MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 1 – Espaces métriques (corrections)

Exercice 1 (Définitions de distance et de fermé)**.** (a) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les applications $\delta_1 : (x, y) \in E \times E \to \delta_1(x, y) = \log(1 + d(x, y))$ et $\delta_2 : (x, y) \in E \times E \to \delta_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ sont des distances sur E.
Indication : on pourra au préalable vérifier les inégalités suivantes : pour tout $a, b \geq 0$, $\log(1 + a + b) \leq \log(1 + a) + \log(1 + b)$ et $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Il s'agit de conséquences de la propriété plus générale suivante : *si $\phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une fonction strictement croissante telle que $\phi(0) = 0$ et vérifiant*

$$\phi(a + b) \leq \phi(a) + \phi(b),$$

alors $\phi(\delta)$ est une distance sur E. En effet, si $\phi(d(x, y)) = 0$, alors $d(x, y) = 0$ et $x = y$. Ensuite, $\phi(d(x, y)) = \phi(d(y, x)$ car $d(x, y) = d(y, x)$ et enfin, comme on a supposé que ϕ est croissante et sous-additive, on a bien

$$\phi(d(x, y)) \leq \phi(d(x, z) + d(z, y)) \leq \phi(d(x, z)) + \phi(d(z, y)).$$

Il suffit donc de vérifier les propriétés voulues pour $\phi_1(a) = \log(1 + a)$ et $\phi_2(a) = \sqrt{a}$. On vérifie seulement la propriété de sous-additivité : pour $a, b \geq 0$,

$$\log(1 + a + b) \leq \log((1 + a)(1 + b)) = \log(1 + a) \log(1 + b),$$

et (comme $\sqrt{1 + r} - 1 - \sqrt{r} \leq 0$ pour tout $r \geq 0$), $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(b) Sur $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble suivant est-il fermé

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \{1, 2, \ldots\} \right\} ?$$

La réponse est négative : la suite $x_n = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ appartient à A, mais converge vers $1 \notin A$, ce qui contredit la caractérisation séquentielle des fermés pour A.

Exercice 2 (Prolongement des égalités)**.** Soient f et g deux applications continues d'une espace métrique (E, d) dans $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle.

(a) Montrer que l'ensemble Z des points x de E tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de E.

(b) Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout x d'un sous-ensemble B dense dans E, alors $f = g$ sur E.

Pour la première question, il suffit que remarquer que la fonction $h = f - g$ est continue est que l'ensemble Z est l'image réciproque par h du singleton $\{0\}$ (un fermé de $\mathbf{R}$). Ensuite, si on note F l'ensemble des points x tels que $f(x) = g(x)$, on a bien $B \subset F$. Comme F est un fermé, on a $\bar{E} = \bar{B} \subset \bar{F} = F$. Donc, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Exercice 3 (Forme linéaire continue sur un espace de fonctions)**.** On considère $C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme. Montrer que l'application $L : f \in C([0, 1]) \to f(0) \in (\mathbf{R}, | \cdot |)$ est une forme linéaire continue.

La linéarité de L est immédiate. Pour la continuité, il suffit d'utiliser la proposition du cours et la majoration évidente : $|L(f)| = |f(0)| \leq \sup_{[0,1]} |f| = \|f\|_\infty$.

Exercice 4 (Normes de matrices)**.** Sur $M_N(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on définit l'application $\|\cdot\|$ par :

$$\|A\| := \max_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \quad \text{où } A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}.$$

Il est intéressant de remarquer que cette application attache à toute matrice le maximum des normes ℓ^1 de ses vecteurs lignes.

(a) Vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $M_N(\mathbf{K})$. Prouver que pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

Tout d'abord, la fonction sur les matrices proposée est bien une fonction (positivement) homogène et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Si une matrice A satisfait $\|A\| = 0$, alors par définition $\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| = 0$ pour tout i, ce qui implique que $a_{ij} = 0$ pour tous les indices i et j. Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire : on se donne $A = (A_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ et $B = (B_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$; alors

$$\|A + B\| = \max_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}|.$$

Mais à indices i, j fixés, on a : $|A_{ij} + B_{ij}| \leqslant |A_{ij}| + |B_{ij}|$, et donc à indice i fixé on a :

$$\sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| + |B_{ij}| = \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| + \sum_{j=1}^{N} |B_{ij}|.$$

Par définition de $\|\cdot\|$, on a : $\sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \leqslant \|A\|$ et $\sum_{j=1}^{N} |B_{ij}| \leqslant \|B\|$, de sorte que

$$\sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

pour chaque indice i. On obtient finalement l'inégalité triangulaire en prenant le maximum des membres de gauche pour i entre 1 et N. Ainsi $\|\cdot\|$ est bien une norme.

L'inégalité supplémentaire à vérifier s'appelle *sous-multiplicativité ;* justifions-la. Notons $AB = C = (C_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant N}$. Par définition du produit matriciel, à indice i fixé, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} |C_{ij}| = \sum_{j=1}^{N} \Big|\sum_{k=1}^{N} A_{ik}B_{kj}\Big| \leqslant \sum_{j,k=1}^{N} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}|\Big)|A_{ik}|.$$

Puisque $\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}| \leqslant \|B\|$, et $\sum_{k=1}^{N} |A_{ik}| \leqslant \|A\|$, cela donne :

$$\sum_{j=1}^{N} |C_{ij}| \leqslant \|B\| \cdot \Big(\sum_{k=1}^{N} |A_{ik}|\Big) \leqslant \|A\| \cdot \|B\|,$$

et finalement l'inégalité cherchée en prenant le maximum sur les indices i.

(b) Prouver que la norme $\|\cdot\|$ ci-dessus est subordonnée à la norme sup $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$.

Avec les notations qui précèdent, et par définition de l'action d'une matrice sur un vecteur et de la norme sup, on a : $\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |\sum_{j=1}^N A_{ij}x_j|$. On veut majorer le plus finement possible cette quantité pour tout x tel que $\|x\|_\infty = 1$.

D'abord, à indice i fixé, on a : $|\sum_{j=1}^N A_{ij}x_j| \leqslant \sum_{j=1}^N |A_{ij}|$, et en passant au maximum sur i, on obtient que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|A\|$ pour tout $\|x\|_\infty = 1$.

Si on trouve x tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $\|Ax\|_\infty = \|A\|$, on aura démontré l'égalité de normes cherchée. Par définition de $\|A\|$ comme maximum sur un ensemble fini, il existe un indice i_0 tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^N |A_{i_0 j}|$. Pour chaque indice j, il existe un nombre z_j de module 1 tel que $A_{i_0 j} z_j = |A_{i_0 j}|$, et il suffit alors de prendre le vecteur $x = (z_j) \in \mathbf{K}^N$.

(c) Retrouver le résultat de la question (a).

Quelle que soit la norme $|\cdot|$ sur l'espace vectoriel sous-jacent $\mathbf{K}^N$, la norme $\|\cdot\|$ sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à celle-ci vérifie l'inégalité recherchée (sous-multiplicativité). Rappelons la raison de ce fait. Soient A et B des matrices dans $M_N(\mathbf{K})$. Par définition d'une norme subordonnée, on a successivement, pour tout x :

$$|(AB)x| = |A(Bx)| \leqslant \|A\| \cdot |Bx| \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|.$$

En prenant la borne supérieure sur les vecteurs x de norme 1, on justifie bien la sous-multiplicativité de toute norme subordonnée.

(d) Quelle est la norme sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbf{K}^N$, définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$?

On a
$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^N |\sum_{j=1}^N A_{ij}x_j| \leqslant \sum_{i=1}^N (\sum_{j=1}^N |A_{ij}| \cdot |x_j|) = \sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^N |A_{ij}|)|x_j|.$$

Il existe un indice j_0 tel que

$$\sum_{i=1}^N |A_{ij_0}| = \max_j \sum_{i=1}^N |A_{ij}|.$$

En notant M ce maximum et en poursuivant le calcul précédent, on voit que $\|Ax\|_1 \leqslant M\|x\|_1$. Il reste à choisir le vecteur e_{j_0} de la base canonique de $\mathbf{K}^N$: il satisfait $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ et $\|Ae_{j_0}\|_1 = M$ puisque Ae_{j_0} est le j_0-ème vecteur colonne de A. Ceci montre que la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$ est l'application $A \mapsto \max_j \sum_{i=1}^N |A_{ij}|$.

Exercice 5 (Application distance à une partie non vide)**.** Soient (X, d) un espace métrique et Y une partie non vide de X.

(a) Prouver que l'application $d_Y : X \to \mathbf{R}$ définie par :

$$d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y),$$

est 1-lipschitzienne.

Soient $x, x' \in X$. Par l'inégalité triangulaire, on a : $d(x, y) \leqslant d(x, x') + d(x', y)$ pour tout $y \in Y$. Par définition de d_Y, on a aussi : $d_Y(x) \leqslant d(x, y)$ pour tout $y \in Y$. Ceci implique que $d_Y(x) - d(x, x') \leqslant d(x', y)$ pour tout $y \in Y$. Le minorant de cette inégalité ne dépend pas de $y \in Y$, donc en passant à la borne inférieure on obtient finalement : $d_Y(x) - d(x, x') \leqslant d_Y(x')$ pour tous $x, x' \in X$. En intervertissant x et x', on prouve ainsi que l'application d_Y est 1-lipschitzienne.

(b) Prouver que x appartient à l'adhérence $\overline{Y}$ de Y si, et seulement si, $d_Y(x) = 0$.

Par la description séquentielle de l'adhérence, on sait que $\overline{Y}$ est l'ensemble des limites de suites (convergentes) de points de Y.

Supposons que $x \in X$ vérifie $d_Y(x) = 0$. Par définition de d_Y comme borne inférieure, cela implique que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $y_n \in Y$ tel que $d(x, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$; on a ainsi trouvé une suite de points de Y qui converge vers x, et donc $x \in \overline{Y}$.

Réciproquement, pour $x \in \overline{Y}$ on peut écrire $x = \lim_{n\to\infty} y_n$ avec $y_n \in Y$, et donc $d_Y(y_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par la continuité de d_Y prouvée dans la question précédente, on en déduit que : $d_Y(x) = \lim_{n\to\infty} d_Y(y_n) = 0$.

Remarque : on a prouvé que $\overline{Y} = (d_Y)^{-1}(\{0\})$.

(c) Prouver que les fermés de X sont les ensembles de zéros des fonctions continues sur X à valeurs réelles.

Dire que Y est fermé revient à dire que $\overline{Y} = Y$, donc d'après la remarque qui précède, si Y est fermé on peut le voir comme le lieu des zéros de la fonction d_Y, qui est continue par (a). Réciproquement, le singleton $\{0\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$ muni de (la topologie de) la valeur absolue. Ainsi, d'après la caractérisation topologique de la continuité, l'image réciproque de $\{0\}$ par toute fonction continue est un fermé.

Exercice 6 (Comparaison de quelques normes sur l'espace des fonctions continues ou C^1).

(a) Sur l'espace $C([0,1],\mathbf{R})$, montrer que les applications suivantes sont des normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Conséquence directe des définitions.

(b) Les deux normes ci-dessus sont-elles équivalentes ?

On observe que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$. En revanche, il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout $f \in C([0,1],\mathbf{R})$. Par contradiction, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout entier $k \geq 1$, définissons les fonctions f_k par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0,\frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1],\mathbf{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C$ ce qui est contradictoire pour k grand. Les deux normes ne sont pas équivalentes.

(c) Sur l'espace $C^1([0,1],\mathbf{R})$, établir quelques comparaisons parmi les normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty,\ N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f\|_1,\ N_3(f) = \|f'\|_1 + \|f\|_\infty,\ N_4(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

On montre facilement

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_3 \leqslant 2N_4.$$

En particulier, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes. En revanche, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_4 \leqslant CN_3$. En effet, pour la fonction f_k de $C^1([0,1],\mathbf{R})$ définie par $f_k(x) = x^k$, on calcule $N_4(f_k) = k+1$ et $N_3(f_k) = 2$. Comme $k \in \mathbf{N}$ peut être pris arbitrairement grand, on a bien montré le résultat.

Il n'existe pas non plus de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_1$. En effet, pour la fonction g_k de $C^1([0,1],\mathbf{R})$ définie par $g_k(x) = \sin(\pi kx)$, on calcule $N_1(g_k) = 1$ (pour $k \geq 1$) et $N_3(g_k) = 2k+1$.

Exercice 7 (De façon générale, l'union infinie de fermés n'est pas fermée. Toutefois, ce résultat est vrai moyennant une hypothèse supplémentaire (cas de **R**)). Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on se donne un fermé F_n de $\mathbf{R}$ inclus dans $\mathbf{R} \setminus [-u_n, u_n]$. Montrer que $\cup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est fermé dans $\mathbf{R}$.

Exercice non corrigé.

Exercice 8 (Variante plus générale de l'exercice 2). Soient f et g deux applications continues d'un espace métrique (E, d) dans un autre (F, d'). Démontrer que l'ensemble A des points x tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E.

Exercice non corrigé. Indication : montrer que le complémentaire est un ouvert.

Exercice 9 (Exercice un peu abstrait de topologie des espaces métriques. La question (b) est pertinente en théorie de l'intégration). Soit F un fermé quelconque d'un espace métrique (X, d). À chaque entier positif n, on fait correspondre l'ouvert O_n défini par $O_n = \cup_{x\in F} B_{1/n}(x)$, où $B_{1/n}(x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon $1/n$.

(a) Montrer que $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} O_n$. Démontrer l'inclusion réciproque. On montrera que si $y \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$ alors, pour chaque entier n, il existe $x_n \in F$ tel que $x_n \in B_{1/n}(y)$.

Il est évident que pour tout n, O_n contient F, donc $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} O_n$. Soit $y \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$, alors $y \in O_n$ pour tout n et donc $y \in \cup_{x\in F} B_{1/n}(x)$. Il existe donc au moins un $x \in F$ tel que $y \in B_{1/n}(x)$; on note x_n l'un de ces éléments. Ainsi $x_n \in B_{1/n}(y)$, ce qui donne $y \in \overline{F} = F$, car F est fermé. En résumé, on a bien montré $F = \cap_{n=1}^{\infty} O_n$.

(b) En déduire que tout fermé d'un espace métrique est l'intersection dénombrable d'une famille d'ouverts et que tout ouvert est l'union dénombrable d'une famille de fermés.

La propriété pour un fermé résulte de la formule précédente et pour un ouvert, la propriété désirée est obtenue en passant aux complémentaires.

Exercice 10 (Utilisation de la partie entière pour un exercice de topologie de **R**)**.** Let but de l'exercice est de montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$.

(a) Remarquer que D est stable par addition et multiplication.

Soient $d = p+q\sqrt{2}$ et $d' = p'+q'\sqrt{2}$ deux éléments de D. Alors $d+d' = (p+p')+(q+q')\sqrt{2}$ est un élément de D et $dd' = (pp'+2qq')+(pq'+p'q)\sqrt{2}$ aussi.

(b) Posons $u = \sqrt{2}-1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b-a$, puis $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$. En déduire le résultat.

On a $u < 1$ donc u^k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour $\varepsilon = b-a$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $k \geqslant n$ on a $u^k < \varepsilon = b-a$. En particulier, $u^n < b-a$. Pour la suite, si l'on cherchait un réel alors $r = \frac{a}{u^n}+1$ conviendrait, mais on cherche un entier. On pose donc $m = \lfloor \frac{a}{u^n} \rfloor + 1$ (la notation $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). Alors, $m-1 \leqslant \frac{a}{u^n} < m$. L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. L'inégalité de gauche s'écrit aussi $mu^n - u^n \leqslant a$ soit $mu^n \leqslant a+u^n < a+b-a = b$ donc $a < mu^n < b$.

Déduisons de cela que D est dense dans $\mathbf{R}$: pour tout intervalle $[a,b]$, $a < b$ il existe m, n des entiers tels que $mu^n \in [a,b]$. Or mu^n est dans D car $m, u \in D$.

Exercice 11 (Exercice de topologie de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$)**.** (a) Rappeler les définitions des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble borné non vide de nombres réels. Soient A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbf{R}$. Calculer ou comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$, les nombres suivants (s'ils existent) :

$$\sup(A+B), \quad \sup(A\cup B), \quad \sup(A\cap B), \quad \inf(A\cup B), \quad \inf(A\cap B).$$

Pour A une partie non vide de $\mathbf{R}$, un *majorant* de A est un réel $M \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$. Si A est une partie non vide et majorée, alors par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants (l'existence de ce plus petit majorant est l'une des propriétés fondamentales de $\mathbf{R}$).

Les propriétés suivantes sont vérifiées : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$; $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$; si $A\cap B \neq \varnothing$, $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$; $\inf(A\cup B) = \min(\inf A, \inf B)$; si $A\cap B \neq \varnothing$, $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$;

Prouvons les deux premières égalités.

— Pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$. Ainsi, $a+b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$ et comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, alors $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$. Réciproquement, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que cette suite converge vers $\sup A$, de même il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$, la suite $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc la borne supérieure de $A+B$ est plus grande que $\sup A + \sup B$, soit $\sup(A+B) \geqslant \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.

— Si $P \subset Q$ alors $\sup P \leqslant \sup Q$: en effet $\sup Q$ est un majorant de Q donc de P (par l'inclusion $P \subset Q$), donc le plus petit des majorants, $\sup P$, pour P est plus petit que le majorant particulier $\sup Q$. Appliquons ceci à $A \subset A\cup B$ et pour $B \subset A\cup B$. On obtient $\sup A \leqslant \sup(A\cup B)$ et $\sup B \leqslant \sup(A\cup B)$. On vient de prouver $\sup(A\cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$. Pour l'autre inégalité, posons $M = \max(\sup A, \sup B)$. Pour $x \in A\cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leqslant \sup A \leqslant M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leqslant \sup B \leqslant M$; donc quelque soit $x \in A\cup B$, $x \leqslant M$ donc M est un majorant de $A\cup B$, donc $\sup(A\cup B) \leqslant M = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$. Dans $\mathbf{R}$, déterminer $d(0, \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$ et $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q})$. Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x,y,z)$ est un point de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire (a,b,c).

Pour montrer $d(0, \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}) = 0$, il suffit de regarder des éléments du type $\frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.
Le fait que $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q}) = 0$ est une conséquence de la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$. On peut aussi considérer la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), n \in \mathbf{N}$, qui est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.
On a $d^2(M, \mathcal{D}) = x^2 + y^2 + z^2 - (ax+by+cz)^2$.

(c) Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} \|a-b\|$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$ et B une asymptote.

Réponse : $d(A,B) = 0$.

(d) On définit $\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} \|a-b\|$, le *diamètre* de A. Que valent les diamètres $\operatorname{diam}(]0,1[\cap\mathbf{Q})$ et $\operatorname{diam}([0,1]\cap\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$?

Réponse : $\operatorname{diam}(]0,1[\cap\mathbf{Q}) = \operatorname{diam}([0,1]\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})) = 1$.

Exercice 12 (*Application de l'exercice 5)**.** (a) Soient $A, B \subset X$. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

On considère la fonction $\phi : X \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(x) = d_A(x) - d_B(x)$. Comme différence de fonctions continues, ϕ est une fonction continue. On a $\phi(x) < 0$ pour tout $x \in A$ par l'hypothèse $A \cap \overline{B} = \varnothing$; de la même façon, on voit que $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in B$. Les ensembles $U = \phi^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $V = \phi^{-1}(]0, +\infty[)$ sont des ouverts (disjoints) comme images réciproques d'ouverts (disjoints) de $\mathbf{R}$ par une fonction continue, et on vient de voir que $A \subset U$ et $B \subset V$.

(b) (Lemme d'Urysohn) Soient A et B deux fermés disjoints de X. Prouver qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.

On peut prendre la fonction $x \mapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

Exercice 13 (*Exercice de topologie dans un espace de suites)**.** On note ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, et C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, munis de la métrique d définie par $d(x,y) = \sup_{n\geqslant 0} |x_n - y_n|$ où l'on note $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 0}$.

(a) Montrer que C_0 est fermé dans ℓ^∞.

Une suite de ℓ^∞ est notée $(x^p)_{p\in\mathbf{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$. Soit (x^p) une suite de C_0 qui converge vers $x \in \ell^\infty$. Il faut montrer $x \in C_0$, c'est-à-dire que $x = (x(0), x(1), \ldots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x^p \to x$, il existe P tel que si $p \geqslant P$, alors $d(x^p, x) < \varepsilon$. Par la définition de d on a pour $p \geqslant P$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, comme la suite x^P converge vers 0, il existe N tel que si $n \geqslant N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, pour $n \geqslant N$:

$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leqslant |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc la suite x converge vers 0.

(b) Montrer que l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang est dense dans C_0 mais n'est pas dense dans ℓ^∞.

Notons Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour

$$y = (y(0), y(1), y(2), \ldots) \in C_0,$$

définissons la suite $y^0 = (y(0), 0, 0, \ldots)$, $y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \ldots)$,...

$$y^p = (y(0), \ldots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \ldots).$$

La suite (y^p) est bien une suite d'éléments de Z. De plus $d(y^p, y) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n>p} |y(n)|$. La suite $y(n)$ tendant vers 0, $d(y^p, y)$ converge vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Ceci montre la densité de Z dans C_0.

En revanche, toute suite de $\ell^\infty - C_0$ (par exemple, $x = (1, 1, 1, \ldots)$) n'est limite d'aucune suite d'éléments de C_0 car C_0 est fermé. Donc, ni C_0, ni Z ne sont denses dans ℓ^∞.

Exercice 14 (*Un deuxième exercice de topologie dans un espace de suites.). Soit C_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère la forme linéaire $\varphi : C_0 \to \mathbf{R}$ définie par

$$(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \varphi((u_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

(a) L'application φ est-elle continue ?

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de C_0 ; on a :

$$|\varphi((u_n)_{n\geqslant 0})| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \|(u_n)_{n\geqslant 0}\|_\infty \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|(u_n)_{n\geqslant 0}\|_\infty,$$

ce qui montre que φ est continue de norme inférieure à 1.

(b) Calculer sa norme.

Pour chaque entier $k \leqslant 1$, soit v^k la suite dont les termes valent tous 1 jusqu'au rang k, puis 0 à partir du rang $k+1$. Par définition de la norme sup, on a $\|v^k\|_\infty = 1$ pour tout k. On calcule que $\varphi(v^k) = \sum_{n=0}^{k} 2^{-(n+1)}$, ce qui permet de voir que le sup des $|\varphi((u_n)_{n\geqslant 0})|$ sur les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\|(u_n)_{n\geqslant 0}\|_\infty \leqslant 1$, c'est-à-dire la norme de la forme linéaire continue φ est 1.

(c) Cette norme est-elle atteinte sur C_0 ?

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que $\|(u_n)_{n\geqslant 0}\|_\infty \leqslant 1$: on a $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n. Pour toute telle suite, la série de terme général $u_n 2^{-(n+1)}$ converge et :

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

l'égalité du terme central avec le minorant (resp. le majorant) ayant lieu seulement pour u_n constant égal à -1 (resp. 1), ce qui correspond à des cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'appartient pas à C_0. Ainsi la norme de la forme linéaire continue φ sur C_0 n'est pas atteinte.

Exercice 15 (*Exercice subtil sur les formes linéaires "positives"). Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$, et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit φ une forme linéaire sur E qui prend des valeurs positives sur toute fonction dont les valeurs sont toutes positives. Prouver que φ est une forme linéaire continue.

Par linéarité de φ et l'hypothèse de positivité, on voit que $f \leqslant g$ implique $\varphi(f) \leqslant \varphi(g)$. Ensuite, comme f et $-f$ sont majorées par $|f|$, on a : $|\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|)$ pour toute $f \in E$. Maintenant, si f est une fonction de E non identiquement nulle, on a $\|f\|_\infty \neq 0$ et $\frac{|f|}{\|f\|_\infty}$ est aussi une fonction de E ; en outre : $\frac{|f|}{\|f\|_\infty} \leqslant \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1. Ainsi :

$$\Big|\varphi\Big(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\Big)\Big| = \varphi\Big(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\Big) \leqslant \varphi(\mathbf{1}),$$

ce qui prouve bien que φ est une forme linéaire continue, de norme $\varphi(\mathbf{1})$.