# Partial Differential Equations

isakhammer

2020

## Contents

# 1 Lecture n

## 1.1 ODE teori

**Theorem 1.1.**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

*Anta ligningen er et apoent interval* $o \in I$ *slik at* $\Omega\mathbb{R}^n$ *er et område slik at* $\mathbf{f} \in C^1(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ *. Da finnes et største intervall* $J$ $o \in J \subseteq I$ *moden funcksjon* $\mathbf{x} : I \to \Omega$ *som løser problemet. Videre er løsningen gitt.*

*Proof.* Ideen er eksistense. Pcard iterasjon

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(\tau, \mathbf{x}_k(\tau))\, d\tau$$

Entydighet

Kontiuerlig /derivering avhenging av dote

□

**Theorem 1.2.** *Anta gitt*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \hat{c})$$

*der* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$

*Dersom* $f$ *er* $C^{k+1}$ *, så vil* $\mathbf{f}$ *vare en* $C^k$ *funksjon av* $(t, \mathbf{a}, \hat{c})$

**Autonome system**

$$\dot{\mathbf{x}} = f\left(\mathbf{x}\right)$$

Løsningkurvene blander en en-dimensional foliering av $\Omega$. Har en kurve gjennom hvert punkt med ingen krysninger.

**Ikke autonomt system**

$$\dot{\mathbf{x}} = f\left(t, \mathbf{x}\right)$$

Ekvivalent

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= 1 \\ \dot{\mathbf{x}} &= f\left(\tau, \right) \\ \tau\left(0\right) &= 0 \\ x^{(n)} &= f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) \\ . \end{aligned}$$

Hvis vi setter

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \left(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) \\ \dot{w_1} &= w_2 \\ \dot{w_2} &= w_3 \\ &\vdots \\ \dot{w_n} &= f\left(t, \mathbf{w}\right) \end{aligned}$$

---

$$\dot{\mathbf{w}} = F\left(t, \mathbf{w}\right).$$

## 1.2 Kvasilinær Ligning

$$au_x + bu_y = c$$

$a, b, c$ er alle funksjoner av $x, y, u\left(x, y\right)$

**Grafen** til $u$ er

$$\{(x,y,z) \mid z = u(x,y)\}$$

Da antar vi en løsning $u$ , en kurve $\gamma$ i $(x,y)$ - planet.

$$(x(\tau), y(\tau))$$

Git enn løsning $u(x,y)$ får vi en kurve i $T$ i $\mathbb{R}^3$ i $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$. Da ender vi opp med

$$\begin{aligned} z(\tau) &= u(x(\tau), y(\tau)) \\ \dot{z} &= \dot{x}u_x(x,y) + \dot{y}u_y(x,y) \\ \text{anta} \quad &\begin{cases} \dot{x}(\tau) = & a(x,y,u(x,y)) = a(x,y,z) \\ \dot{y}(\tau) & = b(x,y,u(x,y)) = b(x,y,z) \end{cases} \end{aligned}$$

da blir

$$\dot{z} = au_x + bu_y = x(x,y,u(x,y)) = c(x,y,z)$$

Vi får da

$$\begin{cases} \dot{x} & = a(x,y,z) \\ \dot{y} & = b(x,y,z) \\ \dot{z} & = c(x,y,z) \end{cases}$$

Som er kaldt de karakteristiske ligningene til

$$au_x + bu_y = c$$

Grafen til en løsning $u$ er an union av løsningkurven av de karakteristiske ligningene. (karakteristikk).

Ikke-karakteristiske data for ligningen har formen

$$u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \gamma$$

der $\gamma$ er en kurve i $\mathbb{R}^2$ , slik at

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \gamma \quad \text{og} \quad z = k(x,y)\}$$

Blir en kurve $\Gamma$ i $\mathbb{R}^3$ ned en tangent som stiller en parabola med

$$(a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$$

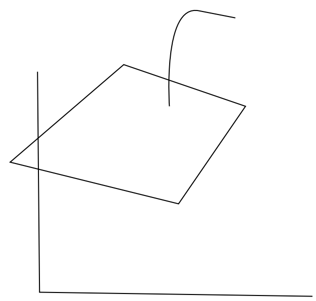


Figure 1: kurveiplan

**Theorem 1.3.** *Problemet har en entydig løsning* $u(x,y)$ *for* $(x,y)$ *i et åpent område som inneholder* $\gamma$ *.*

Konkret: Anta $\gamma$ er gitt ved

$$(\chi(\sigma), \mu(\sigma), (\dot{\chi}, \dot{\mu}) \neq 0, 0)$$

Sett $\chi(\sigma) = u_0(\chi(\sigma), \mu(\sigma))$ og $\Gamma$ gitt ved $(\chi, \mu, \zeta)$. Da løser vi $k$ ?? med initialdata $(\chi(\sigma), \mu(\sigma), \zeta(\sigma))$ . of kall resultatet

$$(x(\sigma, \tau), y(\sigma, \tau), z(\sigma, \tau))$$

Vi skal ha

$$u(x(\sigma, \tau), y(\sigma, \tau)) = z(\sigma, \tau)$$

Som er en implisitt løsning. Finn $(\sigma, \tau)$ skal være en funksjojn av $(x, y)$.

**Example.**

$$\begin{aligned} u_t + a(t, u) u_x &= c(t, u) \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Kontuerlighet slik at

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1, \quad t(0) = 0 \quad t(\tau) = \tau \\ \dot{x} &= a(t, x, z) \\ \dot{z} &= c(t, z) \end{aligned}$$

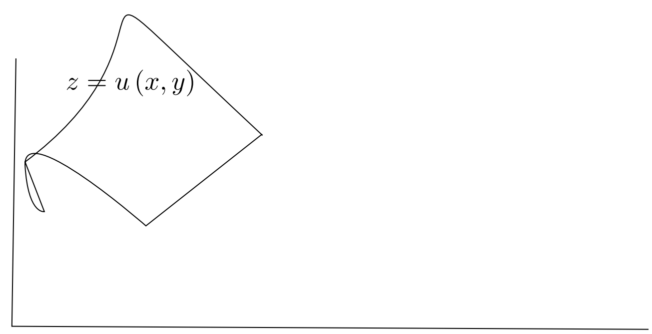


Figure 2: kurveiplan2

som kan forenkles til

$$.\begin{cases} \dot{x} & = a(t,x,z) \\ \dot{z} & = c(t,z) \end{cases}$$

Spesialtilfeller er

Tramert $a = (t,x)$

$$\text{så} \quad \begin{cases} \dot{x} & = a(t,x) \\ x(0) & = \zeta \end{cases}$$

Kan løses hver for seg of så løser vi

$$\begin{cases} \dot{z} = & c(t,x(t),z) \\ z(0) & = u_0(\zeta) \end{cases}$$

Slik at

$$\frac{Du}{Dt} = c(t,x,y) \implies u(0,\zeta) = u_0(\zeta)$$

Spesialtilfelle

$$u_t + a(u)\,u_x = 0$$
$$\dot{t} = 1, t(0) = 0, t = \tau$$
$$\dot{x} = a(z)$$
$$\dot{z} = 0$$

$x = \zeta + ta(u_0(\zeta))$ slik at $u(t,x) = u_0(\zeta)$

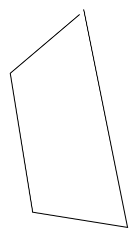

Figure 3: kdfkdkfd

Siste spesialtilfelle

$$
\begin{aligned}
&-yuu_x + xuu_y = 1, \quad u(x,0) = 0 \\
&\dot{x} = -yz \quad x(0) = \sigma \\
&\dot{y} = xz, \quad y(0) = 0 \\
&\dot{z} = 1 \quad z(0) = \sigma \quad z(\tau) = \sigma + \tau
\end{aligned}
$$

Et av resultatene er

$$
\frac{d}{d\tau}\left(x^2 + y^2\right) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0
$$

Slik at $x^2 + y^2 = \text{konstant} = \sigma^2$ .

La oss skrive

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \sigma\cos(\phi(t)) \\
y &= \sigma\sin(\phi(t))
\end{aligned}\right\} \phi(0) = 0
$$

da er

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = -\sigma\sin(\phi(\tau)) \cdot \phi\dot{(\tau)} = -y\phi\dot{(\tau)} \\
&\dot{y} = \sigma\cos(\phi(\tau))\,\dot{\phi} = x\dot{\phi}(\tau)
\end{aligned}
$$

derfor er

$$
\dot{\phi}(\tau) = z = \sigma + \tau\phi = \sigma\tau + \frac{1}{2}\tau^2
$$

$$
\frac{1}{2}\tau^2 + \sigma\tau - \phi = 0, \quad \tau = \frac{1}{2}\left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\phi}\right)
$$

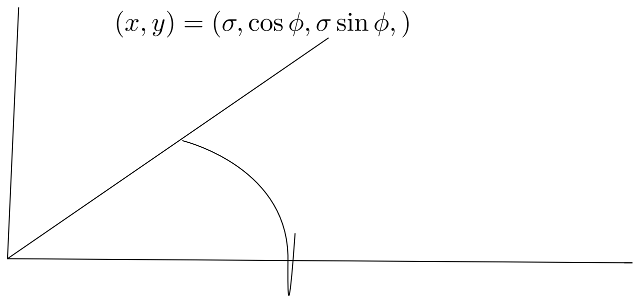


Figure 4: polarfigure

# 2 References