1. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ の i 成分

$$= e_{ijk}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_j c_k$$

$$= e_{jki}\, e_{jpq}\, a_p b_q c_k$$

$$= (\delta_{kp}\delta_{iq} - \delta_{kq}\delta_{ip})\, a_p b_q c_k$$

$$= a_k b_i c_k - a_i b_k c_k$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\, b_i - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\, a_i$$

2.1 $\nabla\cdot(\phi\mathbf{v})$

$$= (\phi v_i)_{,i}$$

$$= \phi_{,i} v_i + \phi\, v_{i,i}$$

$$= \nabla\phi\cdot\mathbf{v} + \phi\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}.$$

2.2 $\nabla\times(\phi\mathbf{v})$ の i 成分

$$= e_{ijk}(\phi v_k)_{,j}$$

$$= e_{ijk}(\phi_{,i} v_k + \phi\, v_{k,j})$$

$$= e_{ijk}\phi_{,i} v_k + \phi\, e_{ijk} v_{k,j}$$

$$= (\nabla\phi\times\mathbf{v} + \phi(\nabla\times\mathbf{v}))$$ の i 成分

2.3 $\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

$$= (e_{ijk} u_j v_k)_{,i}$$

$$= e_{ijk} u_{j,i} v_k + e_{ijk} u_j v_{k,i}$$

$$= e_{kij} u_{j,i} v_k + e_{jki} u_j v_{k,i}$$

$$= v_k\, e_{kij} u_{j,i} - u_j\, e_{jik} v_{k,i}$$

$$= \mathbf{v}\cdot\nabla\times\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\nabla\times\mathbf{v}.$$

2.4 $\nabla\times\nabla\phi$ の i 成分

$$= e_{ijk}(\nabla\phi)_{k,j}$$

$$= e_{ijk}\phi_{,kj}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk}\phi_{,kj} + \frac{1}{2}e_{ijk}\phi_{,kj}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk}\phi_{,kj} - \frac{1}{2}e_{ikj}\phi_{,kj}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk}\phi_{,kj} - \frac{1}{2}e_{ijk}\phi_{,jk}$$

$$= 0$$

2.5 $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{v}$

$$= (e_{ijk} v_{k,j})_{,i}$$

$$= e_{ijk} v_{k,ij}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk} v_{k,ij} + \frac{1}{2}e_{ijk} v_{k,ij}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk} v_{k,ij} - \frac{1}{2}e_{jik} v_{k,ij}$$

$$= \frac{1}{2}e_{ijk} v_{k,ij} - \frac{1}{2}e_{ijk} v_{k,ji}$$

$$= 0$$

3.1 ∇r の i 成分

$$r = \sqrt{x_j x_j}$$

両辺 2乗して

$$r^2 = x_j x_j$$

両辺を x_i で微分して

$$2r\, r_{,i} = x_{j,i} x_j + x_j x_{j,i}$$

$$\Leftrightarrow 2r\, r_{,i} = 2 \underbrace{x_{j,i}}_{=\delta_{ij}} x_j$$

$$\Leftrightarrow r_{,i} = \frac{x_i}{r}$$

3.2 $\nabla \cdot \mathbf{r} = x_{i,i} = \delta_{ii} = 3$

3.2 $\nabla \times \mathbf{r}$ の i 成分

$$= e_{ijk} x_{k,j}$$

$$= e_{ijj}$$

$$= 0.$$

3.4 $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ の i 成分

$$= (a_j x_j)_{,i}$$

$$= a_j x_{j,i}$$

$$= a_j \delta_{ji} = a_i$$

3.5 $(\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r}$

$$= e_{ijk} a_j \frac{\partial}{\partial x_k} x_i$$

$$= e_{ijk} a_j \delta_{ik}$$

$$= e_{iji} a_j = 0$$

3.6 $\nabla \times \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ の i 成分

$$= e_{ijk} \left(\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{k,j}$$

$$= e_{ijk} \left(e_{kpq} a_p \left(\frac{x_q}{r}\right)\right)_{,j}$$

$$= e_{kij} e_{kpq} a_p \left(\frac{x_q}{r}\right)_{,j} \text{ —— } ☆$$

$$\left(\frac{x_q}{r}\right)_{,j} = x_{q,j} \frac{1}{r} + x_q \left(\frac{1}{r}\right)_{,j}$$

$$= \frac{\delta_{jq}}{r} + x_q \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{x_j}{r} \quad (\because 3.1)$$

$$= \frac{\delta_{jq}}{r} - \frac{x_j x_q}{r^3}$$

$$\therefore ☆ = e_{kij} e_{kpq} a_p \left(\frac{\delta_{jq}}{r} - \frac{x_j x_q}{r^2}\right)$$

$$= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \frac{a_p \delta_{jq}}{r}$$

$$- (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) a_p \frac{x_j x_q}{r^3}$$

$$= \frac{a_i \delta_{jj}}{r} - \frac{a_j \delta_{ji}}{r} - a_i \frac{\overbrace{x_j x_j}^{=r^2}}{r^3} + a_j \frac{x_j x_i}{r^3}$$

$$= 3\frac{a_i}{r} - \frac{a_i}{r} - a_i \frac{1}{r} + a_j x_j \frac{x_i}{r^3}$$

$$= \frac{a_i}{r} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \frac{x_i}{r^3}$$