力学的シンセシス (3)

システムデザイン工学科
飯盛 浩司

はじめに

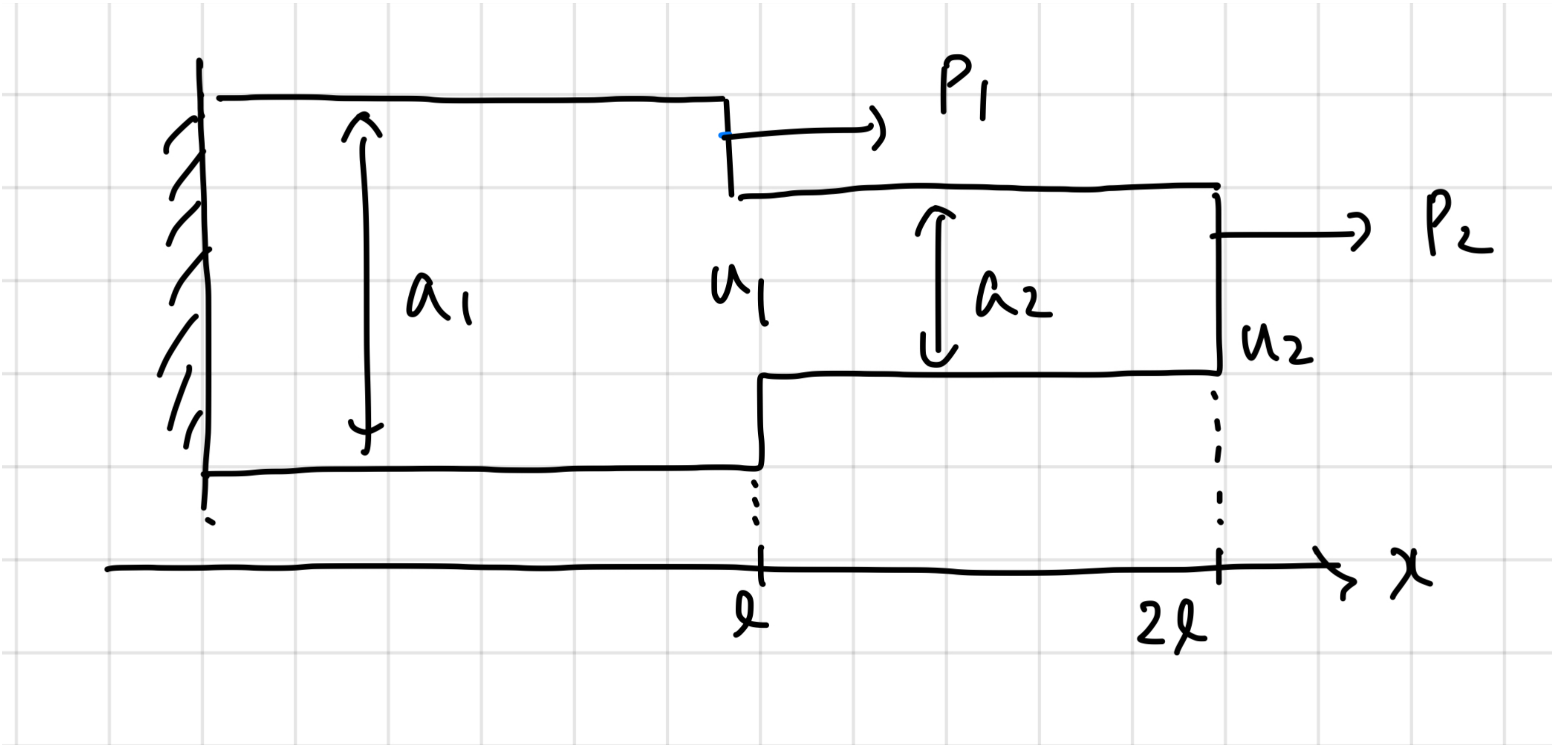
[復習] 力学的シンセシス (特に最適設計問題) で取り扱う問題の例：

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$

such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$

subject to $\mathsf{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$

$a_1 \ell + a_2 \ell \leq c$



➡ 局所最適解を探すためには目的関数の勾配を計算する必要がある

今日の目標: 感度解析の方法を学ぶ

不等式制約がない場合

当面の間、以下の不等式制約がない問題を考えよう：

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$ such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$ subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$.

→ K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を満たす $\boldsymbol{u}$ に対して∇f を求めれば良い.

[復習] 仮想仕事の原理を使うと K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を具体的に書ける→解ける

$$\frac{E}{\ell}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\ell}{E}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{\ell}{E}\begin{pmatrix} \frac{p_1 + p_2}{a_1} \\ \frac{p_1 + p_2}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

感度解析法1: 代入法

$$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$$

$$=$$

$$\nabla f = -\frac{\ell}{E}\begin{pmatrix} \dfrac{(p_1+p_2)^2}{a_1^2} \\ \dfrac{p_2^2}{a_2^2} \end{pmatrix}$$

感度解析法2: 直接微分法 1/3

$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial a_i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} \cdot \boldsymbol{p}$ なので, $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i}$ が計算できれば良さそう.

➡ $\mathsf{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ の両辺を a_i で微分する.

$$\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial a_i}\boldsymbol{u} + \mathsf{K}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \mathsf{K}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} = -\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial a_i}\boldsymbol{u}$$ を解けば良い.

注: $\mathsf{K} = \dfrac{E}{\ell}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 \\ -a_2 & a_2 \end{pmatrix}$ と陽に書けているので $\dfrac{\partial \mathsf{K}}{\partial a_i}$ は簡単に計算できる.

感度解析法2: 直接微分法 2/3

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = -\frac{\ell}{E}\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial a_2} = -\frac{\ell}{E}\frac{p_2^2}{a_2^2}$$

感度解析法2: 直接微分法 3/3

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$ such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$ subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解きたい.

まとめ: 直接微分法

1. K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解く.
2. K$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} = -\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial a_i}\boldsymbol{u}$ (for $i = 1, \cdots, n$) を解く.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial a_i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} \cdot \boldsymbol{p}$ を計算する.

注: n 元の連立方程式を n 回解く必要がある.

感度解析法2: 直接微分法 3/3

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$ such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$ subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解きたい.

まとめ: 直接微分法

1. K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解く.
2. K$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} = -\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial a_i}\boldsymbol{u}$ (for $i = 1, \cdots, n$) を解く.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial a_i} = \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a_i} \cdot \boldsymbol{p}$ を計算する.

注: n 元の連立方程式を n 回解く必要がある.

感度解析法3: 随伴変数法 1/2

Lagrange乗数 $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)^t$ を使って目的関数を以下のように書き換える:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) - \tilde{\boldsymbol{u}}^t(\underbrace{\mathrm{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}}_{u\ \text{が制約を満たすなら零}})$$

$\mathrm{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を満たすなら $\nabla f = \nabla \mathscr{L}$ ➡ $\nabla \mathscr{L}$ を求めれば良い.

感度解析法3: 随伴変数法 2/2

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$ such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$ subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解きたい.

まとめ: 随伴変数法

1. K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ を解く.

2. K$^t\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{p}$ を解く.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial a_i} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial a_i} = -\tilde{\boldsymbol{u}}^t \dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial a_i} \boldsymbol{u}$ を計算する.

注: n 元の連立方程式を2回解けば良い (自己随伴問題ならば1回で良い).