École Polytechnique
Algèbre et théorie de Galois MAT 451

Contrôle classant du 1er avril 2016 - 3 heures

Avertissement

Les calculatrices et documents autres que le polycopié de cours sont interdits. La rédaction doit être concise et précise. Les exercices sont indépendants. Il n'est pas nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note.

Dans tout le sujet, on admet le résultat suivant : soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. Alors G contient un sous-groupe d'ordre p.

Exercice 1.

On considère $P \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbf{Q}$ de degré premier impair p admettant exactement $p-2$ racines réelles. On notera $\mathrm{Gal}(P, \mathbf{Q})$ son groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$.

1) Rappeler pourquoi $\mathrm{Gal}(P, \mathbf{Q})$ est isomorphe à un sous-groupe S du groupe symétrique S_p.
2) Montrer que S contient une transposition.
3) Montrer que p divise $|S|$.
On admet qu'un sous-groupe de S_p contenant une transposition et un p-cycle est égal à S_p.
4) Montrer que $S = S_p$.

On considère le polynôme

$$P(X) = X^5 - 6X + 3.$$

5) Trouver un nombre premier p tel que la réduction de $P(X)$ dans $\mathbf{F}_p[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbf{F}_{p^2}$.
6) Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
7) Est-ce que ce polynôme est résoluble ?

Exercice 2.

On considère le polynôme

$$P(X) = X^5 + X^2 - 9X + 3,$$

et son groupe de Galois

$$G = \mathrm{Gal}(P, \mathbf{Q}).$$

1) Ecrire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$ [On pourra considérer le nombre complexe $i\sqrt{3}$].
2) Est-ce que G est isomorphe à S_5 ?
3) Est-ce que P est résoluble ?

Soit K le corps de décomposition de P dans $\mathbf{C}$.

4) Montrer que G est commutatif si et seulement si $[K : \mathbf{Q}] = 6$.
5) Est-ce que G est commutatif ? [Donnée : le discriminant d'un polynôme de la forme $X^3 + pX + q$ est $-4p^3 - 27q^2$].

Exercice 3

Soit k un sous-corps de $\mathbf{R}$. Une extension K/k est dite résoluble par radicaux réels s'il existe une suite de corps

$$k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \mathbf{R}$$

telle que $K \subset k_n$ et

$$k_{i+1} = k_i[x_i] \text{ avec } x_i^{n_i} \in k_i \text{ pour } 0 \leq i < n,$$

un certain entier $n_i > 0$.
On dit qu'elle est fortement résoluble par radicaux réels s'il existe une suite de corps comme ci-dessus telle que $K = k_n$.

1) Montrer que l'extension

$$\mathbf{Q}\left[\cos(\frac{2\pi}{7})\right]/\mathbf{Q}$$

est galoisienne.
2) Montrer que cette extension est résoluble.
3) Déterminer $[\mathbf{Q}[\cos(\frac{2\pi}{7})] : \mathbf{Q}]$.

4) Est-ce que cette extension $\mathbf{Q}\left[\cos(\frac{2\pi}{7})\right]/\mathbf{Q}$ est fortement résoluble par radicaux réels ?

Soit $P \in k[X]$ un polynôme irréductible de degré 3. On note x_1, x_2, x_3 ses racines et
$$K = k[x_1, x_2, x_3]$$
son corps de décomposition.

5) Montrer que si les trois racines x_1, x_2, x_3 sont réelles, alors K n'est pas fortement résoluble par radicaux réels.

On suppose désormais que P n'a qu'une racine x_1 dans $\mathbf{R}$.
On considère les éléments
$$y_1 = (x_1 + e^{2i\pi/3}x_2 + e^{-2i\pi/3}x_3)^3 \text{ et } y_2 = (x_1 + e^{-2i\pi/3}x_2 + e^{2i\pi/3}x_3)^3,$$
dans
$$K' = K[e^{2i\pi/3}].$$

6) Montrer que K'/k est galoisienne.
7) Montrer que l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est invariant pour une permutation de $\{x_1, x_2, x_3\}$
8) Montrer que
$$y_1 + y_2 \in k[e^{2i\pi/3}] \text{ et } y_1y_2 \in k[e^{2i\pi/3}].$$

9) Montrer que y_1 et y_2 sont réels.
10) En déduire que
$$y_1 + y_2 \in k \text{ et } y_1y_2 \in k.$$

11) Montrer que $k[x_1]/k$ est résoluble par radicaux réels.
12) Soit K/k une extension résoluble par radicaux réels. Montrer que si
$$k \subset L \subset K,$$
alors K/L est résoluble par radicaux réels.
13) Si K/k est galoisienne et p un nombre premier divisant $[K : k]$, montrer qu'il existe un sous-corps L de K contenant k tel que
$$[K : L] = p.$$

14) [Plus difficile] Si K/k est une extension galoisienne résoluble par radicaux réels de degré premier p, montrer que $p = 2$ [on pourra se ramener au cas où tous les n_i sont premiers]. En déduire que toute extension galoisienne résoluble par radicaux réels a pour degré une puissance de 2.