TMA4305 PDE 2020: Øvinger for uke 37

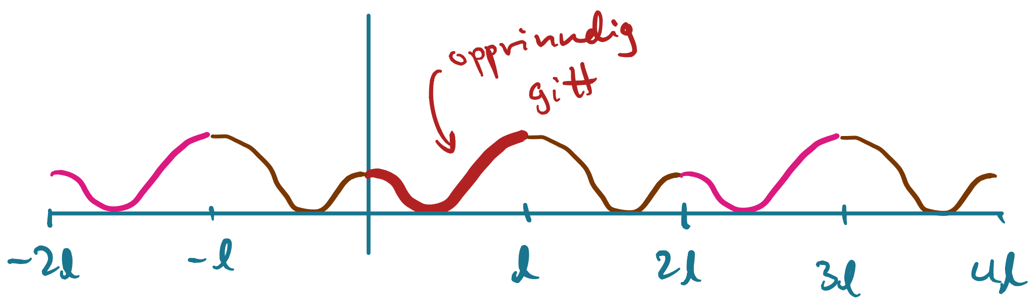
B 4.2 Bølgeligning med initialdata og Neumann randbetingelser

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
$$u(0,x) = g(x)$$
$$u_t(0,x) = h(x)$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$$

Enhver deriverbar funksjon med jevn symmetri om et punkt har derivert lik null i punktet. Så vi bør utvide g slik at $g(-x) = g(x)$, $g(l-x) = g(l+x)$ for alle x; ditto for h.
D'Alemberts løsning vil arve disse symmetriene, slik at de også vil oppfylle randbetingelsene.

Om vi bytter ut x med $l+x$ i $g(l+x) = g(l-x)$, får vi $g(2l+x) = g(-x)$. Siden også $g(-x) = g(x)$, må de

$$g(x+2l) = g(x)$$



Utvidelsen blir altså periodisk med periode $2l$.
(Hvis en randbetingelse er Dirichlet: $u(t,0)=0$ og den andre er Neumann: $u_x(t,l)=1$, blir perioden $4l$.)

B 4.4 Her er nesten alt arbeidet gjort i Example 4.8:
For $\sin(\omega_k x)=0$ både for $x=0$ og for $x=\ell$, så vi kan utvide f til alle $x\in\mathbb{R}$ ved å sette

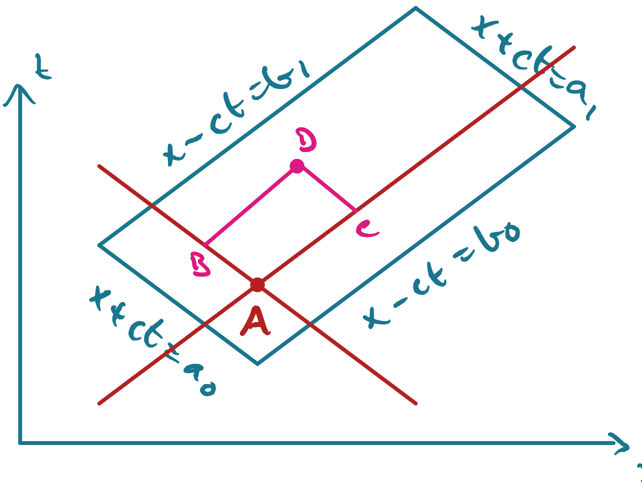
$$f(t,x)=\cos(\omega t)\sin(\omega_k x)$$

Men så har problemet nøyaktig samme struktur som i Ex. 4.8, og vi trenger bare bytte ut ω_0 der med ω_k. Altså:

$$u(t,x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\omega_k x)}{\omega_k^2-\omega^2}\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_k t)\right) & \omega\neq\omega_0\\[2ex] \dfrac{t}{2\omega_k}\sin(\omega_k x)\sin(\omega_k t) & \omega=\omega_0\end{cases}$$

(Merk at løsningen for $\omega=\omega_k$ er grensen av løsningen for $\omega\neq\omega_k$, når $\omega\to\omega_k$.)

X3:



Velg et fast punkt $A = (t_*, x_*)$ i området, og trekk de to linjene

$x - ct = x_* - ct_*$,

$x + ct = x_* + ct_*$

For et vilkårlig punkt D

$$u(D) = u(B) + u(C) - u(A)$$

Kan skrives som en funksjon av $x-ct$ (fordi $x-ct$ har samme verdi i D og B.)

kan skrives som en funksjon av $x+ct$ (fordi $x+ct$ har samme verdi i D og C)

Dette fungerer også om D er plassert på eller under en eller begge linjene $x \pm ct = x_* \pm ct_*$

X4 $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ kan skrives $(\partial_t \mp c\partial_x)(u_t \pm c\, u_x)=0$

($\mp$ og $\pm$ er motsatte fortegn!)

Så vi kan skrive $u_t \pm c u_x(t,x) = g_\mp(x \pm ct)$

Men som oppgaven sier, kan vi integrere $g_\mp$ og gange med passende konstanter, og skrive i stedet

$$u_t - c u_x = -2c\, w_+'(x-ct)$$
$$u_t + c u_x = 2c\, w_-'(x+ct)$$

Halve summen av de to blir

$$u_t = c\, w_-'(x+ct) - c\, w_+'(x-ct)$$
$$= \partial_t\big(w_-(x+ct) + w_+(x-ct)\big)$$

slik at
$$u = w_-(x+ct) + w_+(x-ct) + C_1(x)$$

$\frac{1}{2c}$ ganger differensen blir

$$u_x = w_-'(x+ct) + w_+'(x-ct)$$

slik at
$$u = w_-(x+ct) + w_-(x-ct) + C_2(t)$$

Men da må $C_1(x) = C_2(t)$ så begge er virkelige konstanter, og dermed

$$u = w_-(x+ct) + w_+(x-ct) + C$$

Men så kan vi erstatte w_+ med $w_+ + C$, og dermed faller C bort.

Til sist setter vi inn i initialbetingelsene:

$$w_-(x) + w_+(x) = g(x)$$
$$c\,w_-'(x) - c\,w_+'(x) = h(x)$$
$$w_-'(x) - w_+'(x) = \frac{1}{c} h(x)$$

Den siste gir

$$w_-(x) - w_+(x) = \frac{1}{c} H(x)$$

for en antiderivert H av h...

Vi adderer og subtraherer:

$$w_-(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2c} H(x)$$

$$w_+(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2c} H(x)$$

og dermed

$$\begin{aligned} u(t,x) &= w_-(x+ct) + w_+(x-ct) \\ &= \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\left(H(x+ct) - H(x-ct)\right) \\ &= \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

som er D'Alembert.