力学的シンセシス (1)

システムデザイン工学科
飯盛 浩司

イントロダクション 1/4

「力学 (mechanics)」とは？

以下を対象とする学問：

- 物体の運動・変形
- 運動する物体に働く力・相互作用

本講義の対象

古典力学：

量子論発現以前の力学

(注: 古典 ≠ 現在は利用・研究されていない)

(cf.) **量子力学：**

分子・原子・電子などの微視(ミクロ)的な系の力学を記述

古典力学では説明できない巨視(マクロ)的な現象を記述できることもある

イントロダクション 2/4

力学的モデリング

力学現象 (の特別な一面) を簡略化して表現すること

現象を理解しやすいようにモデル(=模型)を構築すること

様々な力学モデル

質点の力学 $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$

剛体の力学 $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}$

材料力学/構造力学 $\mathrm{d}^4 w/\mathrm{d}x^4 = p/EI$

連続体力学 $\partial\sigma_{ji}/\partial x_j + \rho\ddot{u}_i = F_i$

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}$$

力学モデル:

対象とする現象を精密に記述する微分方程式 (の境界値問題)

イントロダクション 3/4

力学的アナリシス

力学現象の解析・分析

力学モデル (=微分方程式の境界値問題) を解くための方法論

<u>解析的に解が構成できる (手で解ける) 場合</u>

常微分方程式の解法, 仮想仕事の原理, マトリクス構造解析...

<u>手で解くのが難しい場合</u>

例: 複雑な形状の領域で定義された偏微分方程式

➡ 計算力学

計算機 (=パソコン, スパコン) を使った力学的アナリシス

(cf) 有限要素法, 差分法, 境界要素法...

イントロダクション 4/4

synthesis

the act of combining different ideas or things to make a whole that is new and different from the items considered separately.

(Cambridge Dictionary)

something that has been made by combining different things, or the process of combining things.

(LODCE)

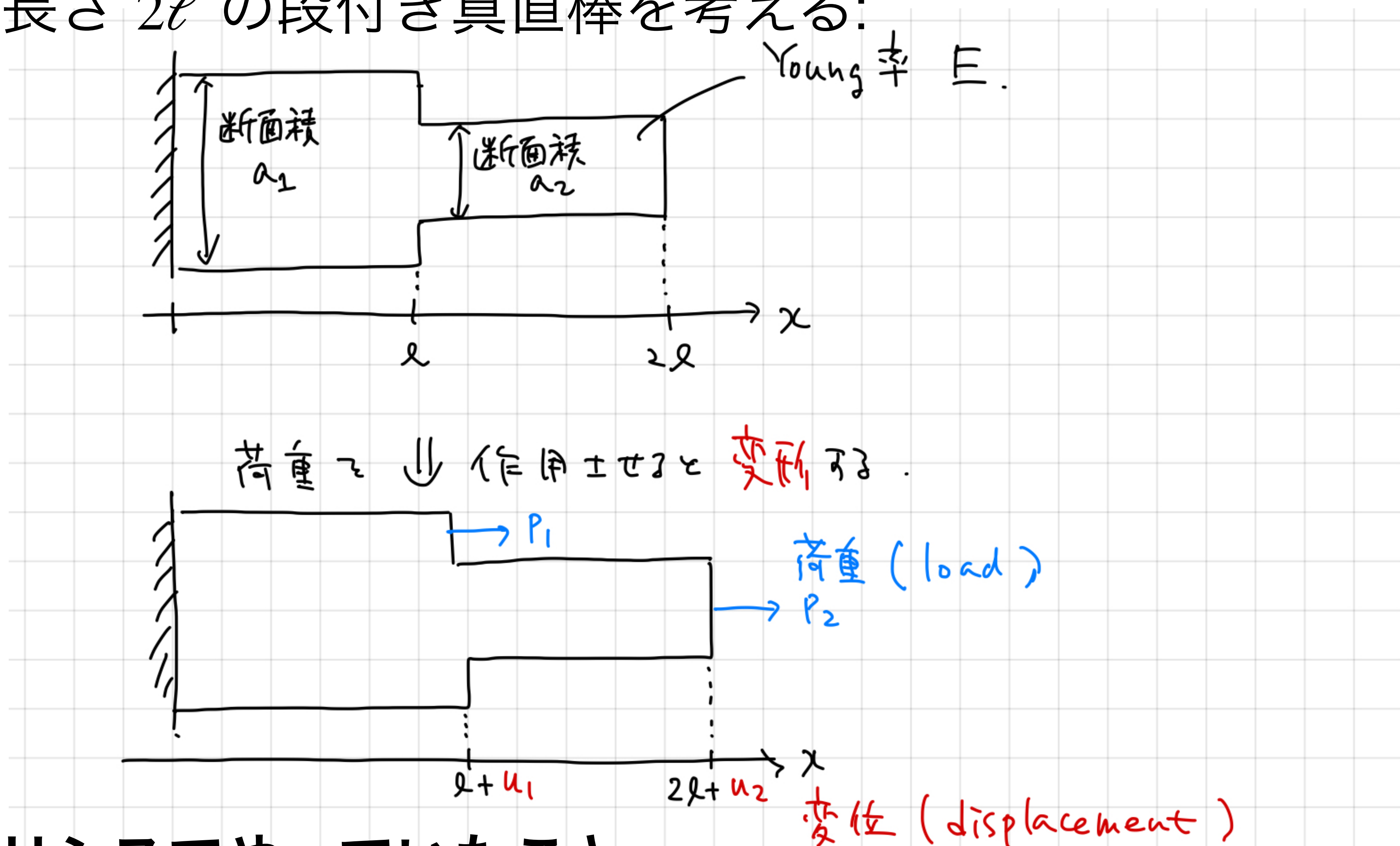
力学的シンセシス

様々な分野の知見を統合し, 様々な部材を組み合わせて
力学システムの最適なデザインを探索

➡ 最適設計, 構造最適化

典型的な例題

以下に示す長さ 2ℓ の段付き真直棒を考える:



力学的アナリシスでやっていたこと

材料定数 E, 形状パラメータ a_i, ℓ, 境界条件 p_i が given ➡ u_i を求める

力学的シンセシスで目指すこと

材料定数 E, 境界条件 p_i が given ➡ 何らかの意味で最適な a_i, ℓ を決定

力学的アナリシスの復習 1/6

以降の議論では、真直棒を構成する材料が

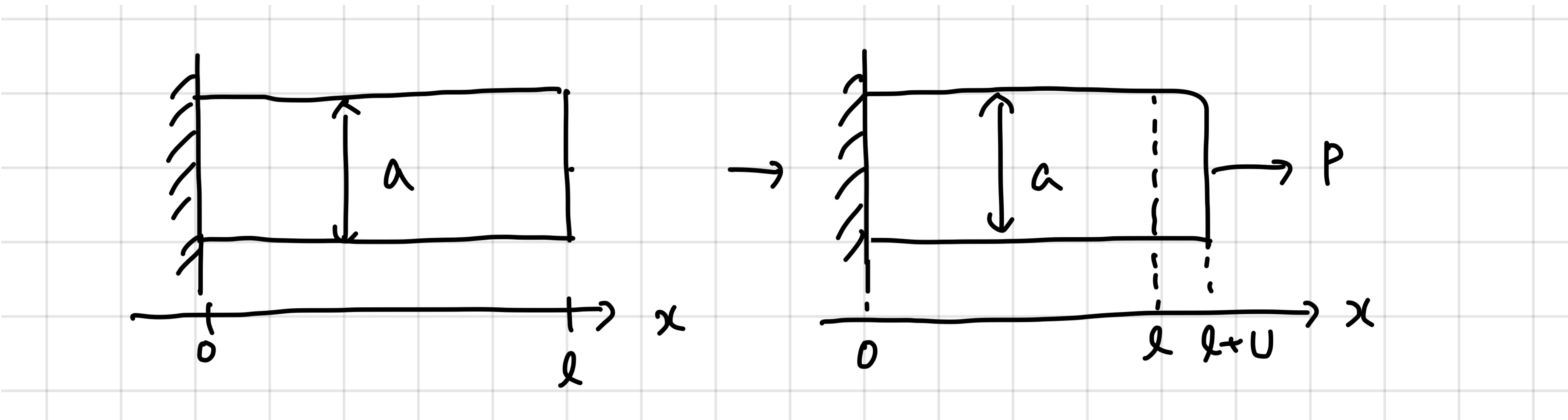
- 線形弾性体からなる (構成則が $\sigma = E\varepsilon$ と書ける)
- 一様な材料定数を持つ (Young率が位置に依存しない)
- 変形は一次元的

と仮定する

力学的アナリシスの復習 2/6

真直棒の変形

一様な断面積 a を持つ長さ ℓ の (段無し) 真直棒を考える。



右端に右向き荷重 p が作用する時, 右端の変位が U であるとき

(Q1) 任意の点 x における変位を求めよ。
(Q2) 任意の点 x におけるひずみを求めよ。
(Q3) p と U の関係を導け。

力学的アナリシスの復習 3/6

(Quiz の解答)

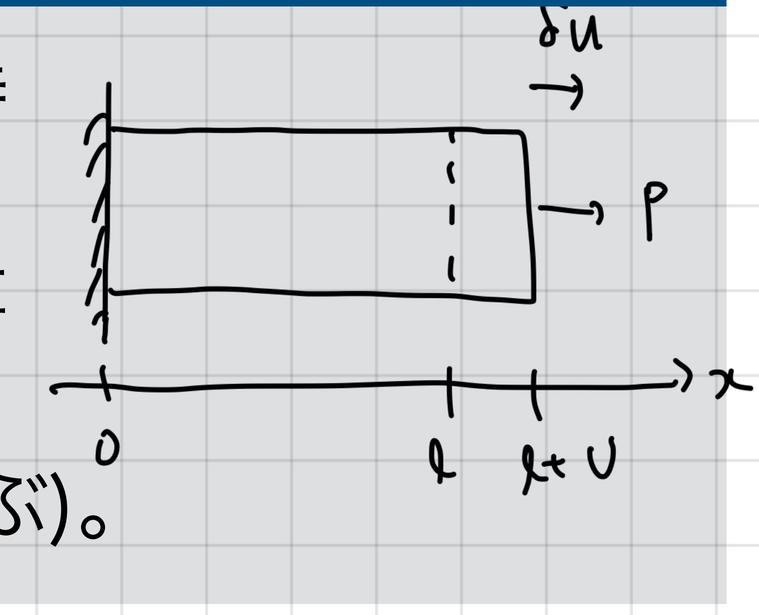
力学的アナリシスの復習 4/6

仮想仕事の原理

(境界条件を満たす)仮想変位 δu を釣合系に与える時

外力のする仮想仕事 $\delta W = \delta U$ 内力のする仮想仕事

が成り立つ (**定理**だが歴史的な経緯により**原理**と呼ぶ)。



外力のする仮想仕事

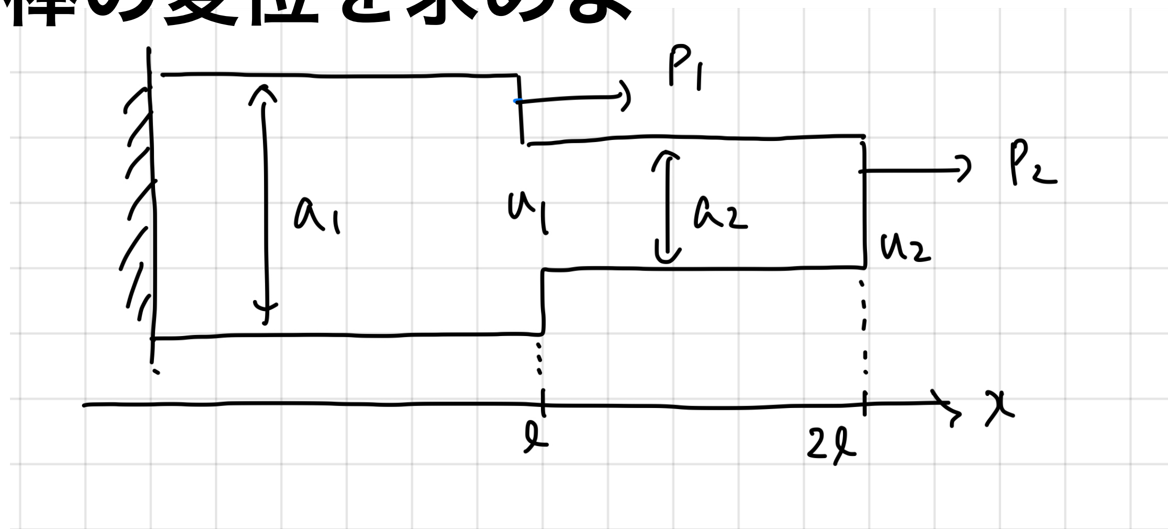
$$\delta W = p\delta u$$

内力のする仮想仕事

$$\delta U = \int_0^{\ell} N\delta\varepsilon \mathrm{d}x = N\frac{\delta u}{\ell}\ell = p\delta u$$

力学的アナリシスの復習 5/6

(Q4) 仮想仕事の原理を利用して段付真直棒の変位を求めよ



(Quiz の解答)

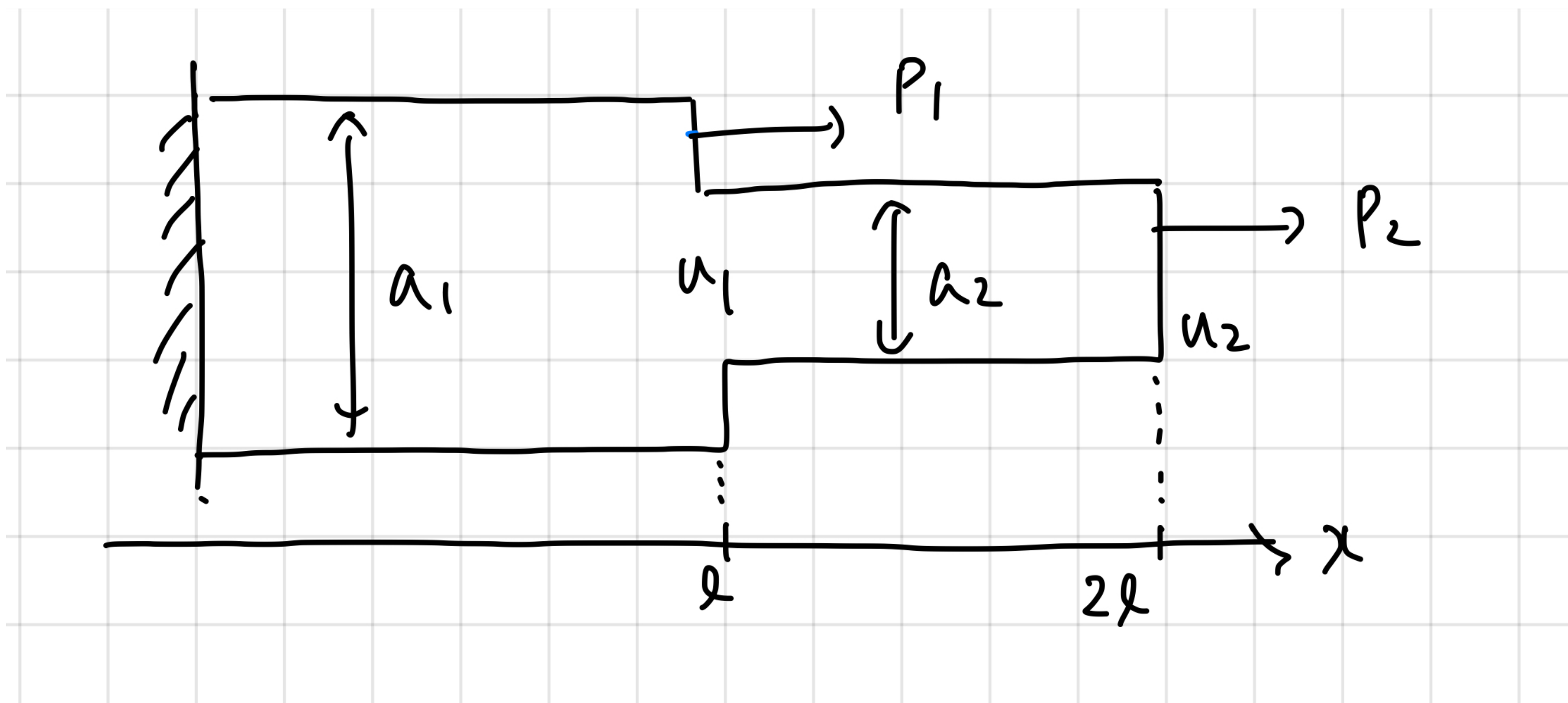
力学的アナリシスの復習 6/6

(Quiz の解答の続き)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\ell}{E} \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 + p_2}{a_1} \\ \dfrac{p_1 + p_2}{a_1} + \dfrac{p_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

力学的シンセシスでは

以下のような最適設計問題 (あるいは構造最適化問題) を扱う



Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$ 設計変数

such that $\min \ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$ 目的関数 (または評価関数)

subject to $\mathrm{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ 釣合式

$a_1 \ell + a_2 \ell = c$ 体積制約 (その他, 製造に関する制約条件)

given constant

最適設計問題の解法?

先の問題では, 変位 $\boldsymbol{u}$ が断面積の組 $\boldsymbol{a}$ の関数として陽に書けている:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\ell}{E} \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 + p_2}{a_1} \\ \dfrac{p_1 + p_2}{a_1} + \dfrac{p_2}{a_2} \end{pmatrix}$$

ので、これを目的関数に f に代入して $f(\boldsymbol{a})$ の $\boldsymbol{a}$ による微分を計算すれば、最適設計問題を簡単に解くことができるのでは？

➡ その通り。ただし...

- 設計変数の数が多い
- $\nabla f = \boldsymbol{0}$ が簡単に解けない
- 釣合式を (解析的に=手で) 解くことが難しい

ような場合には「代入法」で最適設計問題を解くことは簡単ではない。

代入法で最適設計問題を解く 1/2

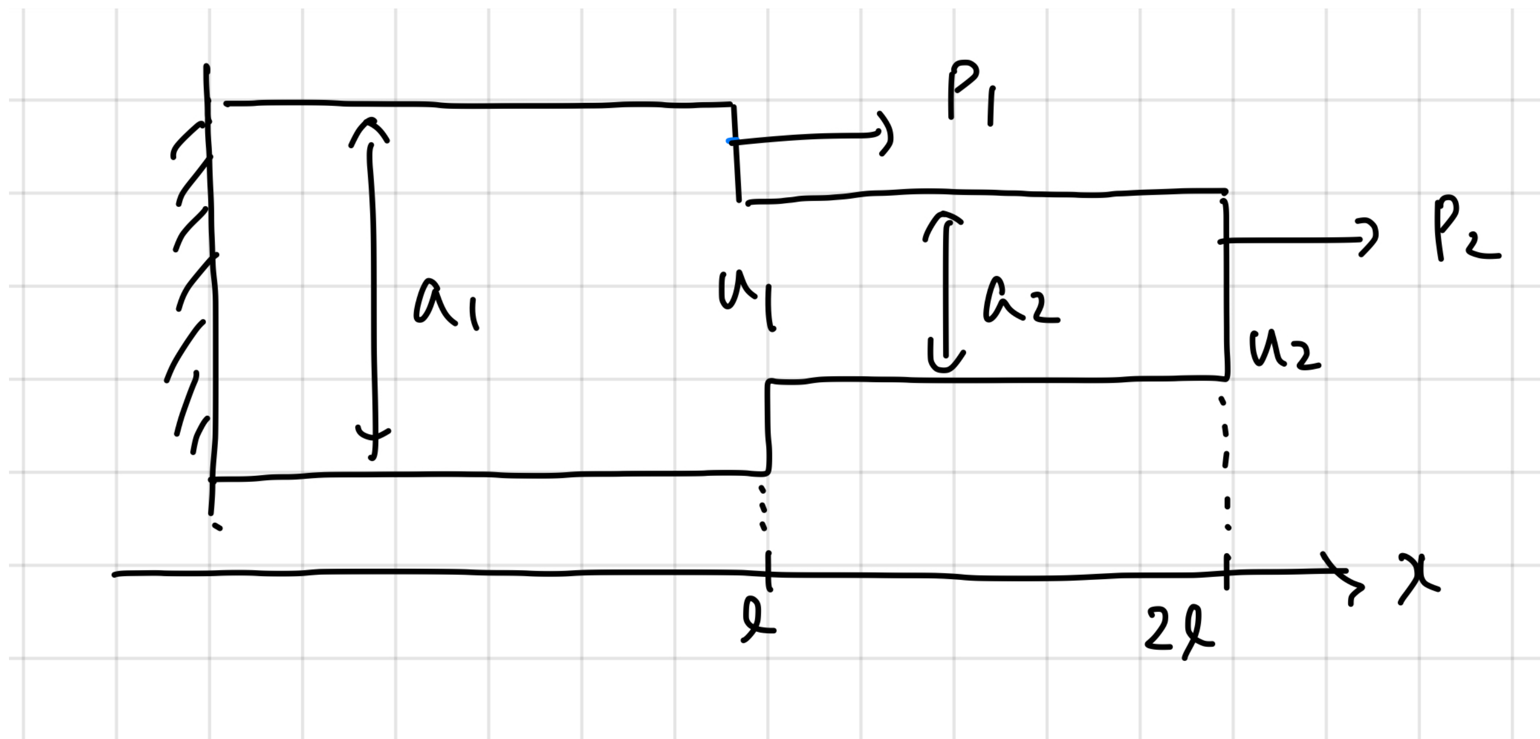
次の最適設計問題を「代入法」により解いてみよう:

Find $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^t$

such that $\min\ f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p}$

subject to K$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$

$a_1\ell + a_2\ell = c$



(Q5) $f(\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{a}$ の関数として陽に表せ。

(Q6) 体積制約を用いて $f(\boldsymbol{a}) = \tilde{f}(a_1)$ となる $\tilde{f}$ を求めよ。
（目的関数の表式から a_2 を消去せよ）

(Q7) $\mathrm{d}\tilde{f}/\mathrm{d}a_1 = 0$ を解き, 最適設計案 (a_1^*, a_2^*) を求めよ.。

(Q8) ↑において $p_1 = 0$ の時の最適設計案の形状について考察せよ。

代入法で最適設計問題を解く 2/2

(Quiz の解答)