MAT 361 — Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices sur le Cours 3 — Espaces de fonctions, densité, point fixe (corrections)

Exercice 1. (Applications de théorèmes importants du cours)

(a) (Théorème d'Ascoli et théorème de Riesz) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbf{R})$ et tel qu'il existe une constante $M>0$ avec : $\forall\, f \in E$, $\|f'\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$.

(i) Montrer que la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, notée B, forme une famille équicontinue en tout point $x\in[0,1]$. En déduire que de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soient $x\in[0,1]$ et $\varepsilon>0$. On pose $\eta = \varepsilon/M$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $y\in[0,1]$ tel que $|x-y|\leq\eta$ et pour tout $f\in B$, on a :

$$|f(x)-f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x-y| \leq M\|f\|_\infty \eta \leq M\eta = \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de B en x.

Pour tout $x\in[0,1]$, B est équicontinue en x et $\{f(x), f\in B\}$ est borné par $\|f\|_\infty \leq 1$. D'après le théorème d'Ascoli, de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(ii) On suppose de plus que E est fermé dans $(\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que E est de dimension finie.

Pour montrer que E est de dimension finie, on va utiliser le théorème de Riesz. Il s'agit donc de montrer que B est compacte. On a déjà vu que de toute suite de B, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Mais B est fermée dans $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ comme intersection de deux fermés :

$$B = \{f\in E, \|f\|_\infty \leq 1\} = \bar{B}_{\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})}(0,1)\cap E$$

donc B est compacte.

(b) (Théorème de Weierstrass) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ satisfaisant

$$\forall\, n\in\mathbf{N}, \quad \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme P, on a $\int_0^1 f(t)\cdot P(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'autre part, f étant continue sur $[0,1]$, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers f. Soit maintenant $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que $\|f-P_N\|_\infty\leq\varepsilon$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 f(t)\cdot(f(t)-P_N(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|\cdot\|f-P_N\|_\infty\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc que $f^2=0$ car f^2 est une fonction continue et positive. On conclut finalement que f est la fonction nulle.

(c) (Théorème du point fixe) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ continue. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que f^n soit contractante (la fonction f^n étant définie par la récurrence $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$).

(i) Montrer que si x est un point fixe de f^n, alors $f(x)$ est aussi un point fixe de f^n.

Soit x un point fixe de f^n. On a $f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x)$ donc $f(x)$ est aussi un point fixe de f^n.

(ii) Montrer que f admet un unique point fixe.

D'après le théorème du point fixe de Banach, f^n admet un unique point fixe dans X que l'on notera x_0. D'après (i), $f(x_0)$ est également un point fixe de f^n. Donc par unicité du point fixe de f^n, on obtient $f(x_0) = x_0$. On a donc l'existence d'un point fixe pour f. De plus, si x est un point fixe de f, alors nécessairement, x est aussi un point fixe de f^n (récurrence immédiate). On obtient donc $x = x_0$ et on a donc l'unicité du point fixe pour f.

Exercice 2. (Espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de différentes normes)

(a) Montrer que $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, n \geqslant n_0$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Donc, pour chaque $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $f(x) \in \mathbf{R}$. Vérifions que $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f,$$

dans $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour $m, n \geqslant n_0$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

En passant à la limite $m \to +\infty$, on obtient que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geqslant n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, la fonction f est bornée sur $[0, 1]$ et $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Montrons maintenant que la fonction f est continue sur $[0, 1]$. On sait que f_{n_0} est continue en tout point x de $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour $y \in [0, 1]$,

$$|y - x| < \delta \implies |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|.$$

En conclusion, pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [0, 1]$,

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue sur $[0, 1]$.

En conclusion, on a bien montré que $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

n'est pas un espace de Banach.

On utilise les indications données en cours. Définissons pour tout $n \geqslant 2$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1 - n(x-1/2) & \text{si } x \in [1/2, 1/2+1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

On vérifie d'abord que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$. En effet, pour tous $m \geqslant n \geqslant n_0 \geqslant 2$, on a

$$f_m(x) - f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ -(m-n)(x-1/2) & \text{si } x \in [1/2, 1/2+1/m] \\ -1 + n(x-1/2) & \text{si } x \in [1/2+1/m, 1/2+1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/2+1/n, 1]. \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in [1/2, 1/2+1/n]$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant 1$, et $f(x) = 0$ sinon. On a donc la majoration $\|f_m - f_n\|_1 \leqslant 1/n$, ce qui implique le résultat.

On montre maintenant que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ ne converge pas vers une fonction continue pour $\|\cdot\|_1$. Soit g la fonction continue par morceaux, mais discontinue, définie par

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1/2[\\ 0 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

On observe par un calcul direct que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

Supposons que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une fonction continue f pour $\|\cdot\|_1$. Alors,

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f_n(x)-g(x)|\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Ainsi, $\int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x = 0$. Comme $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x = 0$ et f et g sont continues sur $[0,\frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2},0]$, on en déduit que $f = g$ sur $[0,\frac{1}{2}[\cup[\frac{1}{2},1]$. Ainsi f n'est pas continue en $x = \frac{1}{2}$, ce qui est une contradiction.

Exercice 3. (Convergence de suites de fonctions et équicontinuité)

(a) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction discontinue.

La suite des fonctions monomiales $x \mapsto x^n$ converge simplement vers la fonction qui vaut 0 sur $[0;1[$ et 1 en 1.

On peut aussi considérer la suite de fonctions $x \mapsto [\sin(\pi x)]^n$ dont la limite est discontinue au point $\frac{1}{2}$.

(b) Donner un exemple d'une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.

On prend la suite des fonctions continues affines par morceaux $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie comme suit : pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n vaut 0 sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$; sur $[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{2n}]$ c'est l'unique fonction affine qui vaut 0 en $1-\frac{1}{n}$ et 1 en $1-\frac{1}{2n}$, et sur $[1-\frac{1}{2n}, 1]$ c'est l'unique fonction affine qui vaut 1 en $1-\frac{1}{2n}$ et 0 en 1 (faire un dessin pour voir le pic, qui « glisse » vers 1 quand $n \to \infty$). On voit sans faire de calcul que : $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc la convergence vers la fonction nulle ne peut pas être uniforme. La convergence simple est assurée par le fait qu'à $x \in [0,1[$ fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est nulle à partir d'un certain rang et que la suite des $f_n(1)$ est constante égale à 0.

(c) On considère la suite des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. En quels points de $[0,1]$ la famille de fonctions $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est-elle équicontinue ?

Montrons que la famille est équicontinue en tout point $x \in [0,1[$. On considère les fonctions f_n restreintes à un intervalle fermé strict de $[0,1]$ de la forme $[0,\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$, elles sont lipschitziennes pour une constante commune, ce qui assure que la famille est équicontinue sur $[0,\alpha]$ et donc en tout point $x \neq 1$. Pour le montrer, étudions la famille des f_n sur $[0,\alpha]$ pour un $0 < \alpha < 1$ fixé. On a $f_n'(x) = nx^{n-1}$ et $\sup |f_n'(x)| = n\alpha^{n-1}$. Comme la suite $(n\alpha^{n-1})_{n\geqslant 0}$ a pour limite 0, elle est bornée par une constante que l'on note K_α. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que les restrictions $f_n|_{[0,\alpha]}$ sont toutes lispchitziennes de constante K_α.

Remarquons que pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $\{f_n(x), n \in \mathbf{N}\}$ est borné par 1. Donc la famille ne peut être équicontinue en 1, car sinon par le théorème d'Ascoli, on pourrait en extraire une sous-suite convergeant uniformément vers une fonction continue. Cette limite uniforme devrait être la limite simple, or cette limite simple n'est pas continue.

Exercice 4. (Une variante du théorème de point fixe de Banach sur un espace métrique compact)
Soit f une application d'un espace métrique compact (X,d) dans lui-même, telle que, pour tout $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

(a) Montrer que f possède un unique point fixe.

On regarde la fonction $D : X \to \mathbf{R}$ définie par $D(x) = d(x, f(x))$. C'est une fonction continue sur l'espace compact (X,d). Elle atteint son minimum en au moins un point de X que l'on note x_∞. On montre que $f(x_\infty) = x_\infty$. En effet, si $f(x_\infty) \neq x_\infty$, alors par la propriété de f, on a $D(f(x_\infty)) = d(f(f(x_\infty)), f(x_\infty)) < d(f(x_\infty), x_\infty) = D(x_\infty)$. Ceci contredit le fait que x_∞ minimise D.

Pour l'unicité, on considère x, y deux points fixes de f. Alors, $d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Ainsi, $d(x,y) = 0$ et donc $x = y$.

(b) Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace l'hypothèse de compacité de (X,d) par une hypothèse de complétude ?

Dans l'espace complet mais non compact $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, on considère la fonction f définie par $f(x) = x - \arctan x + \frac{\pi}{2}$. Pour $y < x$, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Comme $f'(c) = \frac{c^2}{1+c^2}$, on obtient $0 < f(x) - f(y) < x - y$. Cependant, il n'existe pas de valeur $x \in \mathbf{R}$ telle que $f(x) = x$ puisque c'est équivalent à $\arctan x = \frac{\pi}{2}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(f^n(x))_{n \geqslant 0}$ converge (f^n est défini par la récurrence $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$).

Soit $x \in X$ quelconque. Montrons que $(f^n(x))_{n \geqslant 0}$ converge vers l'unique point fixe x_∞. La suite de nombres réels positifs définie par $a_n = d(f^n(x), x_\infty)$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc, vers une limite notée a. En particulier,

$$a = \inf\{d(f^n(x), x_\infty),\, n \geqslant 0\}.$$

Il s'agit de montrer que $a = 0$. Supposons que $a > 0$ et par compacité de X, considérons une sous-suite $(f^{\varphi(n)}(x))_{n \geqslant 0}$ qui converge, vers une limite notée $\xi \in X$. Par continuité, on a $d(\xi, x_\infty) = a > 0$. Par continuité de f, la suite $(f^{\varphi(n)+1}(x))_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(\xi)$; comme $\xi \neq x_\infty$, on a par la propriété de f, $d(f(\xi), x_\infty) < d(\xi, x_\infty) = a$. Ceci contredit le fait que a est la borne inférieure de $\{d(f^n(x), x_\infty) : n \geqslant 0\}$.

(d) Montrer que la suite d'applications $(f^n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur X.

La suite d'applications $(f^n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur X vers la fonction constante égale à x_∞. La suite de fonctions numériques $a_n : X \to \mathbf{R}_+$ définie par $a_n(x) = d(f^n(x), x_\infty)$ converge donc simplement vers la fonction nulle ; en outre, c'est une suite décroissante car par la propriété de f, on a $a_{n+1} = d(f^{n+1}(x), f(x_\infty)) < d(f^n(x), x_\infty) = a_n$. Par le théorème de Dini (X est compact), la convergence est uniforme. Ceci revient à dire que la suite d'applications $(f^n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur X vers la fonction constante égale à x_∞.

Exercice 5. (Espace des polynômes à coefficients réels muni de différentes normes)
On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note

$$\mathcal{N}_1(P) := \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_2(P) := \sum_{j \in \mathbf{N}} e^{-j}\,|P(j)|.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit de deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.

La série définissant $\mathcal{N}_2$ est bien convergente pour tout polynôme et les fonctions $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont à valeurs dans $[0, +\infty[$; ensuite, la condition d'homogénéité est standard pour les deux applications, ainsi que l'inégalité triangulaire pour la première. Concernant l'inégalité triangulaire pour $\mathcal{N}_2$, on observe $|(P+Q)(j)| \leqslant |P(j)| + |Q(j)|$ pour tout $j \geqslant 0$ et donc l'inégalité triangulaire se démontre en multipliant par e^{-j} et en sommant sur j. Pour la condition de séparation, il suffit d'utiliser le même argument pour les deux applications : une fonction polynomiale non nulle n'a qu'un nombre fini de zéros.

(b) Ces normes sont-elles équivalentes ?

On considère la suite des fonctions monomiales $f_n : x \mapsto x^n$. On a $\mathcal{N}_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $\mathcal{N}_2(f_n) \geqslant \frac{1}{e}$ pour tout $n \geqslant 0$. Ceci montre qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\mathcal{N}_2(P) \leqslant C\mathcal{N}_1(P)$.

(c) L'espace $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\mathcal{N}_1$, est-il complet ?

On va montrer que ce n'est pas le cas, en exhibant une suite de Cauchy qui ne converge pas dans l'espace $\mathbf{R}[X]$. La méthode est de trouver un espace ambiant plus gros dans lequel la suite converge, mais dont la limite est hors de l'espace initial.

L'espace ambiant sera ici l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ des fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{R}$. Choisissons par exemple la fonction f continue et affine par morceaux qui vaut 0 sur $[0, \frac{1}{3}]$

et 1 sur $[\frac{2}{3}, 1]$. Ce n'est clairement pas une fonction polynomiale. Le théorème de densité de Weierstrass montre l'existence d'une suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ convergeant vers f pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. C'est une suite convergente et donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty)$. Comme $\mathcal{N}_1 \leqslant \| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, c'est aussi une suite de Cauchy pour $(\mathbf{R}[X], \mathcal{N}_1)$. Cette dernière inégalité implique aussi que $(P_n)_{n \geqslant 0}$ converge dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \mathcal{N}_1)$ vers une fonction $f \notin \mathbf{R}[X]$. En particulier, cette suite ne converge pas dans l'espace $(\mathbf{R}[X], \mathcal{N}_1)$. Ainsi, l'espace $(\mathbf{R}[X], \mathcal{N}_1)$ n'est pas complet.

Exercice 6. (*Espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ muni de différentes normes) Pour k un nombre réel strictement positif, on note $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telles que $f(0) = 0$ et satisfaisant, pour tous $x, y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$ et pour une fonction donnée $f \in \mathcal{E}$, on note

$$\mathcal{N}(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathcal{H}_k\}.$$

(a) Justifier que $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{N}(f)$ est la meilleure constante de Lipschitz de $f \in \mathcal{E}$: c'est une borne inférieure atteinte pour chaque f.

Pour la première assertion, il suffit de vérifier que l'ensemble proposé $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions $[0,1] \to \mathbf{R}$. Une combinaison linéaire de fonctions valant 0 en 0 vaut 0 en 0. En outre, si f est K-lipschitzienne et g est K'-lipschitzienne, alors pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est $(|\lambda|K + |\mu|K')$-lipschitzienne. Ainsi $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

La dernière remarque montre aussi que $\mathcal{N}$ est homogène et satisfait l'inégalité triangulaire. La condition de séparation vient de ce qu'une fonction 0-lipschitzienne est constante, donc nulle si elle vaut 0 en 0.

(b) Prouver que l'on a $\|f\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ mais que $\| \cdot \|_\infty$ et $\mathcal{N}$ ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{H}_k$.

Si f est k-lipschitzienne et vaut 0 en 0 alors pour tout $x \in [0,1]$ on a : $|f(x)| \leqslant kx \leqslant k$ et donc $\|f\|_\infty \leqslant k$; en passant à la borne inférieure, on obtient bien que $\|f\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$.

Vu l'inégalité que l'on vient de démontrer, il s'agit d'exhiber une suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{H}_k$ qui converge uniformément vers 0 mais sur laquelle $\mathcal{N}$ est minorée, par exemple constante. On obtient une telle suite en posant $f_n(x) = kx$ entre 0 et $\frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{k}{n}$ sur le reste de l'intervalle $[0,1]$, puisque $\|f_n\|_\infty = \frac{k}{n}$ et $\mathcal{N}(f_n) = k$ pour tout $n \geqslant 1$.

(c) On fixe $k > 0$. Discuter la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \| \cdot \|_\infty)$ et dans $\Big(\mathcal{E}, \mathcal{N}\Big)$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $\{f(x), f \in \mathcal{H}_k\}$ est borné par k car pour tout $f \in \mathcal{H}_k$,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant k|x| \leqslant k.$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathcal{H}_k$ est équicontinu en x. En effet, soit $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \varepsilon / k$. On a alors pour tout $y \in [0,1]$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$ et pour tout $f \in \mathcal{H}_k$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\eta = \varepsilon.$$

Donc d'après le théorème d'Ascoli, de toute suite de $\mathcal{H}_k$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. De plus, le critère séquentiel permet de voir que $\mathcal{H}_k$ est fermé dans l'espace des fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{R}$ muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$, ce qui permet de conclure à la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$.

Maintenant, on montre que $\mathcal{H}_k$ n'est pas compact dans $(\mathcal{E}, \mathcal{N})$. L'idée est de produire une suite de fonctions k-lipschitziennes qui ne converge pas car les différences entre la limite hypothétique (automatiquement k-lipschitzienne) et les fonctions de la suite ne peuvent être mieux que k-lipschitziennes (autrement dit, de norme k).

Remarquons tout d'abord que l'inégalité $\|\cdot\|_\infty \leqslant \mathcal{N}$ implique que si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de $\mathcal{N}$ vers f, alors elle converge uniformément et donc simplement. Une fonction typiquement k-lipschitzienne sur $[0,1]$ est $f : x \mapsto kx$. Tout ceci donne l'idée de considérer pour chaque $n \geqslant 2$, la fonction continue f_n qui coïncide sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ avec f, et qui coïncide sur $[1-\frac{1}{n}, 1]$ avec la fonction constante $k(1-\frac{1}{n})$. Si une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 2}$ convergeait pour la norme $\mathcal{N}$ vers une limite, cette limite serait aussi limite uniforme et donc simple sur $[0,1]$: la limite correspondante serait donc la fonction f ; mais sur l'intervalle $[1-\frac{1}{n}, 1]$, la fonction $f - f_n$ est affine de pente k et donc $\mathcal{N}(f-f_n) = k$, ce qui est une obstruction à la convergence.

Exercice 7. (Séries normalement convergentes dans un Banach)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $K \geqslant 0$ et $\phi \in \mathcal{C}(E; E)$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|\phi(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathcal{C}(E; E)$ telle que

$$f(0) = 0, \quad \text{et pour tout } x \in E,\ f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

Indication : on pourra utiliser la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^{-n}x),$$

et le fait général que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente (voir feuille 2, exercice 12).

Exercice non corrigé.

Exercice 8. (*Exponentielle d'application linéaire) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

(a) Soit $L \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < R$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n L^n$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E, E)$.

Indication : on rappelle que dans un espace de Banach toute série normalement convergente est convergente (voir feuille 2, exercice 12). On rappelle également que $(E, \|\cdot\|_E)$ étant un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E,E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,E)})$ est également un espace de Banach.

On voit que $\|a_n L^n\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leqslant |a_n| \|L\|^n_{\mathcal{L}(E,E)}$ est le terme général d'une série numérique convergente car $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < R$. Donc la série de terme général $a_n L^n$ est absolument convergente. L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E,E)$ étant complet pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,E)}$, cette série est convergente et définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.

(b) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$. Montrer que

$$e^L := \sum_{n \geqslant 0} \frac{L^n}{n!}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.

La série entière $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, donc $e^L \in \mathcal{L}(E,E)$ est bien défini par la question précédente.

(c) Soient $L, M \in \mathcal{L}(E,E)$ tels que $L \circ M = M \circ L$. Montrer que

$$e^L \circ e^M = e^M \circ e^L = e^{L+M}.$$

On va montrer que $e^L \circ e^M = e^{L+M}$, ce qui permet de conclure car l'addition d'opérateur est commutative.

On utilise les sommes partielles des séries concernées : soit

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{L^n}{n!}, \quad V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{M^n}{n!}, \quad W_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(L+M)^n}{n!}.$$

Alors, $U_N \to e^L$, $V_N \to e^M$ et $W_N \to e^{L+M}$. De plus, $U_N \circ V_N \to e^L \circ e^M$ car

$$\begin{aligned}\|e^L \circ e^M - U_N \circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \|e^L \circ e^M - U_N \circ e^M\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|U_N \circ e^M - U_N \circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \\ &\leqslant \|e^L - U_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \|e^M\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|U_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \|e^M - V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \to 0.\end{aligned}$$

(On a utilisé que la suite (U_N) est bornée car convergente).

Montrons à présent que $U_N \circ V_N - W_{2N} \to 0$, ce qui suffira pour conclure. D'abord, on observe que $U_N \circ V_N = \sum_{j,k \leqslant N} \frac{1}{j!k!} L^j M^k$. Ensuite, par la commutativité de L et M,

$$\begin{aligned}W_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!}(L+M)^n = \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} L^k M^{n-k} = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{\substack{j,k \geqslant 0 \\ j+k=n}} \frac{1}{j!k!} L^k M^j \\ &= \sum_{j,k \leqslant N} \frac{1}{j!k!} L^k M^j + \sum_{(j,k) \in A_N} \frac{1}{j!k!} L^k M^j\end{aligned}$$

où $A_N = \{(j,k) \in \mathbf{N}^2 \mid (j \geqslant N+1 \text{ ou } k \geqslant N+1) \text{ et } j+k \leqslant 2N\}$. Notons l'inclusion suivante

$$A_N \subset B_N = (\{N+1, \dots, 2N\} \times \{0, \dots, N\}) \cup (\{0, \dots, N\} \times \{N+1, \dots, 2N\}).$$

Donc en notant $R = \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}$ et $S = \|M\|_{\mathcal{L}(E,E)}$,

$$\begin{aligned}\|W_{2N} - U_N \circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \sum_{(j,k)\in A_N} \frac{1}{j!k!} R^k S^j \leqslant \sum_{(j,k)\in B_N} \frac{1}{j!k!} R^k S^j \\ &\leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{R^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{S^j}{j!}\right) + \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{R^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=N+1}^{2N} \frac{S^j}{j!}\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!}\right) e^S + e^R \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{S^j}{j!}\right).\end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers 0, car les séries partielles qui apparaissent sont des restes d'ordre $N+1$ de séries convergentes (de somme e^R et e^S).

(d) En déduire que, si $L \in \mathcal{L}(E,E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathcal{L}(E,E)$.

Comme L et $-L$ commutent, $e^L \circ e^{-L} = e^{-L} \circ e^L = e^{L-L} = I_E$.

(e) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que

$$V^2 = I_E - L.$$

(I_E désigne l'opérateur identité de E.)

Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ admet un développement en série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence 1. De plus, par identification des coefficients dans l'égalité

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right)^2 = 1 - x,$$

on vérifie que les coefficients de cette série satisfont les relations suivantes

$$a_0^2 = 1, \quad 2a_0 a_1 = -1 \quad \text{et pour tout } n \geqslant 2, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0,$$

Soit $V = \sum_{n\geqslant 0} a_n L^n$. Montrons maintenant que $V^2 = I_E - L$.

On pose $V_N = \sum_{n=0}^{N} a_n L^n$. Alors $V_N \to V$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ et on vérifie aussi que $V_N^2 \to V^2$ dans $\mathcal{L}(E,E)$, car

$$\begin{aligned}\|V^2 - V_N^2\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \|V^2 - V_N V\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|V_N V - V_N^2\|_{\mathcal{L}(E,E)} \\ &\leqslant \|V\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|V - V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|V - V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \to 0\end{aligned}$$

(On a utilisé que la suite (V_N) est bornée car convergente).

De plus ,

$$V_N^2 = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) L^n + \sum_{j,k\leqslant N,\ j+k\geqslant N} a_j a_k L^{j+k}.$$

Pour $N \geqslant 2$, le premier terme vaut $I_E - L$. Intéressons nous au deuxième terme (on procède de manière similaire à la question (c)) : pour chacun des termes de la somme, l'un des indices j ou k est supérieur à $K = \lfloor N/2 \rfloor$, donc

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j,k \leqslant N,\ j+k \geqslant N} a_j a_k L^{j+k} \right\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \sum_{j,k \leqslant N,\ j+k \geqslant N} |a_j||a_k| \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}^{j+k} \\ &\leqslant \sum_{j=K}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} |a_j||a_k| \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}^{j+k} + \sum_{k=K}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} |a_j||a_k| \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}^{j+k} \\ &\leqslant 2 \left(\sum_{j=K}^{+\infty} |a_j| \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}^{j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}^{k} \right)\end{aligned}$$

On note que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$ entraîne, par une propriété des séries entières, que le deuxième terme du produit est une série convergente. Le premier terme est le reste d'ordre K de cette série convergente, donc il converge vers 0 quand $K \to +\infty$ (et donc quand $N \to +\infty$). Ainsi $V_N^2 \to I_E - L$, et par unicité de la limite, $V^2 = I_E - L$.

Exercice 9. (Autour de l'équicontinuité et de la convergence de suites de fonctions)
On considère (X, d_X) et (Y, d) deux espaces métriques.

(a) Étendre la notion d'équicontinuité donnée en cours au cas d'une famille d'applications continues de (X, d_X) dans (Y, d).

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ d'applications continues de (X, d_X) dans (Y, d) est équicontinue en un point $a \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall x \in X,\ d_X(a, x) < \delta \implies d(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

(b) Soit $a \in X$ et $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$. On suppose que $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue en a et que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Prouver que g est continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$. L'équicontinuité en a de la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ donne l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in B_X(a, \delta)$ on a $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$. Soit maintenant $x \in B_X(a, \delta)$. Comme $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers g en a et en x, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$d(g(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d(f_n(a), g(a)) < \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc

$$d(g(x), g(a)) \leqslant d(g(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), g(a)) < 3\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in B_X(a, \delta)$, $d(g(x), g(a)) < 3\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit la continuité de g au point a.

(c) On considère maintenant une partie dense Z de (X, d_X) et on suppose que (Y, d) est complet. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to Y$ telle que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur Z. Prouver que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur X.

Par complétude, il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (Y,d). On fixe $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On écrit l'équicontinuité en x de la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $y \in B_X(x,\delta)$, on ait $d\big(f_n(x), f_n(y)\big) < \varepsilon$.

Par densité, il existe $z \in Z \cap B_X(x,\delta)$; en particulier, $d\big(f_n(x), f_n(z)\big) < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant 0$. Par convergence simple, la suite $\big(f_n(z)\big)_{n\geqslant 0}$ est convergente, donc de Cauchy, et il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tous $m,n \geqslant N$ on ait $d\big(f_n(z), f_m(z)\big) < \varepsilon$.

Par inégalité triangulaire, pour tous $m,n \geqslant N$ on a ainsi :

$$d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant d\big(f_n(x), f_n(z)\big) + d\big(f_n(z), f_m(z)\big) + d\big(f_m(z), f_m(x)\big) \leqslant 3\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy dans (Y,d).

Exercice 10. (Suite de l'exercice précédent) On considère (X,d_X) et (Y,d) deux espaces métriques. Dans cette exercice, on suppose que (X,d_X) est compact.
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications continues $(X,d_X) \to (Y,d)$. On suppose que la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ est équicontinue et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge *uniformément* vers g.

La deuxième question de l'exercice précédent implique que g est continue sur X.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, par l'équicontinuité en x de la famille $\{f_n : n \geqslant 0\}$ et la continuité de g en x, il existe $\delta_x > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et tout $y \in B_X(x,\delta_x)$,

$$d\big(f_n(x), f_n(y)\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad d\big(g(x), g(y)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Par compacité de X, on extrait du recouvrement de parties ouvertes $\bigcup_{x\in X} B_X(x,\delta_x) = X$ un sous-recouvrement fini, noté $\bigcup_{i=1}^k B_X(x_i,\delta_i) = X$ avec $\delta_i = \delta_{x_i}$.

Par convergence simple, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $i \in \{1,2,\dots k\}$ et tout $n \geqslant N$, on ait : $d\big(g(x_i), f_n(x_i)\big) \leqslant \varepsilon$. Soit maintenant $x \in X$ quelconque : ce point est contenu dans une boule $B_X(x_i,\delta_i)$ et pour tout $n \geqslant N$ on peut écrire par l'inégalité triangulaire :

$$d\big(g(x), f_n(x)\big) \leqslant d\big(g(x), g(x_i)\big) + d\big(g(x_i), f_n(x_i)\big) + d\big(f_n(x_i), f_n(x)\big) \leqslant 3\varepsilon.$$

Ceci implique la convergence uniforme.

Exercice 11. (Preuve du théorème de Weierstrass esquissée dans le cours) Démontrer le théorème de Weierstrass classique en suivant les indications données dans le cours (utiliser le fait que sur tout intervalle compact, la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

Exercice non corrigé.

Exercice 12. (Une autre preuve du théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein)

(a) On pose

$$R_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} R_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} kR_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}.$$

(b) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

(c) On pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrer que ces polynômes convergent uniformément vers f sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice non corrigé.

Exercice 13. (*Une variante du théorème de point fixe de Banach dans un espace compact convexe)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une partie Y de E est dite *convexe* si pour tout points $x, y \in Y$, et tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in Y$.

Soient K une partie compacte et convexe de $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne, *i.e.* telle que pour tous $x, y \in K$, on ait :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|.$$

(a) Soit $a \in K$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$f_n(x) = \frac{1}{n} a + \frac{n-1}{n} f(x),$$

admet un point fixe dans K.

Remarquons d'abord que c'est la convexité de K qui permet de définir les fonctions f_n comme des fonctions à valeurs dans K. On a :

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \frac{n-1}{n}\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{n-1}{n}\|x - y\|,$$

ce qui implique que chaque fonction f_n est contractante. Comme K est compact, il est complet et le théorème de point fixe de Banach permet de conclure.

(b) En déduire que f admet un point fixe dans K.

Notons x_n le point fixe précédemment obtenu pour f_n ; on a donc $f_n(x_n) = x_n$ pour tout $n \geqslant 0$. La compacité de K permet de trouver une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et $x \in K$ tels que $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$.

Pour conclure, on va montrer que $f(x) = x$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$f(x) - x = f(x) - f(x_{\varphi(n)}) + f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - x,$$

ce qui donne par l'inégalité triangulaire

$$\|f(x) - x\| \leqslant \|f(x) - f(x_{\varphi(n)})\| + \|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\|.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que les termes de droite convergent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Puisque f est 1-lipschitzienne, le premier terme est majoré par $\|x_{\varphi(n)} - x\|$. Ainsi, ce terme et le troisième convergent vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Il reste donc à montrer que le deuxième terme converge vers 0. Pour $y \in X$ et pour $k \geqslant 0$ arbitraire, on a par la définition de f_k l'identité :

$$f(y) - y = \frac{k}{k-1}(f_k(y) - y) + \frac{1}{k-1}(y - a).$$

Pour $k = \varphi(n)$ et $y = x_{\varphi(n)}$ le premier terme s'annule ; quant au second, il tend vers 0 quand $n \to \infty$ car $(x_{\varphi(n)} - a)$ est majoré en norme, uniformément en n, puisque la fonction continue $x \mapsto \|x - a\|$ est bornée sur le compact K.