力学的シンセシス (8)

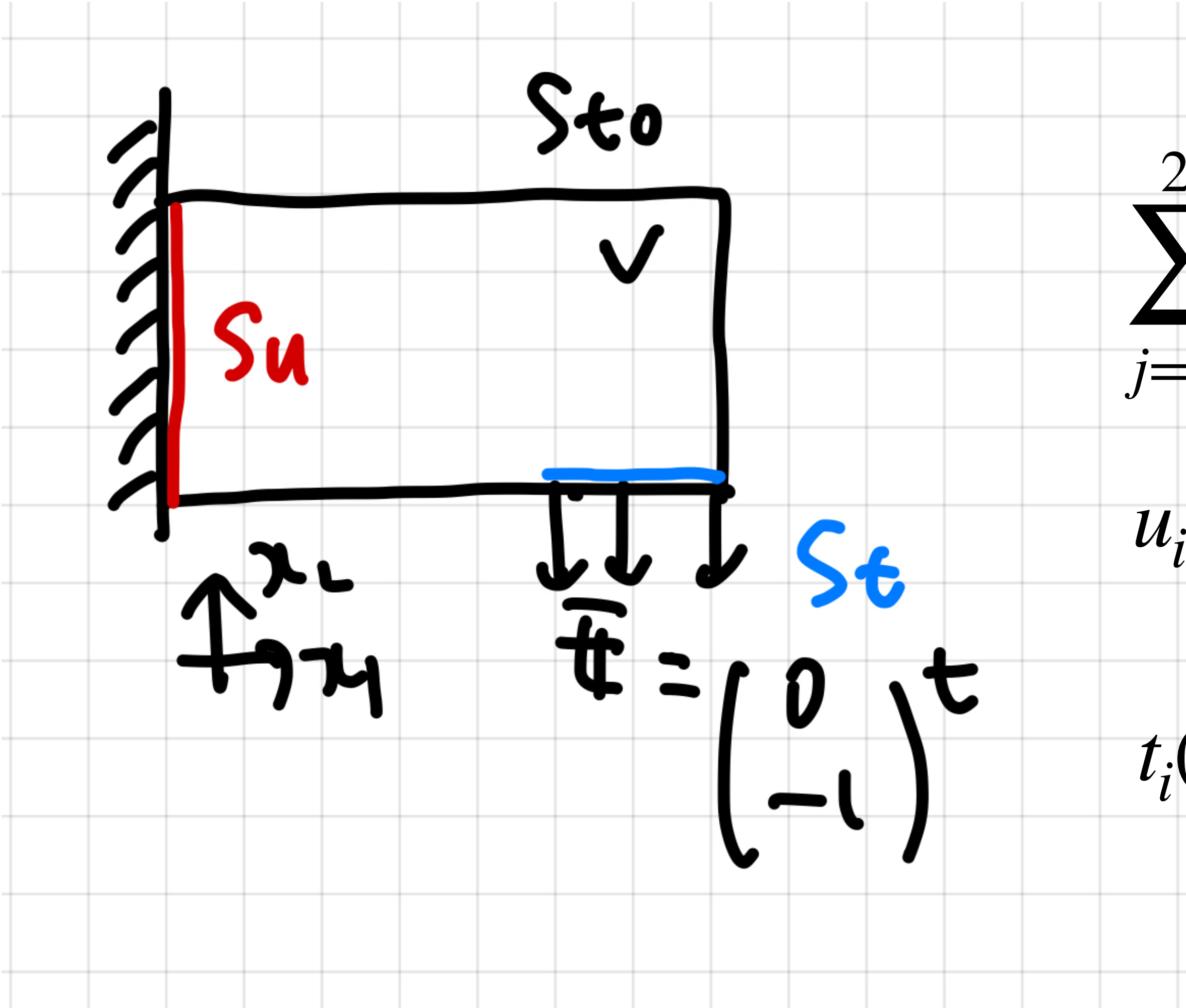
システムデザイン工学科

飯盛 浩司

今日の目標: 弱形式を連立一次方程式に変換する

はじめに

以下の境界値問題の解法としての有限要素法を考える:



$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ji}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = 0 \quad \boldsymbol{x} \in V \quad \cdots \text{ (1)}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \in S_u \quad \cdots \text{ (2)}$$

$$t_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ji}(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \bar{t}_i & \boldsymbol{x} \in S_t \cdots \text{ (3)} \\ 0 & \boldsymbol{x} \in S_{t0} \cdots \text{ (4)} \end{cases}$$

変位とひずみの関係

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right)$$

Voigt標記した構成則

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' + 2\mu & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

弱形式

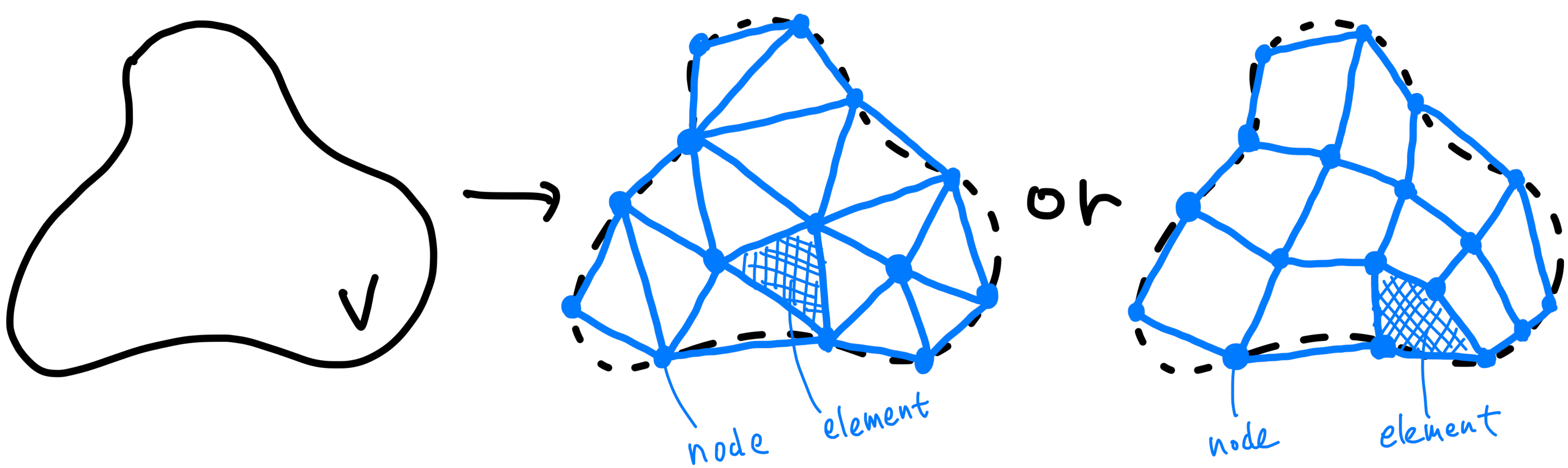
境界値問題(1)-(4)は以下の弱形式に変換できることを学んだ:

弱形式 (weak form)

$$\int_V \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} v_{i,j} \sigma_{ji} \mathrm{d}V = \int_{S_t} \sum_{i=1}^{2} \tilde{u}_i \bar{t}_i \mathrm{d}S \quad \cdots \text{(5)}$$

注: $v_{i,j} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ という記号を導入

FreeFemでやったように, V を三角形(または四角形)のパッチに分割:

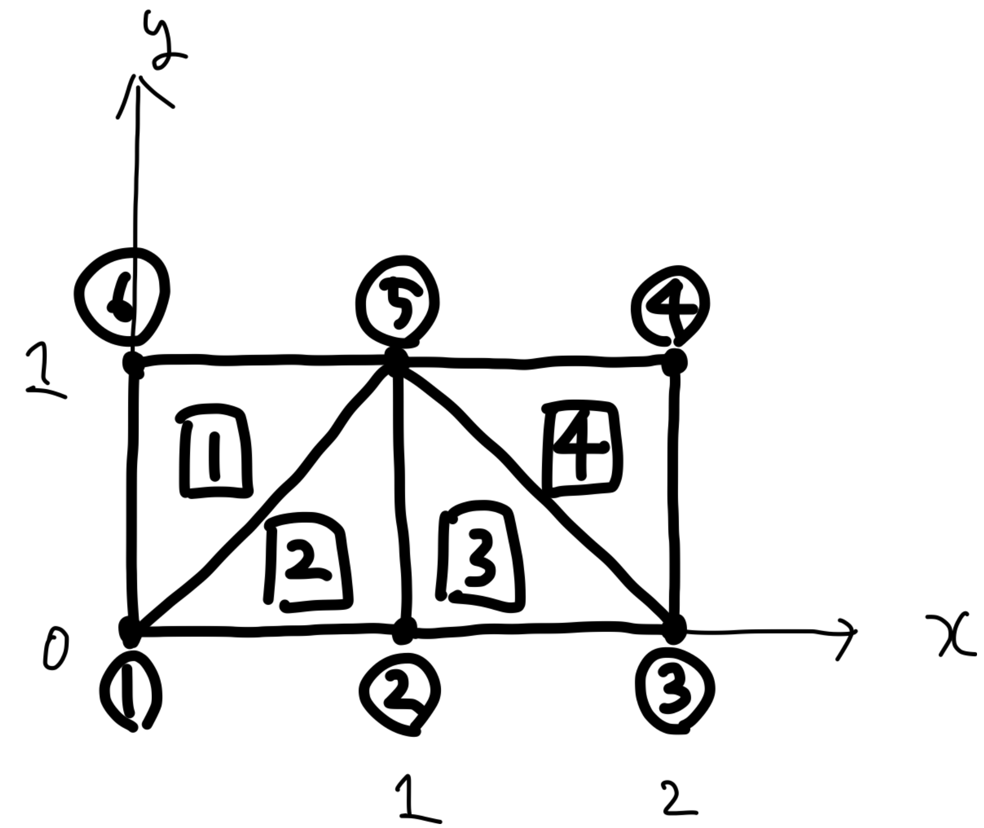


ここでは, 三角形要素を考える.

空間離散化 1/2

このように分割した V の情報をどのように保持するか?

例として, V が長方形の場合を考え(右図),
V を四つの三角形に分割してみよう.



必要な情報:

- 節点(node)iの(x, y)座標
- 三角形要素$\boxed{j}$を構成する節点の番号(connectivity)

例:

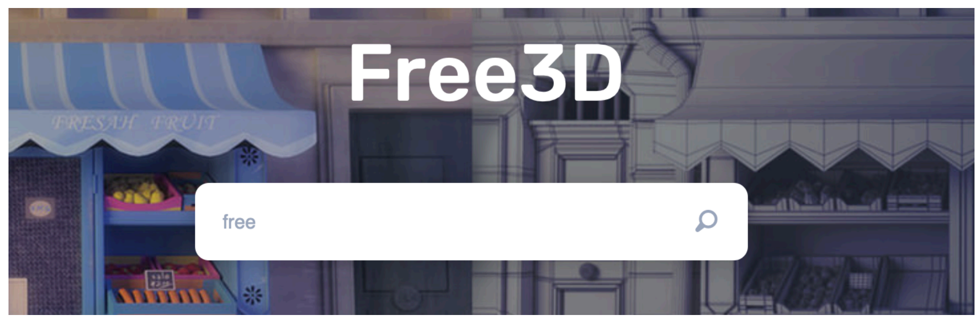
```
# nodal coodinate
# index, x, y
1, 0.0, 0.0
2, 1.0, 0.0
3, 2.0, 0.0
4, 2.0, 0.0
5, 1.0, 1.0
6, 0.0, 1.0
```

```
# connectivity
# index, 1st, 2nd, and 3rd vertex
1, 1, 5, 6
2, 1, 2, 5
3, 2, 3, 5
4, 3, 4, 5
```

空間離散化 2/2

注意: 前頁では, 平面を三角形分割することを考えたが, これを三次元空間内の曲面へと拡張することは容易である.

例: 3Dプリンタに入力するいわゆる 3D データ:



https://free3d.com

Stanford Bunny:

The "Stanford Bunny"

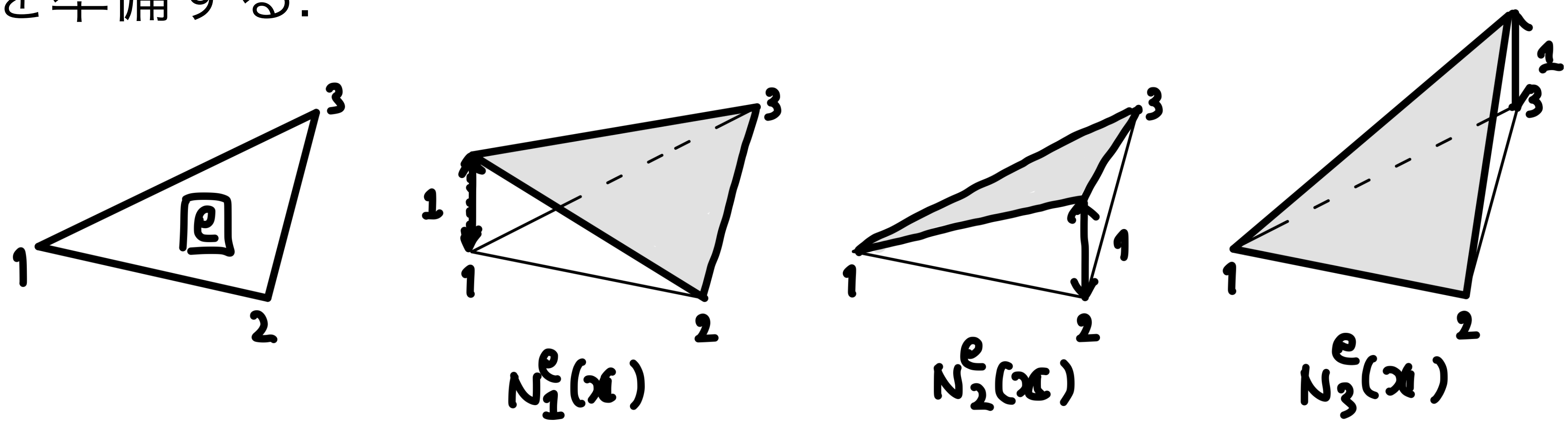
The Stanford 3D Scanning Repository

http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep

様々な3Dモデルの形式がある(例えば STL, STEP, IGES, OFF, PLY, 3DS などなど) が, いずれも基本的には前頁に紹介した情報が記載されているに過ぎない. 便利な (フリーの) ソフトウェア: MeshLab

基底関数

以上の準備のもと, ある要素 $\boxed{e}$ の i 番節点で1, その他の節点で0となる一次関数を準備する:



このような関数を用いて, 解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を以下のように展開:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} N^i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}^i \qquad \cdots \ (6)$$

ここに, $\boldsymbol{a}^i$ は(全体) i 番節点における変位(節点変位)を表す. また, このような $N^i(\boldsymbol{x})$ を基底関数と呼ぶ.

関数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を求める問題 → 有限個の節点変位を求める問題

以降, (6)を弱形式(5)に代入していく.

弱形式の書き換え

弱形式 (5) を以下のように書き換え:

$$\int_V \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \tilde{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ji} \mathrm{d}V = \int_{S_t} \sum_{i=1}^{2} v_i t_i \mathrm{d}S \quad \cdots \text{ (8)}$$

ここに, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ は試験関数 v に対応する仮想的なひずみ.

Voigt標記

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

を用いて, (8)をさらに書き換える:

$$\int_V (\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{22}, \tilde{\gamma}_{12}) \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int_{S_t} (\tilde{u}_1 \bar{t}_1 + \tilde{u}_1 \bar{t}_2) \mathrm{d}S \quad \cdots \text{ (9)}$$

ここに, $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ は工学ひずみである.

Galerkin法 1/4

(6) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{\ell=1}^{N} \boldsymbol{a}^{\ell} N^{\ell}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow$

$$\varepsilon_{11}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{\ell}^{N} a_1^{\ell} N_{,1}^{\ell}(\boldsymbol{x}) \qquad \cdots(10)$$

$$\varepsilon_{22}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{\ell}^{N} a_2^{\ell} N_{,2}^{\ell}(\boldsymbol{x}) \qquad \cdots(11)$$

$$\gamma_{12}(\boldsymbol{x}) \simeq \sum_{\ell}^{N} \left(a_1^{\ell} N_{,2}^{\ell}(\boldsymbol{x}) + a_2^{\ell} N_{,1}^{\ell}(\boldsymbol{x}) \right) \qquad \cdots(12)$$

試験関数として基底関数と同じものを用いる (Galerkin法):

$v_i(\boldsymbol{x}) = \delta_{i1} N^m(\boldsymbol{x})$

$$\tilde{\varepsilon}_{11}(\boldsymbol{x}) = N_{,1}^{m}(\boldsymbol{x}), \qquad \cdots(13)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{22}(\boldsymbol{x}) \simeq 0, \qquad \cdots(14)$$

$$\tilde{\gamma}_{12}(\boldsymbol{x}) \simeq N_{,2}^{m}(\boldsymbol{x}) \qquad \cdots(15)$$

Galerkin法 2/4

(10)-(15) を弱形式 (9) に代入

$$
(9)\ \Rightarrow \int_V (N_{,1}^m,\ 0,\ N_{,2}^m)\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_{\ell=1}^N a_1^\ell N_{,1}^\ell\\ \sum_{\ell=1}^N a_2^\ell N_{,2}^\ell\\ \sum_{\ell=1}^N (a_1^\ell N_{,2}^\ell + a_2^\ell N_{,1}^\ell)\end{pmatrix}\mathrm{d}V = \int_{S_t} N^m \bar{t}_1 \mathrm{d}S
$$

$$
\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^N \int_V (N_{,1}^m,\ 0,\ N_{,2}^m)\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)N_{,1}^\ell & \lambda N_{,2}^\ell\\ \lambda N_{,1}^\ell & (\lambda+2\mu)N_{,2}^\ell\\ \mu N_{,2}^\ell & \mu N_{,1}^\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^\ell\\ a_2^\ell\end{pmatrix}\mathrm{d}V = \int_{S_t} N^m \bar{t}_1 \mathrm{d}S
$$

$$
\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^N \int_V ((\lambda+2\mu)N_{,1}^m N_{,1}^\ell + \mu N_{,2}^m N_{,2}^\ell,\ \lambda N_{,1}^m N_{,2}^\ell + \mu N_{,2}^m N_{,1}^\ell)\begin{pmatrix}a_1^\ell\\ a_2^\ell\end{pmatrix}\mathrm{d}V = \int_{S_t} N^m \bar{t}_1 \mathrm{d}S
$$

$\cdots$(16)

Galerkin法 3/4

Quiz: 試験関数として $v_i(\boldsymbol{x}) = \delta_{i2} N^m(\boldsymbol{x})$ を用いて同じことを実行せよ:

$$\sum_{\ell=1}^{N} \int_V \left(\lambda N_{,2}^{m} N_{,1}^{\ell} + \mu N_{,1}^{m} N_{,2}^{\ell},\ \mu N_{,1}^{m} N_{,1}^{\ell} + (\lambda + 2\mu) N_{,2}^{m} N_{,2}^{\ell} \right) \begin{pmatrix} a_1^\ell \\ a_2^\ell \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \int_{S_t} N^m \bar{t}_2 \mathrm{d}S \quad \cdots (17)$$

Galerkin法 4/4

以上より, 以下の連立一時方程式を得る:

$$\sum_{\ell=1}^{N}\int_V \left((\lambda+2\mu)N_{,1}^{m}N_{,1}^{\ell}+\mu N_{,2}^{m}N_{,2}^{\ell},\ \lambda N_{,1}^{m}N_{,2}^{\ell}+\mu N_{,2}^{m}N_{,1}^{\ell}\right)\begin{pmatrix}a_1^{\ell}\\ a_2^{\ell}\end{pmatrix}\mathrm{d}V=\int_{S_t}N^m\bar{t}_1\mathrm{d}S \quad \cdots(16)$$

$$\sum_{\ell=1}^{N}\int_V \left(\lambda N_{,2}^{m}N_{,1}^{\ell}+\mu N_{,1}^{m}N_{,2}^{\ell},\ \mu N_{,1}^{m}N_{,1}^{\ell}+(\lambda+2\mu)N_{,2}^{m}N_{,2}^{\ell}\right)\begin{pmatrix}a_1^{\ell}\\ a_2^{\ell}\end{pmatrix}\mathrm{d}V=\int_{S_t}N^m\bar{t}_2\mathrm{d}S \quad \cdots(17)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{N}\begin{pmatrix}k_{11}^{m\ell} & k_{12}^{m\ell}\\ k_{21}^{m\ell} & k_{22}^{m\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^{\ell}\\ a_2^{\ell}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1^{\ell}\\ q_2^{\ell}\end{pmatrix} \text{ for } m=1,\cdots,N$$

$$\Leftrightarrow \mathsf{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{q} \quad \cdots(18)$$

ここに $\mathsf{K}\in\mathbb{R}^{2N\times 2N}$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^{2N}$, $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{2N}$ はそれぞれ, 例えば, 以下のように定義される: $a_{2i-1}=a_1^i$, $a_{2i}=a_2^i$. (18) を計算機で解き, その解を(6)に代入すると変位の近似解が求まる.