PHY361 DM1
Oscillations d'atomes piégés dans un potentiel parabolique

Isai GORDEEV et Imad BARAKAT
Promotion X2022, section Escrime

31 mai 2023

1 Mesure par vol libre de la densité de probabilité de l'impulsion

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$$

1.1

Les états d'énergie propres d'opérateur $\hat{H}$

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \tag{1}$$

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

1.2

$a_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}} \sim 269$ nm $< \sim 400$ nm, donc nous ne sommes pas capable.

1.3

L'image 1(a) est symétrique que correspond au formule de φ_0.

Dans l'image(a), $p_0 = 0$, après T_v on voit bien que $\psi(p, t)$ s'est séparé. C'est prévu par la théorie dans le cas libre. Calculons $|\varphi_1(p)\rangle$ dans la représentation de l'impulsion p. Nous verrons aussi que l'image 2(a) correspond au formule de $\varphi_1 \sim p\exp(-p^2)$

Après l'extinction du laser les atomes de Cs se sont comporté comme les particules libres. Enfin, pour calculer T_v il faut mesurer l'impulsion moyenne de $|1\rangle$, ainsi regarder la coordonné de p_1. Comme il est demandé de calculer juste l'ordre de grandeur, on va prendre l'ordre de grandeur de $[p_1] = \sqrt{2}\frac{\hbar}{a_0}$, $x = 200\mu m$

$$T_v = \frac{mx}{[p_1]} = \frac{mxa_0}{\sqrt{2}\hbar} \sim 0.1s \tag{2}$$

1.4

Prouvons que les opérateurs de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ dans la représentation de l'impulsion p sont

$$\hat{x} \overset{P}{=} \langle p|x|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} \tag{3}$$

$$\hat{p} \overset{P}{=} \langle p|x|\psi\rangle = p \tag{4}$$

L'opérateur de création appliquant à l'état fondamental.

$$|\psi_1\rangle = \hat{a}^\dagger|\psi_0\rangle \tag{5}$$

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{a_0}{\hbar}\hat{x} - i\frac{1}{a_0}\hat{p}\right)|\psi_0\rangle \tag{6}$$

La représentation dans le X-espace.

$$\psi_1(x){=}\left(\frac{a_0}{\hbar}x - i\hbar\frac{1}{a_0}\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) \tag{7}$$

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\ \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ e^{ixp/\hbar}\varphi(p), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} x\psi(x) = \langle x|x|\psi\rangle = \int dp\ \langle x|p\rangle\langle p|x|\psi\rangle = \int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}xe^{ixp/\hbar}\varphi(p) \overset{p.p.}{=} \\ \int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ixp/\hbar}\underbrace{i\hbar\frac{d}{dp}\varphi(p)}_{\langle p|x|\psi\rangle} \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) = \langle x|p|\psi\rangle = \int dp\ \langle x|p\rangle\langle p|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ixp/\hbar}\varphi(p){=} \\ \int\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ixp/\hbar}\underbrace{p\varphi(p)}_{\langle p|p|\psi\rangle} \end{gathered} \tag{10}$$

Donc, nous avons dans le P-espace

$$\varphi_1(p){=}\left(i\hbar\frac{1}{a_0}\frac{d}{dp} - i\frac{a_0}{\hbar}p\right)\varphi_0(p) \tag{11}$$

$$\varphi_1(p) = -\sqrt{2}\left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left[i\frac{a_op}{\hbar}\exp\left(-\frac{a_0^2}{2\hbar^2}p^2\right)\right] \tag{12}$$

1.5

$$\varepsilon = -i\sqrt{2}\left(\frac{a_0}{\hbar}\right) \tag{13}$$

1.6

Dessinons les deux graphiques schématiques φ_0, φ_1. Nous voyons que les données expérimentales correspondent à la théorie.

FIGURE 1 – blue – φ_0, rouge – φ_1

2 Préparation du système dans le premier état excité

L'état fondamental c'est $\psi_0 = |0\rangle$. Le nouveau Hamiltonien H_1

$$H_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \tag{14}$$

2.1

Déterminons les états propres de H_1

$$\hat{H}_1|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \tag{15}$$

$$\frac{\hbar\Omega}{2}(|0\rangle \underbrace{\langle 1|\psi_n\rangle}_{\in C} + |1\rangle \underbrace{\langle 0|\psi_n\rangle}_{\in C}) = E_n|\psi_n\rangle \tag{16}$$

Nous remarquons que tout les états propres se constituent seulement de deux états de $\hat{H}_0$, $|0\rangle$,$|1\rangle$, donc

$$|\psi_n\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \tag{17}$$

La normalisation de $\langle\psi_n|\psi_n\rangle$ nous donne

$$a_0^2 + a_1^2 = 1 \tag{18}$$

La définition de $\langle 0|\psi_n\rangle = a_1$ et $\langle 1|\psi_n\rangle = a_0$ nous donne

$$a_0^2 = a_1^2 \tag{19}$$

Nous avons deux paires de solutions

$$(a_0, a_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{20}$$

$$(a_0, a_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{21}$$

Donc, les états propres

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad E_0 = \frac{\hbar\Omega}{2} \tag{22}$$

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2} \tag{23}$$

2.2

$$|0\rangle = \frac{|\tilde{\psi}_1\rangle + |\tilde{\psi}_0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{24}$$

$$|1\rangle = \frac{|\tilde{\psi}_0\rangle - |\tilde{\psi}_1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

Évolution de $|0\rangle$ est donnée par l'équation de Sh.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}_n(t)\rangle = \hat{H}_1|\tilde{\psi}_n(t)\rangle \tag{26}$$

$$|\tilde{\psi}_n(t)\rangle = |\tilde{\psi}_n(0)\rangle \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) \tag{27}$$

$$|\psi_0(t)\rangle = \frac{|\tilde{\psi}_0(0)\rangle \exp\left(-\frac{i}{2}\Omega t\right) + |\tilde{\psi}_1(0)\rangle \exp\left(\frac{i}{2}\Omega t\right)}{\sqrt{2}} \tag{28}$$

2.3

$$|\psi_0(t)\rangle = \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)|1\rangle \tag{29}$$

2.4

Une mesure de $|1\rangle$ est faite avec une probabilité

$$P(t) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(\Omega t)}{2} \tag{30}$$

Donc, $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

2.5

Il faut éteindre le laser dans le moment quand $P(t) = 1$

$$\cos(\Omega t) = -1 \tag{31}$$

$$t = \frac{T}{2}(1 + 2n) \tag{32}$$

3 Préparation d'un état non stationnaire

Dans cette partie, on choisit d'interrompre l'application du second faisceau laser discuté à la partie précédente à l'instant $T/4$.

3.1

$$|\psi_0(t)\rangle = \cos\left(\frac{1}{8}\Omega T\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{1}{8}\Omega T\right)|1\rangle \tag{33}$$

$$|\psi_0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \tag{34}$$

3.2

Après le moment T, nous avons le changement d'opérateur $\hat{H}$, par conséquent

$$|\psi_0(\frac{T}{4}+t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\exp(-i\frac{wt}{2})|0\rangle - i\exp(-i\frac{3wt}{2})|1\rangle) \tag{35}$$

3.3

Il y a deux cas

3.3.1

$t < \frac{T}{4}$

$$\langle p|\psi_0(t)\rangle = \varphi(p,t) = \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\varphi_0 - i\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\varphi_1 \tag{36}$$

$$\varphi(p,t) = \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\varphi_0 - i\sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\epsilon p\varphi_0 \tag{37}$$

$$\varphi^2(p,t) = \left[\cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega t\right)\epsilon^2 p^2\right]\varphi_0^2(p) \tag{38}$$

3.3.2

$t > \frac{T}{4}$

$$\langle p|\psi_0(t)\rangle = \varphi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\exp(-i\frac{wt}{2})\varphi_0(p) - i\exp(-i\frac{3wt}{2})\varphi_1(p)) \tag{39}$$

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\exp(-i\frac{wt}{2})\varphi_0(p) - i\exp(-i\frac{3wt}{2})\epsilon p\varphi_0(p)) \tag{40}$$

$$\varphi^2(p,t) = \frac{1}{2}\left(1 + (\epsilon p)^2 - 2\epsilon p\sin\left(\frac{wt}{2}\right)\right)\varphi_0^2(p) \tag{41}$$

3.4

Nous voyons que dans le graphique c'est une fonction périodique qui fait des oscillation autour d'un point fixe, que correspond à la fonction obtenue dans (41).

En moment de $\tau = 8\tau_0$ la courbe se met dans la position initiale, donc

$$4w\tau_0 = 2\pi \rightarrow \tau_0 = \frac{1}{4\nu} = 2.7\mu s \tag{42}$$