力学的シンセシス (6)

システムデザイン工学科
飯盛 浩司

はじめに

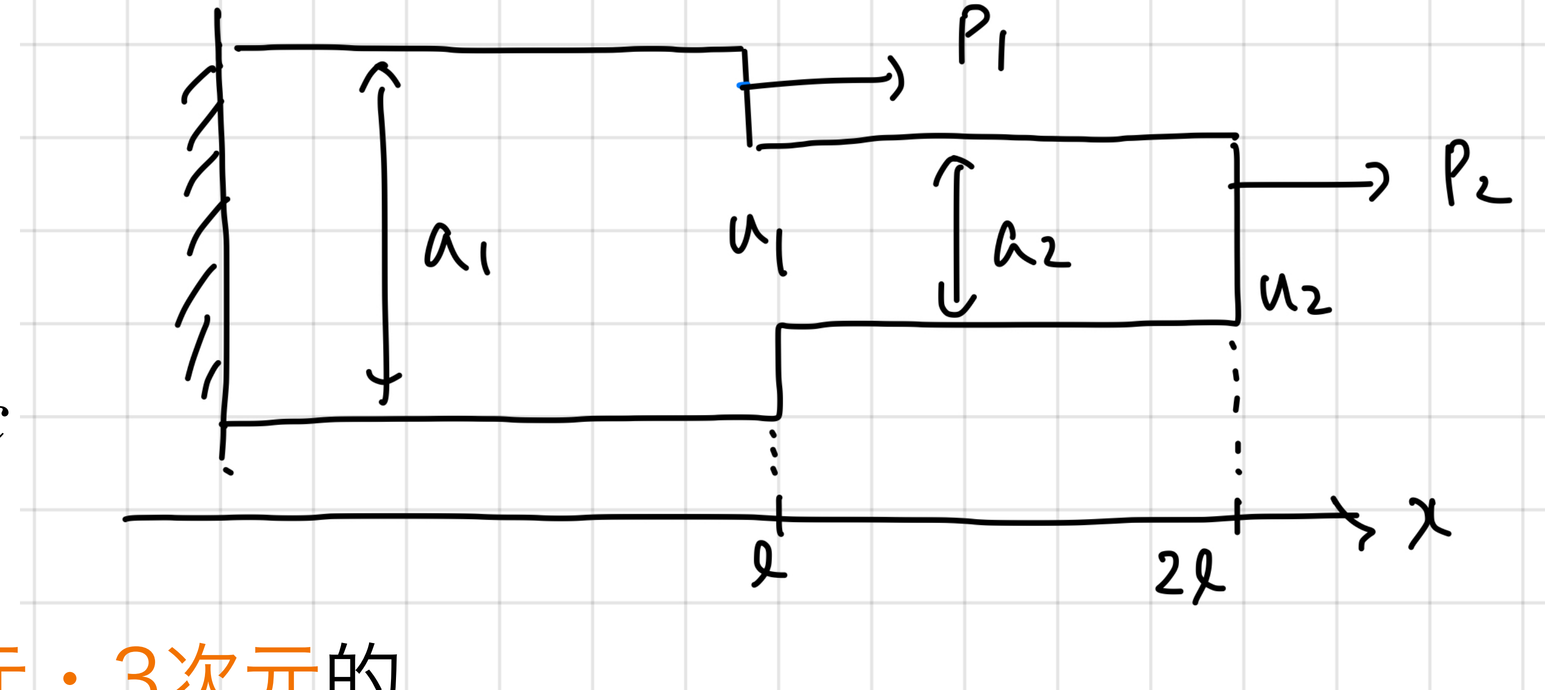
[これまでやってきたこと] 1次元的な変形をする棒(真直棒)の力学的アナリシス&シンセシス

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$

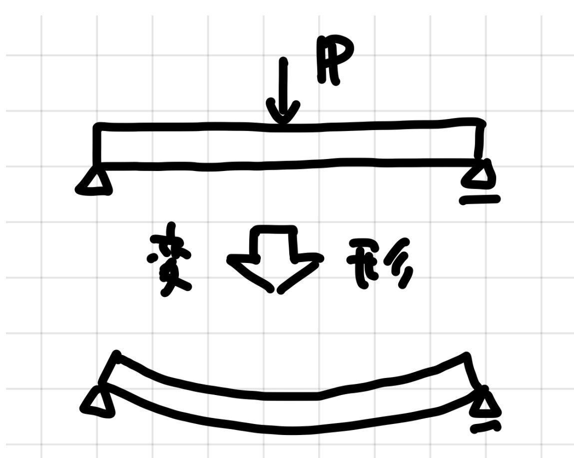
such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$

subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$

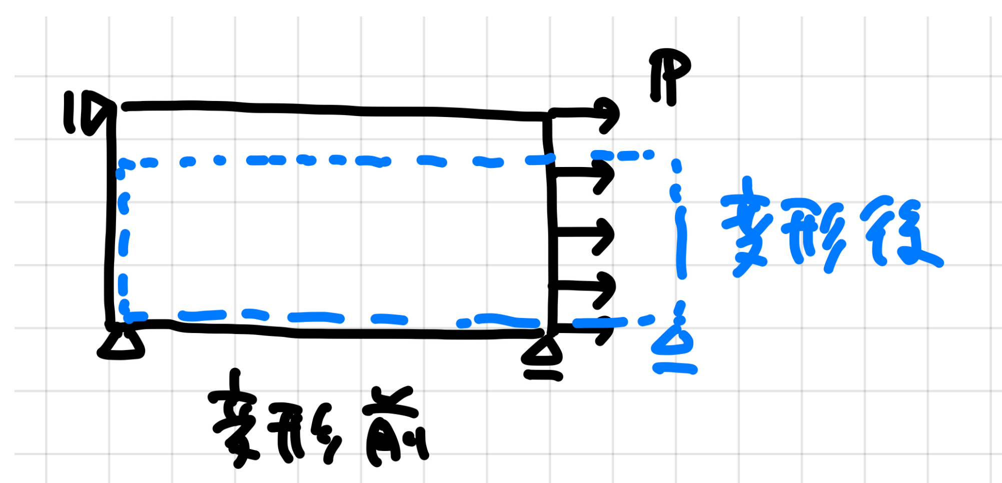
$a_1\ell + a_2\ell \leq c$



→ 実際には物体の変形は2次元・3次元的



例えば梁の曲げ

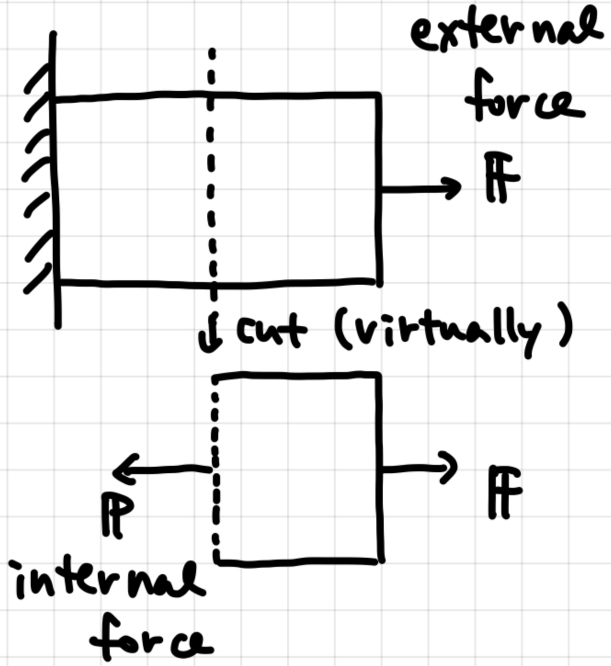


一軸引張試験でも試験片は「縦」方向にも変形

→ 以降、2次元の力学システムのシンセシスを考える。

今日の目標: 2次元的に変形する物体の**モデリング**

応力 (stress) 1/2



棒に外力 $\boldsymbol{F}$[N] が作用して釣合状態にある

⇔ 任意の切断面において内力 $\boldsymbol{P}$ が作用していて

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$$

が成立

応力ベクトル (表面力ベクトル, トラクション) $\boldsymbol{t}$:

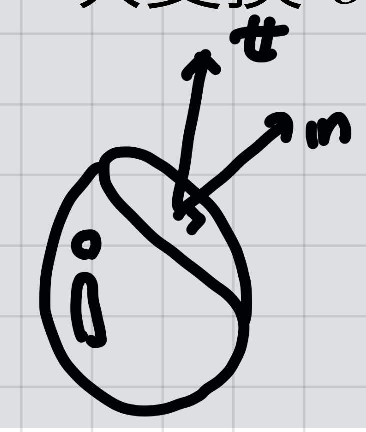
単位面積当たりの内力 [Pa = N/m^2]

応力テンソル

切断面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をトラクション $\boldsymbol{t}$ にうつす一次変換 $\boldsymbol{\sigma}$

$$t_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j$$

を応力テンソルという (↑Cauchyの応力公式)

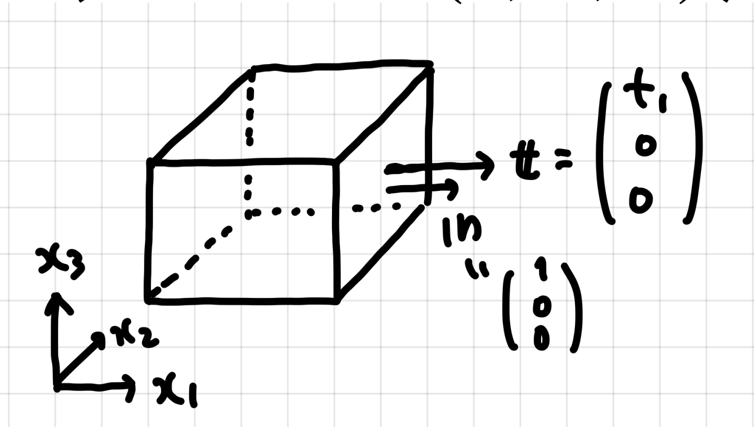


応力 (stress) 2/2

応力テンソルの物理的な意味？ σ_{ij}: x_i 軸に垂直な面に働く表面力の x_j 成分

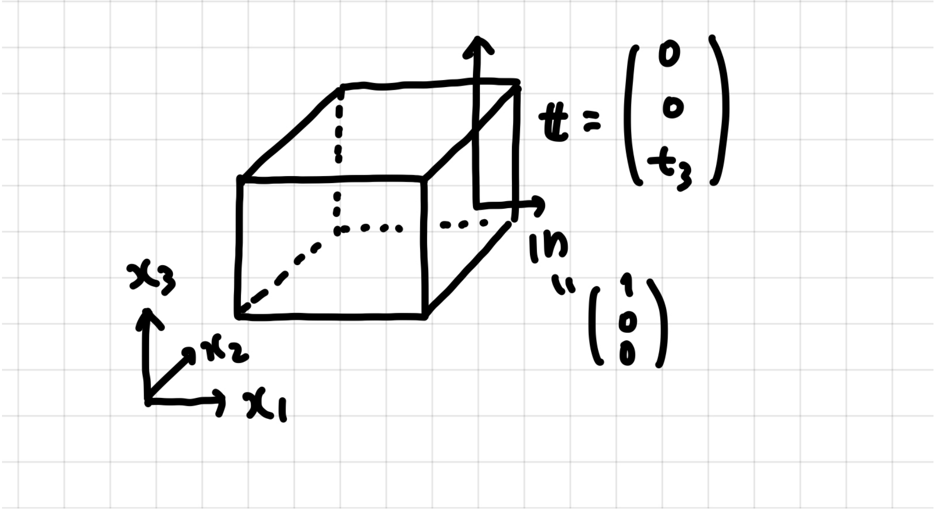
各辺が軸に平行な直方体を考える:

“右面” (法線: $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)^t$) に働く表面力 $\boldsymbol{t} = (t_1, 0, 0)^t$



$$t_1 = \sigma_{j1} n_j = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sigma_{11}.$$

“右面” (法線: $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)^t$) に働く表面力 $\boldsymbol{t} = (0, 0, t_3)^t$

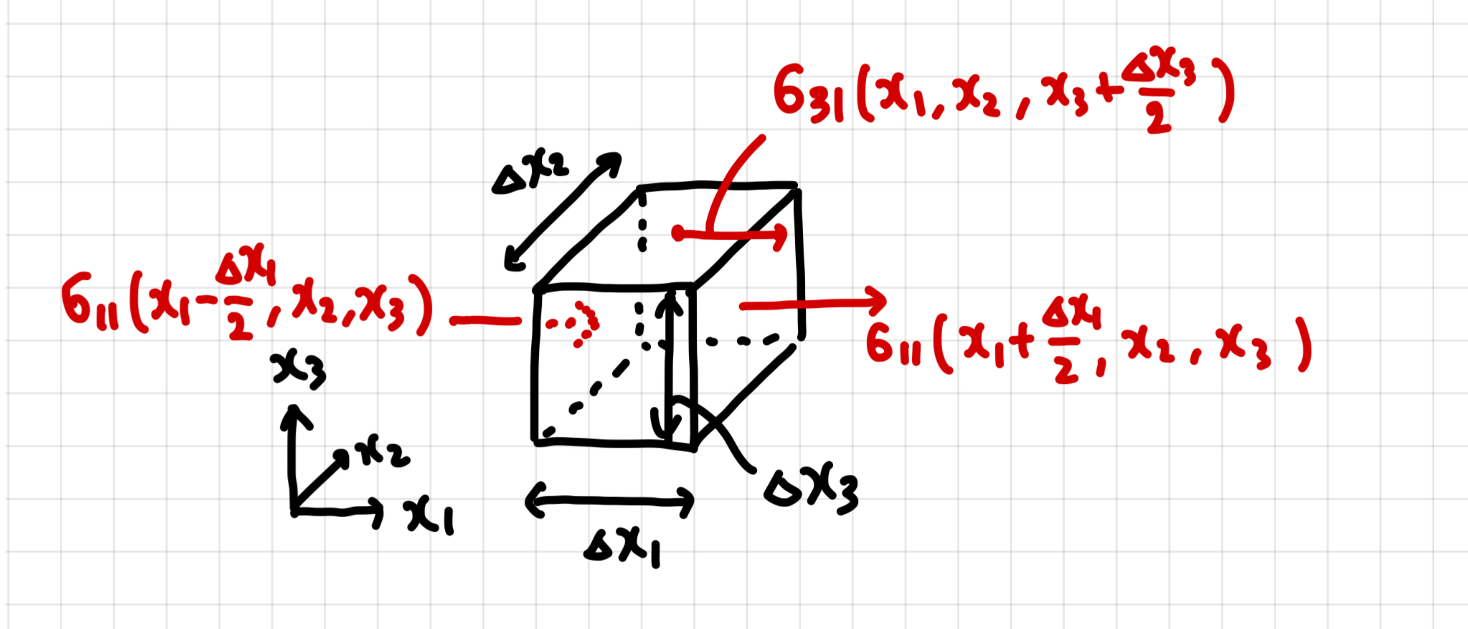


$$t_3 = \sigma_{j3} n_j = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = \sigma_{13}.$$

注意: モーメントの釣り合いを考えると $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

つりあい式 1/2

各辺 (長さ Δx_i) が x_i 軸に平行で, 重心が原点にある微小な直方体を考える.



左右の面に働く表面力の第一成分:

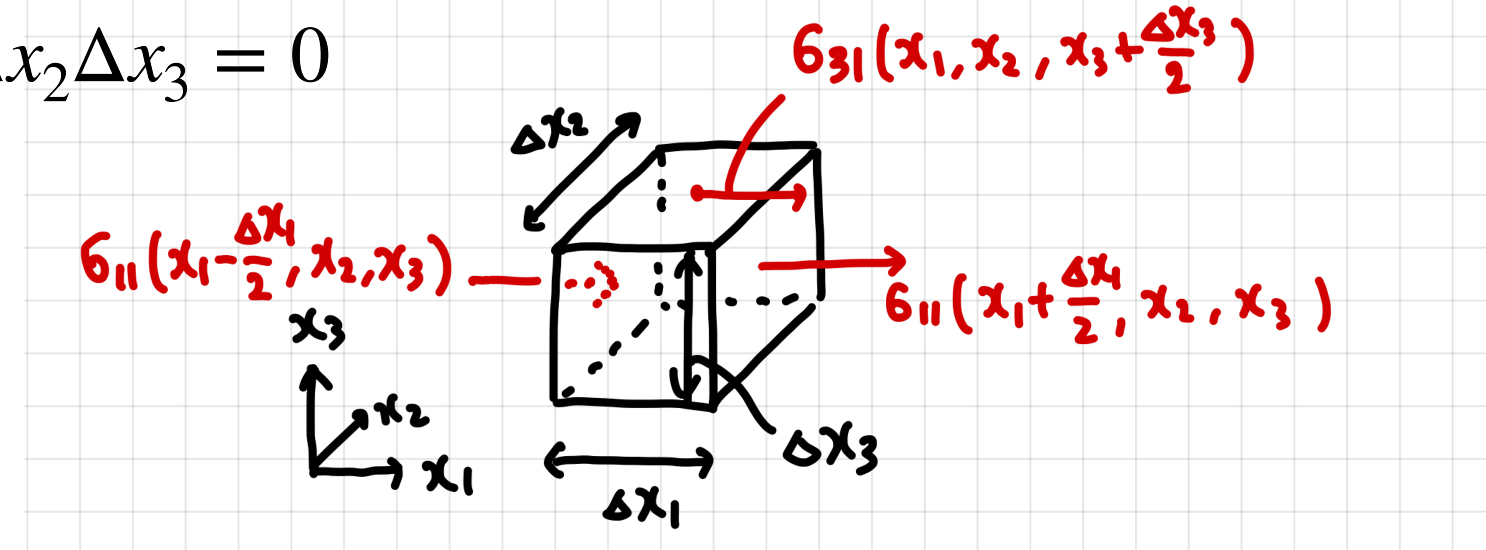
$$\sigma_{11}(x_1 \pm \Delta x_1/2,\, x_2,\, x_3) \simeq \sigma_{11}(x_1,\, x_2,\, x_3) \pm \partial\sigma_{11}(x_1,\, x_2,\, x_3)/\partial x_1 \times \Delta x_1/2$$

Quiz: 上下、手前、奥の面に働く表面力の第一成分を求めよ.

つりあい式 2/2

微小直方体に体積力 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)^t$ が働くとき, x_1 軸方向の力の釣り合いは以下のように書ける:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1/2, x_2, x_3)\Delta x_2 \Delta x_3 - \sigma_{11}(x_1 - \Delta x_1/2, x_2, x_3)\Delta x_2 \Delta x_3 \\
&+\sigma_{21}(x_1, x_2 + \Delta x_2/2, x_3)\Delta x_3 \Delta x_1 - \sigma_{21}(x_1, x_2 - \Delta x_2/2, x_3)\Delta x_3 \Delta x_1 \\
&+\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3/2)\Delta x_1 \Delta x_2 - \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 - \Delta x_3/2)\Delta x_1 \Delta x_2 \\
&+F_i \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0
\end{aligned}
$$



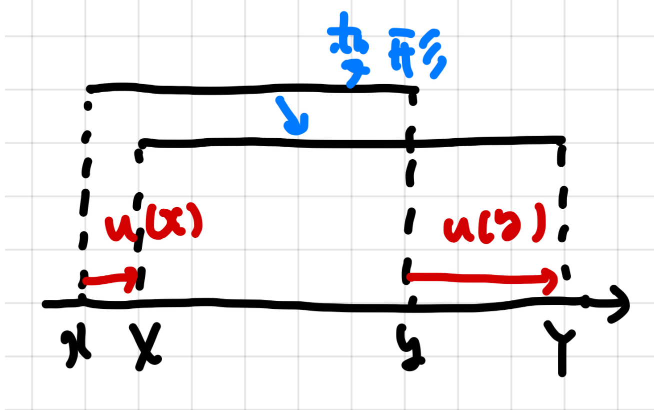
前のページに示した近似を用い, さらに $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \to 0$ の極限をとると,

釣り合い式: $\sum_{j=1}^{3} \partial \sigma_{j1} / \partial x_j + F_1 = 0$ を得る.

$i = 2, 3$ 方向も同様: $$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + F_i = 0.$$

ひずみ (strain) 1/2

1次元的な棒の変形を考える.



ひずみ ε =単位長さあたりの伸び:

$$\varepsilon(x) = \lim_{y-x \to 0} \frac{(Y-y)-(X-x)}{y-x} = \lim_{y-x \to 0} \frac{u(y)-u(x)}{y-x} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\Rightarrow u(y) \simeq u(x) + \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}(y-x)$$

3次元的な棒の変形だと？→変位はベクトル

$$u_i(\boldsymbol{y}) \simeq u_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{3} \underline{\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}}(y_j - x_j)$$

変形を表していそうだが…
ひずみだけではなく, **回転**に関する成分も含んでいる

→ ひずみに関する成分だけを取り出したい

ひずみ (strain) 2/2

以下のように分解:

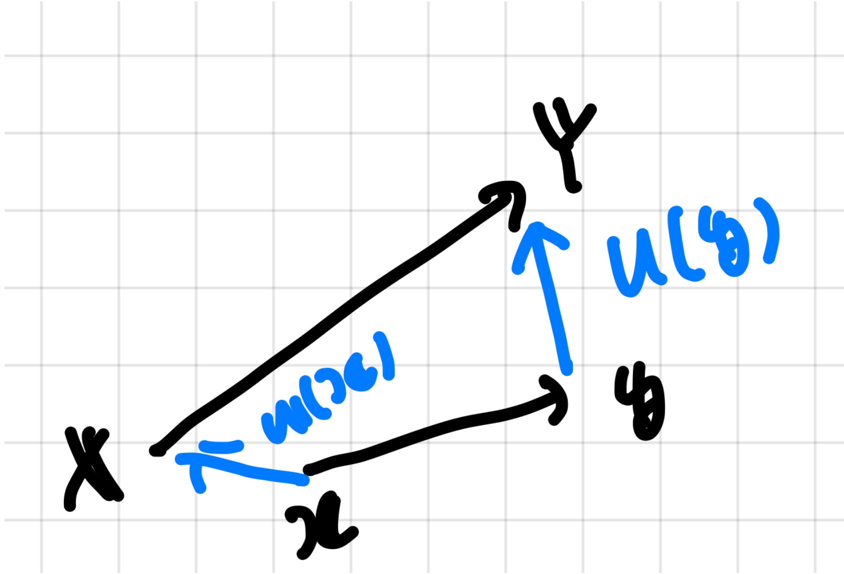
$$\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)}_{\text{ひずみテンソル } \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right)}_{\text{微小回転テンソル } \omega_{ij}(\boldsymbol{x})}$$

$\varepsilon_{ij} = 0$ のとき:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x} + \mathrm{W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X} = (\mathrm{I} + \mathrm{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$



(変位が微小であれば) 微小線素 $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ の長さの変化は零

$$|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}|^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^t(\mathrm{I} + \mathrm{W})^t(\mathrm{I} + \mathrm{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

$$= |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^t(\mathrm{W}^t + \mathrm{W})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^t\mathrm{W}^t\mathrm{W}(y - x)$$

➡ ω_{ij} は微小回転を表し, 変形に寄与するのは ε_{ij} のみ. 注: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

構成則 1/2

応力とひずみの関係を構成則という.

応力とひずみの関係が線形である(線形弾性体)とすると、一般的には

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} C_{ijk\ell} \varepsilon_{k\ell}$$

なる関係が成立するが, 以降, 等方の弾性体を仮定する.

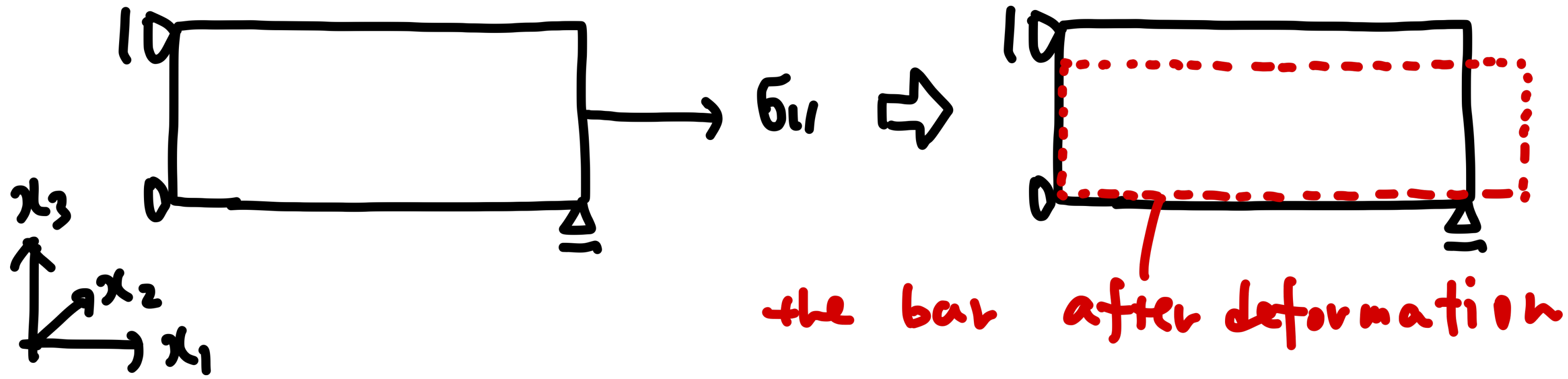
線形等方弾性体の構成則

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

ここに, δ_{ij} はKroneckerのデルタである.

Poisson比

一軸引っ張りを受ける棒を考える:



等方線形弾性体の構成則より

$$\sigma_{11} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{11}, \qquad \cdots(1)$$

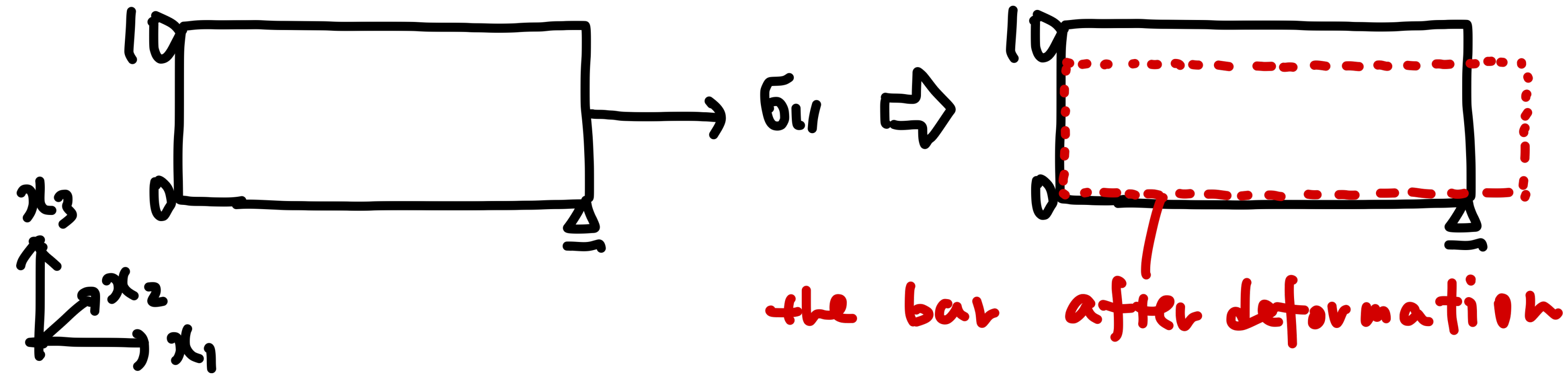
$$0 = \sigma_{22} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{22}, \qquad \cdots(2)$$

$$0 = \sigma_{33} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{33}\,. \qquad \cdots(3)$$

(2), (3) より$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$. これを(1)に代入すると $\varepsilon_{22} = -\underbrace{\boxed{\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}}}_{\text{Poisson比 } \nu}\varepsilon_{11}$ を得る.

Young率

一軸引っ張りを受ける棒を考える:



等方線形弾性体の構成則より

$$\sigma_{11} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$0 = \sigma_{22} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{22},$$

$$0 = \sigma_{33} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{33}\,.$$

$\varepsilon_{22} = -\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\varepsilon_{11}$ を(1)に代入すると $\sigma_{11} = \underbrace{\boxed{\dfrac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}}}_{\text{Young率 } E}\varepsilon_{11}$ を得る.

二次元弾性論: 平面ひずみ状態

$u_3(\boldsymbol{x}) = 0$ および $u_1(\boldsymbol{x})$ と $u_2(\boldsymbol{x})$ が x_3 に依存しない状況を考える.

例: 物体が x_3 方向に厚い.

→ このような変形状態にある弾性体を平面ひずみ状態にあるという.

定義より $u_3 = 0, \;\; u_{i,3} = 0,$ したがって $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0.$

Quiz: 平面ひずみを仮定した時の等方線形弾性体の構成則を書け.

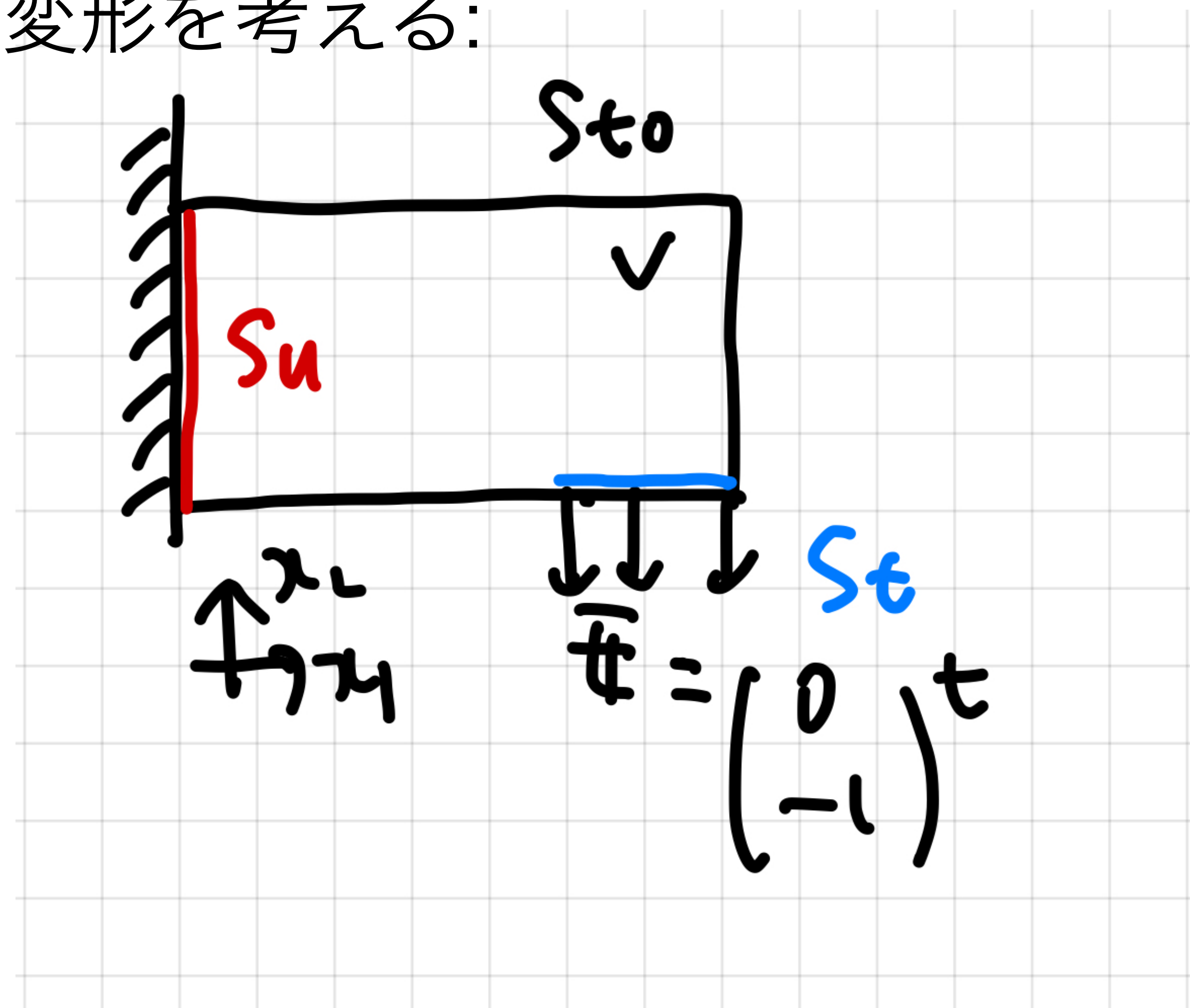
二次元弾性論: 平面応力状態

$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ のとき平面応力状態 (x_3方向に薄い板)

Quiz: 平面応力を仮定した時の等方線形弾性体の構成則を書け.

等方線形弾性体モデル

以降, 平面応力状態にある等方線形弾性体 Vに, 表面力 $\bar{\boldsymbol{t}}$ が作用した時の変形を考える:



$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ji}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = 0 \quad \boldsymbol{x} \in V$$

$$u_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in S_u$$

$$t_i(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ji}(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \bar{t}_i & \boldsymbol{x} \in S_t \\ 0 & \boldsymbol{x} \in S_{t0} \end{cases}$$

変位とひずみ の関係

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right)$$

Voigt標記した構成則

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' + 2\mu & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Navierの式

Quiz: 平面応力状態を仮定し, 釣り合い式を変位のみで表せ.