École Polytechnique
Algèbre et théorie de Galois MAT 451

Contrôle classant du 24 mai 2023 - 3 heures

Avertissement

Les calculatrices et documents autres que le polycopié de cours sont interdits. La rédaction doit être concise et précise. Les exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note.

Exercice 1

Soit $K = \mathbf{Q}[i\sqrt{15}]$. Pour $x = a + ib\sqrt{15} \in K$, on pose $N(x) = a^2 + 15b^2$.

1. Montrer que N est multiplicative, c'est-à-dire $N(xx') = N(x)N(x')$ pour tous $x, x' \in K$.
2. Montrer qu'il existe $a \in K$, tel que $X^3 - a$ soit irréductible dans $K[X]$.

   On fixe un tel a, et soit $\theta \in \mathbf{C}$ une racine du polynôme $X^3 - a$.
3. Soit L le corps de décomposition de $X^3 - a$. Calculer le degré de l'extension L/K, et montrer que $\sqrt{5} \in L$.
4. Déterminer le groupe de Galois de L/K.
5. Déterminer les extensions de K contenues dans L.

   On suppose maintenant qu'il existe de plus $b \in \mathbf{Q}$ avec $N(a) = b^3$, avec toujours l'hypothèse que $X^3 - a$ est irréductible dans $K[X]$.
6. Montrer que $a \notin \mathbf{Q}$.
7. Déterminer les conjugués de θ sur $\mathbf{Q}$.
8. Montrer que $L/\mathbf{Q}$ est galoisienne.
9. Déterminer le nombre d'éléments $\phi \in \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ vérifiant

$$\phi(i\sqrt{15}) = -i\sqrt{15} \qquad \phi(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$$

10. Pour chacun des éléments ϕ précédents, calculer l'ordre de ϕ.

11. Déterminer la structure du groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$.

12. Montrer qu'il existe un unique sous-corps K_0 de L, que l'on déterminera, tel que $K_0/\mathbf{Q}$ soit de degré 2, et $\mathrm{Gal}(L/K_0)$ soit cyclique.

13. Déterminer le nombre d'extensions de $\mathbf{Q}$ de degré 6 contenues dans L. Lesquelles sont galoisiennes ?

14. Trouver un élément $x \in L$, tel que $\mathbf{Q}[x]$ soit de degré 3.

Exercice 2

Soit p un nombre premier, et $\overline{\mathbf{F}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$. Si q est une puissance de p, on note $\mathbf{F}_q$ l'unique sous-corps de $\overline{\mathbf{F}_p}$ à q éléments. Si $n \geq 1$, on note

$$\mu_n = \{x \in \overline{\mathbf{F}_p}, x^n = 1\}$$

Soit $n \geq 1$ un nombre entier premier à p.

1. Démontrer que μ_n est un ensemble à n éléments.

2. A quelle condition sur $n \geq 1$ a-t-on $\mu_n \subseteq \mathbf{F}_p$?

3. Calculer le plus petit entier $d \geq 1$ tel que $\mu_n \subseteq \mathbf{F}_{p^d}$.

4. Soit $q = p^d$ une puissance de p, et définissons $k_n = \mathbf{F}_q[x]_{x \in \mu_n}$. Montrer que l'extension $k_n/\mathbf{F}_q$ est galoisienne, et calculer son groupe de Galois.

5. Soit $q = p^d$ une puissance de p, et soient n, m des entiers supérieurs ou égaux à 1 et premiers à p. On rappelle que $k_n k_m$ est la plus petite extension de $\mathbf{F}_q$ contenant k_n et k_m. Calculer les cardinaux de $k_n \cap k_m$ et $k_n k_m$.

Exercice 3

Soit

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{7}}$$

1. Déterminer le polynôme minimal π_x de x sur $\mathbf{Q}$, et calculer le degré de l'extension $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$.

2. Démontrer que l'extension $\mathbf{Q}[x]/\mathbf{Q}$ n'est pas galoisienne.

3. Soit L le corps de décomposition de π_x. Calculer le degré de l'extension $L/\mathbf{Q}$.

4. Déterminer la structure du groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q}[\sqrt{7}])$.

5. Montrer que le groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ n'est pas abélien.

6. Déterminer la structure du groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$.

7. Expliciter les extensions quadratiques $K/\mathbf{Q}$ contenues dans L.