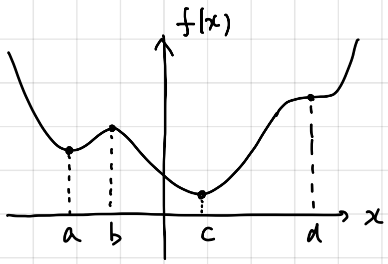
スライド4頁に対応

◎ 1変数（＝設計変数の数が1つ）の場合の制約なし最適化問題

Find $x \ (\in \mathbb{R})$ such that $\min f(x)$



a, b, c, d はすべて停留点 $\left(= \frac{df(x)}{dx} = 0 \right.$ をみたす $\left. \right)$

a, c ではさらに $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ をみたす。 極小点（局所的最小解）

c ではさらに $\forall x \in \mathbb{R}, f(c) < f(x)$ をみたす 最小点（大域的最小解）

cが見つかればBestだが、多くの場合難しい

（線形計画問題や凸最適化問題ならかんたん）

↳ 極小点が見つかれば それは同時に最小点

b では $\frac{d^2 f(b)}{dx^2} < 0$ 極大点

d では $\frac{d^2 f(d)}{dx^2} = 0$

戦略

① $\frac{df(x)}{dx} = 0$ かつ $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ をみたす点をいくつかさがして、

fが1番小さいものをえらぼう

②（$\frac{d^2 f}{dx^2}$ の計算が大変なら）

$\frac{df(x)}{dx} = 0$ をみたす点をいくつかさがして、

fが1番小さいものをえらぼう

スライド5頁に対応 & 6

Hesse行列：

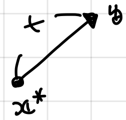
$$H_f(x^*) = \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}$$ を ij成分とする行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$ ← 対称行列

fの停留点x^*があったときに，これが極小点ならば $H_f(x^*)$ は正定値であることを見てみよう．

$x = x^* + t\,y$ とおく．

↑微小なスカラー　↑任意の$\mathbb{R}^n$のベクトル 長さ1の



さらに $g(t) = f(x^* + t\,y)$ とおく．

$g(t)$を $t=0$ の近傍で Taylor 展開すると

$$g(t) = g(0) + \frac{dg(0)}{dt} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 g(0)}{dt^2} t^2 + o(t^2). \quad ☆$$

となる．

Randauの記号

$f(x) = o(g(x))$ のとき，

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

$x \to 0$で fは g よりも速く零に行く

c.f. $f(x) = O(g(x))$ のとき

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty$$

$x \to 0$で fは g と同じくらいの速さで零にいく．

$$\frac{dg(0)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^* + 0 \cdot y)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \nabla f(x^*) \cdot y.$$

連続律

$$f(x,y) = u(x,y)\,v(x,y)$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2$$

$$v(x,y) = \sin xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

念のため…

分かりやすい例で…

今、x^*は停留点なので

$$\nabla f(x^*) = 0 \iff \frac{dg(0)}{dt} = 0.$$

$$\therefore ☆ \iff g(t) - g(0) = \frac{1}{2} \frac{d^2 g(0)}{dt^2} t^2 + o(t^2)$$

$$\frac{d^2 g(0)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\iff g(t) - g(0) = \frac{t^2}{2} y^T H_f(x^*) y + o(t^2) > 0$$

$\times \frac{2}{t^2}$して $t \to 0$ とすると $o(t^2) \to 0$

$$y^T H_f(x^*) y + \cancel{\frac{o(t^2)}{t^2}}^{\,0} > 0$$

$\forall y$に対して

$$y^T H_f(x^*) y > 0.$$

H_fが正定値

Q1 $h_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - b_i$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_{i1}x_1 + \cdots + A_{ik}x_k + \cdots + A_{in}x_n - b_i\right)$$
$$= A_{ik}$$

Q2 Langrange 乗数法の定理より

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(x^*) \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{1k} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} A_{21} \\ \vdots \\ A_{2k} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} A_{m1} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$
$$= A^T \lambda.$$

P11

$\min f(x)$ s.t $Ax = b$ の解 x^* が求まっているとき

$\min f(x)$ s.t $Ax = b + \delta$ の解を知りたい

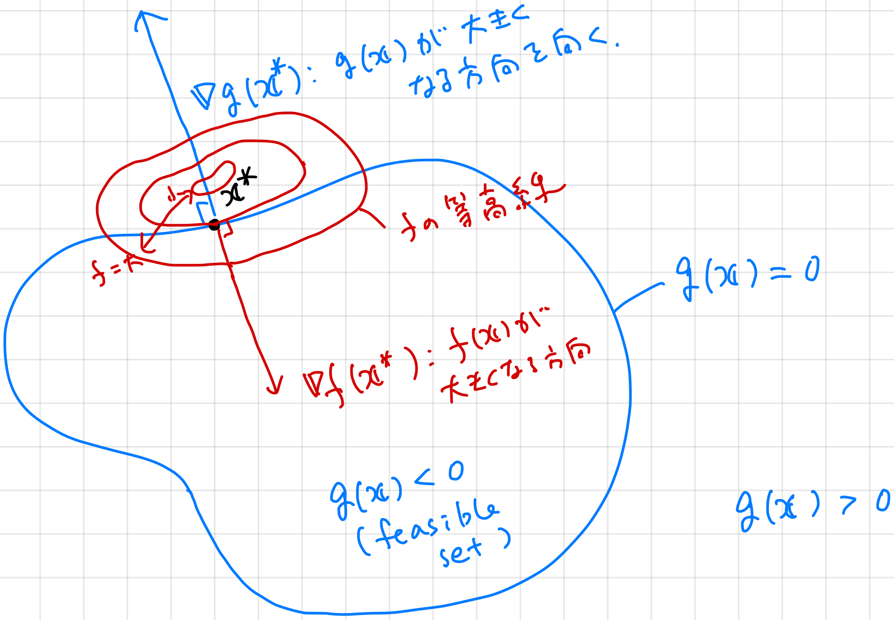
$$\begin{aligned} Ax^* &= b \\ -)\ \ Ax &= b + \delta \\ \hline A(x - x^*) &= \delta \end{aligned}$$

P12

$$\to \quad f(x) = f(x^*) + (x - x^*)^T \nabla f(x^*)$$
$$= f(x^*) + (x - x^*)^T A^T \lambda$$
$$= f(x^*) + (A(x - x^*))^T \lambda$$
$$= f(x^*) + \delta^T \lambda.$$

← b の変数に対する f(x) のかんど

P13


$\nabla g(x^*)$: $g(x)$が大きくなる方向を向く.
x^*
$f=$大
fの等高線
$g(x)=0$
$\nabla f(x^*)$: $f(x)$が大きくなる方向
$g(x)<0$ (feasible set)
$g(x)>0$