ECO361 PC6

Théorie des Jeux

Économie de l'information

Exercice 1. **Meilleures réponses et équilibres de Nash**

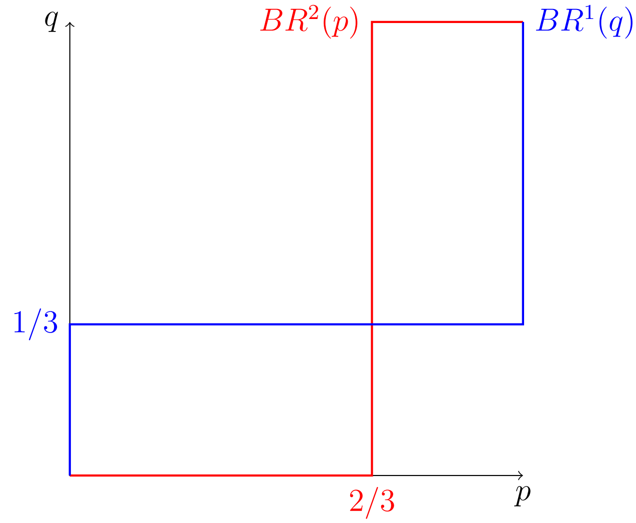
1. (a) Pour le joueur 2, le paiement de la stratégie B est p, celui de la stratégie S est $2(1-p)$. B est meilleure réponse si et seulement si $p \geq 2(1-p)$, i.e., $p \geq 2/3$. De même S est meilleure réponse si et seulement si $p \leq 2/3$. Pour $p = 2/3$ toutes les stratégies mixtes sont meilleures réponses. On a donc

$$BR^2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } p > 2/3 \\ [0,1] & \text{si } p = 2/3 \\ \{0\} & \text{si } p < 2/3 \end{cases}$$

   (b) On a de même :

$$BR^1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } q > 1/3 \\ [0,1] & \text{si } q = 1/3 \\ \{0\} & \text{si } q < 1/3 \end{cases}$$

   (c) Le graphique est comme suit:



(d) On trouve les équilibres de Nash comme intersections des deux correspondances de meilleures réponses. On trouve les deux équilibres en stratégies pures (B, B) et (S, S) qui correspondent aux points $(1, 1)$ et $(0, 0)$, ainsi qu'un troisième équilibre, en stratégies mixtes, au point $p = 2/3$, $q = 1/3$.

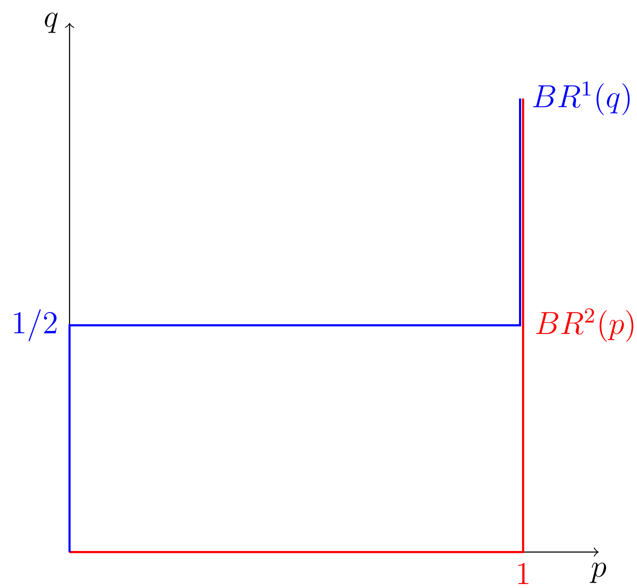
2. (a) Le paiement de la stratégie B est 0, celui de la stratégie S est $(1 - p)$. B est meilleure réponse si et seulement si $p = 1$. S est meilleure réponse pour toutes les valeurs de p. On a donc :

$$BR^2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } p < 1 \\ [0, 1] & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

(b) Le paiement de B est $q - (1 - q) = 2q - 1$, celui de la stratégie S est $-q + 1 - q = 1 - 2q$. B est meilleure réponse si et seulement si $q \geq 1/2$, et S est meilleure réponse si et seulement si $q \leq 1/2$.

$$BR^1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } q > 1/2 \\ [0,1] & \text{si } q = 1/2 \\ \{0\} & \text{si } q < 1/2 \end{cases}$$

(c) Le graphique est comme suit:



(d) On a deux composantes d'équilibres de Nash : le point isolé $(0,0)$ qui correspond à l'équilibre en stratégies pures (S,S), et le segment entre les points $(1,1/2)$ et $(1,1)$, qui correspond à un continuum d'équilibres en stratégies mixtes.

Exercice 2. **Jeu de penalties**

1. Si le tireur choisit le même côté que le gardien de but, alors le ballon n'entre pas, le paiement des 2 joueurs est 0. Si le tireur et choisit G et le gardien D, alors le ballon entre avec probabilité $0,9$, c'est donc le paiement (en moyenne de probabilité) du tireur, qui est l'opposé de celui du gardien (jeu à somme

nulle). Si le tireur choisit D et le gardien G, le ballon entre avec probabilité $0,6$. On a donc la matrice de paiements comme suit :

	G	D
G	0	.9
D	.6	0

2. On suppose que le tireur tire à gauche avec probabilité p. Du point de vue du gardien, plonger à gauche donne une probabilité de but de $.6(1-p)$, plonger à droite une probabilité de but de $.9p$. Plonger à gauche est une meilleure réponse pour $.6(1-p) \leq .9p$, cad. $p \geq .4$. Pour $p \geq .4$, plonger à droite est meilleure réponse. Pour $p = .4$, les deux stratégies G, D (ainsi que toutes les stratégies mixtes) sont meilleures réponses.

   Sachant que le joueur 2 minimise le paiement du joueur 1, on a $v(p) = \min\{.6(1-p), .9p\}$. (représenter le graphe de v aide à visualiser).

3. Le maximum de $v(p)$ est atteint en $p^* = \frac{2}{5}$, et la valeur correspondante que le joueur 1 peut se garantir est $\underline{v} = .36$.

4. Tirer à gauche donne un paiement de $.9(1-q)$ et tirer à droite un paiement de $.6q$. Tirer à gauche est meilleure réponse si $.9(1-q) \geq .6q$, ie. $q \leq .6$. Tirer à droite est meilleure réponse pour $q \geq \frac{3}{5}$, et pour .6 toutes les stratégies de 1 sont meilleure réponses.

   Sachant que le joueur 1 maximise son paiement à stratégie de 2 donné, on a $w(q) = \max\{.9(1-q), .6q\}$. (représenter le graphe de w aide à visualiser).

5. La stratégie du joueur 2 qui minimise $w(q)$ est $q^* = .6$, que est le gain espéré correspondant du joueur 1 est $\overline{v} = .36$. On dit que le joueur 1 peut *défendre* $\overline{v}$. En effet, pour toute stratégie de 2, le joueur 1 a une stratégie p qui lui assure un gain espéré de $\overline{v}$ au moins.

6. Ce sont les mêmes valeurs. Ce résultat est un cas particulier d'un théorème appelé théorème de minmax pour les jeux à somme nulle.

7. De manière générale, la valeur qu'il est possible de garantir est plus petite que la valeur qu'il est possible de défendre. Cela provient du fait que pour garantir $\underline{v}$, il faut trouver *une* stratégie qui obtient au moins $\underline{v}$ face à *toutes* les stratégies de l'autre joueur. Tandis que pour défendre $\overline{v}$, il suffit de trouver, pour chaque stratégie de l'adversaire, une stratégie qui obtienne $\overline{v}$. On voit que le passage de la définition de garantir à défendre est une inversion de quantificateurs mathématiques, passage de $\exists\ \forall$ à $\forall\ \exists$. Ce qui explique que les valeurs de $\underline{v}$ et de $\overline{v}$ puissent différer, avec en général $\overline{v} \geq \underline{v}$.

   On peut montrer ce résultat formellement pour tous ensembles de stratégies S pour le joueur 1, T pour le joueur 2 et fonction de paiement du joueur 1 $g\colon S \times T \to \mathbb{R}$, on montre l'inégalité:

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \inf_t \sup_s g(s,t).$$

   En effet pour tout $s' \in S, t' \in T$, on a

$$\inf_t g(s',t) \leq g(s',t') \geq \sup_s g(s,t')$$

   et donc en prenant le sup sur s à gauche, pour tout s' on a :

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \sup_s g(s,t')$$

   finalement en prenant le inf à droite sur t':

$$\sup_s \inf_t g(s,t) \geq \inf_t \sup_s g(s,t)$$

8. Le tireur tire plus souvent à droite, c'est à dire là où il est le moins bon. S'il tirait plus souvent à gauche, le portier aurait doublement intérêt à plonger à gauche (ballon tiré plus souvent qu'à gauche, ballon tiré plus souvent avec réussite de ce côté), on n'aurait pas une situation d'équilibre car dans ce cas le

joueur 1 aurait, lui, finalement intérêt à tirer à droite. Bien sûr cette prédiction provient du fait que les joueurs connaissent la matrice de paiements, donc ils savent tous deux que le tireur tire mieux à gauche qu'à droite. Si cette information était connue du tireur seul, les prédictions du modèle différeraient.

Exercice 3. **Compétition en prix de Bertrand**

1. Un producteur dont la demande est nulle ne produit rien et son gain est nul. Pour un producteur qui produit une quantité positive ou nulle, le gain est égal à la quantité vendue multipliée par le gain unitaire, lequel gain unitaire est la différence entre le prix de vente et le coût unitaire de production. On a donc les fonctions de gain :

$$g^i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i)(p_i - c) & \text{si } p_i < p_j \\ D(p_i)(p_i - c)/2 & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

2. On commence par raisonner par élimination pour ne garder qu'une possibilité avant de vérifier que c'est un équilibre de Nash.

   - Supposons que $p_i > p_j > c$. Alors la firme i fait un profit nul et pourrait faire un profit positif en utilisant un prix compris entre c et p_j, ça n'est donc pas un équilibre de Nash.
   - Supposons maintenant $p_i > c \geq p_j$. Dans ce cas la firme j fait un profit négatif ou nul, et pourrait faire un profit positif en utilisant un prix compris entre c et p_i, ça n'est pas non plus un équilibre de Nash.

   Donc à tout équilibre de Nash on a $p_1 = p_2$, soit p^* cette valeur commune.

   - Si $p^* < c$ alors les deux producteurs fond des pertes, et augmenter le prix serait une déviation profitable car elle assurerait un gain de 0.
   - Si $p^* > c$, alors chaque firme aurait intérêt à mettre un prix "juste au dessous" de p^*, pour un gain proche de $D(p^*)(p^* - c) > D(p^*)(p^* - c)/2$.
   - On a donc forcément $p^* = c$, et on vérifie bien que $p_1 = p_2 = c$ est un équilibre de Nash : chaque firme a un profit nul, et toute déviation donne aussi un profit nul.

On a donc un équilibre de Nash unique dans lequel les deux firmes vendent au prix marginal.

3. Le duopole de Cournot prédit des profits positifs lorsqu'il y a deux firmes, il prédit aussi une inefficience liée au pouvoir de marché des firmes. Le duopole de Bertrand prédit que l'issue de la compétition entre deux firmes est le même que l'issue de la compétition parfaite.

Exercice 4. **Compétition spatiale de Hotelling**

1. Si les deux marchands sont positionnés en des points différents ($x_i \neq x_j$) alors tous ceux à droite de leur milieu $\frac{x_i+x_j}{2}$ vont acheter au vendeur le plus à droite, et les autres au vendeur le plus à gauche. S'ils sont tous deux au même point alors la demande se répartit également entre les deux vendeurs.

$$g^i(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_i+x_j}{2} & \text{si } x_i < x_j \\ \frac{1}{2} & \text{si } x_i = x_j \\ 1 - \frac{x_i+x_j}{2} & \text{si } x_i > x_j \end{cases}$$

2. On ne peut pas avoir d'équilibre de Nash dans lequel $x_1 \neq x_2$, car dans ce cas, chaque marchand de glace aurait intérêt à se rapprocher de l'autre pour augmenter ses gains. Si $x_1 = x_2 < \frac{1}{2}$, chacun a la moitié des plagistes comme client, et une augmentation infime de x_i permettrait au vendeur i d'augmenter ses ventes ; de même on ne peut pas avoir un équilibre de Nash dans lequel $x_1 = x_2 > \frac{1}{2}$. Par élimination on voit qu'à un équilibre de Nash on a nécessairement $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, et on vérifie que c'est bien un équilibre de Nash : en effet, chaque déviation donnerait un paiement strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

3. Imaginons que les plagistes soient en fait des électeurs, et que la position sur la plage représente les préférences des électeurs sur un axe $[0, 1]$. Par exemple 0 peut signifier “de gauche” et 1 “de droite” ou bien 0 peut signifier “pro

immigration" et 1 "anti-immigration", etc .... S'il y a deux candidats, chaque électeur vote pour le candidat le plus proche de sa position électorale. L'objectif de chaque candidat est d'obtenir le plus de votes possible.

Le modèle prédit que les deux candidats ont finalement des programmes électoraux très proches. C'est ce qu'on a observé pendant assez longtemps dans différentes démocraties (US, UK, France ...), où on avait plus de différences entre pays qu'entre candidats dans un même pays, en accord avec la prédiction du jeu de Hotelling.

Récemment, on assiste dans divers pays (notamment USA) à un phénomène de polarisation politique assez accentué. La polarisation peut s'expliquer partiellement par un changement de préférences des électeurs. Un élément qui semble manquer dans le jeu de Hotelling est la motivation des électeurs à élire leur candidat. Si les deux candidats sont très proches, l'intérêt à voter est quasi nul et l'abstention très élevée. En revanche, un candidat plus proche des préférence de ces électeurs peut plus facilement les motiver, ce qui introduit un intérêt stratégique à des positions politiques qui s'éloignent de l'électeur médian.

Exercice 5. **Enchères au second prix**

1. Soit $B_i = \max_{j \neq i} B_j$ le maximum des enchères des joueurs différents de i.

   Si $B_i > v_i$, toute enchère supérieure ou égale à B_i donne un paiement négatif, tandis que b_i (ou toute autre enchère inférieure à B_i donne un paiement nul.

   Si $B_i < v_i$, toute enchère inférieure B_i donne un paiement nul, une enchère égale à B_i permet de remporter l'objet au prix B_i avec probabilité < 1, tandis que $b_i = v_i$ (ou toute autre enchère $> B_i$ donne un meilleur paiement car elle permet de remporter l'objet avec probabilité 1.

   Si $B_i = v_i$, alors toute enchère y compris $b_i = v_i$ donne un paiement nul.

On vient de vérifier que $b_i = v_i$ est toujours meilleure réponse. Il reste à montrer que c'est faiblement dominant. Pour cela, il faut comparer $b_i = v_i$ avec une autre enchère b'_i, et montrer qu'il existe au moins un profil d'enchères des autres joueurs dans lequel $b_i = v_i$ donne un meilleur paiement que b'_i. Si $b'_i < v_i$. Alors si $b'_i < B_i < v_i$, enchérir b'_i donne un paiement nul tandis qu'enchérir $b_i = v_i$ donne un paiement $v_i - B_i > 0$. Si $b'_i > v_i$, alors si $b'_i > B_i > v_i$, enchérir b'_i donne un paiement $v_i - B_i < 0$, tandis qu'enchérir $b_i = v_i$ donne un paiement nul.

2. On fixe la valuation de l'enchérisseur i à v_i. La probabilité que i remporte l'objet est:

$$\begin{aligned} P(B_i < v_i) &= P(\forall j \neq i, b_j < v_i) \\ &= P(\forall j \neq i, v_j < v_i) \\ &= \prod_{j \neq i} P(v_j < v_i) \\ &= \prod_{j \neq i} v_i \\ &= v_i^{n-1} \end{aligned}$$

3. Il reste à calculer l'espérance du montant payé par i. Si on était de manière "discrète", on la calculerait comme $\sum_{b \leq v_i} P(B_i = b)b$, où la somme est prise sur toutes les situations " gagnantes " de i, c'est-à-dire $B_i \leq v_i$, étant donné que i paye 0 si $B_i > v_i$. De manière continue et "intégrale", on a l'expression:

$$\begin{aligned} R(v_i) &= \int_{b=0}^{v_i} (n-1) b^{n-2} b db \\ &= \frac{n-1}{n} v_i^n \end{aligned}$$

Où $(n-1)b^{n-2}db$ correspond à $P(b \leq B_i < b + db) = P(B_i < v_i + db) - P(B_i < v_i)$ d'après le calcul précédent (autrement dit c'est la fonction de densité pour la fonction cumulative calculée).

Le montant moyen payé avant de connaître sa valuation est la moyenne des montants payés sur toutes les valutations, c'est donc:

$$\begin{aligned} R_i &= \int_0^1 R(v_i)dv_i \\ &= \frac{n-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Le revenu du vendeur est la somme des montants payés par tous les enchérisseurs, comme tous les enchérisseurs sont symétriques,

$$\begin{aligned} R &= \sum_i R_i = nR_i \\ &= \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

On observe que ce revenu est croissant en n, et tend vers 1 lorsqu'il y a de plus en plus d'enchérisseurs. C'est intuitif : plus d'enchérisseur augmente la compétition et permet de vendre l'objet en moyenne plus cher. Aussi, la présence d'un nombre accru d'enchérisseur augmente la probabilité qu'un ou plusieurs d'entre eux ait une valuation élevée, auquel cas il est possible de vendre l'objet à un prix élevé.

Exercice 6. **Pierre, Papier, Ciseaux**

1. Si le joueur 1 joue $(1/3, 1/3, 1/3)$, il obtient un paiement espéré de 0 indépendamment de la stratégie de 2. Par conséquent, tout équilibre de Nash a un paiement (pour 1) de au moins 0 (sinon $(1/3, 1/3, 1/3)$ serait une déviation profitable pour le joueur 1).

   Idem si le joueur 2 joue $(1/3, 1/3, 1/3)$ le paiement espéré du joueur 1 est 0. Donc tout paiement d'équilibre de Nash pour 1 est au plus 0.

2. Soit (p, q) un équilibre de Nash. Face à q, écrivons g_1, g_2, g_3 les paiements des trois stratégies pures du joueur 1. On vérifie que $g_1 + g_2 + g_3 = 0$.

   Si on n'a pas $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, alors au moins une des 3 stratégies du joueur 1 donne un paiement > 0 : $\max\{g_1, g_2, g_3\} > 0$. Comme on suppose que p est une meilleure réponse à q, p donne un paiement > 0 face à q, ce qui est en contradiction avec la question 1.

   La résolution linéaire de $g_1 = g_2 = g_3$ donne $q = (1/3, 1/3, 1/3)$.

   De même, raisonner sur les paiements des stratégies du joueur 2 nous montre qu'on a forcément $p = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Exercice 7. **Concours de beauté**

1. Les 2/3 de la moyenne est forcément au moins 2/3100. Donc toute stratégie supérieure à 2/3100 est strictement dominée par 2/3100. (sont-ce les seules dominées?)

2. Si on élimine toutes les stratégies supérieures à 2/3100, toutes les stratégies supérieures à 4/9100 dans le jeu restant sont dominées. Et ainsi de suite.

3. Au seul équilibre de Nash, tous les participants annoncent 0. En effet on vérifie directement que c'est un équilibre de Nash. Considérons maintenant un équilibre de Nash où la moyenne des annonces est m. Si $m > 0$ alors tous ceux qui annoncent m ou plus ont intérêt à annoncer un peu moins que m, ce qui constituerait une déviation profitable. On ne peut donc qu'avoir $m = 0$, ce qui veut dire que toutes les annonces sont 0.