

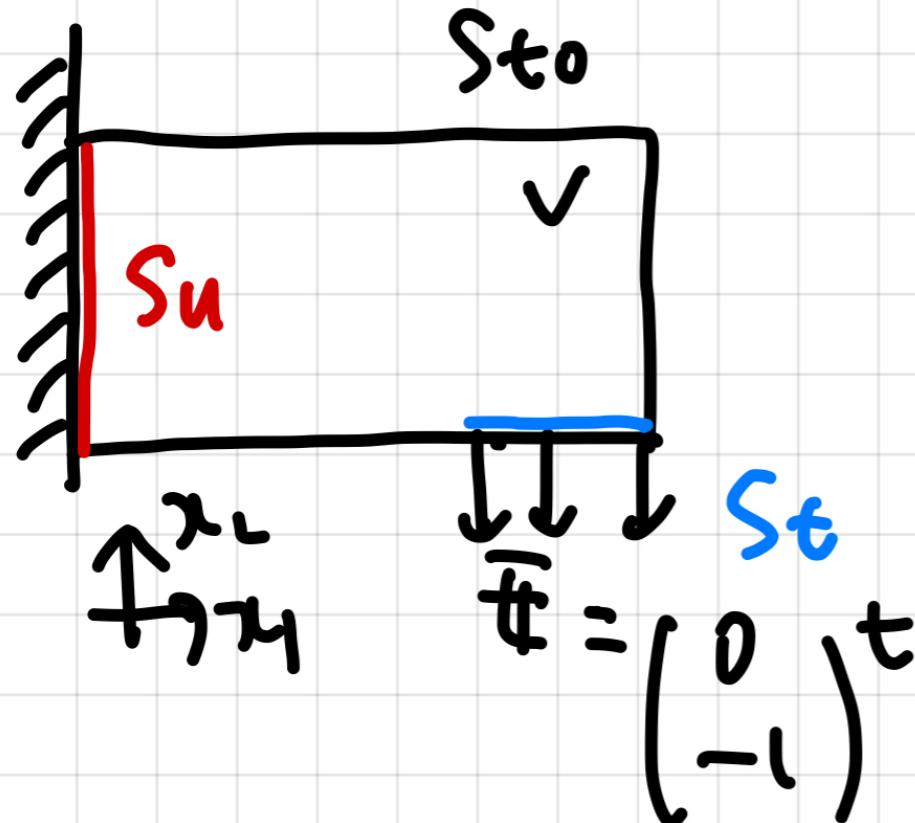
# 力学的シンセシス (7)

---

システムデザイン工学科  
飯盛 浩司

# はじめに

前回, 平面応力状態にある2次元の等方線形弾性の変形のモデリングについて学んだ. 今日の目標: そのアナンリシス (境界値問題(1)-(4)の数値解法).



$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad x \in V \quad \cdots (1)$$

$$u_i(x) = 0 \quad x \in S_u \quad \cdots (2)$$

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}(x) n_j(x) = \begin{cases} \bar{t}_i & x \in S_t \\ 0 & x \in S_{t0} \end{cases} \cdots (3)$$

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}(x) n_j(x) = \begin{cases} \bar{t}_i & x \in S_t \\ 0 & x \in S_{t0} \end{cases} \cdots (4)$$

変位とひずみの関係

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)$$

Voigt標記した構成則

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' + 2\mu & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

# 有限要素法 1/5

1. 偏微分方程式 (1) を重み付き残差式に変換

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad x \in V \quad \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^2 \left( v_i(x) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} \right) \quad x \in V$$

$$\Rightarrow 0 = \int_V \sum_{i=1}^2 \left( v_i(x) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} \right) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 v_i(x) \frac{\partial \sigma_{ji}(x)}{\partial x_j} dV$$

重み付き残差式

注意:  $v(x)$  を試験関数と呼ぶ.

# 有限要素法 2/5

2. 重み付き残差式  $0 = \int_V \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] dV$  を書き換える.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{j=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}) \right) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x})) \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \text{なので、}$$

重み付き残差式  $\Leftrightarrow$

$$0 = \int_V \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}) \right) dV - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV \quad \text{となる.}$$

# 有限要素法 3/5

$$0 = \int_V \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}) \right) dV - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$= F_j(\mathbf{x})$  とおく。

$$\Leftrightarrow 0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV \quad \because \text{Gaussの発散定理}$$

# 有限要素法 4/5

$$\Leftrightarrow 0 = \int_S \sum_{j=1}^2 F_j(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_S \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_S \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$S_u$  で  $v(\mathbf{x}) = 0$  とすると  $t_i = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji} n_j$  が表面力であることに注意すると

$$\Rightarrow 0 = \int_{S_t} \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

弱形式

を得る。

# 有限要素法 5/5

弱形式を書き換える:

$$0 = \int_{S_t} \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) dS - \int_V \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_{S_t} (v_1 t_1 + v_2 t_2) dS - \int_V \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sigma_{21} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sigma_{12} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sigma_{22} \right) dV$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_{S_t} (v_1 t_1 + v_2 t_2) dS - \int_V \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sigma_{11} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \sigma_{12} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sigma_{22} \right) dV$$

⋮

# 有限要素法 6/6

弱形式を書き換える:

$$\int_V \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) dV - \int_{S_t} \sum_{i=1}^2 v_i(\mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) dS$$

# 有限要素法 5/5

弱形式をGalerkin法で離散化すると連立一次方程式に. (本講義では省略)  
→ コンピュータで解ける.

代わりに, FreeFemを使った有限要素法の実装を紹介

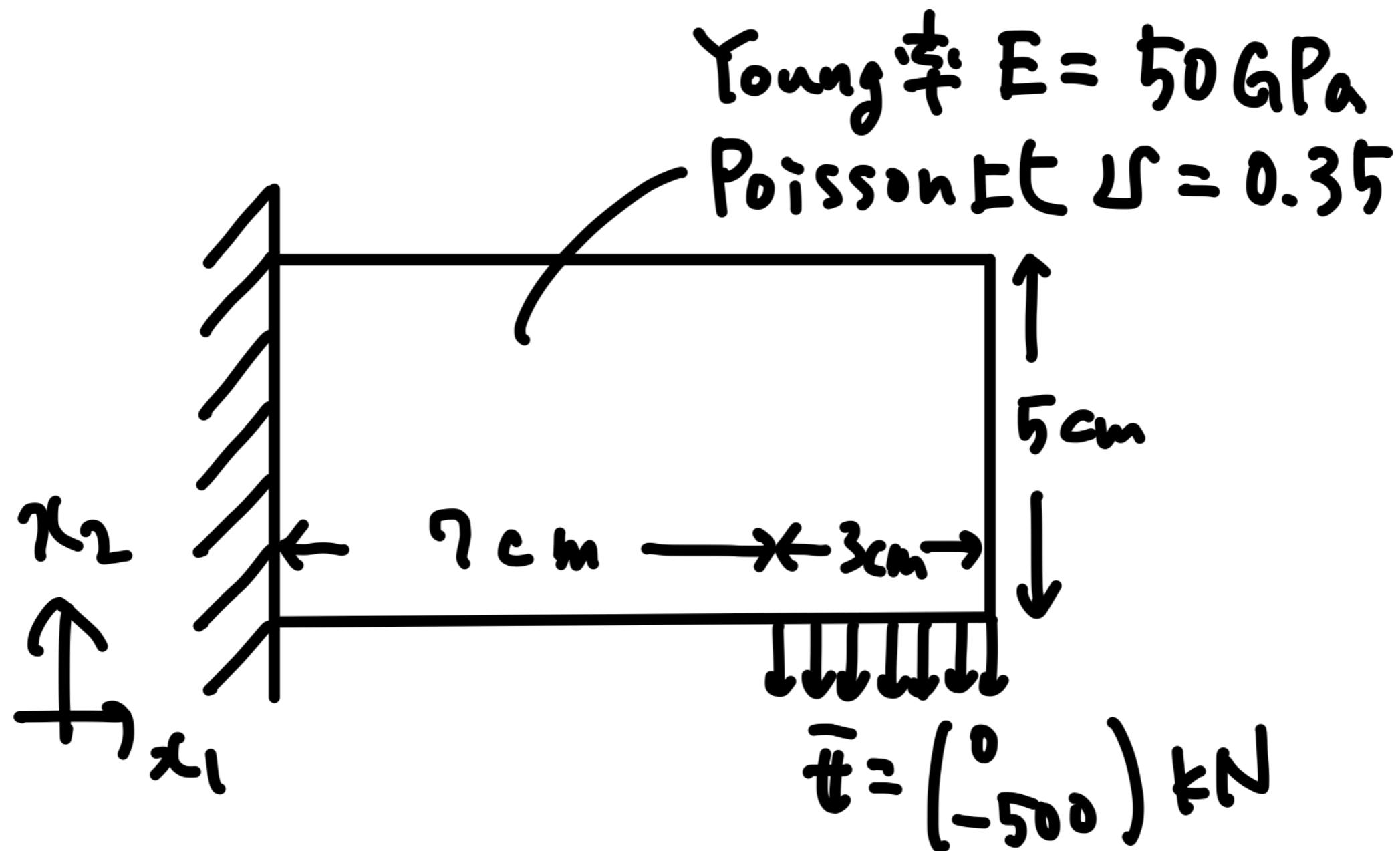


弱形式を入力すると  
偏微分方程式の境界値問題を解いてくれる

<https://freefem.org/tryit>

# FreeFemの動かし方 1/7

例題:



# FreeFemの動かし方 2/7

まず、材料定数と表面荷重を設定:

```
/* 材料定数の設定 */
//Young's modulus
real E = 50.0*10.0^9; //Pa=50GPa
//Poisson's ratio
real nu = 0.35;

// Lame coefficients
real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));
real mu = E/(2*(1+nu));

// 平面応力状態
lambda=2*lambda*mu/(lambda+2*mu);

/* 荷重を設定 */
func t1 = 0.0;
func t2 = -500.0*1000.0; //下向きに500kN
```

# FreeFemの動かし方 3/7

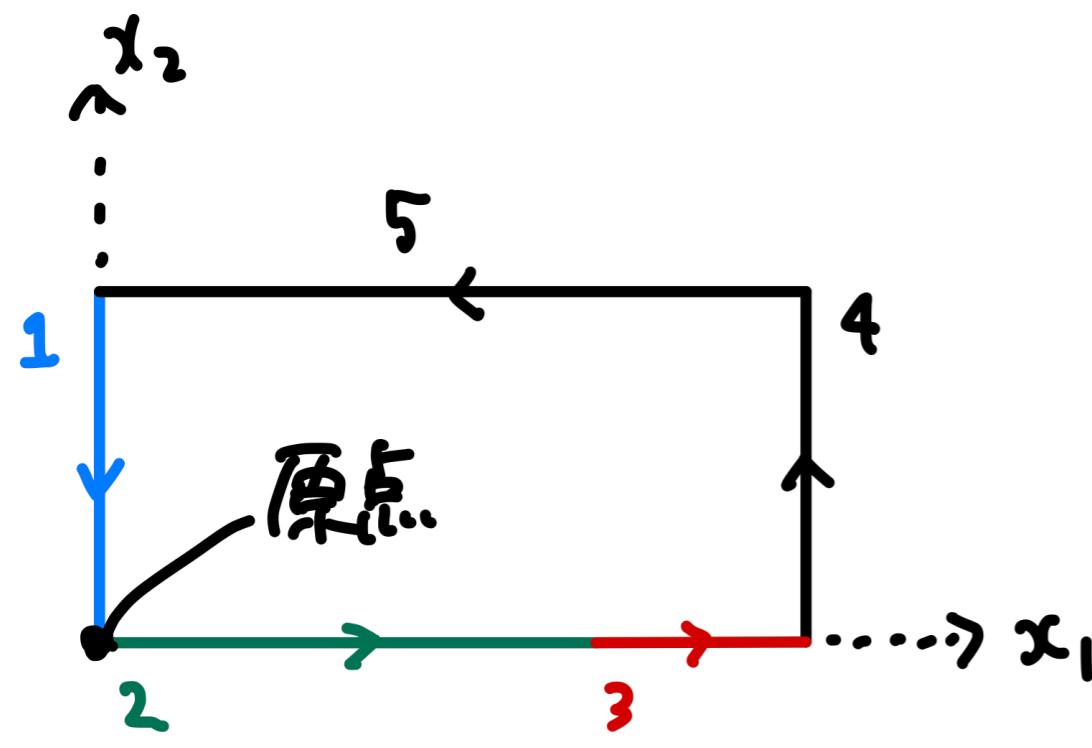
つぎに, 領域の境界を設定:

```
/* 領域形状を設定 */

border a1(t = 0.05, 0) { x=0; y=t; label=1; };
border a2(t = 0, 0.07) { x=t; y=0; label=2; };
border a3(t = 0.07, 0.10) { x=t; y=0; label=3; };
border a4(t = 0, 0.05) { x=0.1; y=t; label=4; };
border a5(t = 0.1, 0) { x=t; y=0.05; label=5; };
```

領域境界を媒介変数表示すればよい.

ただし, 各 segment の「向き」に注意!  
(内部で, 法線ベクトルの定義を使う)

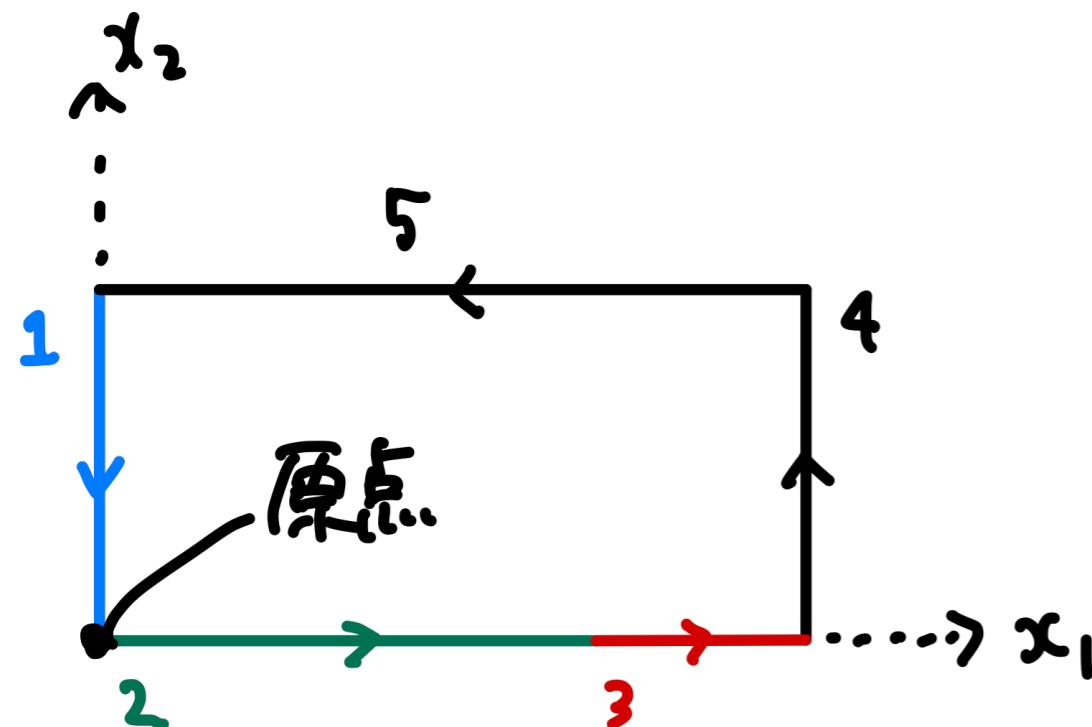


# FreeFemの動かし方 4/7

つぎに、領域の境界を設定：

```
/* 有限要素分割、有限要素空間、変数の定義 */  
int n=2;  
mesh Sh;  
Sh = buildmesh(a1(5*n) + a2(7*n) + a3(3*n) + a4(5*n) + a5(10*n));  
plot(Sh,wait=1);  
fespace Vh1(Sh, [P1,P1]);  
Vh1 [u1, u2]; // 変位  
Vh1 [v1, v2]; // 変位 (試験関数)
```

3番の境界を3n=6分割する



# FreeFemの動かし方 5/7

freefem.org

FREEFEM DOCUMENTATION COMMUNITY MODULES SOURCE CODE GALLERY EVENTS TRY IT ONLINE DONATE

Example Scripts

Code

SAVE AS EDP

Result

```
1 /* 材料定数の設定 */
2
3 //Young's modulus
4 real E = 50*10^9; //Pa=50GPa
5 //Poisson ratio
6 real nu = 0.35;
7
8 // Lame coefficients
9 real lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu));
10 real mu = E/(2*(1+nu));
11
12 // 平面応力状態
13 lambda = 2.*lambda *mu/(lambda+2*mu);
14
15 /* 領域形状を設定 */
16 border a1(t = 5, 0) { x=0; y=t; label=1; };
17 border a2(t = 0, 7) { x=t; y=0; label=2; };
18 border a3(t = 7, 10) { x=t; y=0; label=3; };
19 border a4(t = 0, 5) { x=10; y=t; label=4; };
20 border a5(t = 10, 0) { x=t; y=5; label=5; };
21
22 /* 荷重を設定 */
23 func t1 = 0.0;
24 func t2 = -1000; //1kN
25
26 /* 有限要素分割, 有限要素空間, 変数の定義 */
27 int n=2;
28 mesh Sh;
29 Sh = buildmesh(a1(5*n) + a2(7*n) + a3(3*n) + a4(5*n) + a5(10*n));
30 plot(Sh,wait=1);
31 fespace Vh1(Sh,[P1,P1]);
32 Vh1 [u1, u2]; // 変位
33 Vh1 [v1, v2]; // 変位 (試験関数)
```

FreeFEM JS only works in 2D. Created by Antoine Le Hyaric.

FreeFEM on GitHub 356 stars - 109 forks

1 2 3 4 5

原点

1 2 3 4 5

3番の境界が3n=6分割された



Old Website BibTeX

# FreeFemの動かし方 6/7

弱形式:

$$\int_V \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) dV - \int_{S_t} \sum_{i=1}^2 v_i(x) t_i(x) dS$$

```
/* 弱形式を定義 */
problem elasticity([u1,u2],[v1,v2]) =
  int2d(Sh)(
    (lambda+2*mu)*dx(v1)*dx(u1)+lambda*dx(v1)*dy(u2)
    +lambda*dy(v2)*dx(u1)+(lambda+2*mu)*dy(v2)*dy(u2)
    +mu*(dy(v1)+dx(v2))*(dy(u1)+dx(u2)))
    -int1d(Sh,4)(v1*t1+v2*t2)
    +on(1,u1=0,u2=0);

/* 有限要素解析を実行*/
elasticity;

/* 変位を1000倍して表示*/
real scale=1000.0;
mesh Th;
Th = movemesh (Sh, [x+scale*u1, y+scale*u2]);
plot(Th,wait=1);
```

# FreeFemの動かし方 7/7

freefem.org

FREEFEM DOCUMENTATION COMMUNITY MODULES SOURCE CODE GALLERY EVENTS TRY IT ONLINE DONATE

Example Scripts

Laplacian Stokes Elasticity Thermal conduction Acoustics

FreeFEM JS only works in 2D. Created by Antoine Le Hyaric.

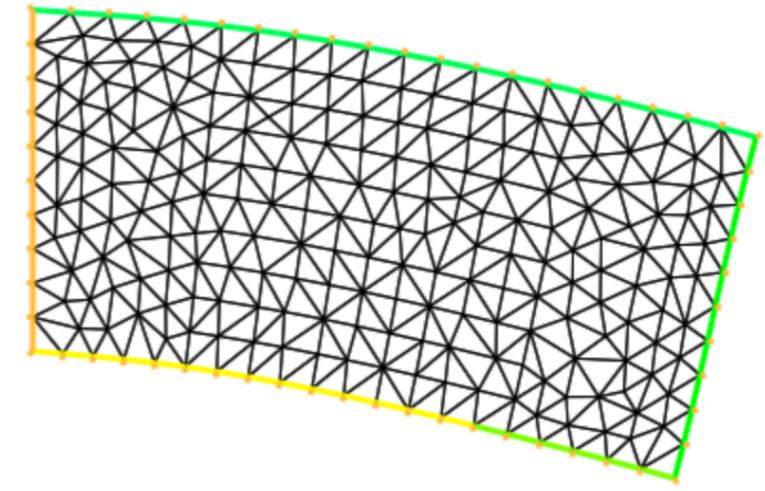
FreeFEM on GitHub 356 stars - 109 forks

Code

```
11 // 平面応力状態
12 lambda=2*lambda*mu/(lambda+2*mu);
13
14 /* 荷重を設定 */
15 func t1 = 0.0;
16 func t2 = -500.0*1000.0; //下向きに500kN
17
18
19 /* 領域形状を設定 */
20 border a1(t = 0.05, 0) { x=0; y=t; label=1; };
21 border a2(t = 0, 0.07) { x=t; y=0; label=2; };
22 border a3(t = 0.07, 0.10) { x=t; y=0; label=3; };
23 border a4(t = 0, 0.05) { x=0.1; y=t; label=4; };
24 border a5(t = 0.1, 0) { x=t; y=0.05; label=5; };
25
26 /* 有限要素分割, 有限要素空間, 変数の定義 */
27 int n=2;
28 mesh Sh;
29 Sh = buildmesh(a1(5*n) + a2(7*n) + a3(3*n) + a4(5*n) + a5(10*n));
30 //plot(Sh,wait=1);
31 fespace Vh1(Sh,[P1,P1]);
32 Vh1 [u1, u2]; // 変位
33 Vh1 [v1, v2]; // 変位 (試験関数)
34
35 /* 弱形式を定義 */
36 problem elasticity([u1,u2],[v1,v2]) =
37 int2d(Sh)(
38 (lambda+2*mu)*dx(v1)*dx(u1)+lambda*dx(v1)*dy(u2)
39 +lambda*dy(v2)*dx(u1)+(lambda+2*mu)*dy(v2)*dy(u2)
40 +mu*(dy(v1)+dx(v2))*(dy(u1)+dx(u2)))
41 -int1d(Sh,4)(v1*t1+v2*t2)
42 +on(1,u1=0,u2=0);
43
44 /* 有限要素解析を実行*/
45 elasticity;
46
47 /* 変位を1000倍して表示*/
48 real scale=1000.0;
49 mesh Th;
50 Th = movemesh (Sh, [x+scale*u1,y+scale*u2]);
51 plot(Th,wait=1);
```

SAVE AS EDP

Result



Console

Coded with ❤ since 1987



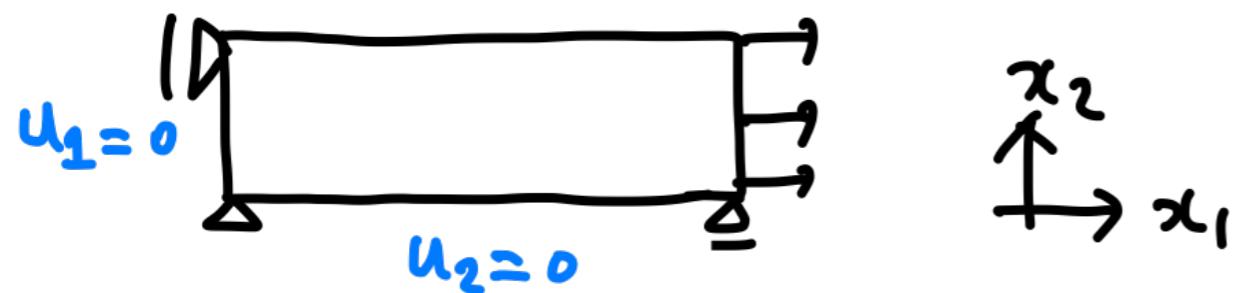
Old Website BibTeX

実行すると変位場がplotされる. Happy! 16

# 宿題

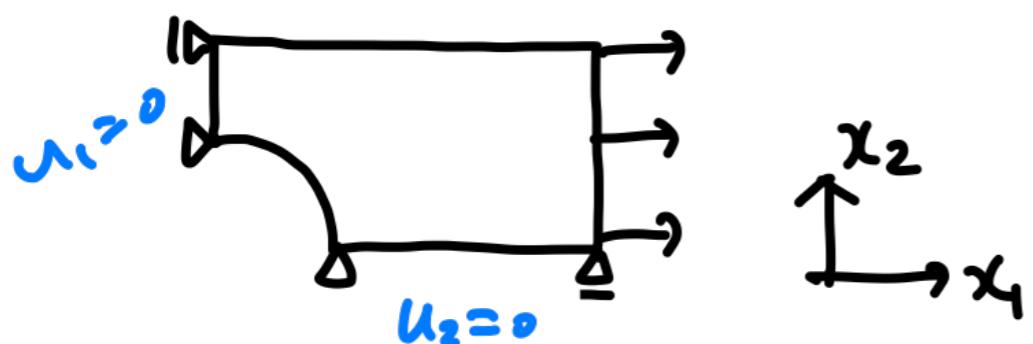
Canvas LMS で配布する FreeFem スクリプト a.edp (今日紹介した片持ち梁の曲げを解析する) を改変し, 以下の **いずれか** の変形解析を行い, その結果をまとめよ.

## (1) 単純支持された棒の3引張



棒や平板の寸法, 材料定数は適当に定めること.

## (2) 円形の穴と半板の3引張



余力があれば, 材料定数の違いや寸法の違いによる変形の違いについて考察するなど, オリジナリティを見せてください.

## (3) 丸くせ, ねじまな形狀の物体の変形

注意:  $-1 < \nu < 1/2$  とする.