TMA4305 PDE 2020: Øvinger for uke 35

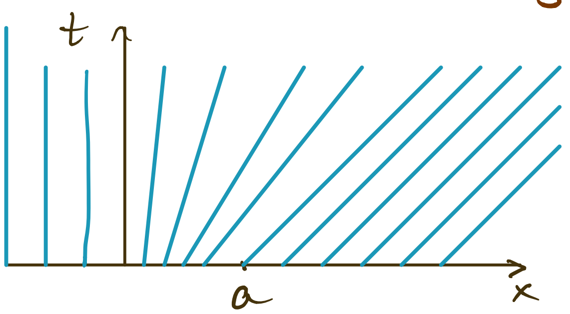
Et par småfeil rettet 2020-09-01

B 3.6

(a) Burgers: $u_t + uu_x = 0$

u ← karakteristisk hastighet

Karakteristikken som starter i $x=\xi\in[0,a]$ har ligning $x = \xi + t\xi/a$

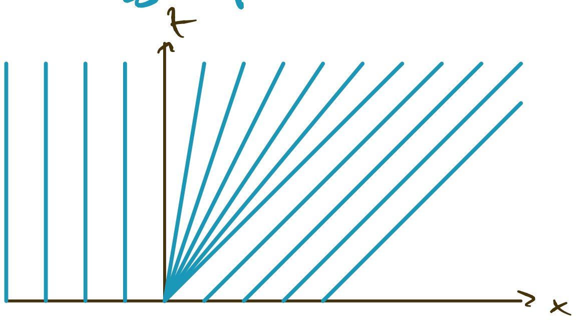


$$\xi = x/(1+t/a)$$

$$u = \frac{\xi}{a} = \frac{x}{a+t}$$

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x}{a+t} & 0<x<a+t \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Tilleggs-spm: Grensen når $a \to 0$ er



$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x}{t} & 0<x<t \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(b) Karakteristikken som starter i $\xi\in[0,1]$ får ligning $x = \xi + t(a(1-\xi) + b\xi)$

$$= \underbrace{(1+(b-a)t)}\,\xi + at$$

De faller sammen når denne parentesen er 0, dvs. for $t = \dfrac{1}{a-b}$

X1:

$$u_t + u^2 u_x = 0$$
$$u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Karakteristisk hastighet er u^2,
så karakteristikken fra $x=\xi$ har ligning

$$x = \xi + t\,c(\xi), \quad c(\xi) = \left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)^2$$

derved $$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + t c'(\xi) = 1 - \frac{4\xi t}{(1+\xi^2)^3}$$

som er positiv for alle ξ hvis og bare hvis

$$\frac{4\xi t}{(1+\xi^2)^2} < 1 \text{ for alle } \xi.$$

Det holder alltid for $\xi \le 0$; må sjekkes når $\xi > 0$.

det gir $$4t < \frac{(1+\xi^2)^3}{\xi} \quad \text{for alle } \xi > 0$$

Deriver for å finne minste verdi av høyresiden:

$$\frac{d}{d\xi}\frac{(1+\xi^2)^3}{\xi} = \frac{6\xi(1+\xi^2)^2\cdot\xi - (1+\xi^2)^3}{\xi^2} = \frac{5\xi^2-1}{\xi^2}(1+\xi^2)^2$$

så minimum oppnås for $5\xi^2 = 1$.

Derved holder den klassiske løsningen kun for $t<T$,

$$T = \frac{(1+\xi^2)^3}{4\xi} = \frac{(6/5)^3}{4\sqrt{1/5}} = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{5}\right)^3\sqrt{5}$$