TMA4305 PDE 2020: Øvinger for uke 36

B 3.7 Hamilton–Jacobi: $u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 = 0$

Kortere: $u_t + \frac{1}{2}u_x^2 = 0 \quad (H\text{-}J)$

(a) Karakteristikker: $\dot{x} = u_x(t,x)$

Det gir $\ddot{x} = u_{xt} + \dot{x}u_{xx} = u_{xt} + u_x u_{xx} = u_{xt} + \frac{1}{2}(u_x^2)_x$

(Må ha $u \in C^2$ for dette!)

(b) Derivasjon av (H-J) mhp x gir $u_{tx} + \frac{1}{2}(u_x^2)_x = 0$

Siden $u \in C^2$, er $u_{tx} = u_{xt} = 0$, så (a) gir $\ddot{x} = 0$

og derfor $x(t) = x_0 + v_0 t$ (x_0, v_0 avh. av karakteristikken)

(c) $\frac{Du}{Dt} := \frac{d}{dt}u(t,x(t)) = \frac{d}{dt}u(t, x_0 + v_0 t)$

$$= u_t + v_0 u_x = -\frac{1}{2}u_x^2 + u_x^2 = \frac{1}{2}u_x^2 = \frac{1}{2}v_0^2$$

(H-J) fordi $v_0 = \dot{x} = u_x$

$\Rightarrow u(t,x(t)) = u(0,x_0) + \frac{1}{2}v_0^2 t$

NB! $v_0 = u_x$ evaluert i $t=0$ gir $v_0 = u_x(0,x_0)$

(d) Om $u(0,x) = x^2$, så blir $v_0 = u_x(0,x_0) = 2x_0$.

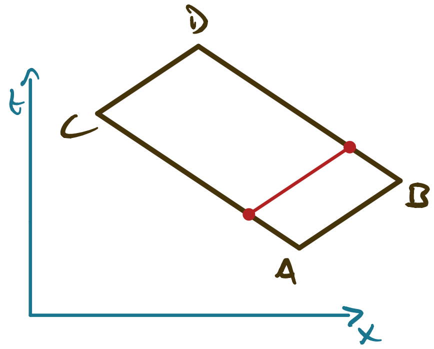
Karakteristikken fra x_0 blir $x = x_0 + v_0 t = (1+2t)x_0$

og på denne blir $u = u(0,x_0) + \frac{1}{2}v_0^2 t = x_0^2 + 2x_0^2 t = (1+2t)x_0^2$

$$= (1+2t)\left(\frac{x}{1+2t}\right)^2 = \frac{x^2}{1+2t}$$

Sjekk:
$$\left.\begin{aligned} u_t &= \frac{-2x^2}{(1+2t)^2} \\ \frac{1}{2}u_x^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+2t}\right)^2 = \frac{2x^2}{(1+2t)^2} \end{aligned}\right\} \text{summen er 0 og } t=0 \text{ stemmer}$$

3 4.1



$A = (t_0, x_0)$

$B = (t_0 + t_1, x_0 + ct_1)$

$C = (t_0 + t_2, x_0 - ct_2)$

$D = (t_0 + t_1 + t_2, x_0 + ct_1 - ct_2)$

Skriv $w = u_t - c u_x$

slik at $w_t + c w_x = 0$

Det betyr at $\frac{d}{dt} w(t, x + ct) = 0$.

Spesielt er

$$w(t + t_1, x + ct_1) = w(t, x)$$

Dvs w har samme verdi i tilsvarende (røde) punkter (se fig.!)

Men

$$\int_A^C w \, dt = \int_0^{t_2} w(t_0 + t, x_0 - ct) \, dt$$

$$= \int_0^{t_2} \frac{d}{dt} u(t_0 + t, x_0 - ct) \, dt$$

$$= u(C) - u(A)$$

og tilsvarende $\int_B^D w \, dt = u(D) - u(B)$

så $u(D) - u(B) = u(C) - u(A)$

Eller bedre:

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$$

B4.5 Telegrafligningen: $u_{tt}+au_t+bu-c^2u_{xx}=0$

Om $u(t,x)=e^{-at/2}\,w(t,x)$ så er

$$u_t = \left(w_t - \frac{a}{2}w\right)e^{-at/2}$$

$$u_{tt} = \left(w_{tt} - a w_t + \frac{a^2}{4} w\right) e^{-at/2}$$

så vi får

$$w_{tt} - a w_t + \frac{a^2}{4}w + a w_t - \frac{a^2}{2}w + b w - c^2 w_{xx} = 0$$

$$w_{tt} + \left(b - \frac{a^2}{4}\right) w - c^2 w_{xx} = 0$$

Det er bølgeligningen $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$
hvis og bare hvis $b = a^2/4$

Den generelle løsningen til bølgeligningen
har formen $w(t,x) = w_L(x+ct) + w_R(x-ct)$,
så telegrafligningen har generell løsning

$$u(t,x) = e^{-at/2}\left(w_L(x+ct) + w_R(x-ct)\right)$$

Vi kunne godt ha brukt D'Alembert i stedet.

X2 $uu_x + y^2 u_y = yu, \qquad u(x,1) = x$

nå skriver jeg u i stedet for z – eller rettere sagt, jeg skriver ikke lenger z i stedet for u 😂

De karakteristiske ligningene med initialdata:

$$x' = u \qquad x(0) = \sigma$$
$$y' = y^2 \qquad y(0) = 1$$
$$u' = yu \qquad u(0) = \sigma$$

Løser først for y: $\frac{dy}{y^2} = d\tau$ gir $-\frac{1}{y} = \tau \underbrace{-1}_{\leftarrow\, y(0)=1}$

det vil si $y = \frac{1}{1-\tau}$

Så løser vi for u: $\frac{du}{u} = y\, d\tau = \frac{d\tau}{1-\tau}$

Det gir $\ln|u| = -\ln|1-\tau| + \text{konstant}$, $u = \frac{\sigma}{1-\tau}$ $\leftarrow u(0)=\sigma$

Til sist: $x' = \frac{\sigma}{1-\tau}$ gir $x = -\sigma \ln|1-\tau| + \sigma$ $\leftarrow x(0)=\sigma$

Siden vi har initialdata for $\tau = 0$, kan vi åpenbart ikke bruke løsningen for $\tau \geq 1$. Altså må $\tau < 1$, så vi får $x = \sigma(1 - \ln(1-\tau))$.

$= \sigma(1 + \ln y)$ [vi får $y > 0$]

og dermed $\sigma = \frac{x}{1 + \ln y}$ og

$u = \frac{\sigma}{1-\tau} = \frac{xy}{1+\ln y}$ Vi må ha $y > e^{-1}$, x vilkårlig.