MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 9 — Transformée de Fourier (corrections)

Exercice 102. (Applications directes du cours)

(a) Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. On rappelle que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Si $x \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\widehat{f \star g}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} f(u-t)g(t)e^{-ix\cdot u}dtdu = \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(u)g(t)e^{-ix\cdot(u+t)}dxdt = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x).$$

L'application du théorème de Fubini est ici justifiée par le fait que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{C})$.

(b) Soient $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y)dy$ est définie presque partout, de carré sommable et que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|f \star g\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}.$$

Indication : montrer que la fonction $r : (x, y, z) \mapsto \overline{g}(x-y)\overline{f}(y)g(x-z)f(z)$ est intégrable.

Par le théorème de Tonelli, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |r(x,y,z)|dxdydz = \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |f(y)f(z)| \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||g(x-z)|dx\right) dydz.$$

La majoration $\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||g(x-z)|dx \leqslant \|g\|_{L^2}^2$ et l'égalité $\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |f(y)f(z)|dydz = \|f\|_{L^1}^2$, montrent que $r \in L^1(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |r(x,y,z)|dxdydz &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||f(y)|dy\right)\left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-z)||f(z)|dz\right) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||f(y)|dy\right)^2 dx\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||f(y)|dy$ est fini pour presque tout x. Cela entraîne que $y \mapsto g(x-y)f(y)$ est intégrable pour presque tout x. Ainsi, la fonction $f \star g$ est bien définie presque partout.

On a aussi d'après le calcul précédent

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} |(f \star g)(x)|^2 dx &\leqslant \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||f(y)|dy\right)^2 dx \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |r(x,y,z)|dxdydz \leqslant \|f\|_{L^1}^2\|g\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

ce qui entraîne $f \star g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ et la majoration $\|f \star g\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}$.

Exercice 103. (Support et convolution) Soit $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On appelle *support* de f, noté $\operatorname{supp} f$, l'adhérence de l'ouvert $\{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \neq 0\}$.

Soient $f, g : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ deux fonctions continues et intégrables sur $\mathbf{R}^N$. Montrer que

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Sous les hypothèses de l'exercice, on rappelle d'après les résultats du cours que

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

définit une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}^N$. Soit $x \in \mathbf{R}^N$. Si $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ alors $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$ et donc $(f \star g)(x) = 0$. Ainsi, la fonction $f \star g$ est nulle sur $(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)^{\complement}$, ce qui implique que $\{x \in \mathbf{R}^N : (f \star g)(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Par passage à l'adhérence, on obtient bien $\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Remarque : Ce résultat se généralise au cas de fonctions dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ (avec une définition adaptée du support).

Exercice 104. (Transformées de Fourier classiques) Calculer les transformées de Fourier des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ suivantes :

(a) $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

On calcule

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ix\xi}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ix\xi}dx.$$

Par changement de variable pour le second terme, cela donne :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1-i\xi)}dx = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

(b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

On observe que la fonction g est égale à la moitié de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ obtenue dans la question précédente. On écrit donc la formule d'inversion pour f :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2g(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{-i(-x)\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\widehat{g}(-x).$$

En conclusion : $\widehat{g}(x) = \pi e^{-|x|}$.

(c) Pour $\alpha > 0$, $G_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$.

On va montrer que $\widehat{G_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$. On observe d'abord que la fonction G_α satisfait une équation différentielle, à savoir :

$$G_\alpha'(x) = -2\alpha x G_\alpha(x).$$

Vu les décroissances à l'infini de ces fonctions, on peut prendre la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\widehat{G_\alpha'}(\xi) = -2\alpha\widehat{xG_\alpha(x)}(\xi).$$

On utilise une propriété de la transformation de Fourier vue en cours : lien entre dérivation et multiplication par une variable. Ceci donne en simplifiant par i, une autre équation différentielle, cette fois pour $\widehat{G_\alpha}$:

$$\xi\widehat{G_\alpha}(\xi) = -2\alpha[\widehat{G_\alpha}]'(\xi),$$

que l'on réécrit : $[\widehat{G_\alpha}]'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha}\widehat{G_\alpha}(\xi)$. En intégrant cette équation différentielle, on trouve : $\widehat{G_\alpha}(\xi) = \widehat{G_\alpha}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$ avec $\widehat{G_\alpha}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ par changement de variable.

Remarque : la famille des fonctions gaussiennes est caractérisée par une équation différentielle d'un certain type, et ce type d'équations différentielles est préservé par passage à la transformée de Fourier (car la transformation de Fourier échange – à des constantes près – multiplication par une variable et dérivation). Ainsi la transformation de Fourier préserve globalement la famille des fonctions gaussiennes.

(d) $h : x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

On remarque que $h(x) = -H'(x)$ où $H(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi : $\widehat{h}(\xi) = \mathcal{F}(-H')(\xi) = -i\xi\widehat{H}(\xi)$. La fonction H est une fonction gaussienne. D'après la question précédente, $H = G_{\frac{1}{2}}$, ce qui donne : $\widehat{H}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ et $\widehat{h}(\xi) = -\sqrt{2\pi}i\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Exercice 105. (Résolution d'équations fonctionnelles)

(a) Pour tout $a > 0$, on pose pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$G_a(x) := \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2a}}.$$

Calculer $G_a \star G_b$ pour tous $a, b > 0$ (utiliser la transformation de Fourier).

Comme $G_a(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{|x_1|^2}{2a}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{|x_N|^2}{2a}}\right)$, par l'exercice précédent et le théorème de Fubini, on trouve

$$\widehat{G_a}(x) = e^{-\frac{a}{2}|\xi_1|^2}\cdots e^{-\frac{a}{2}|\xi_N|^2} = e^{-\frac{a}{2}|\xi|^2}.$$

Ainsi $\widehat{G_a \star G_b} = \widehat{G_a}\widehat{G_b} = \widehat{G_{a+b}}$ et on en déduit que $G_a \star G_b = G_{a+b}$.

(b) Peut-on trouver $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $f \star g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$?

S'il existe une telle fonction f, alors on a $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{g}$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$. En prenant par exemple $g = G_1$, on voit que l'on doit avoir $\widehat{f} = 1$. Ceci est impossible car d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, $\widehat{f}(x)$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

(c) Peut-on trouver $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (dans $L^1(\mathbf{R}^N)$) et $f \star g = 0$?

Soient φ et ψ deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ non nulles à support compact et dont les supports sont disjoints. On pose

$$f(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{R}^N}\varphi(t)e^{\mathrm{i}x\cdot t}dt \quad \text{et} \quad g(x) = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{R}^N}\psi(t)e^{\mathrm{i}x\cdot t}dt.$$

Comme φ et ψ sont $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts, toutes leurs dérivées partielles sont dans L^1, et d'après le cours, pour tout n, on a $\lim_{|x|\to+\infty}|x|^n f(x) = 0$, de même pour g. Ainsi les fonctions f et g sont dans L^1, et par la formule d'inversion de Fourier, on a $\widehat{f} = \varphi$ et $\widehat{g} = \psi$. Ainsi $\widehat{f \star g} = \varphi\psi = 0$ et donc $f \star g = 0$. Comme φ et ψ sont non nulles, f et g le sont aussi.

(d) Résoudre dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ l'équation $f \star f = f$, d'inconnue f.

Si $f \star f = f$, alors $[\hat{f}]^2 = \hat{f}$. Ceci implique que la fonction $\hat{f}$ ne prend que les valeurs 0 et 1. Comme par ailleurs $\hat{f}$ est continue et que $\mathbf{R}^N$ est connexe, on a $\hat{f} = 0$ ou $\hat{f} = 1$. Le cas $\hat{f} = 1$ est exclus d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, on a donc $\hat{f} = 0$ et la formule d'inversion de Fourier implique $f = 0$.

Exercice 106. (Convolution dans L^2) Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. Montrer que la fonction $f \star g$ est définie sur $\mathbf{R}$, continue, bornée, tend vers 0 à l'infini et vérifie de plus :

$$\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Indication : On pourra utiliser un argument de densité.

Pour $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$, comme $|f(y)g(x-y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(y)|^2 + \frac{1}{2}|g(x-y)|^2 \in L^1_y(\mathbf{R}^N)$, $(f \star g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a la borne $\|f \star g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |(f \star g)(x)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$.

Il nous reste à montrer que la fonction $f \star g$ est continue et tend vers 0 à l'infini.

Commençons par le cas où g est continue et à support compact. Soit $R > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}^N$, $|y| > R$ implique $g(y) = 0$. Alors

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} g(y)f(x-y)dy = \int_{|y|<R} g(y)f(x-y)dy.$$

Pour $x > 2R$ et $|y| < R$, on a $|x - y| > \frac{1}{2}|x|$. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Scwharz, pour $|x| > 2R$,

$$|(f \star g)(x)| \leqslant \|g\|_{L^2} \left(\int_{|z| > \frac{1}{2}|x|} |f(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{a\to\infty} \int_{|z|>a} |f(z)|^2 dz = 0$, ce qui montre bien $\lim_{|x|\to\infty} (f \star g)(x) = 0$.

Pour la continuité en $x_0 \in \mathbf{R}^N$, on remarque que si $|x - x_0| < 1$ et $|y - x_0| > R + 1$, $g(x - y) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, 1)$, $f \star g(x) = \int_{|y-x_0|<R+1} g(x-y)f(y)dy$. La continuité découle alors du théorème de continuité sous l'intégrale, avec une domination par $y \to \| g\|_\infty |f(y)|$ intégrable sur $\{ |x_0 - y| < R + 1\}$.

On considère maintenant le cas général $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$. D'après le cours, il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$, continues à support compact qui convergent vers g dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Alors, la suite $(f \star g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f \star g$: en effet, par l'inégalité précédente, on a

$$\|f \star g - f \star g_n\|_\infty = \|f \star (g - g_n)\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^2}\|g - g_n\|_{L^2}.$$

Comme chacune des fonctions $f \star g_n$ est continue et converge vers 0 à l'infini, il en est de même de leur limite uniforme $f \star g$.

Exercice 107. (Approximation de l'identité) Soit $h \in L^1(\mathbf{R}^N)$ avec $\int_{\mathbf{R}^N} h(x)dx = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $h_n(x) = n^N h(nx)$. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ alors la suite $(f \star h_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^1(\mathbf{R}^N)$.

Indication : commencer par le cas où f est une fonction continue et à support compact et utiliser ensuite un argument de densité.

Comme suggéré par l'énoncé, on commence par le cas où f est une fonction continue et telle que pour tout $x \in \mathbf{R}^N$ tel que $|x| > R$, $f(x) = 0$. On remarque par changement de variable :

$$(f \star h_n)(x) = n^N \int f(x-y)h(ny)dy = \int f(x - \tfrac{t}{n})h(t)dt.$$

Comme $f(x) = \int f(x)h(y)dy$, on a

$$(f \star h_n)(x) - f(x) = \int \left[f(x - \tfrac{t}{n}) - f(x)\right] h(t)dt.$$

On majore après avoir utilisé le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned}\|f \star h_n\|_{L^1} &\leqslant \int\int |h(t)| \left|f(x - \tfrac{t}{n}) - f(x)\right| dxdt \\ &\leqslant \int |h(t)| \int_{|x|>R+1} \left|f(x - \tfrac{t}{n}) - f(x)\right| dxdt \\ &+ \int |h(t)| \int_{|x|<R+1} \left|f(x - \tfrac{t}{n}) - f(x)\right| dxdt = (1) + (2).\end{aligned}$$

Dans le terme (1), la valeur prise par f est nulle si $|\frac{t}{n}| < 1$; on a donc

$$(1) \leqslant \int \int_{|t|>n} \left|f(x - \tfrac{t}{n}) - f(x)\right| |h(t)|dtdx \leqslant \|f\|_\infty \, \lambda(B(0, R+1)) \int_{|t|>n} |h(t)dt.$$

La dernière intégrale converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ par le théorème de convergence dominée.

Dans (2), la fonction à intégrer est majorée par $2\|f\|_\infty|h(t)|$ qui est intégrable sur $B(0, R+1) \times \mathbf{R}^N$. De plus pour presque tout (x,t), cette fonction converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Donc, par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty}(2) = 0$.

Considérons le cas général $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par un résultat de densité du cours, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f \star h_n - f\|_{L^1} \leqslant \|(f-g) \star h_n\|_{L^1} + \|g \star h_n - g\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1} \leqslant 2\varepsilon + \|g \star h_n - g\|_{L^1}.$$

En prenant n assez grand le terme $\|g \star h_n - g\|_{L^1}$ peut être rendu inférieur à ε, ce qui montre bien le résultat.

Exercice 108. (Rappels de topologie)

(a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que si A est compact et B est fermé dans E, alors $A + B$ est fermé.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $A + B$ telle que $\lim_\infty u_n = \ell \in E$. Il existe alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ suites dans A et B, respectivement, telles que $u_n = a_n + b_n$. La partie A étant compacte, il existe une sous suite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$, notée $(a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers un élément $a \in A$. Comme la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in E$, on obtient que la suite $(b_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell - a \in E$. La partie B étant fermée, la limite de cette suite appartient à B, c'est-à-dire $\ell - a = b \in B$. Ainsi, $\ell = a + b$, ce qui prouve $\ell \in A + B$ et donc $A + B$ est fermé par le critère séquentiel.

(b) Donner un exemple de deux parties fermées de $\mathbf{R}^2$ (muni de la topologie habituelle) dont la somme n'est pas fermée.

On définit $A = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$ et $B = \{(x, y) : xy = 1,\ x > 0\}$. Ce sont bien deux parties fermées de $\mathbf{R}^2$. Cependant $A + B = \{(x, y) : y > 0\}$, donc $A + B$ n'est pas une partie fermée de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 109. (Existence de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact)

(a) Montrer que la fonction ψ définie par $\psi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $\psi(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Construire une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice non corrigé.

Exercice 110. (Espace de Schwartz) On définit $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$ l'espace des fonctions ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, c'est-à-dire vérifiant

$$\text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^N, \qquad \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

où l'on a adopté les notations suivantes $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$ et $\partial^\beta \phi = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_N}^{\beta_N} \phi$.

Montrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, la transformée de Fourier de f est bien définie et appartient également à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$.

Ce résultat est une conséquence directe des résultats du cours. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^N$, $x^\alpha f \in L^1$ donne que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $i^{|\alpha|+|\beta|} \xi^\beta \partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}(\partial^\beta (x^\alpha f))$ entraîne $\partial^\alpha \widehat{f} = o(|\xi|^{-p})$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. Ainsi pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, la transformée de Fourier de f est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Exercice 111. (Transformée de Fourier et symétrie sphérique) Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, on note $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(a) Soit $E(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|}$, montrer que $E \in L^1(\mathbf{R}^3)$.

On calcule en coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbf{R}^3} |E(x)| dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r}}{r} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r} dr < +\infty.$$

(b) On dit que $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{C}$ est à symétrie sphérique si la valeur de $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, ou de manière équivalente si pour toute rotation R de $\mathbf{R}^3$, $f(Rx) = f(x)$. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^3)$ est à symétrie sphérique, alors $\widehat{f}$ est aussi à symétrie sphérique.

Soit R une rotation (i.e. $R^t R = \mathrm{Id}$) et donc $|\det R| = 1$. On calcule par changement de variable $x = Ry$:

$$\widehat{f}(R\xi) = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(x \cdot R\xi)} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(Ry \cdot R\xi)} f(Ry) |\det R| dy = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(y \cdot \xi)} f(y) dy = \widehat{f}(\xi).$$

(c) Calculer $\widehat{E}$.

Indication : faire le calcul en coordonnées sphériques en choisissant $\xi = ae_3$.

Par symétrie sphérique, il suffit de faire le calcul pour $\xi = ae_3$. Alors en coordonnées sphériques

$$x = \left| \begin{array}{l} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{array} \right. ,$$

on calcule $\xi \cdot x = ar\cos\theta$ d'où :

$$\begin{aligned} \widehat{E}(\xi) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{-r}}{r} e^{-iar\cos\theta} \sin\theta d\theta\, r^2 dr d\phi = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-r}\left[\frac{e^{-iar\cos\theta}}{iar}\right]_0^{\pi} dr \\ &= -\frac{2i\pi}{a}\int_0^{+\infty} e^{-r}\left[e^{iar} - e^{-iar}\right] dr = -\frac{2i\pi}{a}\left\{\frac{1}{1-ia} - \frac{1}{1+ia}\right\} = \frac{4\pi}{1+a^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{4\pi}{1+|\xi|^2}.$$

Exercice 112. (Densité des translatées dans L^2) Soit f une fonction de $L^2(\mathbf{R}^N)$. Pour chaque x dans $\mathbf{R}^N$, on note τ_x la fonction translation : $\tau_x(y) = y - x$. Montrer que l'espace vectoriel $V = \mathrm{Vect}(f \circ \tau_x)_{x\in\mathbf{R}^N}$ engendré par les translatées de f est dense dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ si et seulement si l'ensemble $\{\xi \in \mathbf{R}^N : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure nulle.

Indication : étudier l'orthogonal dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ de $\mathcal{F}(V)$.

Exercice non corrigé.

Exercice 113. (*Densité des polynômes dans l'espace L^2 avec une mesure gaussienne) On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}dx)$ muni de la forme hermitienne

$$(f \mid g)_H = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,e^{-x^2}dx.$$

Le but de l'exercice est de montrer que les fonctions polynômes forment un sous-espace vectoriel dense de H. Pour $f \in H$, on pose :

$$F(z) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt.$$

(a) Montrer que la fonction F est bien définie et admet un développement en série entière convergeant sur $\mathbf{C}$, à savoir

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{z^j}{j!}\int_{\mathbf{R}} f(t)t^j e^{-t^2}dt\right).$$

On commence par vérifier que l'intégrale qui définit $F(z)$ a un sens ; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (seconde inégalité), on a :

$$|F(z)| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{zt-\frac{t^2}{2}}|dt \leqslant (\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2}dt)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_{\mathbf{R}} |e^{zt}|^2\,e^{-t^2}dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Le premier facteur du majorant est fini car $f \in H$ et le second l'est car on a :

$$\int_{\mathbf{R}} |e^{zt}|^2 \, e^{-t^2} dt = \int_{\mathbf{R}} e^{2\mathrm{Re}(z)t-t^2} dt = \int_{\mathbf{R}} e^{-\left(t-\mathrm{Re}(z)\right)^2} e^{\mathrm{Re}(z)^2} dt = \sqrt{\pi} e^{\mathrm{Re}(z)^2}.$$

On va maintenant combiner le théorème de convergence dominée avec le développement en série entière $e^{zt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n t^n}{n!}$. La condition de convergence ponctuelle presque partout est automatiquement satisfaite, précisément parce qu'on part d'un développement en série entière. Pour la condition de majoration des fonctions sommes partielles par une fonction intégrable, on écrit pour $N \in \mathbf{N}$:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} f(t) t^n e^{-t^2} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{|zt|^n}{n!} |f(t)| e^{-t^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|zt|^n}{n!} |f(t)| e^{-t^2} = |f(t)| e^{|z||t|} e^{-t^2}.$$

Par un calcul analogue au calcul précédent (i.e. l'inégalité de Cauchy-Schwartz en « répartissant » l'exponentielle : $e^{-t^2} = e^{\frac{-t^2}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}}$ sur chaque facteur), on voit que le majorant est bien une fonction intégrable. Finalement, on peut intervertir somme et intégrale et obtenir la formule proposée.

(b) On suppose que f est orthogonale pour le produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)_H$ à l'espace engendré par les fonctions polynômes. Montrer que $F \equiv 0$.

Le fait que $F(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ provient directement de la formule de la question précédente.

(c) En utilisant que $F(ix) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, montrer que $f = 0$ et conclure.

La question précédente implique comme cas particulier l'annulation de F sur les nombres complexes imaginaires purs. Explicitement on a : $F(-ix) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-t^2} e^{-itx} dx$, ce qui suggère de voir $F(-ix)$ comme la valeur en x de la transformée de Fourier de $g : u \mapsto f(u) e^{-u^2}$. Pour justifier cela, il suffit de justifier que g appartient à $L^1(\mathbf{R})$, ce qu'on peut voir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz : en écrivant $g(u) = f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ et en utilisant le fait que $f \in H$ (voir la question (a)). Ainsi $\widehat{g}$ est nulle sur $\mathbf{R}$, et par la formule d'inversion de Fourier on en déduit que g, et donc f, est nulle presque partout dès que f est orthogonale à toutes les fonctions polynomiales pour le produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)_H$.
Ceci revient à dire que l'orthogonal pour le produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)_H$ du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$; par le critère de densité du cours, le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2} dx)$.

Exercice 114. (*Équation de la chaleur dans le demi-espace) On considère le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

dans le demi espace $\mathbf{R}^N_+ = \{x \in \mathbf{R}^N : x_N > 0\}$, avec donnée initiale $u|_{t=0} = g \in L^2(\mathbf{R}^N_+)$ et avec la condition de Dirichlet au bord $u = 0$ sur le bord de $\mathbf{R}^N_+$. En prolongeant g sur $\mathbf{R}^N$ par imparité, donner l'expression d'une solution u du problème.

Exercice 115. (*Résolution d'une équation impliquant le bilaplacien via la transformée de Fourier) L'objectif des premières questions de l'exercice est de calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$F : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{4}{4 + x^4}.$$

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$K : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-(1+i)|x|}.$$

La fonction K proposée est intégrable sur $\mathbf{R}$ et sa transformée de Fourier est définie par

$$\begin{aligned}\widehat{K}(\xi) &= \int e^{-ix\xi} e^{-(1+i)|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(1+i-i\xi)} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i+i\xi)} dx \\ &= \left[\frac{e^{x(1+i-i\xi)}}{1+i-i\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-x(1+i+i\xi)}}{1+i+i\xi}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1+i-i\xi} + \frac{1}{1+i+i\xi} = \frac{2(1+i)}{\xi^2+2i}.\end{aligned}$$

(b) Calculer la partie réelle de la transformée de Fourier de la fonction $(1+i)K$.

On a par linéarité

$$\mathcal{F}\left((1+i)K\right)(\xi) = (1+i)\widehat{K}(\xi) = \frac{2(1+i)^2}{\xi^2+2i} = \frac{4i(\xi^2-2i)}{\xi^4+4} = \frac{8+4i\xi^2}{4+\xi^4}.$$

La partie réelle de la transformée de Fourier de $(1+i)K$ est donc la fonction $\frac{8}{4+\xi^4}$. Comme la fonction K est paire, cette fonction est égale à la transformée de Fourier de la partie réelle de la fonction $(1+i)K$. Ainsi, on a obtenu la relation suivante

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}(\cos|x| + \sin|x|)\right) = \frac{8}{4+\xi^4}.$$

(c) Déduire de la question précédente la transformée de Fourier de la fonction F.

En utilisant la formule d'inversion de Fourier en dimension 1, comme les fonctions considérées sont paires et intégrables sur $\mathbf{R}$, on trouve

$$2\pi e^{-|\xi|}(\cos|\xi| + \sin|\xi|) = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{8}{4+x^4}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{8}{4+x^4}\right).$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction F est la fonction $\xi \mapsto \pi e^{-|\xi|}(\cos|\xi| + \sin|\xi|)$.

(d) L'objectif de cette question est de résoudre l'équation

$$\frac{1}{4}\frac{d^4U}{dx^4} + U = V, \quad x \in \mathbf{R},$$

où $V \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ est une fonction donnée. Donner l'expression d'une solution U de ce problème sous la forme d'un produit de convolution $H \star V$ où H est une fonction à préciser.

On utilise la transformée de Fourier pour déterminer l'expression d'une solution U. Comme $\mathcal{F}(U^{(4)}) = |\xi|^4\widehat{U}$, l'équation se réécrit sous la forme $(|\xi|^4+4)\widehat{U} = 4\widehat{V}$. C'est-à-dire $\widehat{U} = F(\xi)\widehat{V}$. On appelle H la fonction définie par $H(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}(\cos|x| + \sin|x|)$. On sait d'après la question précédente que $\widehat{H} = F$. Ainsi, $\widehat{U} = \widehat{H}\widehat{V}$. Comme $V \in L^2$ et $H \in L^1$, on a $\mathcal{F}(H \star V) = \widehat{H}\widehat{V}$. On pose donc $U = H \star V$. Comme $V \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, U est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et la fonction U est solution classique du problème proposé.

On admet que pour une fonction $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{C}$, intégrable sur $\mathbf{R}^3$ et à symétrie radiale, c'est-à-dire de la forme $g(x) = G(|x|)$, où G est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, la transformée de Fourier de g est également à symétrie radiale et vérifie $\widehat{g}(\xi) = \psi(|\xi|)$, où la fonction ψ est définie de la façon suivante, pour $\rho > 0$,

$$\psi(\rho) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{+\infty} r \sin(\rho r) G(r) dr.$$

(Voir aussi l'exercice 8.)

(e) On suppose de plus que G est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on l'étend à $\mathbf{R}$ par parité, c'est-à-dire que l'on pose $G(-r) = G(r)$ pour $r > 0$. Justifier la formule suivante

$$\psi(\rho) = -\frac{2\pi}{\rho} \frac{d\widehat{G}}{d\rho}(\rho).$$

Comme la fonction G est intégrable sur $\mathbf{R}$ et paire, sa transformée de Fourier est donnée par la formule

$$\widehat{G}(\rho) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(\rho r) G(r) dr.$$

Comme $|\cos(\rho r) G(r)| \leqslant |G(r)|$, et $\int_0^{+\infty} |G| < +\infty$, la fonction $(\rho, r) \mapsto \cos(\rho r) G(r)$ est intégrable en r pour tout ρ. De plus, la fonction $(\rho, r) \mapsto \cos(\rho r) G(r)$ est dérivable en ρ, et sa dérivée partielle par rapport à ρ est $(\rho, r) \mapsto -r \sin(\rho r) G(r)$. Finalement, on a la majoration suivante $|r \sin(\rho r) G(r)| \leqslant r|G(r)|$. Comme la fonction g est intégrable sur $\mathbf{R}^3$, on a $\int |G(r)| r^2 dr < +\infty$ et la fonction $r \mapsto rG(r)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe somme, on obtient que $\widehat{G}$ est dérivable et

$$\frac{d\widehat{G}}{d\rho}(\rho) = -2 \int_0^{+\infty} r \sin(\rho r) G(r) dr.$$

(f) Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f : x \in \mathbf{R}^3 \mapsto \frac{4}{4 + |x|^4}.$$

D'après la question précédente, la transformée de Fourier de f est une fonction à symétrie radiale vérifiant $\widehat{f}(\xi) = \psi(|\xi|)$ où la fonction ψ est telle que

$$\psi(\rho) = -\frac{2\pi}{\rho} \frac{d\widehat{F}}{d\rho}(\rho).$$

Or $\widehat{F}(\rho) = \pi e^{-\rho}(\cos\rho + \sin\rho)$. Par un calcul direct, on trouve $\psi(\rho) = \frac{4\pi^2}{\rho} e^{-\rho} \sin\rho$ et on en déduit

$$\widehat{f}(\xi) = 4\pi^2 \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} e^{-|\xi|}.$$

Par la formule de la transformée de Fourier inverse en dimension 3, on obtient aussi

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\sin|x|}{|x|} e^{-|x|}\right) = \frac{4}{4 + |\xi|^4}.$$

(g) On considère le problème suivant (on note $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$)

$$\frac{1}{4}\Delta^2 u + u = v, \quad x \in \mathbf{R}^3,$$

pour une fonction $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ donnée. Donner l'expression d'une solution u de ce problème sous la forme $h \star v$ où h est une fonction à préciser.

D'après la question précédente, en utilisant la transformation de Fourier, on trouve $u = h \star v$ avec $h(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin|x|}{|x|}e^{-|x|}$.