

Oscillations d'atomes piégés dans un potentiel parabolique

à rendre pour le 7 juin 2023

On considère une expérience effectuée avec des atomes froids, en l'occurrence des atomes de césium, placés dans un piège parabolique réalisé à l'aide d'un faisceau laser. Les atomes seront considérés comme des particules ponctuelles de masse $m = 2.2 \times 10^{-25}$ kg et leur mouvement sera supposé unidimensionnel selon l'axe x . L'opérateur impulsion est simplement noté \hat{p} , de sorte que l'hamiltonien du système s'écrit

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

où $\omega/(2\pi) = 91$ kHz. On rappelle que l'opérateur \hat{a} est défini par

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{a_0} + i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right), \quad (2)$$

avec $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Les états propres de l'hamiltonien seront notés $|n\rangle$, avec $n \in \mathbb{N}$ et on rappelle les relations $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. La fonction d'onde associée à l'état $|n\rangle$ est notée $\psi_n(x)$ et sa transformée de Fourier est notée $\varphi_n(p)$, avec en particulier

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2}\right), \quad (3)$$

et

$$\varphi_0(p) = \left(\frac{a_0^2}{\pi \hbar^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a_0^2 p^2}{2\hbar^2}\right). \quad (4)$$

1. Mesure par vol libre de la densité de probabilité de l'impulsion

1.1 Rappeler sans démonstration l'expression des niveaux d'énergie du système.

On a $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

1.2 Compte tenu de la valeur numérique de a_0 , pensez-vous qu'il soit possible de résoudre l'extension spatiale de l'état fondamental à l'aide d'un microscope optique utilisant de la lumière visible ?

On calcule $a_0 \approx 29$ nm, ce qui est très inférieur à la longueur d'onde de la lumière dans le visible (comprise entre 0.4 et 0.8 μm). En raison de la limite de résolution imposée par la loi de la diffraction, il ne sera donc pas possible de mesurer directement l'extension spatiale de l'état fondamental avec un tel microscope.

1.3 Au lieu de mesurer la densité de probabilité de la position, on choisit de mesurer la densité de probabilité de l'impulsion, $|\varphi(p, t_0)|^2$, à un instant t_0 donné. Pour cela, on éteint brusquement le laser de piégeage à l'instant t_0 , de sorte que les atomes se comportent comme un paquet d'ondes libre pour $t > t_0$. On rappelle que dans ce cas, pour $t - t_0$ suffisamment grand, on a $|\psi(x, t)|^2 \propto |\varphi(p = mx/(t - t_0), t_0)|^2$ (méthode dite du *temps de vol* ou du *vol libre*). L'image obtenue reflète ainsi la densité de probabilité de l'impulsion $|\varphi(p, t_0)|^2$ à l'instant t_0 où le laser de piégeage a été coupé. Commenter la Figure 1(a), obtenue de cette manière lorsque $|\psi(t_0)\rangle = |0\rangle$, et estimer un ordre de grandeur du temps de vol choisi, $T_v = t - t_0$.

On observe une distribution gaussienne selon l'axe x , ce qui correspond effectivement à la forme attendue pour $|\varphi_0(p)|^2$. La largeur de la distribution est de l'ordre de 200 μm , ce qui peut être aisément résolu à l'aide d'un microscope optique. Sachant que la largeur de la distribution de l'impulsion est de l'ordre de \hbar/a_0 et compte tenu de la relation $p = mx/T_v$ donnée dans l'énoncé, on voit que le temps de vol peut s'écrire comme $T_v \approx ma_0/\hbar \times 200 \mu\text{m} \approx 10$ ms.

1.4 On considère une fonction d'onde $\psi(x)$ ainsi que sa transformée de Fourier $\varphi(p)$. Ecrire l'expression de $\hat{a}^\dagger \psi(x)$ sous forme d'un opérateur différentiel, puis montrer que

$$\hat{a}^\dagger \varphi(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_0}{\hbar} p - \frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} \right) \varphi(p). \quad (5)$$

On obtient

$$\hat{a}^\dagger \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{a_0} - i \frac{a_0}{\hbar} \hat{p} \right) \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a_0} x - a_0 \frac{d}{dx} \right) \psi(x).$$

On peut alors directement écrire la transformée de Fourier de cette expression, en utilisant le fait que $-ix/\hbar$ et d/dx s'écrivent respectivement d/dp et ip/\hbar dans l'espace de Fourier. On en déduit

$$\hat{a}^\dagger \varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a_0} i\hbar \frac{d}{dp} - a_0 \frac{ip}{\hbar} \right) \varphi(p) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} - \frac{a_0}{\hbar} p \right) \varphi(p),$$

ce qui nous redonne bien l'expression demandée.

- 1.5** En déduire que l'on peut écrire $\varphi_1(p) = \xi p \varphi_0(p)$, où ξ est un nombre complexe que l'on déterminera. Comme $\hat{a}^\dagger |0\rangle = \sqrt{1} |1\rangle$, on peut en déduire que

$$\varphi_1(p) = \hat{a}^\dagger \varphi_0(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_0}{\hbar} p - \frac{\hbar}{a_0} \frac{d}{dp} \right) \varphi_0(p).$$

Or, compte tenu de l'expression de $\varphi_0(p)$, on a

$$\frac{d\varphi_0}{dp} = -\frac{a_0^2 p}{\hbar^2} \varphi_0(p),$$

soit

$$\varphi_1(p) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_0}{\hbar} p + \frac{a_0}{\hbar} p \right) \varphi_0(p) = -\frac{i\sqrt{2}a_0}{\hbar} p \varphi_0(p),$$

ce qui nous donne bien l'expression demandée avec $\xi = -i\sqrt{2}a_0/\hbar$.

- 1.6** Commenter la Figure 1(b).

La densité de probabilité mesurée, qui s'annule au centre et présente deux pics, correspond effectivement à ce qui est attendu pour $|\varphi_1(p)|^2 \propto p^2 |\varphi_0(p)|^2$.

2. Préparation du système dans le premier état excité

On suppose qu'à l'instant initial le système est dans l'état fondamental $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Afin de manipuler l'état du système, on applique alors un second faisceau laser de fréquence appropriée de sorte que, pour $t > 0$, l'hamiltonien du système \hat{H}_0 est remplacé par le nouvel hamiltonien

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2} (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|), \quad (6)$$

où Ω est une grandeur réelle positive.

- 2.1** Déterminer les états propres de \hat{H}_1 ainsi que les valeurs propres correspondantes.

Dans la base formée par $|0\rangle$ et $|1\rangle$, la matrice de \hat{H}_1 s'écrit

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les énergies propres E_n correspondantes sont solutions de $\det(\hat{H}_1 - E_n \mathbb{I}) = 0$, c'est-à-dire de

$$\left(E_n - \frac{\hbar\Omega}{2} \right) \left(E_n + \frac{\hbar\Omega}{2} \right) = 0.$$

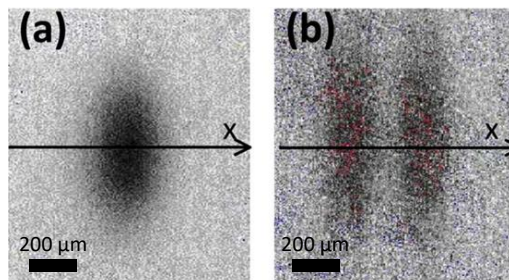


Figure 1 – Représentation du nuage atomique mesuré en faisant l'image de la fluorescence émise à l'aide d'un microscope, après un vol libre effectué durant le temps de vol T_v . Le système est placé initialement dans l'état $|0\rangle$ (a) ou $|1\rangle$ (b). La barre horizontale représente une longueur de $200 \mu\text{m}$. On ne tiendra pas compte de l'extension du nuage selon l'axe y perpendiculaire à l'axe x .

Les énergies propres sont donc $E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}$ correspondant aux états propres

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

2.2 Décomposer l'état $|\psi(0)\rangle$ dans la base propre obtenue à la question précédente, puis en déduire pour $t > 0$ l'expression de $|\psi(t)\rangle$ dans cette même base.

On a $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$. On en déduit

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\Omega t/2}}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{e^{i\Omega t/2}}{\sqrt{2}} |-\rangle.$$

2.3 Ecrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base propre de \hat{H}_0 .

En remplaçant $|+\rangle$ et $|-\rangle$ par leurs expressions dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on obtient

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\Omega t/2} + e^{i\Omega t/2}}{2} |0\rangle + \frac{e^{-i\Omega t/2} - e^{i\Omega t/2}}{2} |1\rangle = \cos \frac{\Omega t}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\Omega t}{2} |1\rangle.$$

2.4 Calculer la probabilité $\mathcal{P}(t)$ qu'une mesure de H_0 effectuée à l'instant t donne le résultat $3\hbar\omega/2$, puis montrer que cette fonction est une fonction périodique dont on déterminera la période T .

La valeur proposée correspond au niveau E_1 de \hat{H}_0 , associé à l'état propre $|1\rangle$. On a donc

$$\mathcal{P}(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2 \frac{\Omega t}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t).$$

Il s'agit d'une fonction périodique de période $T = 2\pi/\Omega$.

2.5 A quel instant faut-il interrompre l'application du second laser pour placer le système dans l'état $|1\rangle$ (à une phase près) ?

Après une demi-période ($t = T/2$), on a $\mathcal{P}(t = T/2) = 1$, ce qui veut dire que le système est avec certitude dans le premier état excité. On peut aussi dire que, pour $t = T/2$, on a $\Omega t/2 = \pi/2$ soit $|\psi(T/2)\rangle = -i|1\rangle$. A un facteur de phase près, le système est donc bien dans l'état $|1\rangle$.

3. Préparation d'un état non stationnaire

Dans cette partie, on choisit d'interrompre l'application du second faisceau laser discuté à la partie précédente à l'instant $T/4$. L'hamiltonien du système est ainsi H_1 pour $0 \leq t \leq T/4$ puis à nouveau \hat{H}_0 pour $t > T/4$.

3.1 Ecrire dans la base propre de \hat{H}_0 l'état du système à l'instant $t = T/4$, $|\psi(T/4)\rangle$, sachant que $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.

Pour $t = T/4$, on a $\Omega t/2 = \pi/4$ soit $|\psi(T/4)\rangle = (|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$.

3.2 En déduire l'expression de $|\psi(t = T/4 + \tau)\rangle$ pour $\tau > 0$.

Pour $t > T/4$, le système est gouverné par l'hamiltonien \hat{H}_0 , de sorte que

$$|\psi(T/4 + \tau)\rangle = \frac{e^{-i\omega\tau/2}}{\sqrt{2}} (|0\rangle - ie^{-i\omega\tau} |1\rangle).$$

3.3 Exprimer la densité de probabilité $|\varphi(p, t)|^2$ en fonction de $|\varphi_0(p)|^2$.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(p, t) &= \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} (\varphi_0(p) - ie^{-i\omega\tau} \varphi_1(p)) \\ \varphi(p, t) &= \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}a_0}{\hbar} p e^{-i\omega\tau} \right) \varphi_0(p) \end{aligned}$$

et donc

$$|\varphi(p, t)|^2 = \frac{|\varphi_0(p)|^2}{2} \left(1 + \frac{2a_0^2}{\hbar^2} p^2 - \frac{2\sqrt{2}a_0}{\hbar} p \cos \omega\tau \right).$$

3.4 La Figure 2 représente la densité de probabilité obtenue par la méthode du vol libre pour différentes valeurs du temps d'évolution $\tau = q\tau_0$, où q est un entier. Justifier qualitativement la forme de ces courbes puis déterminer la valeur de τ_0 .

La densité de probabilité obtenue à la question précédente est clairement une fonction périodique, de période égale à $2\pi/\omega$, conformément à l'observation expérimentale, où la période est de l'ordre de $7\tau_0$. On en déduit que $\tau_0 \approx 1/(7 \times 91 \text{ kHz}) \approx 1.6 \text{ ms}$. Même si on travaille ici dans l'espace des impulsions, les fonctions d'ondes ont des formes similaires aux deux premières fonctions d'un puits de potentiel symétrique, de sorte que l'on observe une oscillation de la densité de probabilité similaire à celle discutée par exemple en PC4 avec la superposition des deux premiers niveaux du puits infini. Les expériences discutées dans ce sujet sont extraites des articles suivants : I. Bouchoule, H. Perrin, A. Kuhn, M. Morinaga, C. Salomon, Phys. Rev. A Rapid Comm. **59**, R8 (1999), M. Morinaga, I. Bouchoule, J.C. Karam, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **83**, 4037 (1999), I. Bouchoule, Thèse de doctorat (2000).

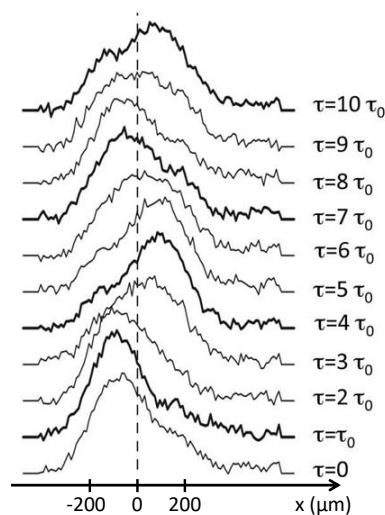


Figure 2 – Mesure de la distribution de l'impulsion effectuée à l'instant $t = T/4 + \tau$, pour différentes valeurs du temps d'évolution τ .