renvoi peuvent être des résultats valides, c'est le cas par exemple pour la méthode `minimum` vue ci-dessus.

Notons aussi qu'il serait fastidieux de tester systématiquement les valeurs de renvoi de tous les appels de méthodes, ce que l'on devrait pourtant faire. Enfin, même une méthode déclarée **`void`** peut avoir à signaler une exception, alors qu'elle ne peut pas renvoyer de valeur.

En JAVA, les exceptions sont des objets et il existe un grand nombre de classes prédéfinies pour les exceptions usuelles. Ainsi, on peut identifier les exceptions par leur type, c'est-à-dire leur classe de définition comme

```
NullPointerException
ArrayIndexOutOfBoundsException
IllegalArgumentException
```

plutôt que par leur contenu (ie. les valeurs de champs définis dans ces classes). Il serait facile aussi de définir de nouveaux types d'exceptions, mais cela sort du cadre de ce cours. En attendant, on peut déjà utiliser de manière pertinente les exceptions prédéfinies.

Pour ce qui est de la terminologie, on voit parfois le terme "lever" (to raise) une exception qui correspond un peu à l'image du drapeau du juge de touche, mais, dans le cas de JAVA, cette image s'insère assez mal dans le mécanisme d'ensemble. On dira plutôt *lancer* une exception, traduction directe de l'instruction **`throw`** de JAVA. Cela correspond bien à l'idée qu'une exception est un objet indépendant et que, une fois qu'elle est lancée (vers le haut dans l'imbrication des appels), il faut une instruction particulière (mot réservé **`catch`**) pour l'*attraper*.

Un comportement possible est de laisser remonter une exception, en supposant qu'elle sera attrapée plus haut. C'est ainsi que, sans avoir à écrire de code pour cela, la plupart des exceptions courantes remontent par défaut jusqu'à `main` qui elle-même les laisse remonter jusqu'à la machine virtuelle de JAVA. Cette dernière attrape toutes les exceptions qui lui parviennent et les affiche. En général, une exception provoque ainsi la fin de l'exécution du programme.

14.4.3 Hiérarchie des exceptions

Les exceptions prédéfinies sont organisées en une hiérarchie, autrement dit un arbre. On a des classes qui définissent des grandes familles qui englobent un certain nombre de classes plus précises (ce type de relation entre classes sera vu dans les cours d'année 2). Voici comment sont hiérarchisées les exceptions les plus courantes :

```
Throwable
    Error
        AssertionError
        VirtualMachineError
            OutOfMemoryError
            StackOverflowError
    Exception
        InterruptedException
        IOException
            FileNotFoundException
        RuntimeException
            ArithmeticException
            ConcurrentModificationException
```



```
            EmptyStackException
            IllegalArgumentException
                NumberFormatException
            IllegalStateException
            IndexOutOfBoundsException
                ArrayIndexOutOfBoundsException
                StringIndexOutOfBoundsException
            NegativeArraySizeException
            NoSuchElementException
            NullPointerException
            UnsupportedOperationException
```

En JAVA, les exceptions sont des objets de la classe `Exception`. Il existe aussi une classe `Error` et toutes les deux sont des sous-classes de la classe `Throwable`. Cette dernière regroupe tous les objets qui peuvent être utilisés dans des constructions avec **`throw`** ou **`catch`**.

La classe `Error` représente des erreurs fatales qui ne devraient jamais se produire durant le déroulement normal d'un programme. Cela n'a pas de sens de chercher à les attraper, il faut au contraire les laisser remonter pour récupérer de l'information et corriger le programme. La classe `AssertionError` est une sous-classe de `Error` qui est dédiée aux assertions. Par exemple, un programme repose sur une propriété, mais on n'a pas réussi à prouver formellement cette propriété et on suppose simplement qu'elle est toujours vraie. Si cette propriété s'avérait fausse dans certaines conditions, alors il est important de le signaler pour en tenir compte et corriger le programme. Ainsi,

```
public static void test(int i){
  if (i + 1 <= i)
    throw new AssertionError("il se passe des choses"
                                    + " bizarres pour " + i);
}
```

pourra un jour nous donner un rappel salutoire :

```
Exception in thread "main" java.lang.AssertionError: il se passe des choses
bizarres pour 2147483647
        ...
```

La classe `Exception` représente des cas anormaux qui peuvent généralement survenir durant le déroulement normal d'un programme et qui peuvent ou doivent par conséquent être traités par le programme lui-même pour y remédier. Par exemple, un programme qui aura attrapé `FileNotFoundException`, peut automatiquement essayer un nom de fichier alternatif ou encore demander à l'utilisateur de corriger le nom.

Cependant, la classe `RuntimeException`, une vaste sous-classe de `Exception`, représente des exceptions plus graves qui demandent généralement une modification du programme. Il n'est donc pas recommandé de les attraper.

On peut alors s'interroger sur le besoin d'une distinction entre `RuntimeException` et `Error`, toutes deux aussi fatales et caractéristiques d'un programme mal écrit. Il y a quelques raisons historiques et de compatibilité ascendante, mais aussi l'intention de normaliser l'identification des responsabilités dans le processus de développement d'un logiciel.

On peut considérer qu'une opération qui lance une `RuntimeException`, signale ainsi qu'elle est mal utilisée et qu'elle ne peut donc pas produire le résultat attendu. Par exemple, dans `System.out.println(1/0);` c'est l'opération de division qui lance une `ArithmeticException`. Dans des cas plus complexes, par exemple une instruction `y = f(x);`, la méthode `f` peut lancer une `RuntimeException` pour signifier que son paramètre `x` est incorrect. La documentation de `f` doit normalement préciser les conditions de son bon usage et les cas qui donnent lieu à des exceptions.

En revanche, on peut considérer que le code qui lance une `Error` est directement en cause. Par exemple, si `f` est une méthode récursive mal écrite, elle peut aboutir au lancement de `StackOverflowError`.

14.4.4 Lancer une exception

On lance une exception (ou une erreur) `e` par l'instruction **`throw`** `e;` et il faut d'abord construire l'objet référencé par `e`. Il y a plusieurs constructeurs possibles et il est recommandé d'utiliser celui qui prend une `String` en paramètre, permettant d'associer à cette exception un message explicite et utile. Par exemple :

```
IllegalArgumentException e = new IllegalArgumentException(
        "un argument NON null est REQUIS comme parametre de minimum");
throw e;
```

que l'on contracte généralement en :

```
throw new IllegalArgumentException(
         "un argument NON null est REQUIS comme parametre"
         + " de minimum");
```

Le message donné en paramètre au constructeur doit permettre d'identifier précisément la cause de l'exception. On rappelle que, par convention, la nature de l'exception est définie par sa classe, la plus précise possible, et que les mécanismes de JAVA permettent par ailleurs de récupérer une trace de l'imbrication des appels. En particulier, il ne faut pas commettre l'erreur d'écrire :

```
throw new Exception("IllegalArgumentException");
```

quand il s'agit d'écrire :

```
throw new IllegalArgumentException("...");
```

14.4.5 Propagation d'une exception

Une exception provoque l'arrêt immédiat du fil normal de l'exécution du programme. Ainsi, dans le cas d'une instruction comme `System.out.println(1/0);` la méthode `println` n'est pas appelée car, avant cela, l'évaluation de son argument lance une `ArithmeticException`. Dans une instruction comme `y = f(x);`, si la méthode `f` propage une exception, alors l'affectation de `y` n'est pas réalisée, etc. L'exécution de la méthode qui contient cette instruction, est également immédiatement arrêtée et elle propage l'exception. Une exception peut ainsi se propager tant qu'on ne l'attrape pas.

Dans le cas des `Error`, des `RuntimeException` et de leurs sous-classes, la propagation est implicite. On considère qu'il s'agit de cas anormaux qui ne devraient jamais se produire dans un programme bien écrit, mais toute instruction du programme peut en être potentiellement la source. Le seul comportement raisonnable consiste alors à les laisser remonter jusqu'à la machine virtuelle pour mettre fin à l'exécution. Il serait donc fastidieux d'instrumenter toutes les méthodes de notre programme pour mettre en place une propagation explicite. On dit qu'il s'agit d'*exceptions non vérifiées*.

Au contraire, toutes les `Exception` qui ne sont pas des `RuntimeException`, sont dites des *exceptions vérifiées*. On doit alors expliciter le fait qu'une méthode est susceptible de produire une telle exception, soit qu'elle la lance directement, soit qu'elle laisse se propager cette exception depuis un appel plus profond. Cela se fait en ajoutant une clause **`throws`** dans la signature de la méthode.

Par exemple, si on veut utiliser la méthode `Thread.sleep`, on voit qu'elle est déclarée ainsi :

```
public static void sleep(long millis)
  throws InterruptedException
```

Un programme qui l'utilise doit ainsi obligatoirement indiquer ce qu'il fera au cas où une `InterruptedException` serait lancée par `sleep`. Les circonstances et le traitement approprié d'une `InterruptedException` seront vus en année 2. Pour l'instant, on va simplement propager cette exception. Cela donne, par exemple pour un programme où on voudrait temporiser des affichages :

```
public class ExempleSleep {

  public static void pause(int seconds)
      throws InterruptedException {
    Thread.sleep(1000*seconds);
  }

  public static void main(String[] args)
      throws InterruptedException {
    ...
    pause(5);
    ...
  }

}
```

On voit que même la méthode `main` n'échappe pas à la règle et qu'elle doit aussi expliciter que l'exception va remonter à la machine virtuelle. On évite généralement de développer ainsi de longues chaînes de propagation explicite, en s'efforçant de traiter les exceptions au plus près de leur source. Pour cela, il faut les attraper.

14.4.6 Attraper une exception

On attrape une exception par l'instruction composée

```
try { instructions } catch (TypeException id) {
   instructions d'exception }
```

qui signifie : On exécute le bloc { *instructions* } de manière usuelle. Si une exception est lancée par une des instructions du bloc alors, selon le principe général, l'exécution de ce bloc s'arrête immédiatement. Ensuite, si cette exception est du type attendu *TypeException*, alors on exécute le bloc { *instructions d'exception* } où la variable déclarée *id* contient la référence sur l'exception. Si l'exception est d'un autre type, l'instruction composée **try**{ ... }**catch**{ ... } propage cette exception et on retrouve le cas général.

Par exemple :

```
public static void pause(int seconds) {
  try {
    Thread.sleep(1000 * seconds);
  } catch (InterruptedException e) {}
}
```

Dans cet exemple, on a un bloc vide {} car on ne veut rien faire dans le cas où l'exception est attrapée. On doit mettre ce bloc vide car un bloc est obligatoire. La variable, nommée ici `e`, reçoit la référence sur l'objet exception, ici une `InterruptedException`. On peut utiliser cette variable à l'intérieur du bloc d'exception dans quelques constructions typiques, comme `System.out.println(e);` ou `e.printStackTrace();` qui permettent de signaler l'exception. Par exemple :

```
public static void pause(int seconds) {
  try {
    Thread.sleep(1000 * seconds);
  } catch (InterruptedException e) {
    System.out.println(e);
  }
}
```

On peut avoir plusieurs **catch** pour un même **try**. Dans ce cas, le bloc **catch** exécuté est celui dont le type d'exception correspond le plus précisément au type effectif de l'exception. Ainsi reprenons le même exemple, où l'argument de la méthode `pause` est maintenant une `String` qu'il convient d'abord de convertir par `Integer.parseInt`. Pour illustrer le propos, on a choisi de regrouper la conversion et la temporisation en une seule instruction :

```
public static void pause(String seconds) {
  try {
    Thread.sleep(1000 * Integer.parseInt(seconds));
  } catch (InterruptedException e) {
    System.out.println(e);
  } catch (IllegalArgumentException e) {
    System.out.println(e);
  }
}
```


Si on exécute la séquence d'appels :

```
pause(null); pause("ab"); pause("-1"); pause("1.5");
System.out.println("FIN");
```

on obtient :

```
java.lang.NumberFormatException: null
java.lang.NumberFormatException: For input string: "ab"
java.lang.IllegalArgumentException: timeout value is negative
java.lang.NumberFormatException: For input string: "1.5"
FIN
```

Dans le cas de `"-1"`, la méthode `Integer.parseInt` a convertit correctement le paramètre et c'est `Thread.sleep` qui a lancé une `IllegalArgumentException`. Dans les trois cas de **null**, `"ab"` et `"1.5"`, c'est la méthode `Integer.parseInt` qui a lancé `NumberFormatException`. Comme `NumberFormatException` est une sous-classe de `IllegalArgumentException`, le **catch** a aussi fonctionné. On peut séparer le traitement des exceptions ainsi :

```
public static void pause(String seconds) {
  try {
    Thread.sleep(1000 * Integer.parseInt(seconds));
  } catch (InterruptedException e) {
    System.out.println(e);
  } catch (NumberFormatException e) {
    System.out.println("argument is wrong " + e);
  } catch (IllegalArgumentException e) {
    System.out.println(e.getMessage());
  }
}
```

ce qui donne :

```
argument is wrong java.lang.NumberFormatException: null
argument is wrong java.lang.NumberFormatException: For input string: "ab"
timeout value is negative
argument is wrong java.lang.NumberFormatException: For input string: "1.5"
FIN
```

Notons que `NumberFormatException` et `IllegalArgumentException` sont aussi des sous-classes de `RuntimeException`, exceptions non vérifiées et donc dispensées de **throws**. Mais on a choisi de les attraper car on considère qu'il ne s'agit pas d'une erreur du programme mais plutôt d'une mauvaise donnée fournie par l'utilisateur. Dans un tel cas, il est concevable d'attraper l'exception pour la convertir en un simple message d'avertissement, voire substituer une valeur de remplacememt pour le paramètre.

On pourrait également éviter l'`IllegalArgumentException` en commençant par convertir le paramètre, pour ensuite tester sa valeur, avant de la passer à `Thread.sleep`. Cette adaptation de l'exemple est laissée en exercice. En revanche,

vérifier a priori si `Integer.parseInt` va réussir ou non serait aussi coûteux que l'appel à `Integer.parseInt` et c'est l'un des rares cas où il est vraiment légitime d'utiliser une construction `try ... catch`.

14.4.7 Quelques règles de bon usage

En règle générale, il est toujours préférable d'effectuer des tests de validité des arguments plutôt que d'attendre une exception. Par exemple, on doit écrire des tests corrects sur l'indice dans un tableau et on ne doit pas essayer de rattraper
`ArrayIndexOutOfBoundsException`.

De même, on n'utilise pas `NullPointerException` pour écrire un parcours de liste chaînée. Une première raison est l'efficacité ; la construction d'une exception est une opération très lourde car il faut y incorporer une trace de l'imbrication des appels successifs. La seconde raison est que l'interprétation systématique de

`ArrayIndexOutOfBoundsException`

comme *fin du tableau* ou de
`NullPointerException`
comme *fin de la liste* pourrait masquer des erreurs, les rendant ainsi difficilement détectables.

Les trois grandes classes `Error`, `Exception` et `RuntimeException` ne doivent pas être utilisées directement. On ne doit pas lancer d'objets construits par
`new Error(...)`,
`new Exception(...)`
`new RuntimeException(...)`.

Il ne doivent jamais être lancés car on serait, dans ce cas, tenté de les attraper. Il ne faut jamais les attraper, car on attrape par la même occasion toutes les sous-classes d'exceptions, souvent sans y penser. Il faut donc utiliser systématiquement des sous-classes plus précises, soit choisies parmi celles présentées dans ce chapitre, soit définies pour la circonstance quand on saura le faire.

Supposons la méthode suivante :

```
public static void traiter(String[] mots) {
  int n = 0;
  try {
    n = Integer.parseInt(mots[0]);
  } catch (Exception e) {
    // on continue avec n = 0
  }
  System.out.println("n = " + n);
  ...
}
```

Si, suite à une mauvaise initialisation, on passe **`null`** ou un tableau vide à cette méthode, comme le **`catch`** attrape aussi `NullPointerException` et
`ArrayIndexOutOfBoundsException`,
le message

```
n = 0
```


s'affiche et la suite du programme peut faire diverses choses bizarres, en particulier un résultat faux ou lancer de nouveau `NullPointerException` ou
`ArrayIndexOutOfBoundsException`.
Si on interprète le message `n = 0` comme une indication *jusque là, tout va bien*, on pourra passer beaucoup de temps à chercher pourquoi cela se passe plus mal ensuite.

14.5 Retour au calcul du jour de la semaine

Nous poursuivons ici l'exemple du chapitre 5, en donnant un exemple de création de paquetage.

Nous allons décider de créer un paquetage `calendrier` qui va regrouper une classe traitant le calendrier grégorien (et donc appelée `Gregorien`), puis une classe `AfficherDate` qui affiche la réponse dans un terminal. C'est à ce moment qu'on peut se poser la question de l'internationalisation. Ce n'est pas à classe `Gregorien` de s'occuper de la traduction en langage de sortie. Ceci nous amène à modifier le type de la fonction `calculerJour` et à propager cette nouvelle sémantique.

En Unix, JAVA nous impose de créer un répertoire `calendrier`, qui va contenir les deux classes `Gregorien` (dans un fichier `Gregorien.java`) et `AfficherDate` (dans `AfficherDate.java`). Chacun de ces fichiers doit commencer par la commande :

```
package calendrier;
```

qui les identifie comme appartenant à ce paquetage. Le fichier `Gregorien.java` contient donc :

```
package calendrier;

public class Gregorien{

    public static int[] JOURS_DANS_MOIS = {31, 28, 31, 30, 31,
                                           30, 31, 31, 30, 31,
                                           30, 31};

    public static boolean estBissextile(int a){
        if((a % 4) != 0)
            return false;
        if((a % 100) != 0)
            return true;
        return ((a % 400) == 0);
    }

    public static int nbJoursDansMois(int m, int a){
        if((m != 2) || !estBissextile(a))
            return JOURS_DANS_MOIS[m-1];
        else
            return 29;
    }

    public static boolean donneesCorrectes(int j, int m,
```

```
                                        int a){
        if(a <= 1584)
            return false;
        if((m < 1) || (m > 12))
            return false;
        if((j < 1) || (j > nbJoursDansMois(m, a)))
            return false;
        return true;
    }

    // Calcul du jour de la semaine correspondant
    // à la date j / m / a, sous la forme d'un entier
    // J tel que 0 <= J <= 6, avec 0 == dimanche, etc.
    static int jourZeller(int j, int m, int a){
        int mz, az, e, s, J;

        // calcul des mois/années Zeller
        mz = m-2;
        az = a;
        if(mz <= 0){
            mz += 12;
            az--;
        }
        // az = 100*s+e, 0 <= e < 100
        s = az / 100;
        e = az % 100;
        // la formule du révérend Zeller
        J = j + (int)Math.floor(2.6*mz-0.2);
        J += e + (e/4) + (s/4) - 2*s;
        // attention aux nombres négatifs
        if(J >= 0)
            J %= 7;
        else{
            J = (-J) % 7;
            if(J > 0)
                J = 7-J;
        }
        return J;
    }

    // SORTIE: un jour entre 0 et 6 ou -1 en cas d'erreur
    public static int calculerJour(String sj, String sm,
                                   String sa){

        int j, m, a;

        j = Integer.parseInt(sj);
        m = Integer.parseInt(sm);
```



```
        a = Integer.parseInt(sa);
        if(donneesCorrectes(j, m, a))
            return jourZeller(j, m, a);
        else
            return -1;
    }
}
```

Le nom de la classe est désormais `calendrier.Gregorien`.

Le fichier `AfficherDate.java` contient

```
package calendrier;

public class AfficherDate{

    public final static String[] JOUR = {"dimanche", "lundi",
                                         "mardi", "mercredi",
                                         "jeudi", "vendredi",
                                         "samedi"};

    public static void afficherJour(String sj, String sm,
                                    String sa, int jZ,
                                    String lg){
        if(lg.equals("fr")){
            String s = JOUR[jZ];
            System.out.print("Le "+sj+"/"+sm+"/"+sa);
            System.out.println(" est un "+s+".");
        }
    }

}
```

Nous avons ébauché un début d'internationalisation du programme en rajoutant un paramètre d'affichage (le choix par la langue `lg`), ainsi que les noms de jours en français. Notons que pour aller plus loin, il faut écrire des fonctions d'affichage par langue (la grammaire n'est pas la même en anglais, etc.).

On les utilise alors comme suit, dans le fichier `Jour.java`, au même niveau que le répertoire `calendrier`

```
// importation de toutes les classes du paquetage
import calendrier.*;

public class Jour{

    public static void main(String[] args){
        String sj, sm, sa;
        int jZ = -1;

        if(args.length < 3){
            System.out.println("Pas assez de données");
```

```
            return;
        }
        sj = args[0];
        sm = args[1];
        sa = args[2];
        try{
            jZ = Gregorien.calculerJour(sj, sm, sa); // (*)
        } catch(Exception e){
            System.err.println("Exception: "
                               + e.getMessage());
        }
        if(jZ != -1) // (*)
            AfficherDate.afficherJour(sj, sm, sa, jZ, "fr");
        else
            System.out.println("Données incorrectes");
        return;
    }
}
```

Les appels aux classes sont modifiés dans les lignes marquées d'une étoile (*) ci-dessus. Et nous avons demandé un affichage en français.

Nous laissons au lecteur le soin de mettre à jour les fonctions de test de ce programme pour tenir compte du changement de type de certaines fonctions, ainsi que pour l'internationalisation.

Maintenant, nous avons isolé chacune des phases du programme dans des classes bien définies, que l'on peut réutiliser dans d'autres contextes, par exemple celle d'une application X11, ou bien encore dans une application de téléphone Android, une application de type réseau, etc.

Chapitre 15

Modélisation de l'information

All data should be stored in relations.
E. F. Codd, 1970

Dans ce chapitre [1], nous allons passer en revue différentes façons de modéliser, stocker et traiter l'information, à travers de nombreux exemples, en utilisant les objets et structures définies dans les parties précédentes.

15.1 Modélisation et réalisation

15.1.1 Motivation

Nous considérons ici que de l'information consiste en des données (ou de l'information plus parcellaire) et des relations entre ces données. Certains modèles d'information peuvent aussi préciser des contraintes que les données ou les relations doivent vérifier. Enfin, un modèle inclut une définition des opérations possibles permettant de maintenir les contraintes.

Pour un même modèle, il existe souvent plusieurs structures de données qui permettent de le réaliser. La structure idéale n'existe pas toujours, et on doit souvent choisir de privilégier l'efficacité de telle ou telle opération au détriment d'autres. Il est même possible de faire cohabiter plusieurs réalisations du même modèle. Séparer modélisation et réalisation est donc fondamental.

Dans un langage comme Java, la séparation entre modèle et réalisation est à peu près décrite par le tandem *interface/implémentation*. Il manque pourtant le moyen de spécifier les contraintes et d'exiger qu'une réalisation les implante. Cela reste souvent sous la forme d'un *contrat*, exprimé dans la documentation et que le programmeur de la structure de données, d'une part, et l'utilisateur, d'autre part, doivent s'efforcer de respecter chacun à son niveau de responsabilité.

Alors qu'il est généralement facile d'identifier les données qu'un programme devra manipuler, il est généralement plus difficile de recenser de manière exhaustive les relations et les contraintes. Comme on l'a vu au chapitre 5, il est pourtant impératif de faire cela dès la première étape de la conception car se rendre compte d'éventuels oublis ou imprécisions, lors de la programmation ou lors des tests, peut conduire à d'énormes pertes de temps. Il est alors rassurant et avantageux de pouvoir facilement relier son problème à un modèle type, quand c'est possible. Cela permet ensuite, sans trop se poser de questions, de prendre "sur l'étagère" les bons composants pour le réaliser.

1. chapitre écrit avec P. Chassignet

15.1.2 Exemple : les données

Un exemple particulier est la notion de multiplet (élément d'un produit cartésien) qui permet d'associer des données de types disparates mais connus et en nombre fini. La traduction en Java est une classe qui est une représentation du produit cartésien, chaque objet de cette classe pouvant représenter un multiplet particulier. Néanmoins la modélisation par multiplet n'implique pas nécessairement une correspondance directe entre les composants du multiplet et les champs de l'objet.

Par exemple, si on considère la représentation des nombres complexes, on peut considérer qu'un nombre complexe associe quatre données qui sont sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et son argument. Néanmoins, il existe les règles bien connues qui relient ces quatre données et il serait maladroit de représenter un nombre complexe comme un objet ayant quatre champs.

Là aussi la séparation entre modèle et réalisation nous permet de concilier les deux points de vue. On peut ainsi dire qu'un nombre complexe est défini par une interface Java qui comporte huit méthodes, une pour obtenir la valeur, une pour la modifier et ce pour les quatre grandeurs. Ensuite, on peut envisager une réalisation basée sur la représentation cartésienne et une autre sur la représentation polaire (ie. deux classes qui implantent l'interface). Chacune de ces classes ne définit que deux champs (private), avec quatre méthodes qui y accèdent directement et quatre autres méthodes qui font le changement de représentation requis à chaque accès. Le choix d'instancier un objet plutôt de l'une ou de l'autre de ces classes dépend ensuite de l'application. Par exemple, si l'on a majoritairement des multiplications de nombres complexes à traiter, on priviligiera la représentation polaire.

Sans changer de modèle, on peut également réaliser une classe pour définir des constantes complexes où les méthodes pour modifier ne font rien ou lancent une exception.

Nous allons maintenant considérer des associations de données de même type. Ce type peut être un type élémentaire, un produit cartésien déjà défini ou un super-type (comme une interface Java) qui permet de manipuler de manière uniforme des types a priori disparates.

15.2 Conteneurs, collections et ensembles

Nous introduisons ici un type abstrait très général qui est celui de conteneur pour lequel sont définies l'ajout et la suppression d'un élément, le test d'appartenance d'un élément et l'itération c'est-à-dire un mécanisme pour considérer un à un tous les éléments du conteneur. On ajoute généralement un accès direct au nombre d'éléments contenus, pour ne pas avoir à calculer cela par une itération, ainsi que la possibilité de vider le conteneur en une seule opération.

La collection est le type de conteneur le plus vague dans lequel il est permis de placer plusieurs occurrences d'une même donnée. Lors d'une itération de la collection, cette donnée sera alors considérée plusieurs fois.

L'ensemble, correspondant à la définition classique en mathématiques, est une collection avec une contrainte d'unicité. Cette contrainte est généralement assurée dans la méthode d'ajout qui doit procéder à l'équivalent d'un test d'appartenance avant d'ajouter effectivement. Avec des réalisations naïves, par exemple, un tableau ou une liste chaînée, le test d'appartenance et la contrainte d'unicité coûtent cher car il faut itérer sur tout le conteneur pour vérifier l'absence d'un élément. Des structures d'arbre

particulières permettent de réaliser ce test en temps logarithmique et le hachage permet de le faire en temps quasi-constant.

A priori, une collection ou un ensemble ne sont pas ordonnés, c'est-à-dire que l'ordre d'énumération de leurs éléments n'est pas défini. En fait la collection non ordonnée n'existe pas. Selon la structure de données qui est utilisée pour réaliser le stockage, il existe toujours un ordre déterministe d'énumération, sauf à ajouter explicitement de l'aléatoire lors de l'itération. Une exception notable est le cas où la structure sous-jacente utilise le hachage et l'ordre d'énumération, bien que déterministe, est alors difficilement prédictible.

On va maintenant considérer des conteneurs ordonnés. Selon les procédés les plus courants, l'ordre des éléments dans le conteneur est défini soit par l'ordre ou la position de leur ajout, soit par une relation d'ordre définie sur les données.

15.2.1 Collections séquentielles

Il s'agit des collections où l'ordre des éléments est principalement défini par l'ordre de leur ajout. Notons que cela permet de considérer de nouvelles opérations d'ajout, d'accès ou de suppression qui utilisent le numéro d'ordre (la position) dans le conteneur pour désigner où opérer. On parle alors de collection séquentielle indexée. Des réalisations particulièrement simples sont possibles à partir de tableaux ou de listes chaînées mais il faut faire attention aux fonctions que l'on tient à privilégier car elles n'ont pas toutes la même efficacité selon la structure sous-jacente.

Il existe des cas où on peut restreindre les opérations permises à un élément particulier. Par exemple, on veut que l'accès et la suppression ne soient possibles que sur le dernier ou le premier ajouté. Ce sont respectivement les piles et les files. Le fait de les identifier comme des modèles à part permet de clarifier l'expression des algorithmes qui les utilisent. Le fait de leur dédier des réalisations particulières qui limitent les opérations permises permet d'éviter les erreurs et parfois d'optimiser.

On retrouve ainsi les piles et les files présentées au chapitre 14.

15.2.2 Collections ordonnées

Il s'agit des collections où l'ordre des éléments est défini par une relation d'ordre total sur ces éléments et donc indépendant de l'ordre dans lequel ils sont ajoutés dans la collection. Une réalisation efficace utilise généralement des structures d'arbres équilibrés.

Si la collection est relativement statique, c'est-à-dire qu'elle est constituée au départ et qu'ensuite, on se contente de la consulter, une alternative consiste à la former en triant les éléments d'une collection séquentielle.

De même qu'une file peut être vue comme une collection séquentielle particulière, on peut définir la file de priorité comme une collection ordonnée dont on restreint les opérations permises.

Exemple : file de priorité

Dans certains cas, une file d'attente ne suffit pas à nos besoins. Les données peuvent arriver avec une *priorité*. Par exemple, dans une file d'impression, on peut décider qu'un utilisateur est prioritaire. Un ordonnanceur de système d'exploitation a également plusieurs files de priorité à gérer. C'est comme ça qu'un bon chef doit également gérer ses affaires courantes...

Que demandons-nous à notre modèle ? Il suffit de deux actions notables, la première de stocker un nouvel élément avec sa priorité, la seconde de pouvoir demander quelle est la tâche prioritaire suivante à traiter. Accessoirement, nous pourrions insister pour que cette gestion soit rapide, mais le typage ne suffit pas pour cela. Il est clair que si le nombre de tâches est fixé une fois pour toutes, on peut trier le tableau des tâches en fonction de leur priorité et nous n'avons plus rien à faire. Ce qui nous intéresse ici est le cas où des tâches arrivent de façon dynamique, et sont traitées de façon dynamique (par exemple l'impression de fichiers avec priorité). L'interface désirée, qui ressemble à celle d'une file d'attente normale est :

```
public interface FileDePriorite{
    public boolean estVide();
    public void ajouter(String x, int p);
    public int tacheSuivante();
}
```

Nous laissons au lecteur le soin d'inventer une classe qui implante cette interface à l'aide d'un tableau, en s'inspirant de ce qui a été fait pour les piles et les files. Nul doute que le résultat aura une complexité proche de $O(n^2)$ si n est le nombre de tâches traitées. L'utilisation d'un tas (cf. 9.4) nous permet de faire mieux, avec un tableau de taille n et des complexités en $O(n \log n)$.

On peut implanter une file de priorité opérant sur des fichiers et des priorités en raisonnant sur des couples `(String, int)` et il est facile de modifier la classe `Tas` (cf. section 9.4) en `TasFichier`. On pourrait alors créer :

```
public class Impression implements FileDePriorite{
    private TasFichier tas;

    public Impression(){
        this.tas = new TasFichier();
    }
    public boolean estVide(){
        return this.tas.estVide();
    }
    public void ajouter(String f, int priorite){
        this.tas.ajouter(f, priorite);
    }
    public String tacheSuivante(){
        return this.tas.tacheSuivante();
    }
}
```

Nous laissons au lecteur le soin de terminer.

15.3 Associations

Formellement une table d'associations peut être vue comme une fonction qui, à un ensemble fini de données appelées clefs, associe d'autres données. On peut aussi considérer cela comme un ensemble de couples (clef, données) avec une fonction particulière

qui consiste à retrouver les données associées à une clef.

Il y a diverses réalisations possibles. Celle qui consisterait à utiliser la représentation naïve par une liste de couples est maladroite puisqu'elle conduit à programmer la recherche séquentielle du couple ayant la clef considérée. La solution la plus efficace est une table de hachage organisée suivant les clefs.

Si l'on a besoin de maintenir un ordre particulier sur les clefs, par exemple un annuaire trié par ordre alphabétique, le concept de table est précisé comme étant ordonné. Son interprétation au niveau modélisation comme "ensemble ordonné de couples (clef, données) avec une fonction de recherche particulière par la clef" doit alors suggérer au programmeur que sa bonne réalisation est l'arbre de couples (clef, données) organisé en un arbre binaire de recherche sur les clefs qui permet une recherche relativement rapide.

15.4 Information hiérarchique

15.4.1 Exemple : arbre généalogique

Une personne `p` a deux parents (une mère et un père), qui ont eux-mêmes deux parents. On aimerait pouvoir stocker facilement une telle relation. Une structure de données qui s'impose naturellement est celle d'arbre. Il est à noter que la relation père-fils dans cette application est à l'inverse de celle qui est employée par les informaticiens pour décrire la structure de données en arbre. Cet exemple particulièrement frappant de conflit de terminologies illustre combien il est important de bien séparer les étapes conceptuelles entre la définition et la réalisation. Illustrons notre propos par un dessin, construit grâce aux bases de données utilisées dans le logiciel GeneWeb réalisé par Daniel de Rauglaudre [2]. On remarquera qu'en informatique, on a tendance à dessiner les arbres la racine en haut.

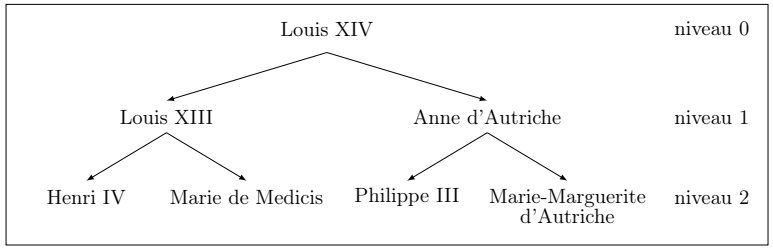


FIGURE 15.1 – Un arbre généalogique.

Une réalisation possible reprend la structure de tas vue en 9.4. Pour mémoire, on utilise un tableau `a`, de telle sorte que `a[1]` (au niveau 0) soit la personne initiale et on continue de proche en proche, en décidant que `a[i]` aura pour père `a[2*i]`, pour mère `a[2*i+1]`, et pour enfant (si $i > 1$) la case `a[i/2]`. Néanmoins, une telle structure de données ne permet pas de répondre facilement à une question comme "qui

2. `http://cristal.inria.fr/~ddr/GeneWeb/`

est le père d'Anne d'Autriche ?". Une modélisation par des tables d'associations, une pour chaque relation "père", "mère", "enfant", est alors préférable. Notons aussi que ce que l'on cherche à faire avec de l'information hiérarchique ressemble beaucoup à ce que l'on va voir en 15.5. Ce n'est pas étonnant puisque les arbres peuvent être vus comme des graphes avec des contraintes particulières.

15.4.2 Autres exemples

On trouve également ce type de représentation hiérarchique dans la classification des espèces ou par exemple un organigramme administratif.

15.5 Quand les relations sont elles-mêmes des données

Que faire quand les liens sont plus complexes, comme par exemple quand on doit représenter la carte d'un réseau routier, un circuit électronique, la liste de ses amis ? Pour coder ces relations plus complexes, on utilise souvent un *graphe*, dont nous allons donner une implantation simple.

15.5.1 Un exemple : un réseau social

Nous allons prendre comme exemple directeur le cas de réseaux [3] d'amis [4].

Spécification

Un ami est un membre du réseau. Un membre du réseau a un nom et une collection d'amis. Nous allons choisir d'implanter la relation “je suis l'ami de”. Nous supposerons que si Claude a pour ami Dominique, alors la réciproque est vraie (la relation est *symétrique*).

Que demander au réseau ? D'abord de pouvoir rajouter de nouveaux membres. Un nouvel arrivant peut s'incrire comme membre isolé, ou bien arriver comme étant ami d'un membre. On considère que l'adresse électronique est suffisante pour indentifier un membre de façon unique.

Choix des structures de données

Comme nous voulons garder l'identification unique des membres, il nous faut un moyen de tester si un membre existe déjà, et ce test doit être rapide. Il nous faut donc un ensemble de membres qui supporte les opérations d'ajout et d'appartenance (ainsi que la suppression, mais nous laissons cela de côté pour le moment), ce qui tend vers une solution à base de hachage, dont un exemple a déjà été présenté à la section 10.3.

Programmation

On commence par les structures les plus classiques, qui codent les membres et les listes d'amis, en utilisant la classe `LinkedList` déjà présentée à la section 14.3.

3. Toute ressemblance avec des réseaux sociaux existant ne pourrait être que fortuite.
4. Nous prenons ici ami dans un sens neutre.

```
import java.util.*; // nécessaire pour utiliser LinkedList

public class Membre{
    private String nom;
    private LinkedList<Membre> lamis;

    public Membre(String n){
        this.nom = n;
        this.lamis = new LinkedList<Ami>();
    }
    public String toString(){
        return this.nom;
    }
}
```

Nous en avons profité pour définir des méthodes pratiques, comme `toString` qui permet d'afficher simplement un membre. La gestion d'une amitié unidirectionnelle (ajout d'un membre dans la liste d'amis d'un autre membre) est simple :

```
    public void ajouterAmitie(Membre b){
        this.lamis.add(b);
    }
```

Passons à l'implantation de la classe `ReseauSocial`. Nous allons utiliser une table de hachage pour stocker les membres déjà présents, ce qui va nous simplifier la gestion.

```
import java.util.*;

public class ReseauSocial{
    private String nom;
    private HashMap<String, Membre> hm;

    public ReseauSocial(String n){
        this.nom = n;
        this.hm = new HashMap<String, Membre>();
    }

    // renvoie le membre dont n est le nom
    public Membre deNom(String n){
        return this.hm.get(n);
    }

    public boolean estMembre(String nom){
        return this.hm.containsKey(nom);
    }

    public void creerMembre(String nom){
        if(! this.estMembre(nom))
            this.hm.put(nom, new Membre(nom));
```



```
    }

    public void ajouterAmitie(String nom_a, String nom_b){
        Membre a = this.hm.get(nom_a);
        Membre b = this.hm.get(nom_b);
        a.ajouterAmitie(b);
        b.ajouterAmitie(a);
    }
}
```

Un membre n'est créé que s'il n'existe pas déjà. On ajoute une amitié de manière symétrique (notons que nous pourrions provoquer une exception dans le cas où `a` ou `b` ne seraient pas membres, mais nous simplifions ici).

Pour afficher tous les membres présents dans le réseau, on utilise simplement :

```
    public void afficherMembres(){
        for(Membre a : this.hm.values())
            System.out.println(a);
    }
```

De même, nous pouvons afficher toutes les amitiés :

```
    public void afficherAmities(){
        for(Membre a : this.hm.values()){
            System.out.print("Les amis de "+a+" :");
            a.afficherAmities();
            System.out.println();
        }
    }
```

à condition d'avoir implanté dans la classe `Membre` :

```
    public void afficherAmities(){
        for(Membre a : this.lamis)
            System.out.print(a + " ");
        System.out.println();
    }
```

Nous avons tout ce qu'il faut pour tester nos classes et créer un réseau à nous

```
public class FB361{

    public static void main(String[] args){
        ReseauSocial RS = new ReseauSocial("FB361");
        String[] inf361 = {"s@", "d@", "r@", "p@", "2@"};

        RS.creerMembre("m@");
        RS.creerMembre("g@");
        RS.creerMembre("c@");
        RS.creerMembre("A@");
```

```
        RS.creerMembre("Z@");
        RS.creerMembre("E@");
        RS.creerMembre("F@");

        RS.ajouterAmitie("m@", "g@");
        RS.ajouterAmitie("m@", "c@");
        RS.ajouterAmitie("c@", "g@");
        RS.ajouterAmitie("c@", "A@");
        RS.ajouterAmitie("A@", "Z@");

        RS.ajouterAmitie("E@", "F@");

        for(int i = 0; i < inf361.length; i++){
            RS.creerMembre(inf361[i]);
            RS.ajouterAmitie("m@", inf361[i]);
        }

        System.out.println("Voici tous les membres en stock");
        RS.afficherMembres();

        RS.afficherAmities();
    }
}
```

qui va nous fournir

```
Voici tous les membres en stock
E@
s@
F@
r@
2@
p@
d@
m@
Z@
A@
c@
g@
Les amis de E@ : F@
Les amis de s@ : m@
Les amis de F@ : E@
Les amis de r@ : m@
Les amis de 2@ : m@
Les amis de p@ : m@
Les amis de d@ : m@
Les amis de m@ : g@ c@ s@ d@ r@ p@ 2@
Les amis de Z@ : A@
Les amis de A@ : c@ Z@
```



```
Les amis de c@ : m@ g@ A@
Les amis de g@ : m@ c@
```

ce qui correspond au dessin de la figure 15.2, où chaque trait reliant deux membres symbolise une amitié. C'est un exemple de graphe.

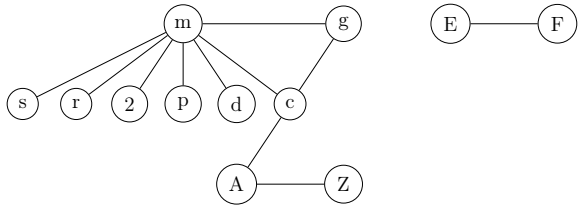


FIGURE 15.2 – Le graphe exemple.

Exercices

Exercice 15.1 On reprend l'exemple de la figure 15.1. On n'utilise pas `a[0]`, et on met dans `a[1]` la chaîne `Louis XIV`, `a[2]` contient son père, `a[3]` sa mère, et plus généralement, `a[i]` a pour père `a[2*i]` et mère `a[2*i+1]` si $i \leqslant n/2$. Rappelons que le i-ème élément se trouve au niveau ℓ de l'arbre, $0 \leqslant \ell < k$.

On veut afficher cet arbre sous forme non graphique de la façon suivante. On veut que chaque élément de niveau ℓ ($0 \leqslant \ell < k$) soit affiché sur une ligne, précédé de 2ℓ blancs sur la ligne. On veut également que chaque nom soit suivi de l'affichage du sous-arbre correspondant à son père, puis suivi de l'affichage du sous-arbre correspondant à sa mère. Sur l'exemple donné, l'affichage sera :

```
Louis XIV
  Louis XIII
    Henri IV
    Marie de Medicis
  Anne d'Autriche
    Philippe III
    Marie-Marguerite d'Autriche
```

Réalisez cet affichage à l'aide de fonctions *récursives*.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Compléments

A.1 La ligne de commande

En UNIX, on peut compiler la classe `Essai.java` en utilisant :

```
unix% javac Essai.java
```

ce qui produit un fichier `Essai.class`. Si la classe contient une méthode :

```
public static void main(String[] args)
```

la commande

```
unix% java Essai
```

donne la main à la méthode `main`, éventuellement en lui passant des arguments supplémentaires, ainsi que nous le décrivons maintenant.

A.1.1 Arguments de `main`

La méthode `main` qui figure dans tout programme que l'on souhaite exécuter doit avoir un paramètre de type tableau de chaînes de caractères. On déclare alors la méthode par :

```
public static void main(String[] args)
```

Pour comprendre l'intérêt de tels paramètres, supposons que la méthode `main` se trouve à l'intérieur d'un programme qui commence par :

```
public class Classex{ ... }
```

On peut alors utiliser les valeurs et variables `args[0]`, `args[1]`, ... à l'intérieur de la procédure `main`. Celles-ci correspondent aux chaînes de caractères qui suivent `java Classex` lorsque l'utilisateur demande d'exécuter son programme. On a accès en fait au tableau `args` et donc aussi à sa longueur `args.length`.

Par exemple si on a écrit une procédure main :


```
public static void main(String[] args){
    for(int i = args.length-1; i >= 0; i--)
        System.out.print(args[i] + "  ");
    System.out.println();
}
```

et qu'une fois celle-ci compilée on demande l'exécution par

```
java Classex marquise d'amour me faites mourir
```

on obtient comme résultat

```
mourir faites me d'amour marquise
```

Notons que l'on peut transformer une chaîne de caractères `u` composée de chiffres décimaux en un entier par la fonction `Integer.parseInt()` comme dans le programme suivant :

```
public class Additionner{

  public static void main(String[] args){
      if(args.length != 2)
          System.out.println("mauvais nombre d'arguments");
      else{
          int s = Integer.parseInt(args[0]);

          s += Integer.parseInt(args[1]);
          System.out.println (s);
      }
  }
}
```

On peut alors demander

```
java Additionner 1983 37
```

l'interpréteur répond :

```
2020
```

Notons qu'il existe d'autres fonctions de conversion en **`double`**, **`long`**, etc..

A.2 La classe `TC`

Le but de cette classe (écrite spécialement pour le cours par J. Cervelle, P. Chassignet et F. Morain) est de fournir quelques fonctions pratiques pour les TP, comme des entrées-sorties faciles.

A.2.1 Lecture de données

Ce premier programme demande à l'utilisateur d'entrer un nombre entier au clavier et affiche le carré de ce nombre :

```
import tc.TC;
public class TestsLireInt {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer un entier : ");
    int n = TC.lireInt();
    System.out.println("n*n = " + (n * n));
  }
}
```

La classe TC contient deux autres méthodes similaires,

`TC.lireLong, TC.lireDouble.`

Ces méthodes lancent des exceptions quand le texte qui est entré (au clavier) n'est pas l'écriture d'un nombre du type attendu. La méthode `TC.lireMot` permet de lire un mot (une séquence de caractères quelconques sans blanc), sans chercher à interpréter son contenu, et renvoie un résultat de type `String`. Voici une variante du programme précédent qui utilise `TC.lireMot` et `Integer.parseInt` pour parvenir au même résultat :

```
import tc.TC;
public class TestsLireMot {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer n : ");
    String entree = TC.lireMot();
    int n = Integer.parseInt(entree);
    System.out.println("n*n = " + (n * n));
  }
}
```

Ces méthodes ne consomment que la portion de l'entrée qui est nécessaire à la construction de l'entité qui est lue. Il faut noter cependant que les données qui sont fournies au clavier, ne sont réellement disponibles pour le programme que lorsque l'utilisateur a *entré* une ligne (c'est-à-dire tapé `return`). Comme illustration, voici un programme qui attend trois entiers pour afficher leur somme :

```
import tc.TC;
public class TestsTroisLireInt {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer trois nombres : ");
    int n1 = TC.lireInt();
    int n2 = TC.lireInt();
    int somme = n1 + n2;
    System.out.println("n1+n2 = " + somme);
```



```
    somme = somme + TC.lireInt();
    System.out.println("n1+n2+n3 = " + somme);
  }
}
```

On exécutera ce programme plusieurs fois, en variant la manière d'entrer les trois nombres, c'est-à-dire, les trois sur une même ligne, un par ligne, etc., pour observer comment chaque exécution de `TC.lireInt` *bloque* en attendant que ses données soient disponibles.

A.2.2 Lecture d'un nombre variable de données

Voici un programme qui permet de calculer la somme d'un nombre variable d'entiers :

```
import tc.TC;
public class TestsTroisLireInt {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer le nombre de nombres : ");
    int n = TC.lireInt();
    System.out.print("Entrer les " + n + " nombres : ");
    int somme = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
      somme = somme + TC.lireInt();
    System.out.println("somme = " + somme);
  }
}
```

On note que ce programme commence par demander explicitement le nombre de données qui vont suivre. Cela peut sembler fastidieux. C'est parfois nécessaire quand on doit construire un tableau qui va stocker les données lues. Une alternative consisterait à utiliser une structure capable d'étendre sa capacité au fur et à mesure des besoins, le cours présente un certain nombre de ces structures dont les listes. Dans le cas présent, on n'a même pas besoin de stocker les données car on calcule leur somme *au vol*. Voici un autre programme qui ne demande pas d'entrer le nombre de données à lire :

```
import tc.TC;
public class TestsLireLigne {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer les nombres sur une ligne : ");
    String ligne = TC.lireLigne();
    String[] mots = TC.motsDeChaine(ligne);
    int somme = 0;
    for (int i = 0; i < mots.length; ++i)
      somme = somme + Integer.parseInt(mots[i]);
    System.out.println("somme = " + somme);
  } }
```

La méthode `TC.lireLigne` permet de lire une ligne complète (tous les caractères, blancs compris, jusqu'au prochain retour à la ligne). Le caractère *retour à la ligne* est également consommé, mais il n'est pas dans la `String` résultat. La méthode

```
TC.motsDeChaine
```

permet de découper une chaîne de caractères en mots (chaque mot est une séquence maximale de caractères quelconques sans blanc). Les mots ainsi formés sont rangés dans un tableau qui est renvoyé par `TC.motsDeChaine` et on obtient le nombre de mots par la longueur du tableau. Il reste à convertir chaque mot en un entier pour réaliser le calcul de la somme.

Pour des entrées nettement plus volumineuses, on pourrait combiner les deux programmes pour lire d'abord un nombre de lignes, puis lire ces lignes, chacune contenant un nombre variable de données. L'écriture de ce programme est laissée en exercice. Il y a cependant un piège à éviter. Un programme commençant ainsi :

```
System.out.print("Entrer le nombre de lignes : ");
int n = TC.lireInt();
System.out.print("Entrer les " + n + " lignes : ");
int somme = 0;
for (int i = 0; i < n; ++i) {
  String ligne = TC.lireLigne();
  ...
```

ne donnera pas l'effet escompté car le premier appel à `TC.lireLigne` va lire le reste de la première ligne, celle où on a entré `n`. Le résultat sera probablement la ligne vide `""` et, par décalage, la dernière ligne de données sera ignorée. En règle générale, il ne faut **pas mélanger** des appels à `TC.lireLigne` avec des appels aux autres méthodes de lecture. On doit ainsi réécrire ce programme en remplaçant `int n = TC.lireInt();` par un appel à `TC.lireLigne` suivi d'une conversion en `int` du contenu de la ligne.

On peut également lire des nombres jusqu'à la *fin de l'entrée*. La notion de *fin de l'entrée* est claire dans le cas où la lecture se fait dans un fichier qui est une suite finie de caractères. Dans le cas d'une lecture au clavier, on dispose en général d'un moyen pour signifier la fin de l'entrée, mais il est variable selon les systèmes.

Le programme de calcul de la somme peut ainsi s'exprimer comme *tant qu'il y a des données, on les lit et on fait le cumul*. En JAVA et avec la classe TC, cela donne :

```
import tc.TC;
public class TestsFinEntree {
  public static void main(String[] args) {
    System.out.print("Entrer les nombres : ");
    int somme = 0;
    while (!TC.finEntree())
      somme = somme + TC.lireInt();
    System.out.println("somme = " + somme);
  }
}
```


A.2.3 Redirection de l'entrée

Les programmes vus ci-dessus lisent ce qu'on appelle *l'entrée standard*, c'est-à-dire l'entrée de la console qui est normalement le clavier. Il est souvent plus pratique de placer les données dans un fichier de texte, par exemple à l'aide d'un éditeur de texte, et de faire en sorte que le programme lise le contenu de ce fichier au lieu de lire au clavier.

Supposons que les données soient déjà dans un fichier nommé `donnees.txt` et que ce fichier soit placé dans le même répertoire que le programme. Dans une console Unix, sans avoir à modifier (ni même recompiler) un programme, il est possible de lui faire lire le contenu du fichier au lieu de l'entrée de la console. On appelle cela une *redirection de l'entrée*. Si la commande usuelle :

```
unix% java MonProgramme
```

lance un programme qui lit au clavier, il suffit d'entrer la commande :

```
unix% java MonProgramme < donnees.txt
```

pour lire le contenu du fichier `donnees.txt`.

Pour obtenir un fonctionnement similaire dans un autre environnement, comme *Eclipse*, il faut ajouter dans le programme la ligne

```
TC.lectureDansFichier("donnees.txt");
```

que l'on place en général au début de `main`. C'est la seule modification requise dans le programme. Si besoin, un appel à `TC.lectureEntreeStandard()` permet ensuite de revenir au mode initial, c'est-à-dire, une lecture sur l'entrée standard de la console (le clavier).

A.2.4 Redirection de la sortie

Les fonctions d'écriture utilisent ce qu'on appelle *la sortie standard*, c'est-à-dire normalement l'affichage dans la console. On peut aussi faire une *redirection de la sortie*. Dans ce cas, tout ce qu'on écrit ordinairement sur la console, est enregistré dans le fichier (et n'apparaît pas dans la console). Dans une console Unix, si la commande usuelle :

```
unix% java MonProgramme
```

lance un programme qui affiche dans la console, il suffit d'entrer la commande :

```
unix% java MonProgramme > resultat.txt
```

pour enregistrer la sortie dans le fichier `resultat.txt`. Si le fichier n'existe pas, il est crée et, s'il existe déjà, son ancien contenu est remplacé. Une variante qui s'utilise par :

```
unix% java MonProgramme >> resultat.txt
```

fait que, si le fichier existe déjà, alors son ancien contenu est préservé et les écritures du programme sont ajoutées à la fin du fichier existant.

Pour obtenir un fonctionnement similaire dans un autre environnement, avec la classe TC, il faut ajouter dans le programme la ligne

```
TC.ecritureDansNouveauFichier("resultat.txt");
```

ou la ligne

```
TC.ecritureEnFinDeFichier("resultat.txt");
```

que l'on place en général au début de `main`.

Attention, ce sont des redirections propres à `TC` et cela n'affecte pas les écritures produites par `System.out.print` et `System.out.println`. Il faut utiliser à la place les méthodes `TC.print` ou `TC.println`. Si besoin, un appel à

```
TC.ecritureSortieStandard()
```

permet ensuite de revenir au mode initial, c'est-à-dire, une écriture sur la sortie standard de la console.

A.3 La classe MacLib

Cette classe est l'œuvre de Philippe Chassignet, et elle a survécu à l'évolution de l'enseignement d'informatique à l'X. Jusqu'en 1992, elle permettait de faire afficher sur un écran de Macintosh des dessins produits sur un Vax (via TGiX, autre interface du même auteur). Elle a ensuite été adaptée en 1994 à **ThinkPascal** sur Macintosh, puis **TurboPascal** sous PC-Windows ; puis à **ThinkC** et **TurboC**, X11 ; **DelphiPascal**, **Borland C** (nouveau Windows) ; **CodeWarrior Pascal et C**, tout ça dans la période 1996–1998. En 1998 elle a commencé une nouvelle adaptation, avec Java, qui a constitué une simplification énorme du travail, la même version marchant sur toutes les plateformes ! Elle est désormais interfacée avec l'AWT (*Abstract Windowing Toolkit*), avec un usage souple de la boucle d'événement.

A.3.1 Fonctions élémentaires

Les fonctions sont inspirées de la libraire QuickDraw du Macintosh. La méthode `initQuickDraw()`, dont l'utilisation est impérative et doit précéder toute opération de dessin, permet d'initialiser la fenêtre de dessin. Cette fenêtre *Drawing* créée par défaut permet de gérer un écran de 1024×768 points. L'origine du système de coordonnées est en haut et à gauche. L'axe des x (abscisses) va classiquement de la gauche vers la droite, l'axe des y (ordonnées) va plus curieusement du haut vers le bas (c'est une vieille tradition de l'informatique, dure à remettre en cause). En QuickDraw, x et y sont souvent appelés `h` (horizontal) et `v` (vertical). Il y a une notion de point courant et de crayon avec une taille et une couleur courantes. On peut déplacer le crayon, en le levant ou en dessinant des vecteurs par les fonctions suivantes

`moveTo(x, y)` Déplace le crayon aux coordonnées absolues `x`, `y`.

`move(dx, dy)` Déplace le crayon en relatif de `dx`, `dy`.

`lineTo(x, y)` Trace une ligne depuis le point courant jusqu'au point de coordonnées `x`, `y`.

`line(dx, dy)` Trace le vecteur (`dx`, `dy`) depuis le point courant.

`penSize(dx, dy)` Change la taille du crayon. La taille par défaut est (1, 1). Toutes les opérations de tracé peuvent se faire avec une certaine épaisseur du crayon.

`penMode(mode)` Change le mode d'écriture : `patCopy` (mode par défaut qui remplace ce sur quoi on trace), `patXor` (mode Xor, i.e. en inversant ce sur quoi on trace).

A.3.2 Rectangles

Certaines opérations sont possibles sur les rectangles. Un rectangle `r` a un type prédéfini `Rect`. Ce type est une classe qui a le format suivant :

```
public class Rect {
    short left, top, right, bottom;
}
```

Fort heureusement, il n'y a pas besoin de connaître le format internes des rectangles, et on peut faire simplement les opérations graphiques suivantes sur les rectangles

`setRect(r, g, h, d, b)` fixe les coordonnées (gauche, haut, droite, bas) du rectangle `r`. C'est équivalent à faire les opérations `r.left = g;`, `r.top = h;`, `r.right = d;`, `r.bottom = b`. Le rectangle `r` doit déjà avoir été construit.

`unionRect(r1, r2, r)` définit le rectangle `r` comme l'enveloppe englobante des rectangles `r1` et `r2`. Le rectangle `r` doit déjà avoir été construit.

`frameRect(r)` dessine le cadre du rectangle `r` avec la largeur, la couleur et le mode du crayon courant.

`paintRect(r)` remplit l'intérieur du rectangle `r` avec la couleur courante.

`invertRect(r)` inverse la couleur du rectangle `r`.

`eraseRect(r)` efface le rectangle `r`.

`drawChar(c), drawString(s)` affiche le caractère `c` ou la chaîne `s` au point courant dans la fenêtre graphique. Ces fonctions diffèrent de `write` ou `writeln` qui écrivent dans la fenêtre texte.

`frameOval(r)` dessine le cadre de l'ellipse inscrite dans le rectangle `r` avec la largeur, la couleur et le mode du crayon courant.

`paintOval(r)` remplit l'ellipse inscrite dans le rectangle `r` avec la couleur courante.

`invertOval(r)` inverse l'ellipse inscrite dans `r`.

`eraseOval(r)` efface l'ellipse inscrite dans `r`.

`frameArc(r,start,arc)` dessine l'arc de l'ellipse inscrite dans le rectangle `r` démarrant à l'angle `start` et sur la longueur définie par l'angle `arc`.

`frameArc(r,start,arc)` peint le camembert correspondant à l'arc précédent. Il y a aussi des fonctions pour les rectangles avec des coins arrondis.

`button()` est une fonction qui renvoie la valeur vraie si le bouton de la souris est enfoncé, faux sinon.

`getMouse(p)` renvoie dans `p` le point de coordonnées (`p.h`, `p.v`) courantes du curseur.

A.3.3 La classe `Maclib`

```
public class Point {
  short h, v;

  Point(int h, int v) {
    h = (short)h;
    v = (short)v;
  }
}
public class MacLib {

  static void setPt(Point p, int h, int v) {..}
  static void addPt(Point src, Point dst) {...}
  static void subPt(Point src, Point dst) {...}
  static boolean equalPt(Point p1, Point p2) {...}
  ...
}
```

Et les fonctions correspondantes (voir page 276)

```
static
  void setRect(Rect r, int left, int top,
                       int right, int bottom)
static void unionRect(Rect src1, Rect src2, Rect dst)

static void frameRect(Rect r)
static void paintRect(Rect r)
static void eraseRect(Rect r)
static void invertRect(Rect r)

static void frameOval(Rect r)
static void paintOval(Rect r)
static void eraseOval(Rect r)
static void invertOval(Rect r)

static void frameArc(Rect r, int startAngle, int arcAngle)
static void paintArc(Rect r, int startAngle, int arcAngle)
static void eraseArc(Rect r, int startAngle, int arcAngle)
static void invertArc(Rect r, int startAngle, int arcAngle)
static boolean button()
static void getMouse(Point p)
static void getClick(Point p)
```

Annexe B

Quelques problèmes tirés des annales

B.1 La fête du point glagla (X2010)

La célèbre École de sorciers de PourDeLart organise sa fête des élèves lors du solstice d'hiver chaque année, fête appelée Point Glagla. Les élèves d'avant-dernière année sont chargés de différentes activités proposées aux participants de la fête (les élèves des autres années, leurs frères et sœurs, leurs parents, etc.).

Comme la magie ne peut pas résoudre tous les problèmes, le comité organisateur envisage de développer un programme de gestion de la fête. Votre mission (si vous l'acceptez) est de les aider dans cette tâche.

a) Écrire la classe `Sorcier` qui décrit un sorcier : nom, prénom, matricule (trois chaînes de caractères) ; on ajoutera un constructeur explicite prenant trois champs ainsi qu'une méthode d'objet :

```
public String toString(){...}
```

qui est chargée de fabriquer et renvoyer une chaîne de caractères décrivant un sorcier au format

```
nom prenom matricule
```

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

b) La fête est organisée en différentes sortes d'activités : bar, restaurant, spectacle, jeu. Chaque activité a un nom, un responsable (un sorcier) assisté d'une équipe de plusieurs sorciers dont le nombre est fixé à la création de l'activité.

b-i) Écrire la classe `Activite` et choisir les champs de la classe en justifiant vos choix. On ajoutera un constructeur explicite

(réponse attendue : 15 à 20 lignes)

b-ii) Écrire la classe `PointGlagla` avec 40 activités au maximum stockées dans une variable de classe. Écrire une fonction :


```
  public static void initialiser(){ ... }
```

qui initialisera cette variable avec une seule activité laissée à votre imagination.

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

c) Chaque activité est payante. Le comité d'organisation veut disposer de la liste des clients (participants) et des factures payées.

Chaque transaction dans une activité est représentée par un objet de la classe `Commande` :

```
public class Commande {
  public String client;
  public int montant;
  public String detail;

  public Commande(String c, int m, String d) {
    this.client = c;
    this.montant = m;
    this.detail = d;
  }
}
```

Par exemple, si Hagrid commande une bière-au-beurre, sa commande sera représentée par :

```
  Commande c = new Commande("Hagrid", 1, "bière-au-beurre");
```

(rappelons que l'unité monétaire en cours est le galion).

c-i) Écrire une classe `ListeCommandes` représentant un maillon d'une liste chaînée dont les champs comprendront nécessairement un objet `Commande`. On écrira également un constructeur :

```
public ListeCommandes(String c, int m, String d,
                      ListeCommandes suiv){
}
```

qui rajoute un client de nom `c`, un montant `m` et un détail `d`, en tête d'une liste `suiv`.

On écrire également un constructeur :

```
  public ListeCommandes(Commande cmd, ListeCommandes suiv){
    ... }
```

qui prend un objet `Commande` et une liste en paramètres. Ce constructeur devra réaliser une copie de `cmd`.

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

c-ii) On souhaite garder l'ordre chronologique dans lequel les clients ont commandé. La tête de liste sera le premier client. Écrire une méthode de classe

```
public static ListeCommandes ajouter(ListeCommandes l,
                                     Commande cmd){
...}
```

qui ajoute la nouvelle commande à la liste l, en respectant cet ordre et qui revoie la liste résultat.

(réponse attendue : moins de 5 lignes)

c-iii) Écrire une méthode

```
  public static ListeCommandes enlever(String c,
                                       ListeCommandes l){}
```

qui retire de la liste `l` la première commande au nom du client `c` et qui renvoie la liste résultat.

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

c-iv) Écrire une méthode

```
  public static Commande rechercher(String c,
                                    ListeCommandes l){}
```

qui renvoie une commande (la première trouvée) au nom du client `c`, ou **`null`** s'il n'y en a pas.

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

c-v) Écrire dans la classe `ListeCommandes` une méthode

```
public static int chiffre(ListeCommandes lc){ ... }
```

qui calcule le montant total des commandes de la liste `lc`.

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

c-vi) On rajoute un champ de type `ListeCommandes` dans la classe `Activite`. Écrire une méthode (dans `PointGlagla`) qui calcule le chiffre d'affaire final de la fête (la somme totale qu'elle a rapportée).

(réponse attendue : 5 à 10 lignes)

d) Dans un restaurant (ou un bar), un serveur (ou une serveuse) doit s'occuper de ses clients suivant des priorités. Par exemple, un client qui arrive doit être placé rapidement (priorité la plus élevée 0), etc., comme donné ci-dessous :

```
  public int priorite(){
    if(this.detail.equals("nouveau"))
      return 0;
    else if(this.detail.equals("..."))
      ...
  }
```


de la classe `Commande`, qui renvoie une priorité (un entier entre 0 et $pmax - 1$, qui est une constante de la classe).

On donne enfin l'interface

```
public interface GestionClients{
  // arrivée d'un nouveau client nommé c :
  // on lui associe une commande fictive de montant 0 et
  // dont le détail est "nouveau".
  public void nouveauClient(String c);

  // retrouve la (première) commande de priorité la plus
  // élevée, la retire de la structure de gestion
  // et la renvoie.
  public Commande unClientAServir();

  // insère une commande cmd dans la structure de gestion,
  // sa priorité est donnée par la fonction priorite().
  public void prendreCommande(Commande cmd);

  // on retire la commande en cours pour le client c
  public void departClient(String c);
}
```

d-i) Réalisez une implantation de cette interface, nommée

```
GestionClientsAvecListes
```

qui utilisera un tableau `tlc` de listes de type `ListeCommandes`. Ce tableau aura une taille `pmax` et chaque case du tableau sera une liste de sorte que `tlc[p]` désignera la liste des clients ayant priorité `p`.

(réponse attendue : 10 à 20 lignes)

d-ii) Quel est le coût des différentes opérations, en fonction d'un majorant L sur la taille des listes et $P = pmax$ une borne sur le nombre de priorités.

d-iii) Existe-t-il une implantation plus rapide ?

B.2 L'Euro 2012 (X2011)

Le but de cet exercice est de modéliser et programmer une représentation des compétitions de type Euro de football. Aucune connaissance sportive avancée n'est nécessaire pour traiter cet exercice.

La phase finale de la compétition rassemble 16 équipes, et consiste en deux parties, la première avec des matchs de groupes et la seconde procédant par élimination directe.

a) Pour simplifier, chaque équipe représente un pays et a un sélectionneur (*coach*). Écrire une classe `Equipe` qui modélise une équipe. Cette classe devra contenir un constructeur explicite.

(réponse attendue : moins de 10 lignes)

b) Dans la première phase, les 16 équipes sont réparties en 4 groupes de 4 équipes, chaque groupe étant désigné par une lettre : A, B, C, ou D. Dans chaque groupe, chaque équipe rencontre une seule fois toutes les autres. On note $\mathcal{B}(x, y)$ (respectivement $\mathcal{B}(y, x)$) le nombre de buts marqués par x contre y (respectivement $\mathcal{B}(y, x)$). Par exemple, si x bat y 3 buts à 2, on aura $\mathcal{B}(x, y) = 3$, $\mathcal{B}(y, x) = 2$.

i) Écrire une classe `Groupe` qui contiendra toutes les informations pertinentes relatives à ce groupe, notamment un tableau bi-dimensionnel `buts` contenant les quantités $\mathcal{B}(x, y)$. On incluera un constructeur explicite.

(réponse attendue : moins de 10 lignes)

ii) Créer une classe `Euro2012`, qui contiendra des constantes pour le nombre d'équipes, de groupes. On écrira également une méthode

```
public static Groupe construireGroupeA(){ ... }
```

décrivant les données réelles du groupe A de l'Euro 2012, à savoir les équipes

```
Pologne Grece Russie RepTcheque
```

de sélectionneurs respectifs

```
Smuda Santos Advocaat Bilek
```

Les scores des matchs du groupes A sont les suivants :

```
Pologne Grece 1 1
Russie RepTcheque 4 1
Grece RepTcheque 1 2
Pologne Russie 1 1
Grece Russie 1 0
RepTcheque Pologne 1 0
```

ce que l'on transcrit dans le tableau suivant, où on met sur une ligne les buts marqués par l'équipe de la colonne de gauche contre ses adversaires dans les colonnes :

	Pologne	Grece	Russie	RepTcheque
Pologne	–	1	1	0
Grece	1	–	1	1
Russie	1	0	–	4
RepTcheque	1	2	1	–

(réponse attendue : une dizaine de lignes)

iii) Faire un dessin partiel de l'occupation mémoire de ce groupe. On dessinera les champs du groupe et on se restreindra aux données plus précises pour la Pologne.

(réponse attendue : un dessin)

À partir de maintenant, les méthodes demandées seront implicitement écrites dans la classe `Groupe`.

c) Il faut désormais déterminer les points obtenus par chaque équipe x à la fin de cette première phase, que l'on note $\mathcal{P}(x)$. Si x rencontre y, alors

$$p(x, y) = \begin{cases} 3 & \text{si } \mathcal{B}(x, y) > \mathcal{B}(y, x), \\ 1 & \text{si } \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\mathcal{P}(x)$ est la somme des $p(x, y)$ pour toutes les équipes y rencontrées par x.

Pour le groupe A, on trouve

Pologne	Grece	Russie	RepTcheque
2	4	4	6

i) Écrire dans la classe `Groupe` une méthode

```
public static int pointsDuMatch(int nbuts_x, int nbuts_y){
 ... }
```

qui permet de calculer $p(x, y)$ en fonctions des nombres de buts marqués par x et y.

(réponse attendue : 5 lignes)

ii) En déduire la méthode

```
public int[] calculerPoints(){ ... }
```

qui renvoie un tableau contenant les points de chaque équipe.

(réponse attendue : une dizaine de lignes)

d) Il faut maintenant classer les équipes de chaque groupe.

i) Écrire une méthode

```
public static int[] trierPoints(int[] points){ ... }
```

qui trie le tableau d'entiers `points` en utilisant une copie du tableau. Par exemple, dans le cas où

```
points = {2, 4, 4, 6},
```

la méthode créera le nouveau tableau trié `temp = {6, 4, 4, 2}`. Les cas d'égalité seront traités plus loin, donc l'ordre des 4 importe peu ici.

On veut également que la méthode renvoie un tableau `ind` qui permette de relier les valeurs triées aux valeurs de départ, pour permettre de lister les équipes associées aux nombres de points triés. On initialisera `ind[i] = i` et on fera évoluer ce tableau au cours du tri. Ainsi, à la fin de l'algorithme, `groupe.equipe[ind[i]]` contiendra l'équipe ayant le i-ème rang. Pour l'exemple de `points = {2, 4, 4, 6}`, l'algorithme trouvera

```
ind = {3, 1, 2, 0}.
```

On pourra s'inspirer du tri sélection vu en cours.

(réponse attendue : moins d'une vingtaine de lignes)

ii) En déduire la méthode d'objet :

```
public Equipe[] classer(){ ... }
```

qui trie les équipes par ordre décroissant à l'aide de la méthode précédente et renvoie un tableau formé des équipes dans l'ordre de qualification.

(réponse attendue : moins de 10 lignes)

e) Nous allons maintenant traiter les cas d'égalité de points. On s'intéresse à classer entre elles les r équipes x_i, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, avec $j - i = r \geqslant 2$. C'est le cas par exemple de $\{6, 4, 4, 2\}$ où $i = 1$, $j = 3$, $r = 2$.

On applique alors la règle suivante : si une des équipes x_k a battu toutes les autres équipes de x_i, ..., x_{j-1}, alors x_k est classée en tête, et il ne reste plus qu'à classer les autres équipes.

Commentaire : cette règle suffit à départager les équipes de l'Euro 2012. On trouvera facilement les règles complètes de la compétition sur le web.

i) Écrire une méthode

```
public static boolean regle(int[][] buts,
                            int[] ind,
                            int i, int j){ ... }
```

qui implante la règle et renvoie `true` si la règle a pu trouver un gagnant `ind[k]` dans les équipes d'indices `ind[i]`, ..., `ind[j-1]`, auquel cas elle renvoie `true` et `false` sinon. Si la règle s'applique, le tableau `ind` est modifié de sorte que les indices `ind[i]` et `ind[k]` ont été échangés. Il ne reste plus alors qu'à appliquer la règle pour `ind[i+1]`, ..., `ind[j-1]`.

Dans l'exemple numérique, on part de `ind[1]` et `ind[2]` et on vérifie que l'un des deux est plus grand, et on a terminé.

(réponse attendue : une quinzaine de lignes)

ii) En déduire la méthode récursive

```
public static boolean traiterEgalites(int[][] buts,
                                      int[] ind,
                                      int i, int j){ ... }
```

qui applique la règle tant que c'est possible. Elle renverra `true` si tous les cas d'égalité ont été tranchés et `false` sinon.

(réponse attendue : moins de 10 lignes)

iii) Écrire la méthode finale


```
public static void traiterEgalites(int[][] buts,
                                   int[] points,
                                   int[] ind){ ... }
```

qui recherche les sous-suites constantes et traite les cas d'égalité.

(réponse attendue : moins de 10 lignes)

iv) Compléter la méthode `classer()` de la question d-ii en rajoutant les cas d'égalité.

(réponse attendue : 5 lignes)

B.3 Blockchains (X2017)

Cet exercice a pour but de programmer une version simplifiée de la célèbre *blockchain* : c'est une liste de blocs où chaque bloc correspond à une transaction entre deux clients. L'un des buts à atteindre est la protection des données.

1. a) i) Créer la classe `Client` ; chaque objet de cette classe devra contenir le `nom` du client (une `String`) qui ne devra pas pouvoir changer après création et devra rester privé ; un `solde` pour son compte, qui sera également privé (un **`int`**) mais qui pourra changer.

ii) Écrire un constructeur explicite pour cette classe.

iii) Écrire une méthode

```
public void ajouteMontant(int m){ ... }
```

qui ajoute m au solde du client.

(réponse attendue : quelques lignes)

b) i) Créer la classe `Transaction` qui contiendra deux clients privés qui ne pourront jamais changer après création, ainsi qu'un montant de transaction (un **`int`**) qui lui aussi sera privé et ne pourra jamais changer. Écrire aussi un constructeur explicite

```
public Transaction(Client c1, Client c2, int m){ ... }
```

qui correspond à une transaction d'un montant `m` de `c1` vers `c2`.

(réponse attendue : quelques lignes)

ii) Écrire une méthode

```
public void executer(){ ... }
```

qui met à jour les soldes des deux clients en utilisant le montant de la transaction. On supposera que les comptes contiennent suffisamment d'argent pour ne jamais être négatifs.

(réponse attendue : quelques lignes)

2. Une des propriétés de la blockchain est de gérer une liste de *blocs* qui sont chaînés par un calcul de vérification appelé *hachage* et noté H. Ainsi, après fabrication de trois transactions T_0, T_1 et T_2, dans cet ordre, la blockchain ressemblera à

```
BC -> (T0,H(T0,0)) -> (T1,H(T1,H(T0,0))) -> (T2,H(T2,H(T1,H(T0,0)))) -> null
```

(voir b) ii) ci-dessous pour l'explication).

a) On va décrire une blockchain comme un objet de type `LinkedList<Bloc>`. Définir la classe `Bloc` qui contient une transaction publique (pour vérification), ainsi qu'un **`long`** qui servira à stocker cette valeur de vérification. Ces champs seront publics mais ne pourront plus changer une fois créés. Écrire un constructeur explicite qui enregistre une valeur de hash déjà calculée qui lui est donnée en paramètre ; il n'a pas à faire la vérification.

(réponse attendue : quelques lignes)

b) i) Créer la classe `Blockchain`. Par définition, il n'existera qu'une seule blockchain pour tout le programme qui sera utilisée pour enregistrer toutes les transactions. Définir un champ `LB` de la classe `Blockchain` pour cela avec son initialisation ; la blockchain sera publique.

(réponse attendue : quelques lignes)

ii) Écrire la méthode

```
public static void ajouteTransaction(Transaction t){ ... }
```

qui exécute une transaction et l'ajoute à la blockchain en rajoutant un bloc. On utilisera une méthode

```
public static long H(Transaction t, long hprev){ ... }
```

que vous n'aurez pas à écrire (supposée donnée dans la classe `Blockchain`) qui calcule la valeur de hachage du nouveau bloc en utilisant la valeur du précédent. Le premier bloc utilisera 0 pour valeur de `hprev` (cf. dessin). On pourra utiliser les méthodes

```
isEmpty, addLast, getLast
```

de la classe `LinkedList`.

(réponse attendue : quelques lignes)

iii) Écrire la méthode

```
public static boolean estCorrecte(){ ... }
```

qui renvoie **`true`** si les blocs de la blockchain ont été correctement chaînés, c'est-à-dire que les valeurs de hash qui sont stockées sont correctes.

(réponse attendue : une dizaine de lignes)

c) i) Écrire une méthode `main` qui permet de tester les méthodes écrites ci-dessus. On utilisera deux clients, l'un de nom `Alice` qui dispose de 20000 euros et l'autre de nom `Bob` qui dispose de 10000 euros. La première transaction est le transfert d'une somme de 3000 euros de `Bob` vers `Alice` ; la seconde une transaction de `Alice` vers `Bob` de 400 euros.

(réponse attendue : quelques lignes)

ii) Faire le dessin de la mémoire juste avant la fin de votre méthode `main` avec l'état courant de la blockchain (adresses comprises).

(réponse attendue : un joli dessin)

Annexe C

Quelques prix Turing

On trouve ci-dessous quelques-uns des récipiendaires du prix Turing, ceux dont les travaux sont proches du cours. Toutes ces informations sont reprises de la page correspondante dans wikipedia.

Quand	Qui	Pourquoi
1972	Edsger Dijkstra (Pays-Bas)	La science et l'art des langages de programmation, langage ALGOL
1974	Donald Knuth (USA)	Analyse des algorithmes et conception des langages de programmation
1980	Charles A. R. Hoare (UK)	Définition et conception des langages de programmation
1983	Kenneth Thompson (USA) et Dennis Ritchie (USA)	Théorie des systèmes d'exploitation, implémentation du système UNIX
1984	Niklaus Wirth (Suisse)	Développement des langages EULER, Algol W, MODULA et PASCAL
1997	Douglas Engelbart (USA)	Informatique interactive
1999	Frederick Brooks (USA)	Architecture des ordinateurs, systèmes d'exploitation et logiciels
2001	Ole-Johan Dahl (Norvège) et Kristen Nygaard (Norvège)	Programmation orientée objet et création des langages Simula I et Simula 67 et création du langage Smalltalk
2007	Edmund M. Clarke (USA), Allen Emerson (USA) et Joseph Sifakis (France)	Pour leurs travaux sur le model checking
2020	Alfred Aho (Canada) et Jeffrey Ullman (USA)	Pour les algorithmes fondamentaux et la théorie sous-jacente à l'implémentation des langages de programmation et pour avoir synthétisé ces résultats et ceux d'autres dans leurs livres très influents, qui ont formé des générations d'informaticiens
2021	Jack Dongarra	*For pioneering contributions to numerical algorithms and libraries that enabled high performance computational software to keep pace with exponential hardware improvements for over four decades*

Table des figures

Bibliographie

[Ahr21] W. Ahrens. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, volume Bd. 1., chapter 9. Das Achtköniginnenproblem, pages 211–284. Teubner, dritte, verbesserte, anastatisch gedruckte aufl., edition, 1921.

[AS85] H. Abelson and G. J. Sussman. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, 1985.

[BBC92] D. Beauquier, J. Berstel, and P. Chrétienne. *Éléments d'algorithmique*. Masson, Paris, 1992.

[Bro95] F. P. Brooks. *The Mythical Man-Month : Essays on Software Engineering, Anniversary Edition (2nd Edition)*. Addison-Wesley Professional, 1995.

[CHL01] M. Crochemore, C. Hancart, and T. Lecroq. *Algorithmique du texte*. Vuibert, 2001.

[CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, 3rd Edition*. MIT Press, 2009.

[GG99] J. von zur Gathen and J. Gerhard. *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, 1999.

[Kle71] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1971. 6ème édition (1ère en 1952).

[Knu73a] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming – Sorting and Searching*, volume 3. Addison Wesley, 1973.

[Knu73b] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming : Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1973.

[Knu81] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming : Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1981.

[Mye04] G. L. Myers. *The Art of Software Testing*. Wiley, 2nd edition, 2004.

[Nus82] H. J. Nussbaumer. *Fast Fourier transform and convolution algorithms*, volume 2 of *Springer Series in Information Sciences*. Springer-Verlag, 2 edition, 1982.

[Rog87] H. Rogers. *Theory of recursive functions and effective computability*. MIT press, 1987. Édition originale McGraw-Hill, 1967.

[Sed02] R. Sedgewick. *Algorithms in Java - Parts 1–4*. Addison-Wesley, 2002.

[SF96] R. Sedgewick and P. Flajolet. *Introduction à l'analyse des algorithmes*. International Thomson Publishing, 1996. Traduit de l'anglais par Cyril Chabaud.

Index