PHY361 - PC5 : Formalisme de Dirac

Voir dans le livre : Chapitre 5 et 7
Objectifs : L'oscillateur harmonique comme première application du formalisme de Dirac en utilisant les $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$.

Résumé de l'Amphi 5 et Définitions

Formalisme de Dirac

- Espace des états $\mathcal{E}_\mathcal{H}$: espace de Hilbert
  ($\mathcal{E}_\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour les fonctions d'ondes vues jusqu'à présent)
- Produit scalaire [a] sur $\mathcal{E}_\mathcal{H}$: $\langle\psi_2|\psi_1\rangle \in \mathbb{C} \to$ linéaire en ψ_1 ; antilinéaire en ψ_2 ;
  $$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx$$
  pour les fonctions d'onde de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ donc
  $$(\langle\psi_2|\psi_1\rangle)^* = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$$
- $\mathcal{E}_\mathcal{H}^*$ est l'ensemble des formes linéaires [b] : à tout élément $|\psi_1\rangle$ de $\mathcal{E}_\mathcal{H}$ on peut associer la fonction :
  $$\langle\psi_1| = \varphi \to \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\varphi(x)dx$$
- **Vecteur d'état : ket** $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_\mathcal{H}$
  (matrice colonne $(C_1,\ C_2,\ ...,\ C_n)$ en dimension finie)
- **bra** associé à ce vecteur d'état : $\langle\psi| \in \mathcal{E}_\mathcal{H}^*$
  (matrice ligne $(C_1^*,\ C_2^*,\ ...,\ C_n)$ en dimension finie, i.e. $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$)
- **Opérateur** $\hat{A}$: application linéaire $|\psi\rangle \to \hat{A}|\psi\rangle \in \mathcal{E}_\mathcal{H}$
  Éléments de matrice :
  $$\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\left(\hat{A}|\psi_j\rangle\right) = \left(\langle\psi_i|\hat{A}\right)|\psi_j\rangle$$
  ($=A_{ij}$ en dim finie)
- **Opérateur adjoint** $\hat{A}^\dagger$:
  $$\forall\psi_i,\psi_j \in \mathcal{E}_\mathcal{H} :\ \langle\psi_i|\hat{A}^\dagger|\psi_j\rangle = \left(\langle\psi_j|\hat{A}|\psi_i\rangle\right)^*$$
  (donc $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$; $[A^\dagger]_{ij} = A_{ji}^*$ en dim finie)
- **Observable** $\hat{A}$: opérateur hermitien (ou auto-adjoint) : $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
- **Conjugué hermitique** : Le conjugué hermitique s'obtient en inversant l'ordre des termes [c] et en les remplaçants par leurs conjugué hermitiques respectifs.
- **Commutateur** : $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

a. attention, c'est l'inverse de la définition mathématique usuelle
b. C'est le dual de $\mathcal{E}_\mathcal{H}$
c. sauf les scalaires qui restent par convention en première position

1 Formalisme de Dirac

1. Conjugué hermitique :
   (a) Le bra associé au ket $\lambda\hat{A}|\psi\rangle$ est $\lambda^*\langle\psi|\hat{A}^\dagger$. En déduire que $\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle \geq 0$.

   Notons $\hat{A}|\psi\rangle = |\varphi\rangle$, alors
   $$\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$$

   (b) Quel est le conjugué hermitique de $\lambda|\phi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{B}$?

   Comme pour les matrices et les vecteurs : on inverse l'ordre, et on prend le conjugué de chaque élément :
   $$\left(\lambda|\phi\rangle\langle\psi|\hat{A}^\dagger\hat{B}\right)^* = \lambda^*\hat{B}^\dagger\hat{A}|\psi\rangle\langle\phi|$$

2. Soit $\hat{A}$ une observable quelconque, d'états propres $|\psi_n\rangle$ et de valeurs propres a_n.
   (a) Montrer que les valeurs propres a_n sont réelles.

   $\hat{A}$ est une observable, donc est hermitien : $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ et donc
   $$a_n = a_n\langle\psi_n|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle = \left(\langle\psi_n|\hat{A}|\psi_n\rangle\right)^* = a_n^*$$
   Donc les valeurs propres sont réelles.

   (b) Montrer que $a_1 \neq a_2 \implies \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ (i.e. deux vecteurs propres d'une observable associés à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux).

   Soit a_1 et a_2 les valeurs propres associées aux états propres ψ_1 et ψ_2
   $$\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\left(\hat{A}|\psi_2\rangle\right) = a_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle$$
   donc :
   $$\left(\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle\right)^* = a_2^*\langle\psi_2|\psi_1\rangle = a_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$
   car les valeurs propres d'un observable sont réelles. De plus, en utilisant le formule du conjugué hermitien, on a aussi :
   $$\left(\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle\right)^* = \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$
   Donc
   $$\boxed{a_1 \neq a_2 \implies \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0}$$

2 Oscillateur harmonique en mécanique quantique

L'oscillateur harmonique quantique est décrit par l'Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right) \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on a utilisé la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique quantique :

$$\ell = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

pour avoir des opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sans dimension :

$$\hat{X} = \frac{\hat{x}}{\ell} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{\ell}{\hbar}\hat{p}$$

1. Calculer le commutateur $[\hat{x}, \hat{p}]$ (en le faisant agir sur une fonction d'onde quelconque). en déduire le commutateur $[\hat{X}, \hat{P}]$.

$$[\hat{x}, \hat{p}]|\psi\rangle = \hat{x}(\hat{p}\psi(x)) - \hat{p}(\hat{x}\psi(x)) \tag{2}$$

$$= x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x) + i\hbar\frac{d}{dx}(x\psi(x)) \tag{3}$$

$$= -i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar x\frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar\psi(x) \tag{4}$$

$$= i\hbar\psi(x) \tag{5}$$

Donc :

$$\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{1}} \ \& \ \boxed{[\hat{X}, \hat{P}] = i\mathbb{1}}$$

2.1 Opérateurs création et annihilation

2. On introduit les opérateurs

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \qquad \text{et} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \tag{6}$$

   (a) Ces opérateurs sont-ils des observables ?
   (b) Calculer le commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.

$$\hat{a}^\dagger \neq \hat{a}$$

Donc ces opérateurs ne sont pas hermitien et ne sont donc pas des observables.

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - i\hat{X}\hat{P} + i\hat{P}\hat{X}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + i[\hat{P}, \hat{X}]\right)$$

De même :

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - i[\hat{P}, \hat{X}]\right)$$

Donc

$$\boxed{[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = i[\hat{P},\hat{X}] = \mathbb{1}}$$

3. On défini :

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

(a) Montrer que l'Hamiltonien (1) peut s'écrire sous la forme

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

On vient de calculer :

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - i[\hat{P},\hat{X}]\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1\right)$$

donc :

$$\hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right) = \hat{H}$$

(on remarque que $\hat{N}$, lui, est bien un observable)

(b) Calculer les commutateurs $[\hat{N},\hat{a}]$ et $[\hat{N},\hat{a}^\dagger]$.

$$[\hat{N},\hat{a}] = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\hat{a} = [\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}$$

$$[\hat{N},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

2.2 Valeurs propres de $\hat{N}$

Soit $|n\rangle$ un vecteur propre normé de l'opérateur $\hat{N}$ associé à la valeur propre n.

4. Montrer que $\hat{a}|n\rangle$ est soit nul soit vecteur propre de $\hat{N}$ pour la valeur propre $(n-1)$.

On vient de montrer que $[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}$, donc si on considère $\hat{N}\left(\hat{a}|n\rangle\right)$, on a :

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \left(\hat{a}\hat{N} - \hat{a}\right)|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

donc $\hat{a}|n\rangle$ est soit nul soit vecteur propre pour la valeur propre $n-1$.

5. Montrer que $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ est soit nul soit vecteur propre pour la valeur propre $(n+1)$.

De même : $[\hat{N},\hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$, donc si on considère $\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle$, on a :

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger\right)|n\rangle = n\hat{a}^\dagger|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

donc $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ est soit nul soit vecteur propre pour la valeur propre $(n+1)$.

6. Calculer $\|\hat{a}^\dagger|n\rangle\|^2$ et $\|\hat{a}|n\rangle\|^2$.

$$\begin{aligned}
\|\hat{a}^\dagger|n\rangle\|^2 &= \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle \\
&= \langle n|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a},\hat{a}^\dagger]\right)|n\rangle \\
&= \langle n|\left(\hat{N} + \mathbb{1}\right)|n\rangle \\
&= (n+1)\langle n|n\rangle = (n+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{a}|n\rangle\|^2 &= \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \\
&= \langle n|\hat{N}|n\rangle \\
&= n\langle n|n\rangle = n
\end{aligned}$$

En déduire que :

(*i*) $n = 0 \Longleftrightarrow \hat{a}|n\rangle = 0$.

(*ii*) $n \geq 0$.

(*iii*) $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ n'est jamais nul.

Trivial d'aprés les résultats précédent.

---

7. Montrer que $\hat{a}^k|n\rangle$ est soit nul soit vecteur propre de $\hat{N}$ pour la valeur propre $(n-k)$, et que $(\hat{a}^\dagger)^k|n\rangle$ est vecteur propre de $\hat{N}$ pour la valeur propre $(n+k)$

On raisonne par récurrence :

- Le cas $k = 1$ correspond à la question précédente
- on suppose cette propriété vrai pour $k = m$ donc

$$\hat{N}\hat{a}^m|n\rangle = (n-m)\hat{a}^m|n\rangle \;\&\; \hat{N}(\hat{a}^\dagger)^m|n\rangle = (n+m)(\hat{a}^\dagger)^m|n\rangle$$

- Pour $k = m+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{N}\hat{a}^{(m+1)}|n\rangle &= \left(\hat{N}\hat{a}\right)\hat{a}^m|n\rangle \\
&= \left(\hat{a}\hat{N} - \hat{a}\right)\hat{a}^m|n\rangle \\
&= \hat{a}\left(\hat{N} - \mathbb{1}\right)\hat{a}^m|n\rangle \\
&= \hat{a}\left((n-m)\hat{a}^m|n\rangle - \hat{a}^m|n\rangle\right) \\
&= (n-(m+1))\hat{a}^{(m+1)}|n\rangle
\end{aligned}$$

De même, pour $\hat{a}^\dagger$ on a :

$$\begin{aligned}
\hat{N}(\hat{a}^{\dagger})^{(m+1)}|n\rangle &= \left(\hat{N}\hat{a}^{\dagger}\right)(\hat{a}^{\dagger})^{m}|n\rangle \\
&= \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{N}+\hat{a}^{\dagger}\right)(\hat{a}^{\dagger})^{m}|n\rangle \\
&= \hat{a}^{\dagger}\left(\hat{N}+\mathbb{1}\right)(\hat{a}^{\dagger})^{m}|n\rangle \\
&= \hat{a}^{\dagger}\left((n+m)(\hat{a}^{\dagger})^{m}|n\rangle+(\hat{a}^{\dagger})^{m}|n\rangle\right) \\
&= (n+m+1)(\hat{a}^{\dagger})^{(m+1)}|n\rangle
\end{aligned}$$

---

8. En déduire que n est un nombre entier ($n \in \mathbb{N}$) et dessiner le spectre associé à l'hamiltonien $\hat{H}$. Justifier le nom "opérateur d'échelle" donné couramment aux opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^{\dagger}$.

On considère le vecteur propre $|n_0\rangle$ de $\hat{N}$ avec n_0 sa valeur propre. on a :

$$\hat{N}|n_0\rangle = n_o|n_0\rangle$$
$$\hat{N}\hat{a}^{k}|n_0\rangle = (n_o-k)\hat{a}^{k}|n_0\rangle$$

Comme les valeurs propres sont positives ou nulles :

- il en existe une minimale n_0-k avec $k \in \mathbb{N}$ pour le vecteur $a^{k}|n_0\rangle$
- Cependant $a^{k+1}|n_0\rangle$ est aussi vecteur propre.

Comme (n_0-k-1) ne peut pas être valeur propre (sinon n_0-k ne serait pas minimale) , alors la seule possibilité est que $\hat{a}^{k}|n_0\rangle$ soit nul et donc que $(n_0-k)=0$ c'est-à-dire que n_0 est un entier.

On rappel que :

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)$$

Donc comme les valeurs propre de $\hat{N}$ sont des entiers n, les valeurs propres de $\hat{H}$ sont de la forme :

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

Les énergies propres forme donc une échelle de niveaux d'énergie équidistants ($\Delta E = \hbar\omega$) et les opérateurs $\hat{a}^{\dagger}$ et $\hat{a}$ permettent de monter et descendre. Ces opérateurs sont appelés opérateurs de création (pour $\hat{a}^{\dagger}$) et d'annihilation (pour $\hat{a}$).

2.3 États propres de $\hat{H}$

On cherche maintenant à faire le lien avec les fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire. On note $\psi_n(x)$ une fonction propre associée à la valeur propre n. $|0\rangle = |n=0\rangle$ est l'état fondamental. (On utilisera ici directement les résultats de la PC1 et PC2)

9. On rappel que $\hat{a}|0\rangle = 0$.
   (a) Écrire l'équation différentielle dont est solution une fonction propre $\psi_0(x)$ associée à la valeur propre $n=0$.
   (b) La valeur propre $n=0$ est-elle dégénérée ?

(c) En déduire $\psi_0(x)$.

(d) Est-ce que l'inégalité de Heisenberg est saturée ($\Delta x \Delta p = \hbar/2$) pour l'état fondamental ?

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)\psi_0(x) = 0$$

On rappel que :

$$\hat{X} = \frac{\hat{x}}{l} \;\;\&\;\; \hat{P} = \frac{l}{\hbar}\hat{p} = -il\frac{d}{dx}$$

$\psi_0(x)$ est donc solution de :

$$\left(\frac{x}{l} + l\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, qui n'a donc qu'une seule solution : la valeur propre 0 n'est donc pas dégénérée.
On reconnaît l'équation différentielle vue en PC2 : en séparant les variable on a :

$$\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{x dx}{l^2}$$

que l'on intègre en :

$$\psi_0(x) = \psi_0 e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

ou ψ_0 est une constante de normalisation que l'on détermine en calculant :

$$\int \psi_0^2 e^{-\frac{x^2}{l^2}} dx = 1$$

d'ou (toujours d'après la PC2) :

$$\psi_0^2 = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\psi_0 = \frac{1}{\pi^{1/4} l^{1/2}}}$$

Comme $\psi_0(x)$ est une fonction Gaussienne, elle sature l'inégalité de Heisenberg (CF PC2 à nouveau)
* Vérification de la solution : On a $E_0 = \hbar\omega/2$, donc $\psi_0(x)$ est solution de :

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_0(x) &= \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(x) \\
\Rightarrow \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{x^2}{l^2}\psi_0(x) - l^2\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2}\right) &= \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0(x) \\
\Rightarrow (x^2 - l^2)\psi_0(x) - l^4\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} &= 0
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{l^2}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}\right) = \left(\frac{x^2}{l^4} - \frac{1}{l^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

Donc $\psi_0(x)$ est bien solution.

---

10. Montrer par récurrence qu'aucune valeur propre n'est dégénérée. En déduire que :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \;\;\&\;\; \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{8}$$

On a montré que cette propriété est vrai pour $k = 0$.

Si on suppose qu'elle est vraie pour $k = n$, donc on a un vecteur propre $|n\rangle$ associé à une énergie propre E_n. On considère maintenant l'énergie E_{n+1}, et le vecteur propre $|n+1\rangle$ associé. D'après la question (4) $\hat{a}|n+1\rangle$ est vecteur propre de $\hat{H}$ de valeur propre E_n. Comme E_n est non-dégénérée, cela implique que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \hat{a}|n+1\rangle = \lambda |n\rangle$$

Si on applique maintenant $\hat{a}^\dagger$ a cette equation, on obtient :

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}|n+1\rangle = \lambda \hat{a}^\dagger |n\rangle \;\Rightarrow\; \hat{N}|n+1\rangle = \lambda \hat{a}^\dagger |n\rangle \;\Rightarrow\; |n+1\rangle = \frac{\lambda}{n+1}\hat{a}^\dagger |n\rangle$$

Donc E_{n+1} est non-dégénérée.

Pour calculer la valeur de λ, on a (Q6) :

$$\|\hat{a}|n+1\rangle\|^2 = \langle n+1|\hat{N}|n+1\rangle = n+1$$
$$\|\hat{a}|n+1\rangle\|^2 = \left(\langle n+1|\hat{a}^\dagger\right)\hat{a}|n+1\rangle = \left(\hat{a}|n+1\rangle\right)^* \hat{a}|n+1\rangle = (\lambda|n\rangle)^* \lambda |n\rangle = \|\lambda\|^2$$

Donc

$$\boxed{\lambda = \sqrt{n+1}}$$

et donc

$$\boxed{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle}$$

et de même pour $\hat{a}^\dagger$

---

11. Montrer que :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \tag{9}$$

On a vu à la question 7 que l'on peut générer les vecteurs propre de $\hat{N}$ (et donc de $\hat{H}$) à partir de l'état fondamental :

$$|n\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

On a aussi vu à la question 6 que :

$$\|\hat{a}^\dagger|n\rangle\|^2 = n$$

Donc

$$\|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\|^2 = n!$$

et donc, comme $|0\rangle$ est normalisé, on a finalement :

$$\boxed{|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle}$$

---

12. En déduire que la fonction d'onde $\psi_n(x)$ peut s'écrire :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x) \tag{10}$$

On a :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{l} - l\frac{d}{dx}\right)$$

Donc

$$(\hat{a}^\dagger)^n = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\frac{x}{l} - l\frac{d}{dx}\right)^n$$

et donc d'aprés la question précédente :

$$\boxed{\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x)}$$

13. En exprimant $\hat{x}$ en fonction de $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$, calculer Δx et Δp pour l'état $|n\rangle$

$$\hat{x} = \frac{l}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, et on a

$$\langle x\rangle = \langle n|\frac{l}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = A\langle n|(n-1)\rangle + B\langle n|(n+1)\rangle = 0$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{l^2}{2}\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|n\rangle = \frac{l^2}{2}\langle n|\left(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\mathbb{1}+\hat{N}} + \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{N}}\right)|n\rangle$$

Comme précédemment, les termes en $\langle n|\hat{a}^2|n\rangle$ et $\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2|n\rangle$ sont nuls, et comme $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ on a simplement :

$$\langle x^2\rangle = \frac{l^2}{2}\langle n|2\hat{N} + \mathbb{1}|n\rangle = \frac{l^2}{2}(2n+1)$$

et finalement,

$$\boxed{\Delta x = l\sqrt{n + \frac{1}{2}}}$$

$$\hat{p} = \frac{i\hbar}{l\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

donc de même, $\langle\hat{p}\rangle = 0$ et pour $\langle\hat{p}^2\rangle$, on a :

$$\langle p^2\rangle = -\frac{\hbar^2}{2l^2}\langle n|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2|n\rangle = -\frac{\hbar^2}{2l^2}\langle n|\left(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 - \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\mathbb{1}+\hat{N}} - \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{N}}\right)|n\rangle = -\frac{\hbar^2}{2l^2}\langle n| - 2\hat{N} - \mathbb{1}|n\rangle$$

et finalement,

$$\boxed{\Delta p = \frac{\hbar}{l}\sqrt{n + \frac{1}{2}}}$$

et

$$\boxed{\Delta x\Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar}$$