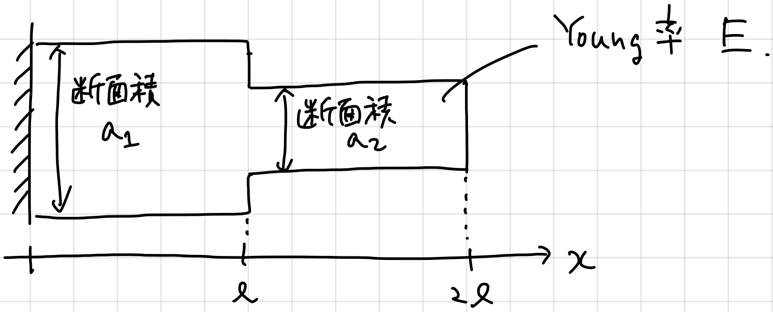
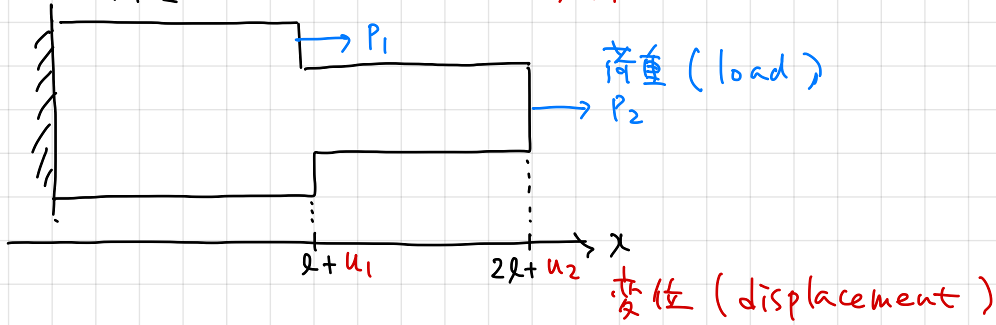
スライド6頁に対応

以下に示す長さ$2l$の段付き真直棒を考える:



荷重を ⇓ 作用させると変形する.



(i) 力学的アナリシスでやっていた事.

- E (材料定数)
- a_i, l (力学システムの形)
- P_i (境界条件)

が与えられる → u_i を求める

(現象を再現する)

例: できるだけ変形しないように
(剛性最大化)

(ii) 力学的シンセシスで目指すこと

- E (材料定数)
- P_i (境界条件)

が与えられる → 何らかの意味で最適な a_i, l (力学システムの形) を決定する

(設計)

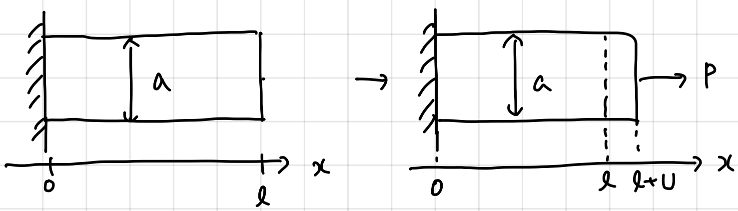
スライド
7~9頁に対応

真直棒を構成する材料が

- 材料定数が一様　(E が位置 x に依存しない)
- 線形弾性体　($\sigma = E\varepsilon$ と書ける)
  - σ：応力　ε：ひずみ　← 構成則
- 変形は1次元的

と仮定する。

一様な断面積をもつ(=段無しの)真直棒を考える:



真直棒の右端 ($x=\ell$) の変位が U であったとき、
材料定数が一様であるから点 x における変位は

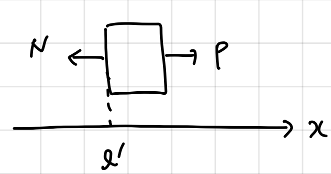
$$u(x) = \frac{x}{\ell} U \quad \cdots\cdots ①$$

と書ける。このとき、ひずみ $\varepsilon(x) := \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ $\left(= \frac{\text{棒の伸び}}{\text{棒のもとの長さ}}\right)$

$$\varepsilon(x) = \frac{U}{\ell} \quad \cdots\cdots ②$$

と書ける。$0<x<\ell$ の任意の面 $x=\ell'$ で棒を(仮想的に)切断すると
$x=\ell'$ に働く軸力 N (内力) と外力 P がつりあっているはずなので

$$N = P \quad \cdots ③$$



一方、軸力 N は応力 σ を用いて　$N = a\sigma$　と書ける。

構成則より

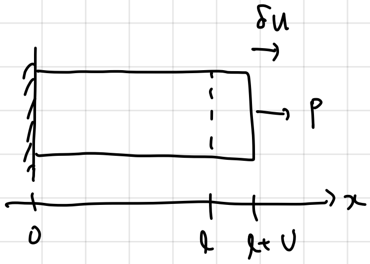
$$N = a\sigma = aE\varepsilon = aE\frac{U}{\ell} \quad \cdots ④$$

③と④より

$$P = \boxed{\frac{aE}{\ell}} U \quad \cdots\cdots ⑤$$

バネ定数のように見える。

と書ける。



微小な仮想変位 δu を考えると 外力のする仮想仕事 δW は

$$\delta W = P\,\delta u \quad \cdots ⑥$$

と書ける。一方、内力のする仮想仕事 δU は

$$\delta U = \int_0^l N\,\underbrace{\delta\varepsilon}_{=\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}}\,dx$$

仮想変位に対応するひずみ（仮想ひずみ）

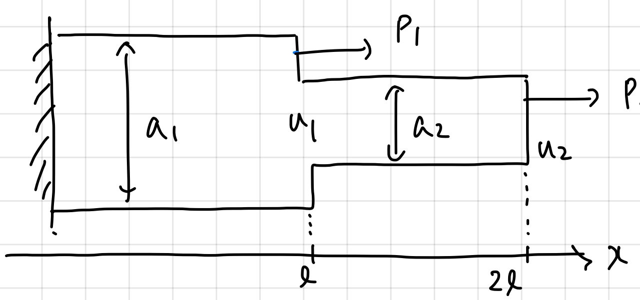
$$= \int_0^l N\frac{\delta u}{l}\,dx$$

$$= N\frac{\delta u}{l}\,l$$

$$= P\,\delta u \quad \cdots ⑦$$

⑥, ⑦ より $\delta W = \delta U$ であることが分かる。 仮想仕事の原理.

仮想仕事の原理を用いて段付真直棒の変位を求めてみよう：



点 $x = l, 2l$ における仮想変位を各々 $\delta u_1, \delta u_2$ と与えると

外力のする仮想仕事は

$$\delta W = P_1\,\delta u_1 + P_2\,\delta u_2 = (\delta u_1 \ \ \delta u_2)\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad \cdots ⑧$$

である。

スライド
11~12頁に対応

一方、内力のする仮想仕事は

$$\delta U = \int_0^{2\ell} N\,\delta\varepsilon\,dx$$

である。今、

$$N = \begin{cases} a_1 E \dfrac{u_1}{\ell} & \text{if} \quad 0 \leq x \leq \ell \\ a_2 E \dfrac{u_2 - u_1}{\ell} & \text{if} \quad \ell \leq x \leq 2\ell \end{cases}$$

$$\delta\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\delta u_1}{\ell} & \text{if} \quad 0 \leq x \leq \ell \\ \dfrac{\delta u_2 - \delta u_1}{\ell} & \text{if} \quad \ell \leq x \leq 2\ell \end{cases}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_0^{\ell} a_1 E \frac{u_1}{\ell}\frac{\delta u_1}{\ell}\,dx + \int_{\ell}^{2\ell} a_2 E \frac{u_2 - u_1}{\ell}\frac{\delta u_2 - \delta u_1}{\ell}\,dx \\
&= \frac{E}{\ell} a_1 u_1 \underline{\delta u_1} + \frac{E}{\ell} a_2 (u_2 - u_1)(\delta u_2 - \underline{\delta u_1}) \\
&= \frac{E}{\ell}\left[a_1 u_1 - a_2(u_2 - u_1)\right]\delta u_1 + \frac{E}{\ell} a_2 (u_2 - u_1)\,\delta u_2 \\
&= \delta u_1 \frac{E}{\ell}\left[(a_1 + a_2)u_1 - a_2 u_2\right] + \delta u_2 \frac{E}{\ell}\left[-a_2 u_1 + a_2 u_2\right] \\
&= (\delta u_1 \quad \delta u_2)\begin{pmatrix} \frac{E}{\ell}(a_1 + a_2) & -\frac{E}{\ell}a_2 \\ -\frac{E}{\ell}a_2 & \frac{E}{\ell}a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \cdots ⑨
\end{aligned}$$

仮想仕事の原理 $\delta W = \delta U$ は 任意の仮想変位に対して

成り立つから、⑧，⑨より

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{\ell}(a_1 + a_2) & -\frac{E}{\ell}a_2 \\ -\frac{E}{\ell}a_2 & \frac{E}{\ell}a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \cdots ⑩$$

$$\Leftrightarrow \quad K\mathbb{u} = \mathbb{p}$$ とかく

スライド
11~13 頁に対応

求める変位 $\mathbb{u} = (u_1, u_2)^T$ は

$$\mathbb{u} = K^{-1}\mathbb{p}$$

$$= \frac{1}{\frac{E}{l}(a_1+a_2)\frac{E}{l}a_2 - \left(-\frac{E}{l}a_2\right)\left(-\frac{E}{l}a_2\right)} \begin{pmatrix} \frac{E}{l}a_2 & \frac{E}{l}a_2 \\ \frac{E}{l}a_2 & \frac{E}{l}(a_1+a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

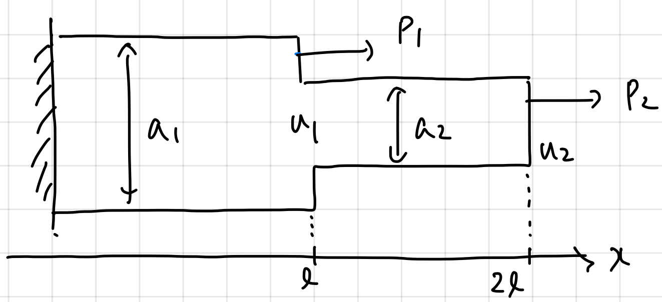
$$= \frac{l}{Ea_1a_2} \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{l}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{l}{E} \begin{pmatrix} (p_1+p_2)/a_1 \\ (p_1+p_2)/a_1 + p_2/a_2 \end{pmatrix} . \quad \cdots\cdots (11)$$

となる.

力学的シンセシスで扱う構造最適化問題の例.



Find a_1 & a_2

such that $\min f(\mathbb{a}) = \mathbb{u} \cdot \mathbb{p}$ $\cdots$ (12) 外力のする仕事 (平均コンプライアンス)

subject to $K\mathbb{u} = \mathbb{p}$ $\cdots$ (13) つりあい式

$a_1 l + a_2 l = C$ $\cdots$ (14) 体積制約.

given const.

スライド
15〜16頁に対応

⑬の解⑪が求まっているので、これと⑭を⑫に代入して、

a_i に関する f の微分を計算できれば最適化問題⑫〜⑭は

かんたんに解けるのでは？

→ その通り。ただし、設計変数の数が増えたり、

つりあい式や目的関数の表式がややこしかったり

する場合には「代入法」では辛くなってくる

(iii) 「代入法」で解いてみよう。

⑪を⑫に代入すると目的関数は

$$f(a_1) = \frac{\ell}{E}\left(\frac{P_1+P_2}{a_1},\ \frac{P_1+P_2}{a_1} + \frac{P_2}{a_2}\right)\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\ell}{E}\left(\frac{P_1^2+P_1P_2}{a_1} + \frac{P_1P_2+P_2^2}{a_1} + \frac{P_2^2}{a_2}\right)$$

$$= \frac{\ell}{E}\left(\frac{(P_1+P_2)^2}{a_1} + \frac{P_2^2}{a_2}\right)$$

と書ける。⑭より $a_2 = \frac{c}{\ell} - a_1$ を↑に代入して

$$f(a_1) = \tilde{f}(a_1) = \frac{\ell}{E}\left(\frac{(P_1+P_2)^2}{a_1} + \frac{P_2^2}{\frac{c}{\ell} - a_1}\right)$$

$$\frac{d\tilde{f}}{da_1} = \frac{\ell}{E}\left(-\frac{(P_1+P_2)^2}{a_1^2} + \frac{P_2^2}{\left(\frac{c}{\ell} - a_1\right)^2}\right) = 0 \quad \text{より}$$

$$a_1 = \frac{c}{\ell}\frac{P_1+P_2}{P_1} \longrightarrow a_2 = \frac{c}{\ell} - a_1 = -\frac{c}{\ell}\frac{P_2}{P_1} < 0 \quad \text{不適}$$

$$a_1 = \frac{c}{\ell}\frac{P_1+P_2}{P_1+2P_2} \longrightarrow a_2 = \frac{c}{\ell} - a_1 = \frac{c}{\ell}\frac{P_2}{P_1+2P_2}$$

$P_1 = 0$ のとき $a_1 = a_2 = \dfrac{c}{2\ell}$ （段無し棒が「最適」）