PHY361 - PC9 : Intrication Quantique

Voir dans le livre : Chapitre 14

Objectifs : Comprendre l'intrication quantique et son formalisme. Terminer sur le fait que pour un état bien intriqué, la mesure sur une seule particule est complètement aléatoire alors qu'il y a une corrélation parfaite sur les deux particules.

Résumé de l'Amphi 9 et Définitions

Produit tensoriel :

- Espace de Hilbert à deux degrés de liberté :
  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b$ de dimension $(\dim \mathcal{E}_a) \times (\dim \mathcal{E}_b)$ (en dimension finie).
  $\{|\alpha_m\rangle\}$ et $\{|\beta_n\rangle\}$ bases de $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b \to \{|\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle\}$ base de $\mathcal{E}$

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n}|\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle \in \mathcal{E}$$

- Produit scalaire : $|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ et $|\psi'\rangle = |\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle$

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \langle\alpha|\alpha'\rangle\langle\beta|\beta'\rangle$$

- Opérateur $\hat{A} \otimes \hat{B}$: $\left(\hat{A} \otimes \hat{B}\right)|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = \left(\hat{A}|\alpha\rangle\right) \otimes \left(\hat{B}|\beta\rangle\right)$ ($\hat{A} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_a$ et $\hat{B} : \mathcal{E}_b \to \mathcal{E}_b$).
  Notations usuelles : $\hat{A} \otimes \hat{I} = \hat{A},\ \hat{A} \otimes \hat{B} = \hat{A}\hat{B}$ et $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = |\alpha, \beta\rangle$.
- Etat **factorisable** : $\exists(|\alpha\rangle \in \mathcal{E}_a, |\beta\rangle \in \mathcal{E}_b) : |\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$.
  Dans un état factorisable, les grandeurs physiques A et B agissant respectivement dans $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b$ sont des variables aléatoires indépendantes : il n'y a pas de corrélation entre les deux parties du système.
- Etat **intriqué** : $|\psi\rangle \in \mathcal{E}$ est **intriqué** s'il n'est pas factorisable.
- Projections : Probabilité d'obtenir la valeur propre a_n de $\hat{A}$ lors d'une mesure de $\hat{A}$:
  On défini $\hat{P}_n$: projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre a_n :
  Si $\hat{A} = \hat{A} \otimes \hat{I}$, avec $\{|\psi_{n,k}\rangle\}_k$ base orthonormée du sous-espace propre associé à a_n, i.e. $\forall k, \hat{A}|\psi_{n,k}\rangle = a_n|\psi_{n,k}\rangle$) alors :

$$\hat{P}_n = \left(\sum_k |\psi_{n,k}\rangle\langle\psi_{n,k}|\right) \otimes \hat{I}$$

$$\mathcal{P}(a_n) = \|\hat{P}_n|\psi\rangle\|^2$$

  Immédiatement après une mesure donnant le résultat a_n, le système se retrouve dans l'état :

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\|\hat{P}_n|\psi\rangle\|}$$

1 Etat intriqué de deux spins 1/2

On prépare deux particules A et B de spin 1/2 dans l'état suivant :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|A:+;B:-\rangle + |A:-;B:+\rangle \right) \ ,$$

avec $|+\rangle$ et $|-\rangle$ les états propres de l'opérateur $\hat{S}_z$. On note pour simplifier

$$|A:\pm;B\pm\rangle = |\pm\pm\rangle \ \Rightarrow \ |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right)$$

1. Cet état est-il intriqué ?

On essaye de le factoriser : si on ne peut pas y parvenir alors l'état est intriqué. On cherche donc a, b, c, et d tel que :

$$|\psi\rangle = \left(a(|+\rangle + b|-\rangle \right) \otimes \left(c(|+\rangle + d|-\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right)$$

Ce qui donne les 4 équations suivantes :

$$\begin{cases} ac = 0 \\ ad = 1/\sqrt{2} \\ bc = 1/\sqrt{2} \\ bd = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admettant pas de solution, l'état est donc intriqué.

---

2. Ecrire cet état dans la base des états propres de $\hat{S}_x$, $|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$. Est-il toujours intriqué ?

Dans la base $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ on a : (CF PC7)

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x) \ \ \& \ \ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x - |-\rangle_x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((|+\rangle_x + |-\rangle_x) \otimes (|+\rangle_x - |-\rangle_x) + (|+\rangle_x - |-\rangle_x) \otimes (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(|++\rangle_x - |+-\rangle_x + |-+\rangle_x - |--\rangle_x + |++\rangle_x - |-+\rangle_x + |+-\rangle_x - |--\rangle_x \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|++\rangle_x - |--\rangle_x \right) \end{aligned}$$

On essaye a nouveau de le factoriser : : on cherche a, b, c ,d tel que :

$$|\psi\rangle = \left(a(|+\rangle_x + b|-\rangle_x \right) \otimes \left(c(|+\rangle_x + d|-\rangle_x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|++\rangle_x - |--\rangle_x \right)$$

Ce qui donne les 4 équations suivantes :

$$\begin{cases} ac = 1/\sqrt{2} \\ ad = 0 \\ bc = 0 \\ bd = -1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Ce système n'admettant pas de solution, l'état est donc toujours bien intriqué : en effet, si un état est intriqué sur une base il l'est sur toutes les bases. Cela est logique : l'intrication a un vrai sens physique et il serait malvenu que cette propriété dépende de la base choisie, qui n'est qu'un choix de représentation des états.

3. Calculer la probabilité de mesurer les 2 spin A et B dans l' états $|+\rangle$. Même question pour l'état $|-\rangle$.

La probabilité de trouver les 2 spins dans l'état $|+\rangle$ peut s'écrire avec l'aide du projecteur :

$$\hat{P}_{++} = |++\rangle\langle ++|$$

et on a :

$$\mathcal{P}(++) = \|\hat{P}_{++}|\psi\rangle\|^2 = \left\| |++\rangle\langle ++| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \right) \right\|^2 = 0$$

car :

$$\langle ++|+-\rangle = \langle +|+\rangle\langle +|-\rangle = 1 \times 0 = 0$$

De même pour $|-\rangle$.

4. Calculer la probabilité de trouver le spin A dans $|+\rangle$ et le spin B dans $|-\rangle$.

De même, la probabilité de trouver le spin A dans $|+\rangle$ et le spin B dans $|-\rangle$. peut s'écrire avec l'aide du projecteur :

$$\hat{P}_{+-} = |+-\rangle\langle +-|$$

et on a :

$$\mathcal{P}(+-) = \|\hat{P}_{+-}|\psi\rangle\|^2 = \left\| |+-\rangle\langle +-| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \right) \right\|^2 = \frac{1}{2}$$

5. Calculer la probabilité conditionnelle de trouver le spin B dans $|-\rangle$ sachant que le spin A est dans $|+\rangle$. Commenter.

Si on mesure le spin A dans $|+\rangle$, on sait que le système est dans l'état :

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_{A:+}|\psi\rangle}{\|\hat{P}_{A:+}|\psi\rangle\|}$$

avec

$$\hat{P}_{A:+} = |A:+\rangle\langle A:+| \otimes \hat{I}$$

donc on obtient :

$$|\psi'\rangle = |+-\rangle$$

La probabiliste de mesure le spin B dans $|-\rangle$ pour cet état est simplement :

$$\mathcal{P}(B:-) = \|\hat{P}_{B:-}|\psi\rangle\|^2 = \|\hat{I} \otimes |B:-\rangle\langle B:-||+-\rangle\|^2 = \||+-\rangle\|^2 = 1$$

On est donc certain de trouver le spin B dans $|-\rangle$ sachant que le spin A est dans $|+\rangle$ Les questions 5 et 6 correspondent donc a deux situations très différentes : on a une chance sur deux de trouver le spin B dans $|-\rangle$, mas si on mesure le spin A dans $|+\rangle$ cette probabilité passe a un.

6. Calculer la valeur moyenne dans l'état $|\psi\rangle$ des opérateurs $\hat{S}_{Az} \otimes \hat{I}_B + \hat{I}_A \otimes \hat{S}_{Bz}$, noté plus simplement $\hat{S}_{Az} + \hat{S}_{Bz}$, et $\hat{S}_{Az} \otimes \hat{S}_{Bz}$, noté $\hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bz}$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{Az} + \hat{S}_{Bz} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + - | + \langle - + |\right) \left(\hat{S}_{Az} + \hat{S}_{Bz}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + -\rangle + | - +\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle + - | + \langle - + |\right) \left(| + -\rangle - | - +\rangle - | + -\rangle + | - +\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bz} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + - | + \langle - + |\right) \left(\hat{S}_{Az} \otimes \hat{S}_{Bz}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + -\rangle + | - +\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle + - | + \langle - + |\right) \left(-| + -\rangle - | - +\rangle\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

---

7. On utilise deux appareils de Stern et Gerlach, orientés selon $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, pour mesurer les spins A et B lorsqu'ils sont dans l'état $|\psi\rangle$. Quelles sont les résultats possibles des mesures de corrélations ? On défini $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \hat{S}_{\mathbf{a}}(A)\hat{S}_{\mathbf{b}}(B)\rangle$ Montrer que $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Pour simplifier les calculs, on peut supposer que $\mathbf{a} = \mathbf{u}_z$

Les mesures de corrélation possible sont soit +1 soit -1.
On prend $\mathbf{a} = \mathbf{z}$ donc $\hat{S}_{\mathbf{a}}(A)$ s'écrit dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\hat{S}_{\mathbf{a}}(A) = \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a vu en PC7 que la mesure selon un vecteur $\mathbf{b}$ arbitraire caractérisé par des angles (θ, ϕ) peut s'écrire :

$$\hat{S}_{\mathbf{b}}(B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

On peut donc exprimer :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + - | + \langle - + |\right) \hat{S}_{\mathbf{a}}(A)\hat{S}_{\mathbf{b}}(B) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| + -\rangle + | - +\rangle\right)$$

On se concentre d'abord sur les deux termes de la partie droite :

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\mathbf{a}}(A)\hat{S}_{\mathbf{b}}(B)| + -\rangle &= \hat{S}_{\mathbf{a}}(A)|A : +\rangle \otimes \hat{S}_{\mathbf{b}}(B)|B : -\rangle \\
&= |A : +\rangle \otimes e^{-i\phi}\sin(\theta)|B : +\rangle - \cos(\theta)|B : -\rangle \\
&= e^{-i\phi}\sin(\theta)| + +\rangle - \cos(\theta)| + -\rangle
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\mathbf{a(A)}}\hat{S}_{\mathbf{b(B)}}| - +\rangle &= \hat{S}_{\mathbf{a}}(A)|A : -\rangle \otimes \hat{S}_{\mathbf{b}}(B)|B : +\rangle \\
&= -|A : -\rangle \otimes e^{i\phi}\sin(\theta)|B : -\rangle + \cos(\theta)|B : +\rangle \\
&= -e^{i\phi}\sin(\theta)| - -\rangle - \cos(\theta)| - +\rangle
\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{1}{2}\left(\langle +-| + \langle -+|\right)\left(e^{-i\phi}\sin(\theta)|++\rangle - \cos(\theta)|+-\rangle - e^{i\phi}\sin(\theta)|--\rangle - \cos(\theta)|-+\rangle\right) \\
&= -\cos(\theta) \\
&= -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

---

8. L'inégalité de Bell [1] part du principe qu'il existe une **variable cachée** qui explique les corrélations sans avoir recours à l'intrication, et dérive une limite aux corrélations du système. Ainsi, cette inégalité dit que pour quatre mesures selon les orientions $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ la fonction S doit toujours vérifier $|S| \leq 2$ avec :

$$S = E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}') - E(\mathbf{a}',\mathbf{b})$$

Montrer que pour

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b}',\mathbf{a}) = (\mathbf{a}',\mathbf{b}') = \pi/4$$

on viole l'inégalité de Bell : les corrélations observées ne peuvent donc être dûs à une variable cachée mais sont bien dûs au phénomène d'intrication [2]

On a :

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b}',\mathbf{a}) = (\mathbf{a}',\mathbf{b}') = \pi/4$$

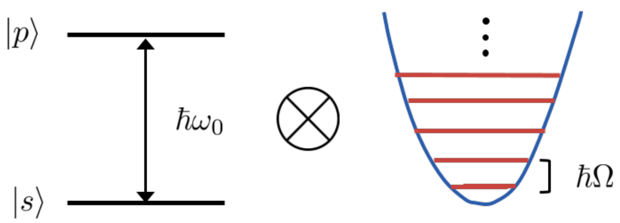
donc si on se place dans le plan xz (vu qu'on a vu dans la question précédente que le résultat ne dépend pas de ϕ), on prend :

- **a** selon **z** $(\theta = 0)$
- **b** avec $(\theta_b = \pi/4)$ car $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \pi/4$
- **b'** avec $(\theta_b' = -\pi/4)$ car $(\mathbf{b}',\mathbf{a}) = \pi/4$
- **a'** avec $(\theta_b' = -\pi/2)$ car $(\mathbf{a}',\mathbf{b}') = \pi/4$

Avec ces vecteurs, on peut donc calculer S :

$$
\begin{aligned}
S &= E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}') - E(\mathbf{a}',\mathbf{b}) \\
&= -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' - \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}' + \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} \\
&= 4\cos(\pi/4) = 2\sqrt{2} > 2
\end{aligned}
$$

On a donc bien une condition théorique qui viole les inégalités de Bell et qu'il serait donc pertinent de tester expérimentalement.



1. Voir les articles de John Bell sur Moodle, ainsi que le chapitre 14 du livre
2. C'est bien sur la démonstration expérimental dans le cas de figure décrit ici qui donne le résultat recherché.

2 Intrication entre états internes et externes d'un ion piégé

On considère un ion de masse m piégé dans un potentiel harmonique de fréquence Ω. L'hamiltonien associé au mouvement externe de l'ion est :

$$\hat{H}_{\text{ext}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2 = \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

avec $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base hilbertienne de l'espace $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ associé au mouvement de l'ion, formée par les états propres de $\hat{H}_{\text{ext}}$. D'après la PC5, on a $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

L'ion possède également un spin $1/2$ et on suppose que la région du piège est placée dans un champ magnétique B aligné selon l'axe Oz. L'hamiltonien décrivant le spin est $\hat{H}_{\text{spin}} = -\gamma B\hat{S}_z$, et on prend pour base de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_{\text{spin}}$ associé au spin les états propres de $\hat{S}_z$, $|+\rangle$ et $|-\rangle$. On pose $\omega_0 = -\gamma B > 0$.

1. Écrire une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ext}} \otimes \mathcal{E}_{\text{spin}}$ décrivant à la fois le mouvement externe et le spin de l'ion.

On peut exprimer la base sous la forme :

$$\{|n, \pm\}$$

2. Représenter les niveaux d'énergie de l'ion piégé dans le champ magnétique. On prendra $\omega_0 \gg \Omega$.

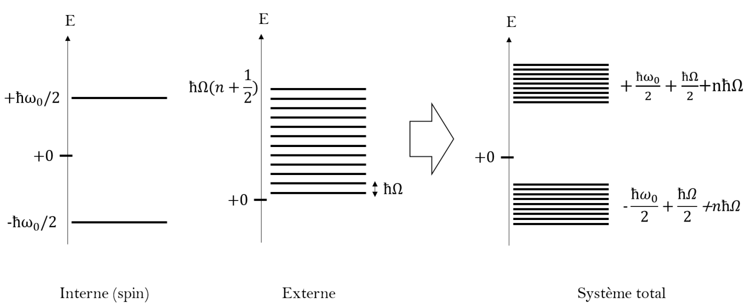
On additionne simplement les niveaux d'exergie des deux hamiltoniens : Pour l'état interne, le spin a pour valeurs propre

$$\pm\frac{\hbar}{2}$$

Pour l'état externe, on a un oscillateur harmonique dont les niveaux d'énergie sont :

$$E_n = \hbar\Omega(n + \frac{1}{2})$$

Comme $\omega_0 \gg \Omega$, on peut représenter cela comme deux niveau principaux très espacés correspondant au spin, avec pour chaque niveau de spin les états externes équidistants en énergie formant deux petites échelles :



3. On envoie une onde électromagnétique de fréquence ω sur l'ion. Le couplage de l'ion à l'onde est decrit par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{L}} = \frac{\hbar\omega_1}{2}\left(\hat{a}^+e^{-i\omega t} + \hat{a}\,e^{i\omega t}\right) \otimes \left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right) \ ,$$

avec ω_1 la fréquence de Rabi, proportionnelle à l'amplitude de l'onde. Calculer les éléments de matrice $\langle n', \pm|\hat{H}_\mathrm{L}|n, \pm\rangle$.

$$\langle n', \pm|\hat{H}_L|n, \pm\rangle = 0$$

En effet si on regarde la partie interne de l'hamiltonien :

$$\langle +|\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)|+\rangle = \langle +|-\rangle = 0 = \langle -|+\rangle = \langle -|\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)|-\rangle$$

Par contre on a :

$$\langle \pm|\left(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right)|\mp\rangle = \langle \pm|\pm\rangle = 1$$

Donc

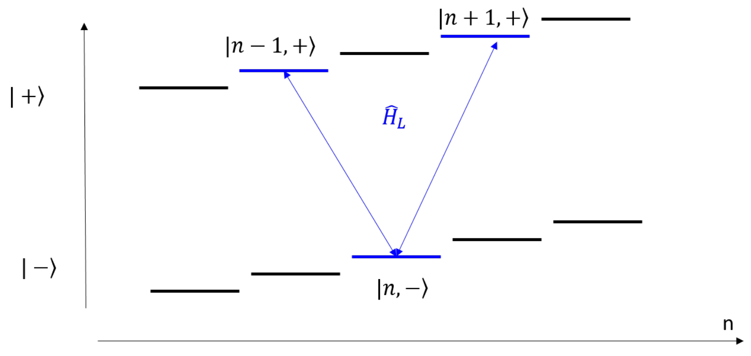
$$\begin{aligned}\langle n', +|\hat{H}_L|n, -\rangle = \langle n', -|\hat{H}_L|n, +\rangle &= \langle n', +|\frac{\hbar\omega_1}{2}\left(\hat{a}^+ e^{-i\omega t} + \hat{a}\, e^{i\omega t}\right)|n, -\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_1}{2}\left(e^{-i\omega t}\sqrt{n+1}\delta_{n'}^{n+1} + e^{i\omega t}\sqrt{n}\delta_{n'}^{n-1}\right)\end{aligned}$$

4. On prépare l'ion dans l'état $|n, -\rangle = |n\rangle \otimes |-\rangle$. Est-ce qu'il s'agit d'un état intriqué ?

C'est un état factorisé donc par définition non-intriqué

5. A quels états $\hat{H}_L$ couple-t-il cet état initial ?

Aux états $n+1$ t $n-1$ d'état de spin $+$



6. On prend $\omega = \omega_0 + \Omega$. Justifier que l'on peut se limiter au sous-espace de $\mathcal{E}$ défini par la base $\{|n, -\rangle, |n+1, +\rangle\}$.

La différence d'énergie entre les deux états $|n, -\rangle, |n+1, +\rangle\}$ est de :

$$\Delta E = \hbar(\omega_0 + \Omega)$$

Si le laser est à cette fréquence, alors comme nous l'avons vu en PC8 cette transition est résonante (et l'autre transition est hors résonance, avec $\Delta E = \hbar(\omega_0 - \Omega)$, donc $\delta = 2\hbar\Omega$) donc on peut se restreindre à ces 2 états

---

7. Écrire la restriction de la matrice de $\hat{H} = \hat{H}_{\text{ext}} + \hat{H}_{\text{spin}} + \hat{H}_L$ dans cette base.

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_{\text{ext}} + \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_L \\
&= \hbar\Omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \omega_0\hat{S}_z + \frac{\hbar\omega_1}{2}\left(\hat{a}^+ e^{-i\omega t} + \hat{a}\, e^{i\omega t}\right) \otimes \left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)
\end{aligned}$$

Pour déterminer la restriction de la matrice de $\hat{H} = \hat{H}_{\text{ext}} + \hat{H}_{\text{spin}} + \hat{H}_L$ dans la base $\{|n,-\rangle, |n+1,+\rangle\}$ on a donc 4 termes a calculer :

$$\langle n,-|\hat{H}|n,-\rangle = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_0}{2} + 0$$

$$\langle n+1,+|\hat{H}|n+1,+\rangle = \hbar\Omega\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_0}{2} + 0$$

$$\langle n+1,+|\hat{H}|n,-\rangle = 0 + 0 + \frac{\hbar\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{-i\omega t}$$

$$\langle n,-|\hat{H}|n+1,+\rangle = 0 + 0 + \frac{\hbar\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{i\omega t}$$

Donc la restriction de $\hat{H}$ sur cette base s'écrit :

$$\hat{H} = \hbar\begin{pmatrix} \Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\omega_0}{2} & \frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{-i\omega t} \\ \frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{i\omega t} & \Omega\left(n+1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

---

8. Montrer que cette matrice est suffisamment similaire à celle étudiée dans la PC8 pour que l'on puisse en réutiliser les résultats.

$$\hat{H} = \hbar\begin{pmatrix} \Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\omega_0}{2} & \frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{-i\omega t} \\ \frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}e^{i\omega t} & \Omega\left(n+1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} = \hbar\Omega\left(n+1\right)\hat{I} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Omega - \omega_0 & \omega_1\sqrt{n+1}e^{-i\omega t} \\ \omega_1\sqrt{n+1}e^{i\omega t} & \Omega + \omega_0 \end{pmatrix}$$

L'hamiltonien étudié en PC8 s'écrivait :

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

Il a donc la même forme si l'on pose $\omega_0' = \Omega - \omega_0$, et que l'on additionne l'hamiltonien diagonal $\hbar\Omega\left(n+1\right)\hat{I}$ dont la seule contribution lors de la résolution est d'ajouter un terme de phase commun aux deux états, donc que l'on peut négliger dans notre restriction a deux niveaux.

---

9. En reprenant les résultats sur l'oscillation de Rabi vus en PC8, écrire l'état quantique de l'ion dans l'état initial $|n, -\rangle$ après une durée d'application du laser t, en fonction de ω_1 et n.

La résolution s'effectue de la même façon que dans la PC8, on se place dans le référentiel tournant a la vitesse ωt, dans lequel notre matrice s'écrit :

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega - \Omega - \omega_0 & \omega_1\sqrt{n+1} \\ \omega_1\sqrt{n+1} & \Omega + \omega_0 - \omega \end{pmatrix}$$

Donc à la résonance, avec $\omega = \Omega + \omega_0$ on a simplement :

$$\hat{\tilde{H}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1\sqrt{n+1} \\ \omega_1\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Et l'état va donc évoluer en suivant un oscillation de Rabi, donc avec :

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}t\right)|n, -\rangle - i\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\sqrt{n+1}t\right)|n+1, +\rangle$$

---

10. Montrer que le laser permet d'intriquer les états externes et internes de l'ion.

Si on prend $t = \pi/(2\omega_1\sqrt{n+1})$ alors le système est dans l'état :

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n, -\rangle - i|n+1, +\rangle\right)$$

qui est un état intriqué interne-externe

---

3 (Facultatif :) Intrication de deux particules dans un double puits

3.1 Rappel : Particule unique dans un double puits symétrique

On considère une particule plongée dans un potentiel 1D en forme de double puits symétrique, constitué de deux puits semi-infinis couplés par une barrière tunnel. On suppose qu'en l'absence de couplage chaque puits contient un seul état lié, notés respectivement $|g\rangle$ et $|d\rangle$ (état localisé dans les puits de gauche et droite respectivement). L'espace de Hilbert du problème est donc de dimension 2 et $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ en forme une base que l'on supposera orthogonale ($\langle g|d\rangle = 0$). En pratique, la particule peut passer d'un puits à l'autre par effet tunnel à travers la barrière de potentiel. On appelle E_0 l'énergie des états $|g\rangle$ et $|d\rangle$ en l'absence de couplage. Et on décrit l'effet tunnel par l'hamiltonien de couplage $\hat{H}_C = -\Gamma(|g\rangle\langle d| + |d\rangle\langle g|)$, avec $\Gamma > 0$ l'énergie de couplage tunnel.

1. Ecrire l'hamiltonien $\hat{H}$ décrivant ce système sous la forme d'une somme d'opérateurs "ket-bra". En déduire la matrice correspondante dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$:

$$\hat{H} = E_0|g\rangle\langle g| + E_0|d\rangle\langle d| - \Gamma(|g\rangle\langle d| + |d\rangle\langle g|)$$

donc dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$:

$$\boxed{\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -\Gamma \\ -\Gamma & E_0 \end{pmatrix}}$$

---

2. Trouver les énergies propres E_- et E_+ de $\hat{H}$ (avec $E_- < E_+$).

Les énergies propres sont les valeurs propres de $\hat{H}$ et sont donc les racines de son polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = Det(\hat{H} - \lambda\hat{I})$$

donc on a :

$$P(\lambda) = (E_0 - \lambda)^2 - \Gamma^2 = E_0^2 + \lambda^2 - 2E_0\lambda - \Gamma^2$$

Donc

$$\Delta = 4E_0^2 - 4(E_0^2 - \Gamma^2) = 4\Gamma^2$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$\lambda_\pm = \frac{-(-2E_0) \pm 2\Gamma}{2}$$

et les énergies propres s'écrivent :

$$\boxed{E_+ = E_0 + \Gamma \;\;\&\;\; E_- = E_0 - \Gamma}$$

3. Trouver les états propres $|-\rangle$ et $|+\rangle$ de $\hat{H}$ associés à E_- et E_+.

On a

$$\hat{H}|+\rangle = E_+|+\rangle \text{ et } \hat{H}|-\rangle = E_-|-\rangle$$

Sur la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$, on écrit les vecteur $|-\rangle$ et $|+\rangle$ sous la forme :

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}$$

Les équations précédente s'écrivent alors :

$$\begin{pmatrix} E_0 & -\Gamma \\ -\Gamma & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} = E_+ \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_0 & -\Gamma \\ -\Gamma & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix} = E_- \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}$$

Donc on a deux systèmes de 2 équations :

$$\begin{cases} E_0 a_+ - \Gamma b_+ = (E_0 + \Gamma) a_+ \\ E_0 b_+ - \Gamma a_+ = (E_0 + \Gamma) b_+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_0 a_- - \Gamma b_- = (E_0 - \Gamma) a_- \\ E_0 b_- - \Gamma a_- = (E_0 - \Gamma) b_- \end{cases}$$

D'ou :

$$a_+ = -b_+ \;\;\&\;\; a_- = b_-$$

Que l'on normalise facilement pour donner :

$$\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4. Comment s'écrit $\hat{H}$ dans la base $\{|-\rangle, |+\rangle\}$?

Sur cette base, on a

$$\hat{H} = E_+|+\rangle\langle+| + E_-|-\rangle\langle-|$$

ou sous forme matricielle :

$$\boxed{\hat{H} = \begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix}}$$

Dans cette base, $\hat{H}$ est donc diagonal.

3.2 Deux particules dans un double puits

On considère deux particules a et b, placés dans un potentiel 1D en forme de double puits symétrique. Ce système composite est donc décrit par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_a \otimes \hat{I}_b + \hat{I}_a \otimes \hat{H}_b \quad \text{avec} \quad \hat{H}_i = E_-|i:-\rangle\langle i:-| + E_+|i:+\rangle\langle i:+| \quad \text{et} \quad i = a,\ b$$

Dans la suite, on adoptera les notations légères $|a:\psi_1\rangle \otimes |b:\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle$

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}$ du système ? Donner deux exemples de base orthonormée de $\mathcal{E}$.

L'espace de Hilbert $\mathcal{E} = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b$ du système est de dimension $2 \times 2 = 4$
Une base canonique est :

$$\{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}$$

Mais comme on vient de le voir dans l'exercice précédent, $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ consituent aussi des bases de $\mathcal{E}_{a/b}$, donc une autre base de $\mathcal{E}$ est :

$$\{|g,g\rangle, |g,d\rangle, |d,g\rangle, |d,d\rangle\}$$

---

2. Exprimer $\hat{I}_a$ et $\hat{I}_b$ sous forme d'une somme d'opérateurs "ket-bra".

$$\hat{I}_i = |i:+\rangle\langle i:+| + |i:-\rangle\langle i:-|$$

En effet, de cette manière pour tout vecteur $|\psi_i\rangle = a|i:+\rangle + b|i:-\rangle$ on a :

$$\begin{aligned}
\hat{I}_i|\psi_i\rangle &= |i:+\rangle\langle i:+|\,(a|i:+\rangle + b|i:-\rangle) + |i:-\rangle\langle i:-|\,(a|i:+\rangle + b|i:-\rangle) \\
&= |i:+\rangle(a \times 1 + b \times 0) + |i:-\rangle(a \times 0 + b \times 1) \\
&= a|i:+\rangle + b|i:-\rangle \\
&= |\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

---

3. Déterminer les états et énergies propres de $\hat{H}$ et discuter de leur dégénérescence.

$$\begin{cases} \hat{H}|+,+\rangle = E_+|+,+\rangle + E_+|+,+\rangle = 2E_+|+,+\rangle \\ \hat{H}|-,-\rangle = E_-|-,-\rangle + E_-|-,-\rangle = 2E_-|-,-\rangle \\ \hat{H}|+,-\rangle = E_+|+,-\rangle + E_-|+,-\rangle = 2E_0|+,-\rangle \\ \hat{H}|-,+\rangle = E_-|-,+\rangle + E_+|-,+\rangle = 2E_0|-,+\rangle \end{cases}$$

Donc il y a 2 états non-dégénérés d'énergie $2E_+$ et $2E_-$, et 2 états dégénérés d'énergie $2E_0$.

A l'instant $t = 0$, on place la particule a dans le puits de gauche et la particule b dans le puits de droite. On prépare donc le système dans l'état : $|\psi(0)\rangle = |g, d\rangle$.

4. $|\psi(0)\rangle$ est-il un état factorisable ou un état intriqué ?

$$|\psi(0)\rangle = |g, d\rangle = |a : g\rangle \otimes |b : d\rangle$$

C'est donc un état factorisable.

5. Exprimer $|\psi(0)\rangle$ dans la base $\{|-,-\rangle, |-,+\rangle, |+,-\rangle, |+,+\rangle\}$ des états propres de $\hat{H}$.

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle = |g, d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|a : +\rangle + |a : -\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|b : -\rangle - |b : +\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|+,-\rangle - |+,+\rangle + |-,-\rangle - |-,+\rangle) \end{aligned}$$

6. En déduire l'état $|\psi(t)\rangle$ à un instant t ultérieur.

Comme l'Hamiltonien du système ne dépend pas du temps, on a directement :

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-i2E_-t/\hbar}|-,-\rangle - e^{-i2E_+t/\hbar}|+,+\rangle + e^{-i2E_0t/\hbar}|+,-\rangle - e^{-i2E_0t/\hbar}|-,+\rangle \right)}$$

A l'instant t, on mesure l'énergie totale du système.

7. Quelles valeurs peut-on obtenir et avec quelles probabilités ?

Le système a 3 énergies propres $2E_+$, $2E_-$ et $2E_0$ qui sont donc les 3 mesures d'énergie possible. $2E_+$ et $2E_-$ sont des valeurs non-dégeneérés, donc les probabilités associées sont simplement :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(2E_+) = \frac{1}{4} \\ \mathcal{P}(2E_-) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On peut donc en conclure que la valeur propre dégeneéré $2E_0$ est associée à la probabilité :

$$\mathcal{P}(2E_0) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi calculer cette probabilité directement :
le projecteur associé à l'énergie $2E_0$ est :

$$\hat{P}_{2E_0} = |+,-\rangle\langle+,-| + |-,+\rangle\langle-,+|$$

donc :

$$\mathcal{P}(2E_0) = ||\hat{P}_{2E_0}|\psi(t)\rangle||^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

---

8. On suppose qu'on mesure une énergie totale $E = 2E_0$. Dans quel état $|\psi(t^+)\rangle$ est projeté le système ?

On vient de déterminer le projecteur associé à la mesure d'énergie $2E_0$. Le système juste aprés la mesure est donc dans létat :

$$|\psi(t^+)\rangle = \frac{\hat{P}_{2E_0}|\psi(t)\rangle}{||\hat{P}_{2E_0}|\psi(t)\rangle||^2} = \frac{1}{2}\left(|+,-\rangle - |-,+\rangle\right)\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle - |-,+\rangle\right)$$

---

9. $|\psi(t^+)\rangle$ est-il un état factorisable ou un état intriqué ?

$|\psi(t^+)\rangle$ n'est pas factorisable, c'est donc un état intriqué

On dispose d'un appareil permettant de mesurer la disposition (gauche ou droite) de chacune des particules. On cherche ainsi à discuter des corrélations entre les particules a et b, dans le cas de l'état factorisable $|\psi(0)\rangle$ et dans celui de l'état intriqué $|\psi(t^+)\rangle$.

10. Etat factorisable $|\psi(0)\rangle$
    (a) Quelle est la probabilité jointe $\mathcal{P}(a:g,\ b:d)$ d'observer la particule a à gauche et la particule b à droite ?

Le projecteur associé a la mesure de la particule a à gauche et la particule b à droite est :

$$\hat{P}_{g,d} = |g,d\rangle\langle g,d|$$

Donc la probabilité jointe $\mathcal{P}(a:g,\ b:d)$ d'observer la particule a à gauche et la particule b à droite est :

$$\mathcal{P}(a:g,\ b:d) = ||g,d\rangle\langle g,d|\psi(0)\rangle||^2 = ||g,d\rangle\langle g,d|g,d\rangle||^2 = ||g,d\rangle||^2 = 1$$

    (b) Quelle est la probabilité individuelle $\mathcal{P}(a:g)$ d'observer la particule a à gauche sans avoir connaissance de la position de la particule b ? De même, que vaut $\mathcal{P}(a:d)$? Commenter.

Le projecteur associé à la mesure de la particule a à gauches est :

$$\hat{P}_{a:g} = |a:g\rangle\langle a:g| \otimes \hat{I}_b$$

Donc :

$$\mathcal{P}(a:g) = ||\left(|a:g\rangle\langle a:g| \otimes \hat{I}_b\right)|g,d\rangle||^2 = ||\left(|a:g\rangle\langle a:g| \otimes \hat{I}_b\right)|a:g\rangle \otimes |b:d\rangle||^2 = 1$$

et de même :

$$\mathcal{P}(b:d) = ||\left(\hat{I}_a \otimes |b:d\rangle\langle b:d|\right)|a:g\rangle \otimes |b:d\rangle||^2 = 1$$

---

11. Etat intriqué $|\psi(t^+)\rangle$

(a) Exprimer $|\psi(t^+)\rangle$ dans la base $\{|g,g\rangle, |g,d\rangle, |d,g\rangle, |d,d\rangle\}$.

On a calculé $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$ dans la question 3 du premier exercice :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |d\rangle) \;\;\&\;\; |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |d\rangle)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
|\psi(t^+)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a:+\rangle \otimes |b:-\rangle - |a:-\rangle \otimes |b:+\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|a:g\rangle - |a:d\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|b:g\rangle + |b:d\rangle)\right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|a:g\rangle + |a:d\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|b:g\rangle - |b:d\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|g,g\rangle + |g,d\rangle - |d,g\rangle - |d,d\rangle - |g,g\rangle + |g,d\rangle - |d,g\rangle + |d,d\rangle) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2|g,d\rangle - 2|d,g\rangle)
\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\boxed{|\psi(t^+)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g,d\rangle - |d,g\rangle)}$$

(b) Quelle est la probabilité jointe $\mathcal{P}(a:g,\ b:d)$ d'observer la particule a à gauche et la particule b à droite ? De même, que vaut $\mathcal{P}(a:d,\ b:g)$?

Le projecteur associé à la mesure de la particule a à gauche et la particule b à droite est :

$$\hat{P}_{g,d} = |g,d\rangle\langle g,d|$$

Donc :

$$\mathcal{P}(a:g, b:d) = ||\hat{P}_{g,d}|\psi(t^+)\rangle||^2 = |||g,d\rangle\langle g,d|\frac{1}{\sqrt{2}}(|g,d\rangle - |d,g\rangle)||^2 = \frac{1}{2}$$

et de même :

$$\boxed{\mathcal{P}(a:d, b:g) = \frac{1}{2}}$$

(c) Quelle est la probabilité individuelle $\mathcal{P}(a:g)$ d'observer la particule a à gauche sans avoir connaissance de la position de la particule b ? De même, que vaut $\mathcal{P}(a:d)$? Commenter.

Le projecteur associé à la mesure de la particule a à gauche est le même que dans la question 10.b :

$$\hat{P}_{a:g} = |a:g\rangle\langle a:g| \otimes \hat{I}_b$$

Donc la probabilité $\mathcal{P}(a:g)$ d'observer la particule a à gauche sans avoir connaissance de la position de la particule b est de

$$\boxed{\mathcal{P}(a:g) = \frac{1}{2}}$$

De même, on a

$$\boxed{\mathcal{P}(a:d) = \frac{1}{2}}$$

Les résultats d'une mesure individuelle sont donc aléatoires. Plus généralement, dans un état intriqué, la mesure d'une seule des deux particules donne des résultats aléatoires.

(d) Quelle est la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}(a:g \mid b:d)$ d'observer la particule a à gauche, sachant qu'on a mesuré au préalable la particule b à droite ? De même, que valent $\mathcal{P}(a:d \mid b:d)$, $\mathcal{P}(a:g \mid b:g)$ et $\mathcal{P}(a:d \mid b:g)$? Commenter.

Si l'on vient on a mesuré la particule b à droite, le système est dans l'état :

$$|\psi\rangle = |g,d\rangle$$

La probabilité conditionnelle $\mathcal{P}(a:g \mid b:d)$ d'observer la particule a à gauche sachant b à droite est donc :

$$\boxed{\mathcal{P}(a:g \mid b:d) = 1}$$

De même, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}(a:d \mid b:d) = 0} \; \boxed{\mathcal{P}(a:g \mid b:g) = 0} \; , \; \boxed{\mathcal{P}(a:d \mid b:g) = 1}$$

Le résultat d'une mesure conditionnel dans un système parfaitement intriqué est certain. Plus généralement, les résultat de deux mesures sur des état intriqués sont trés fortement corrélées.
