

Anwendungen

Ingmar Gundlach* und Ulrich Konigorski

Modellbasierte Online-Trajektorienplanung für zeitoptimale Rennlinien

Model-based online trajectory planning for time optimal race lines

<https://doi.org/10.1515/auto-2019-0032>

Empfangen 26. Februar 2019; angenommen 7. Juni 2019

Zusammenfassung: Der Beitrag beschreibt eine zeitoptimale Trajektorienplanung, die eine simultane Quer- und Längsplanung auf Basis eines nichtlinearen Einspurmodells durchführt. Das Optimierungsproblem wird vom Zeit- in den Ortsbereich transformiert. Die Planung wird sowohl für Rundkurse als auch zur zyklischen Planung mit statischen Objekten eingesetzt. Neben der Rundenzeit stehen Komfort und Rechenzeit im Fokus.

Schlagwörter: Trajektorienplanung, automatisiertes Fahren, zeitoptimal, Rennlinie, fahrdynamischer Grenzbereich, Optimierung

Abstract: The article describes a method for time optimal trajectory planning. The lateral and longitudinal planning are carried out simultaneously based on a nonlinear single-track model. The optimization problem is transformed from time domain into spatial domain. The planning is used for circuits as well as for moving horizon planning taking static objects into account. In addition to the lap time, the focus is on comfort and computing time.

Keywords: trajectory planning, automated driving, time optimal, race line, limits of driving dynamics, optimization

1 Einführung

Mit automatisiertem Fahren assoziiert man primär komfortable Fahrmanöver, die jegliche kritischen Fahrsituat

tionen vermeiden sollen. Daher werden Trajektorienplanungen oft so ausgelegt, dass keine hohen Beschleunigungen im Fahrzeug entstehen. Betrachtungen im fahrdynamischen Grenzbereich finden häufiger im Rahmen von aktiven Sicherheitssystemen wie ESP (Regelungsebene) statt und seltener auf der übergeordneten Bahnplanungsebene. Doch auch für Fahrerassistenzfunktionen und besonders für hochautomatisiertes Fahren ist sicheres Planen und Fahren im fahrdynamischen Grenzbereich sehr wichtig und dabei das härteste Testfeld [1].

Situationen am fahrdynamischen Limit können nicht nur durch plötzliche Ausweichmanöver zur Kollisionsvermeidung auftreten; bei regennasser Fahrbahn oder erst recht bei Schnee- und Eisglätte wird das Limit schon bei moderaten Fahrmanövern erreicht. Um ein Gesamtsystem von der Planung über die Regelung bis hin zur Umsetzung hierfür zu entwickeln und zu testen, eignet sich eine zeitoptimale Trajektorie am besten, da sie sich permanent an einer physikalischen Grenze befindet.

In diesem Beitrag wird eine modellbasierte Trajektorienplanung vorgestellt, die speziell auf Rennstrecken ausgelegt ist, deren Ansatz jedoch auch als Basis einer Planung für den normalen Straßenverkehr dienen kann. Sie entstand in einem Kooperationsprojekt mit der Volkswagen AG Konzernforschung und zielt auf seriennahe Fahrzeuge ab. Im Fokus steht dabei die Berechnung einer Trajektorie zur Minimierung der Rundenzeit unter Berücksichtigung fahrdynamisch relevanter Parameter in möglichst kurzer Rechenzeit für einen bekannten Streckenverlauf.

Neben der erwähnten Entwicklung von Systemen für automatisiertes Fahren bis ans fahrdynamische Limit gibt es weitere Einsatzgebiete von Rennlinienberechnungen: Vermehrt werden automatisierte Rennwagen für Autorennen entwickelt, wie im Rahmen von „Roborace“ [2] oder der „Formula Student Driverless“. Außerdem kann sie in Schulungssystemen, die den Fahrer das Fahren auf Rennstrecken lehren, wie z. B. dem „Volkswagen Golf R Race-Trainer“ [3] oder dem „BMW Track Trainer“ [4], eingesetzt werden.

*Korrespondenzautor: Ingmar Gundlach, TU Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Landgraf-Georg-Straße 4, 64283 Darmstadt, Germany, E-Mail: igundlach@iat.tu-darmstadt.de

Ulrich Konigorski, TU Darmstadt, Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik, Landgraf-Georg-Straße 4, 64283 Darmstadt, Germany, E-Mail: ukonigorski@iat.tu-darmstadt.de

Die Berechnung einer Rennlinie ohne Berücksichtigung von Hindernissen kann bei gegebenem Streckenverlauf offline erfolgen, sodass die Rechenzeit meist unkritisch ist. Im Gegensatz dazu muss beispielsweise aufgrund unvorhersehbarer Objekte eine Neuberechnung online innerhalb einiger Millisekunden erfolgen. Der hier vorgestellte Ansatz wird für Offline- und Online-Planungen gleichermaßen eingesetzt und kann daher sowohl kurze Streckenabschnitte als auch mehrere Kilometer lange Rundkurse berechnen. Durch die Nutzung zur Online-Planung ist eine recheneffiziente Umsetzung jedoch essentiell. Die Trajektorienplanung wurde auf diversen Rennstrecken und Handlings-Kursen erfolgreich erprobt.

2 Konzeption der Trajektorienplanung

Sowohl für die Trajektorienplanung im normalen Straßenverkehr als auch für die Berechnung von Ideallinien gibt es viele Ansätze. Drei der wesentlichen Kriterien, nach denen man die zugrundeliegenden Konzepte kategorisieren kann, sind im Folgenden beschrieben: Das erste betrachtet, ob der Lösungsraum durch Vorabwissen auf eine endliche Menge an Trajektorien oder ein vorgegebenes Bewegungsmuster eingeschränkt wird. Das zweite unterscheidet, ob eine gemeinsame oder separate Quer- und Längsplanung erfolgt, und abschließend wird die Parametrierung des Bezugssystems beleuchtet. Es werden jeweils die wichtigsten Vor- und Nachteile angeführt und gleichzeitig der hier vorgestellte Ansatz thematisch eingeordnet.

2.1 Definition des Lösungsraums

Idealerweise wird jede – physikalisch mögliche – Trajektorie aus einem kontinuierlichen Lösungsraum als potentielle Lösung zugelassen. Bei modellbasierten Verfahren wird die Integration meist numerisch, also diskret, durchgeführt. Für die Stellgrößen werden Ansatzfunktionen gewählt, im einfachsten Fall Treppenfunktionen. Um das Problem zu vereinfachen, können auch Ansatzfunktionen für Ausgangsgrößen des Systems wie Position oder Geschwindigkeit festgelegt werden, welche so gewählt sein müssen, dass sich realistische Trajektorien ergeben. So kann die Fahrzeugposition bei einem Fahrstreifenwechsel wie in [5] durch einen Spline beschrieben werden, welcher eine tatsächlich fahrbare Klothoide approximiert.

In [6] wird eine Rundenzeitoptimierung für einzelne Kurven durchgeführt, indem markante Stellen einer Rennlinie (Brems-, Einlenk-, Beschleunigungs- und Kurvenausgangspunkt) als Stützstellen eines Splines optimiert werden. In [7] wird gezeigt, dass eine Trajektorienplanung mit einer diskretisierten Zielmannigfaltigkeit effizient ausgeführt werden kann, solange ein hinreichend großer Abstand zur fahrphysikalischen Grenze eingehalten wird [7, 36]. Dazu wird eine Trajektorienschar berechnet und anschließend unter denjenigen Trajektorien, die alle Randbedingungen einhalten, die im Sinne eines Gütemaßes beste Trajektorie ausgewählt.

Zur Berechnung von Trajektorien, die tatsächlich zeitoptimal sind, und nicht nur den typischen Verlauf einer Ideallinie beschreiben, eignen sich jedoch weder Splinebasierte Ansätze, weil sie das Fahrverhalten im Grenzbereich zu ungenau beschreiben, noch Ansätze mittels Trajektorienschar, weil Ideallinien aus zu vielen unterschiedlichen Mustern bestehen, als dass man sie mit einer sinnvollen Anzahl an Trajektorien angeben könnte. Deswegen wird in unserem Ansatz lediglich eine Diskretisierung des Optimierungsproblems zur numerischen Integration durchgeführt. Die Modellgleichungen werden dabei über Nebenbedingungen im Optimierungsproblem berücksichtigt (s. Abschnitt 3.3) und das resultierende dynamische Optimierungsproblem mit Ipopt [8] gelöst. Der Lösungsraum wird a priori nur so stark eingeschränkt, wie es möglich ist, ohne eine suboptimale Lösung zu riskieren.

2.2 Wechselwirkung von Längs- und Querplanung

Für eine optimale Lösung müssen die Querplanung (Bahnplanung) und die Längsplanung (Geschwindigkeitsprofil) gemeinsam erfolgen, wie es in diesem Ansatz geschieht. Je nach Anwendungsfall ergeben sich jedoch bereits hinreichend gute Lösungen, wenn zuerst eine Bahn berechnet wird und anschließend ein Geschwindigkeitsprofil, mit dem diese Bahn abgefahren werden soll. Daher wird im Folgenden dieses Prinzip beschrieben:

Die Berechnung einer solchen Ideallinie kann über eine Minimierung der quadrierten Krümmung κ erfolgen, also einer rein geometrischen Größe, sodass die Linienwahl unabhängig von der Fahrzeugdynamik ist. Zum Bsp. minimiert [9] eine Kombination aus Krümmung und Streckenlänge. Denn mit der begrenzten Zentripetalbeschleunigung

$$a_c = \kappa v^2 \quad \text{mit} \quad |a_c| \leq \mu g \quad (1)$$

lässt sich so die Geschwindigkeit v eines Massepunkts maximieren, wobei μ der Kraftschlussbeiwert ist.

Aufgrund des *Kammschen Kreises*, der besagt, dass der *Betrag* der Reifenkraft limitiert ist, kann bei gegebener Querbeschleunigung nur noch der verbleibende Anteil bis zum Erreichen des maximalen Betrags zum Beschleunigen oder Verzögern verwendet werden. Ausgehend von den Kurven-Apizes, an denen die Geschwindigkeit lokal minimal ist, kann also die maximale Längsbeschleunigung nach und Verzögerung vor jedem Apex durch Vorwärts-/Rückwärts-Integration berechnet werden. Das Umschalten von Beschleunigen auf Verzögern erfolgt jeweils an der Stelle, an der beide simulierten Geschwindigkeiten identisch sind [3, 9, 10, 11].

Da geometrisch berechnete (krümmungsminimale) Linien selten zeitoptimal sind, können Quer- und Längsplanung iterativ wiederholt werden. So berechnet [10] für die ermittelte Geschwindigkeit der Ausgangslinie eine neue Linie durch Minimierung einer Kombination aus Gier- und Lenkrate. Daraus lässt sich dann wieder ein neues Geschwindigkeitsprofil berechnen.

An einem Streckenabschnitt des *Hockenheimerings* von der „Bernie Ecclestone-Kurve“ (Kurve 2) bis zur „Parabolika“ (Kurve 4) in Abb. 1 kann man gut erkennen, dass die Ideallinie stark von Fahrzeugparametern beeinflusst wird: Grün gepunktet ist eine näherungsweise krümmungsminimale Linie dargestellt, welche mit dem in [12] beschriebenen Algorithmus zur Filterung der Referenzlinie berech-

net wurde und nur geometrische Größen berücksichtigt. Die blau strichlierte und die rot durchgezogene Linie wurden mit dem im Folgenden vorgestellten Algorithmus für ein seriennahes Fahrzeug mit einer (fiktiven) Motorleistung von 80 kW (107 PS) bzw. 410 kW (550 PS) und Allradantrieb berechnet. Das hoch motorisierte Fahrzeug fährt Kurve 2 sehr eng und verschafft sich so eine gute Ausgangsposition für die „Parabolika“, um die volle Längsbeschleunigung auf die Straße bringen zu können. Dass Kurve 2 dabei wegen der hohen Krümmung langsam durchfahren werden muss, ist für die Gesamtzeit trotzdem optimal. Das schwach motorisierte Fahrzeug nimmt hingegen mit geringer Krümmung möglichst viel Geschwindigkeit mit durch Kurve 2, da verlorene Geschwindigkeit nur langsam wieder aufgebaut werden kann. Zudem hat es aufgrund der geringeren Geschwindigkeit in der Parabolika mehr Potential zum Lenken. Andere Fahrzeugparameter, seien es die Kraftverteilung auf Vorder- und Hinterachse, die Reifenparameter oder die Masseverteilung, ergeben wieder andere individuelle Ideallinien. Und dabei sind Effekte, die sich durch unterschiedliche Kraftschlussbeiwerte auf der Strecke ergeben könnten, noch nicht berücksichtigt. Doch ist bereits so schon offensichtlich, dass die krümmungsminimale Linie für keines der beiden Fahrzeuge eine (zeitoptimale) Ideallinie darstellt. Aus diesem Grund wird hier als Gütemaß die echte Fahrzeit berechnet und kein lokales Ersatzmaß angenommen. Die Fahrzeit wird durch eine si-

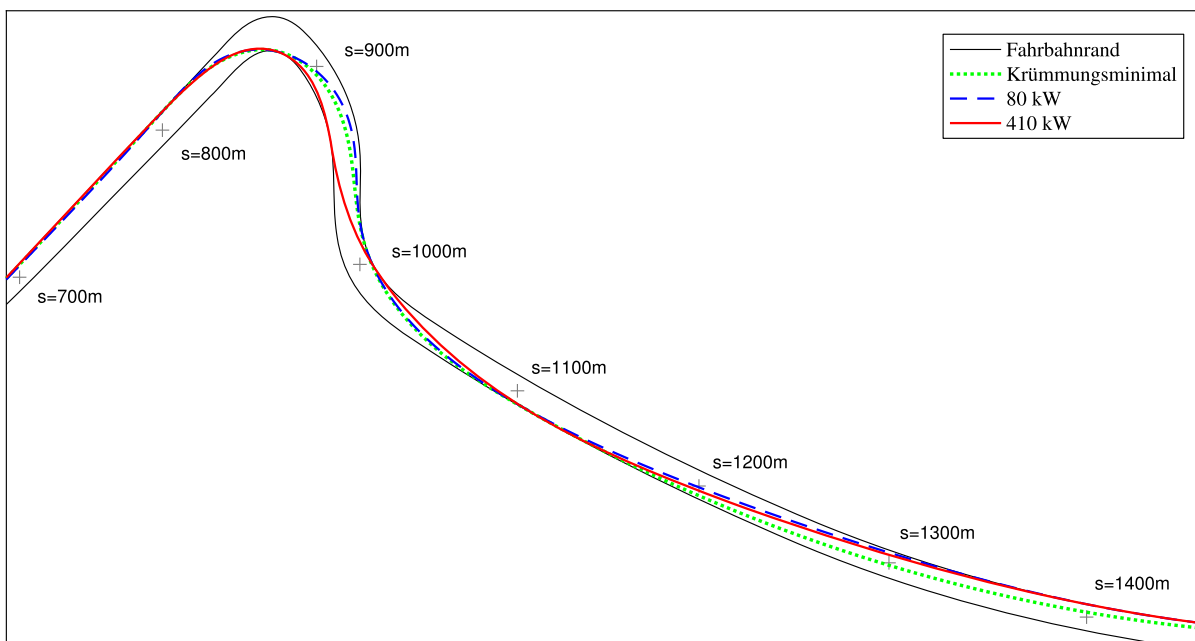


Abb. 1: Krümmungsminimale Linie im Vergleich zu zeitoptimalen Linien für ein Beispielfahrzeug mit 80 kW und 410 kW Motorleistung.

multane Optimierung von lateraler und longitudinaler Bewegung minimiert.

2.3 Zeit oder Weg?

Aus dem Alltag ist man gewohnt, dass die Zeit ein unabhängiger Parameter ist, der sich streng monoton verhält. Deswegen werden Bewegungen oft als zeitabhängige Trajektorie beschrieben. Im Straßenverkehr verwendet der Mensch jedoch intuitiv den Ort als Bezugsgröße: Wenn man als Autofahrer eine Kurve vor sich sieht, wird man sich nicht denken: „In fünf Sekunden werde ich für zwei Sekunden das Lenkrad einschlagen“, sondern: „Wenn ich den Kurveneingang erreicht habe, werde ich das Lenkrad einschlagen, bis ich am Kurvenausgang angekommen bin.“ Diese Aussage zeigt anschaulich, dass der Mensch in solchen Situationen über den Ort parametrisiert und sich die Zeit als Variable in Abhängigkeit der Systemzustände (Geschwindigkeit) ergibt.

Mathematisch wird die Trajektorie dann durch $\mathbf{x}(s)$ angegeben, wobei s die Länge einer Referenzlinie entlang des Streckenverlaufs ist. Die Referenzlinie kann z. B. die Mittellinie der Fahrbahn sein. Ein Vorteil ist besonders relevant: Wenn das System an einem Ort einen gewissen Zustand einnimmt, bleibt dieser Zustand an derselben Stelle der Trajektorie, unabhängig davon, wie schnell sich das System in dem vorhergehenden Trajektorienstück bewegt hat. So kann beispielsweise der Fahrbahnrand für jeden Punkt s als eine von den Optimierungsvariablen unabhängige Funktion angegeben werden, was für eine zeitabhängige Parametrierung nicht möglich ist. Nachteilig ist hingegen die Bedingung, dass s streng monoton steigen muss, sodass kein Stillstand möglich ist. Jedoch gilt diese Bedingung bereits bei Verwendung eines klassischen Einspurmodells, sodass Stillstand häufig separat betrachtet werden muss.

Konsequenterweise werden bei einem wegbasierten Ansatz nicht nur alle Größen auf die Referenzlinie bezogen, sondern auch die System-DGLs vom Zeit- in den Wegbereich transformiert. Dies bringt zwar zusätzlichen mathematischen Aufwand mit sich, jedoch erlaubt es eine elegante Formulierung des zeitoptimalen Gütemaßes, wie in Abschnitt 3 beschrieben wird. Die Transformation in den Wegbereich ist jedoch nicht zwingend notwendig, wenn ein referenzlinienbasiertes Koordinatensystem zum Einsatz kommt. Es gibt zahlreiche Ansätze, darunter [13, 14, 15, 16], die Referenzlinien bzw. Frenet-Koordinaten verwenden, und dennoch die Dynamik im Zeitbereich berechnen. Nur [17, 18] transformieren die Fahrzeugdynamik wie auch bei diesem Ansatz in den Wegbereich.

3 Dynamisches Optimierungsproblem

Speziell für die Beschreibung der Zeitoptimalität ergibt sich ein wesentlicher Vorteil durch die Parametrierung über den Weg. Das Gütemaß

$$\min T_{\text{end}} = \int_{t=0}^{T_{\text{end}}} dt \quad (2)$$

führt nämlich zu einem Optimierungsproblem mit freier Endzeit und freiem Endzustand; denn der Endzustand ergibt sich erst durch die Optimierung. Transformiert man es aber in den Ortsbereich, lautet es

$$\min T_{\text{end}} = \int_{s=0}^{S_{\text{end}}} \sigma(s) ds, \quad \sigma := \frac{dt}{ds}, \quad (3)$$

wobei S_{end} die bekannte Länge der Referenzlinie ist. Die Transformation σ wird im Folgenden auf Basis kinematischer Beziehungen hergeleitet. Anschließend werden das Fahrzeugmodell und die numerische Lösung dargelegt.

3.1 Kinematik

Abb. 2 zeigt links ein Fahrzeug (Fzg), dessen Schwerpunkt auf der Referenzlinie liegt. Die Fzg-Längsachse x ist um den Gierwinkel $\psi = \gamma + \psi_t$ des globalen Koordinatensystems x_0, y_0 gedreht. Dabei ist ψ_t ein relativer Gierwinkel zwischen der Tangente der Referenzlinie und dem Fzg. Der Schwerpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung des Schwimmwinkels β . Somit verschiebt er sich während eines Zeitinkrements dt um das Weginkrement

$$ds_v = v dt. \quad (4)$$

Um die Orientierung und Bewegungsrichtung des Fzgs zu berücksichtigen, wird ds_v auf die Referenzlinie projiziert, woraus sich

$$ds_t = \cos(\psi_t + \beta) ds_v \quad (5)$$

ergibt.

Auf der rechten Seite in Abb. 2 wird eine Translation zur Referenz veranschaulicht. Der Schwerpunkt bewegt sich um ds_t parallel zur Referenz, ist jedoch um den Querversatz d in negativer Richtung (in y -Richtung ist d positiv) orthogonal zur Referenz verschoben. Projiziert man ds_t wiederum auf die Referenz, ergibt sich durch den Strahlensatz

$$ds = \frac{r}{r-d} ds_t = \frac{1}{1-\kappa d} ds_t, \quad (6)$$

worin κ die Krümmung der Referenzlinie ist.

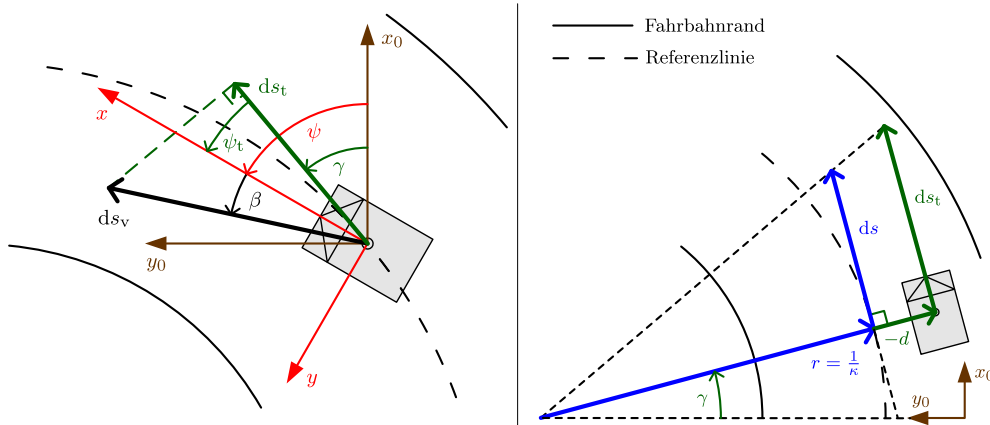


Abb. 2: Koordinatentransformation: Rotation (links) und Translation (rechts).

Zusammenfassend ergibt sich aus (4), (5) und (6)

$$\sigma = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds_v} \frac{ds_v}{ds_t} \frac{ds_t}{ds} = \frac{1 - \kappa d}{v \cos(\psi_t + \beta)}, \quad (7)$$

woran man sofort erkennt, dass $v \neq 0$ sein muss und das Fzg sich nicht orthogonal zur Referenz bewegen darf.

Fahrzeugposition und -ausrichtung sowie die Referenzlinie sollen im Optimierungsproblem ausschließlich in lokalen Koordinaten beschrieben werden, um weder fixe Bezugspunkte noch große Offsets zu benötigen. Da bietet es sich an, die Referenzlinie durch ihre Krümmung κ , die Fahrbahnbreite durch ein d_{\max} orthogonal zur Referenz nach links und rechts und die Fzg-Position und -ausrichtung durch den Querversatz d und den relativen Gierwinkel ψ_t zu beschreiben. Für eine spätere Umrechnung in globale Koordinaten müssen natürlich entsprechende Variablen der Referenz vorgesehen werden.

Die Position in longitudinaler Richtung ergibt sich implizit durch den unabhängigen Parameter s und bedarf keiner DGL. Die Änderung der Fzg-Position in lateraler Richtung ist der Anteil des Geschwindigkeitsvektors senkrecht zur Referenz:

$$\dot{d} = v \sin(\psi_t + \beta) \quad (8)$$

Die Änderung der Ausrichtung ergibt sich durch Differentiation des relativen Gierwinkels $\psi_t = \psi - \gamma$. Abb. 2 (rechts) zeigt, dass der Winkel zwischen dem Radius r und der y_0 -Achse gerade γ ist. Somit ist

$$ds = r dy \quad (9)$$

und

$$\dot{\psi}_t = \dot{\psi} - \dot{\gamma} = \dot{\psi} - \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{\psi} - \frac{\kappa}{\sigma}. \quad (10)$$

3.2 Modellierung der Fahrzeugdynamik

Bei der Modellierung der Fahrzeugdynamik ist es für diesen Ansatz wichtig, einen sinnvollen Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und Rechenaufwand zu finden. Denn das Modell soll bis in den Grenzbereich hinreichend genau sein, aber doch eine Online-Berechnung zulassen. Darüber hinaus ist es für die verwendete Optimierung vorteilhaft, wenn es zweimal stetig differenzierbar ist.

In der Literatur findet sich eine große Bandbreite zur Modellierung des Fahrzeugs von quasi-statischen (QSS) Modellen bis hin zu komplexen dynamischen Modellen mit unterschiedlicher Anzahl an Freiheitsgraden (DOF). Eine der ersten Rundenzeitoptimierungen für einen gesamten Rundkurs ist in [17] beschrieben, welche anhand eines detaillierten dynamischen Modells mit 7 DOF und 14 Zuständen durchgeführt wird. Aufgrund der extrem langen Rechenzeiten erarbeitete [11] darauf aufbauend einen QSS-Ansatz zur Rundenzeitsimulation, welcher für eine gegebene Rennlinie iterativ Längs- und Querschleunigungen optimiert. Er verwendet 3 DOF für die Berechnung der Längs- und 6 DOF für die Querschleunigung. [18] beschreibt daraufhin eine Rundenzeitoptimierung unter Verwendung eines nichtlinearen Zweispurmodells mit nur 3 DOF. Zur schnelleren Berechnung vernachlässigt er im Gegensatz zu [17] schnelle Dynamiken, um steife DGLs zu vermeiden. Im Gegensatz zu [11] approximiert er die Dynamik aber nicht durch ein QSS-Modell. Da sich alle drei Ansätze auf Formel 1-Wagen fokussieren, spielt die Modellierung der Radlasten durch den aerodynamischen Abtrieb eine wichtige Rolle. Bei Serienfahrzeugen entsteht meist ein aerodynamischer Auftrieb, der an beiden Achsen die Aufstandskraft reduziert [19]. Er hat jedoch weit geringeren Einfluss.

Während [17] für die Berechnung des *Suzuka-Circuits* (5,8 km) im Jahr 2000 auf einer damals sehr performanten Compaq Alpha Workstation etwa 8 Stunden und für den *Circuit de Barcelona-Catalunya* (4,7 km) auf einer Sun Workstation 28 bis über 60 Stunden benötigte, genügte für [18] im Jahr 2014 lediglich 15 Minuten für den Barcelona-Circuit auf einem Desktop-Rechner. Geht man davon aus, dass sich aufgrund des technischen Fortschritts die Rechenzeit alle zwei Jahre halbieren würde, was eher auf Super-Computer als auf PCs zutrifft, ergäben sich für [17] heute Zeiten im Bereich einiger Minuten und für [18] 2–3 Minuten.

Die iterative Quer-/Längs-Optimierung [10] setzt ein linearisiertes, zeitvariantes 3 DOF-Modell ein und konvergiert für den *Thunderhill Raceway* (4,6 km) nach 4–5 Iterationen. Jede Iteration benötigte 2016 auf einem Laptop 30 s.

Der hier vorgestellte Ansatz verwendet ein nichtlineares Einspurmodell mit 3 DOF. Die verhältnismäßig schnelle Wank- und Nickdynamik wird also vernachlässigt, jedoch berücksichtigt das Modell die Achslastverteilung auf Vorder- und Hinterachse, welche sich aufgrund der Schwerpunktshöhe abhängig von der Beschleunigung ändert. Darauf aufbauend wird auch die Bremskraftverteilung angepasst. Aerodynamische Kräfte werden in Längsrichtung berücksichtigt, aber aufgrund des geringen Einflusses nicht in vertikaler Richtung. Die Optimierung benötigt für einen vergleichbaren Kurs mit 4,5 km (Abb. 6) auf einer Intel Core i7 Mobile-CPU der 4. Generation (2014) unter 2 s in C++ und ca. 3 s in Matlab. Dabei startet die Optimierung im Gegensatz zu [17] ohne Startlösung (Startwert 0 für alle Variablen), worauf in Abschnitt 3.3 noch eingegangen wird.

Das Einspurmodell leitet sich aus den Bewegungsgleichungen in Fzg-Längs- und -Querrichtung sowie dem Momentensatz her, vgl. [19, Kap. 20.1]:

$$0 = m(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \sin \beta - m\dot{v} \cos \beta + F_{xv} \cos \delta + \dots + F_{xh} - F_{yv} \sin \delta - F_{wx} \quad (11a)$$

$$0 = -m(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \cos \beta - m\dot{v} \sin \beta + F_{xv} \sin \delta + \dots + F_{yv} \cos \delta + F_{yh} - F_{wy} \quad (11b)$$

$$0 = J_z \ddot{\psi} - (F_{xv} \sin \delta + F_{yv} \cos \delta) l_v + F_{yh} l_h \quad (11c)$$

Die Winkel und Längen sind in Abb. 3 eingezeichnet. Darüber hinaus ist m die Fahrzeugmasse und J_z das Trägheitsmoment um die durch den Schwerpunkt SP gehende Hochachse. $F_{w...}$ sind Widerstandskräfte, wobei in x -Richtung der zu v^2 proportionale Luftwiderstand und in beiden Richtungen Gravitationskräfte durch Fahrbahnneigungen eingehen. Diese müssen zur Vereinfachung allerdings in Fzg-Koordinaten bekannt sein. Die verbleibenden

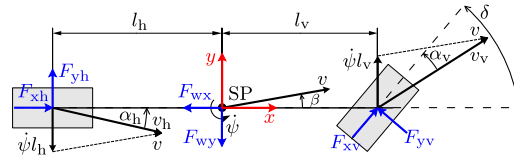


Abb. 3: Winkel, Längen und Kräfte beim Einspurmodell.

Kräfte $F_{x...}$ und $F_{y...}$ jeweils für vorne und hinten sind Reifenkräfte in Längsrichtung des Rades bzw. orthogonal dazu.

Die Reifen-Querkräfte $F_y(\alpha)$ werden jeweils nach einer leicht vereinfachten Form der „Magic Formula“ von Pacejka in Abhängigkeit der linearisierten Schräglaufwinkel α berechnet. Sie ergeben sich aus der Überlagerung von translatorischer und rotatorischer Bewegung nach Abb. 3:

$$\tan(\alpha_h) = \frac{\dot{\psi} l_h - v \sin \beta}{v \cos \beta} \quad (12a)$$

$$\tan(\delta - \alpha_v) = \frac{\dot{\psi} l_v + v \sin \beta}{v \cos \beta} \quad (12b)$$

Die Längskräfte F_x werden durch Motor und Bremse generiert und setzen sich aus der Antriebskraft $F_M \geq 0$ und der Bremskraft $F_B \leq 0$ zusammen. Diese verteilen sich über eine konstante Motorkraftverteilung k_{MV} und eine dynamische Bremskraftverteilung $k_{BV}(\alpha_x)$ auf Vorder- und Hinterachse:

$$F_{xv} = k_{MV} F_M + k_{BV}(\alpha_x) F_B \quad (13a)$$

$$F_{xh} = (1 - k_{MV}) F_M + (1 - k_{BV}(\alpha_x)) F_B \quad (13b)$$

Somit ergeben sich neben dem Lenkwinkel δ die Gesamtkräfte F_M und F_B als Eingangsgrößen des Modells. Im Gegensatz zu [17, 18] gibt es separate Optimierungsvariablen für Antrieb und Bremse. Der Vorteil ist, dass für die unterschiedlichen Kraftverteilungen von Antrieb und Bremse in (13) keine nicht stetig differenzierbaren Funktionen, wie $\max(\cdot)$ oder $\min(\cdot)$, auftreten. In [18] werden diese Funktionen durch einen weichen Übergang differenzierbar gemacht. In der Umsetzung hier muss allerdings im Optimierungsproblem sicher gestellt sein, dass immer mindestens eine der beiden Größen null ist.

Natürlich ist es auch notwendig, dass die Aktorik (Lenkung, Motor, Bremse) technisch in der Lage ist, den berechneten Verlauf zu stellen. Das Gesamtkonzept sieht keine klassische MPC vor, sondern eine separate Planung und eine Trajektorienfolgeregelung. Daher muss die Planung keine expliziten Aktorgößen liefern. Dennoch müssen Planung und Regelung so aufeinander abgestimmt sein, dass die geplante Trajektorie mit dem Regler und dem

Fahrzeug realisierbar ist. Wie dies im Optimierungsproblem gelöst wird, ist in Abschnitt 3.3 beschrieben. Zuvor sollen jedoch die Achslast- und Bremskraftverteilung behandelt werden.

Die Radaufstandskraft F_z ist eine wichtige Größe, da sie jeweils für vorne und hinten über

$$\sqrt{\left(\frac{F_x}{\mu_x F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{\mu_y F_z}\right)^2} \leq 1 \quad (14)$$

die maximal übertragbare Horizontalkraft bestimmt. Berücksichtigt man die Schwerpunktshöhe $h > 0$, setzt sich F_z aus einem statischen Anteil F_{z0} , welcher nur von Fzg-Parametern und der Fahrbahnneigung abhängt, und einem dynamischen Anteil F_{zd} , welcher von der Längsbeschleunigung a_x abhängt, zusammen. Es ergibt sich mit $l := l_v + l_h$ für vorne bzw. hinten:

$$F_z(a_x) = F_{z0} \mp F_{zd}(a_x), \quad F_{zd}(a_x) \approx \frac{h}{l} m a_x \quad (15)$$

Da hierin die Nickbewegung vernachlässigt ist, handelt es sich um eine quasi-statische Achslastverteilung. Die Längsbeschleunigung a_x führt jedoch zu einer komplexen Abhängigkeit vieler Zustände. Approximiert man sie für Geradeausfahrt und den Lenkwinkel $\delta = 0$, ergibt sich mit der Fahrbahnneigung θ :

$$\begin{aligned} m a_x &= F_{xv} \cos \delta + F_{yv} \sin \delta + F_{xh} - F_{Lx} - mg \sin \theta \\ &\approx \underbrace{F_{xv} + F_{xh}}_{F_M + F_B} - F_{Lx} - mg \sin \theta \end{aligned} \quad (16)$$

Diese Approximation stellt bei verhältnismäßig geringen Modellgenauigkeiten eine große Vereinfachung für die Optimierung dar. Die Approximation (16) wird ebenfalls genutzt, um die Bremskraftverteilung in (13) so auszugleichen, dass sich für $\delta = 0$ eine ideale Bremskraftverteilung einstellt. Die Bremskraftverteilung ist allgemein als das Verhältnis der Bremskraft vorne F_{Bv} zur Gesamtbremskraft F_B definiert:

$$k_{BV} := \frac{F_{Bv}}{F_B} \stackrel{!}{\approx} \frac{\mu_x (F_{z0,v} - F_{zd}(a_x))}{\mu_x mg} \quad (17)$$

In diesem Beitrag wird zur besseren Übersicht eine ebene Fahrbahn ($\theta = 0$) angenommen. Da beim Bremsen $F_M = 0$ ist, folgt aus (16) $m a_x \approx F_B - F_{Lx}$. Mit (15) folgt aus (17)

$$\begin{aligned} k_{BV} &= \frac{F_{z0,v} - \frac{h}{l} m a_x}{mg} = \frac{mg \frac{l_h}{l} - \frac{h}{l} (F_B - F_{Lx})}{mg} \\ &= \frac{l_h}{l} + \frac{h}{mgl} F_{Lx} - \frac{h}{mgl} F_B. \end{aligned} \quad (18)$$

Gemäß Gleichung (13a) nimmt die Längskraft an der Vorderachse also näherungsweise quadratisch mit der gesamten Bremskraft zu, um die größte Verzögerung zu erhalten.

Um die Auswirkung der Approximationen in (15)–(17) abzuschätzen, wird zuerst eine Trajektorie berechnet, die den gesamten Kammschen Kreis abdeckt. Zusätzlich wird auch noch der Luftwiderstand in (16) und (18) zu null angenommen. Wertet man diese Trajektorie nun ohne die Approximationen aus, ergibt sich in der Reifenkraft bezogen auf ihr Maximum ein Fehler von max. 3 %. In zahlreichen Erprobungsfahrten hat sich das Modell als geeignet erwiesen, um Trajektorien bis in den Grenzbereich zu planen.

Um das Fzg-Modell schließlich in dem wegbasierenden Optimierungsproblem verwenden zu können, müssen die Zeit-DGLs im Zustandsraummodell (19) über eine Multiplikation mit σ gemäß (7) in den Ortsbereich transformiert werden, um die Ableitungen nach s zu erhalten. Die Eingänge sind $\mathbf{u} = [F_M, F_B, \delta]^\top$, die Zustände $\mathbf{x} = [d, \psi_t, v, \beta, \psi]^\top$. Natürlich bleibt $\dot{\psi}$ die Zeitableitung von ψ .

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \implies \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (19)$$

3.3 Numerische Lösung

Im Gegensatz zu indirekten Verfahren, auf die hier nicht eingegangen wird, wird ein dynamisches Optimierungsproblem bei den direkten Verfahren durch Diskretisierung in ein statisches Optimierungsproblem überführt. Im Detail unterscheidet man Parameteroptimierung, Einfach- und Mehrfachschießverfahren sowie Kollokationsverfahren [20]. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch in der Diskretisierung, wobei man nach *Teildiskretisierung* („direkt sequentiell“) und *Volldiskretisierung* („direkt simultan“) trennt.

Bei der *Teildiskretisierung* wird nur der Stellgrößenverlauf diskretisiert. Für jeden Diskretisierungspunkt (DP) gibt es eine Optimierungsvariable pro Stellgröße. Die Trajektorie ist anhand der Stellgrößen durch die Systemgleichung eindeutig bestimmt und wird in jeder Iteration durch eine externe Simulation berechnet. Da Optimierung und Simulation nacheinander ablaufen, heißt das Verfahren auch „direkt sequentiell“. Die Simulation kann mit einer abweichenden Abtastung laufen. So wird in [17] die Stellgröße mit 4 – 20 m diskretisiert, während die numerische Integration Trajektorienpunkte im Abstand von 1 – 10 cm berechnet, wofür die Stellgrößen linear interpoliert werden.

Bei der *Volldiskretisierung* werden Stellgrößenverlauf und Zustandsverlauf diskretisiert. Der Optimierungsvek-

tor besteht also aus Stellgrößen und Zuständen an allen DP. Die Systemgleichung wird als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem aufgenommen und somit *simultan* integriert. In diesem Ansatz wird ein explizites Euler-Verfahren zur Integration verwendet. Da in jeder Iteration die gesamte Trajektorie verbessert wird, bietet dieses Verfahren eine Art Parallelisierung auf algorithmischer Ebene.

Vorteile der Teildiskretisierung sind die minimale Anzahl an Optimierungsvariablen und die Flexibilität, Nebenbedingungen auch zwischen den DP der Stellgröße auswerten zu können. Das Verfahren ist besonders gut geeignet, wenn die Lösung der System-DGLs analytisch erfolgen kann, was aber bei nichtlinearen Systemen i. A. unmöglich ist. Bei gradientenbasierten Optimierungsverfahren (wie das hier verwendete Interior-Point) müssen die Ableitungen des Gütemaßes und der Nebenbedingungen nach den Optimierungsvariablen bekannt sein. Bei komplexen Zusammenhängen sind die Ableitungen nach den Zuständen bereits diffizil. Diese jedoch nach den Stellgrößen zu berechnen, wie es die Teildiskretisierung erfordert, ist analytisch kaum machbar. (Man stelle sich nur einmal vor, die simple Box-Restriktion für den Streckenrand $d_r \leq d \leq d_l$ für alle s in Abhängigkeit von F_M, F_B und δ angeben zu müssen!) Hier kann höchstens ein Verfahren zum *automatischen Differenzieren* (AD) eingesetzt werden, wie auch in [17]. Dieses führt jedoch keine Termvereinfachung durch und ist daher bei weitem nicht so effizient, wie eine sauber vereinfachte analytische Lösung. Ein weiterer großer Nachteil der Teildiskretisierung ist, dass man eine sehr gute Startlösung benötigt, da anderenfalls die Optimierung abbricht. Wenn z. B. die Stellgröße in der Startlösung dazu führt, dass das Fzg in der Simulation ins Schleudern gerät oder die Strecke verlässt, kann der Rest der Strecke nicht mehr simuliert werden. Deswegen unterteilt [17] die Strecke in einzelne Segmente (10 – 100 m), in denen das Fahrzeug stabil bleiben sollte. Über Nebenbedingungen wird eine Stetigkeit an den Segmentgrenzen gefordert. Zusätzlich wird mit einer manuell eingefahrenen Startlösung begonnen. Die Volldiskretisierung kann hingegen mit jeder Startlösung (im Rahmen der Box-Restriktionen) starten.

Der Ansatz hier geht gerade den umgekehrten Weg zur Teildiskretisierung, wie im Folgenden beschrieben wird. Für die bisher eingeführten Systemeingänge \mathbf{u} und die Zustände \mathbf{x} wird eine Volldiskretisierung durchgeführt. Jedoch wurde in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt, dass neben dem Fzg-Modell auch die Aktordynamik (Motor, Bremse, Lenkung) mit den unterlagerten Regelkreisen berücksichtigt werden muss, wie es in Abb. 4 dargestellt ist. Der klassische Weg der Volldiskretisierung würde diese

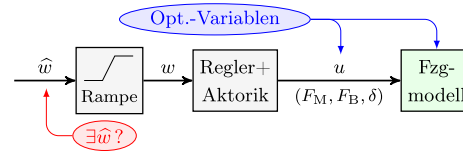


Abb. 4: Existiert eine Steuerfolge \hat{w} , die zu dem gewünschten Verlauf der Optimierungsvariable u führt?

Dynamik ins Modell aufnehmen. Oft wird sie durch ein PT_1 - oder PT_2 -Glied approximiert, wobei der Eingang aus Sicherheits- oder Komfortgründen auf eine Maximalrate begrenzt ist, was in Abb. 4 durch die Rampe angedeutet ist. Dies ergäbe im Optimierungsproblem bei N DP dann weitere N Optimierungsvariablen pro Aktor für w und im Fall eines einfachen PT_1 weitere N Gleichungsnebenbedingungen (GNB). Möchte man noch die Stellrate am Eingang begrenzen, ergeben sich weitere $2N$ Ungleichungsnebenbedingungen (UNB).

Um das Problem effizienter zu lösen, kann die Stellrate $|\dot{u}|$ wie in [12, 13] durch lineare UNB begrenzt werden, wodurch aber weder ein glatter Verlauf von w noch ein PT_2 -Verhalten erzielt werden kann. Daher wird hier eine andere Approximation vorgestellt, für die zuerst das Verhalten am Beispiel eines PT_1 untersucht wird: Diskretisiert man die Übertragungsfunktion eines PT_1 mit der Zeitkonstante τ und der Abtastzeit T_s

$$G(s) = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (20)$$

ergibt sich die Differenzengleichung

$$w_k = \frac{1}{1-c} u_{k+1} - \frac{c}{1-c} u_k, \quad c = \exp\left(-\frac{T_s}{\tau}\right). \quad (21)$$

Mit einer zusätzlichen Stellratenbegrenzung

$$|\Delta w| = |w_{k+1} - w_k| \leq \Delta w_{\max} \quad (22)$$

erhält man eine Differenzengleichung 2. Ordnung der Form

$$|\alpha u_{k+2} - \beta u_{k+1} + \gamma u_k| \leq \Delta w_{\max}, \quad (23)$$

welche eine UNB ergibt, die ausschließlich von der bereits als Optimierungsvariable existierenden Variable u abhängt. Allerdings muss (23) natürlich wie alle Gleichungen vom Zeitbereich in den Wegbereich transformiert werden, denn der Index k bezieht sich auf diskrete Zeitpunkte.

In (23) sind die Koeffizienten α, β, γ noch unbestimmt. Sie hängen bei einem PT_n -Glied über e-Funktionen von der Abtastzeit T_s ab, welche wiederum von σ abhängt. Da diese Abhängigkeit komplex ist, sollte untersucht werden, ob

sie in dieser Form notwendig ist: Das PT_n -Verhalten wird angesetzt, da sich so eine lineare DGL ergibt – für ein nicht-lineares Optimierungsproblem bietet dies jedoch keinerlei Vorteil. PT_n -Glieder zeichnen sich durch fixe Zeitkonstanten aus, die nicht von der Sprunghöhe abhängen. Genau dieser Zusammenhang liegt in der Realität aber keineswegs vor: Wenn der Motor „auf Drehzahl ist“ wird er durch den Turbo schneller ansprechen als aus dem Stand, und auch die Bremse wird schneller ihre maximale Wirkung entfalten, wenn die Bremsbacken schon an der Bremscheibe anliegen. Es gibt also keinen Grund, an der Approximation durch ein PT_n -Glied festzuhalten. Nimmt man ein integrierendes Verhalten an, bei dem die Sprungantwort rampenförmig bis zum Endwert läuft, ist die Zeit bis zum Erreichen des Endwerts proportional zur Sprunghöhe. Dann ergibt sich für α , β und γ der Zusammenhang $\beta = 2\alpha$ und $\gamma = \alpha$, sodass die Differenzengleichung (23) dem Differenzenquotient 2. Ordnung entspricht. Das heißt für ein System n -ter Ordnung wird der Betrag der $(n+1)$ -ten Ableitung des Ausgangs u auf einen endlichen festen Wert begrenzt.

Nun gehen wir noch einen Schritt weiter und ersetzen die UNB (23) durch eine quadratische Straffunktion:

$$\min \Delta w^2 = (\alpha u_{k+2} - \beta u_{k+1} + \gamma u_k)^2 \quad (24)$$

Neben dem Vorteil, keine zusätzlichen UNB zu erhalten und so (testweise) ca. 10 % Rechenzeit einzusparen, reduziert dieses zusätzliche Gütemaß die Dynamik in der Lösung. Das führt zu einem spürbar erhöhten Fahrkomfort. Dabei verschlechtert sich allerdings das primäre Gütemaß Rundenzeit ein wenig. Durch die Straffunktion kann zwar nicht sicher gestellt werden, dass die Grenzen der Aktordynamik stets eingehalten werden, jedoch haben Tests gezeigt, dass der Trajektorienfolgeregler dem glatteren Sollverlauf auch in hochdynamischen Situationen besser folgen kann. Man darf das Gütemaß (24) nur nicht zu stark gewichten, da das zu Überspringen führt.

Abb. 5 zeigt die Krümmung einer optimierten Trajektorie für einen Streckenabschnitt auf einem Handlings-Kurs für die Beschränkung nach (23) im Vergleich zur Bestrafung nach (24). Gerade an den Ableitungen sieht man deutlich, wie viel glatter der Verlauf wird. Dabei erhöhte sich die simulierte Rundenzeit nur marginal um $\Delta T_{\text{lap}} \ll 1\%$.

Es folgt zusammenfassend, dass im Gegensatz zur Teildiskretisierung, wo die Eingänge in die Optimierung aufgenommen und die Zustände durch numerische Integration berechnet werden, hier die Zustände aufgenommen und implizit die Eingänge durch Differentiation berechnet werden. Allgemein betrachtet, ist diese Methode eine logische Konsequenz aus dem Grundprinzip dieses Ansatzes:

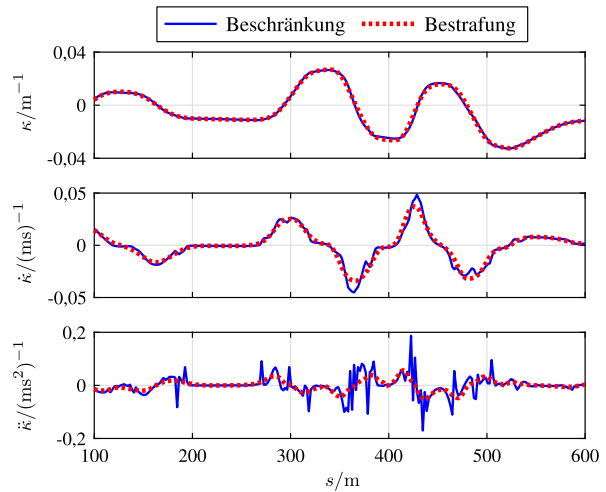


Abb. 5: Bei Berücksichtigung der Aktordynamik durch eine Straffunktion ergibt sich ein wesentlich glatterer Verlauf als bei einer Nebenbedingung (Beschränkung). Dies sieht man besonders deutlich an den Zeitableitungen der Krümmung.

Die Integrale der System-DGLs lassen sich bei den komplexen nichtlinearen Termen analytisch nicht mehr berechnen, können aber durch eine Nebenbedingung in der Optimierung mittels eines diskreten Integrationsverfahrens hinreichend genau numerisch bestimmt werden. Bei Ableitungen ist es gerade umgekehrt. Also werden hier alle Terme, die sich durch Ableitungen berechnen lassen, wie z. B. die Stellgrößen im Modell oder die Gradienten im Optimierungsproblem, analytisch berechnet und die Numerik wird auf das Lösen der Integrale reduziert.

4 Online Neuplanung

Wenn beispielsweise ein Hindernis auf der Strecke es erfordert, von einer offline berechneten Ideallinie abzuweichen, muss in kurzer Zeit eine kollisionsfreie Trajektorie berechnet werden, die unter den veränderten Bedingungen zeitoptimal ist. Um die global optimale Lösung zu finden, müsste der gesamte Rundkurs (R_k) über (25a) optimiert werden, doch dafür reicht die Rechenzeit i. A. nicht aus. Deswegen wird die Online-Planung auf einen Streckenabschnitt (Ab) der Länge $S_{Ab} \leq S_{Rk}$ begrenzt, wodurch sich ein völlig neues Optimierungsproblem (25b) ergibt. (O. B. d. A. beginne der Abschnitt hier bei $s = 0$.)

$$\mathbf{x}_{Rk} = \arg \min_{\mathbf{x}} \int_0^{S_{Rk}} P(\mathbf{x}) ds, \quad \mathbf{x}(0) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}(S_{Rk}) \quad (25a)$$

$$\mathbf{x}_{Ab} = \arg \min_{\mathbf{x}} \int_0^{S_{Ab}} P(\mathbf{x}) ds + \vartheta(\mathbf{x}(S_{Ab})) \quad (25b)$$

Bei identischen Voraussetzungen ohne Objekte sollten beide Trajektorien auf dem Abschnitt identisch sein, woraus sich eine Bedingung für den MAYER-Term $\mathcal{J}(\mathbf{x}(S_{Ab}))$ der Endkosten ableitet:

$$\forall s \in [0, S_{Ab}] : \mathbf{x}_{Rk} = \mathbf{x}_{Ab} \\ \Rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{x}(S_{Ab})) = \int_{S_{Ab}}^{S_{Rk}} P(\mathbf{x}) ds, \quad \mathbf{x}(S_{Rk}) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}(0) \quad (26)$$

Leider lässt sich (26) nicht angeben, ohne eben die restliche Strecke zu berechnen. Würde man $\mathcal{J} \equiv 0$ setzen, würde die zeitoptimale Lösung bei Kurven am Ende stets mit maximaler Geschwindigkeit geradeaus in den Fahrbahnrand fahren. Bei einer Neuplanung im Grenzbereich, also ohne physikalische Reserven, braucht man die Garantie, dass im nächsten Planungsschritt eine physikalisch mögliche Anschlusstrajektorie existiert. Diese Bedingung ist im realen Straßenverkehr zwar genauso relevant, aber leichter zu erfüllen, weil sich i. d. R. fahrdynamisch sichere Zustände (z. B. Fahrstreifenmitte mit vorgegebener Geschwindigkeit) angeben lassen. Dieser Ansatz fordert daher, dass die Trajektorie am Ende des Planungshorizonts möglichst nahe an der Offline-Lösung enden muss, indem die Abweichung dazu bestraft wird. Dabei muss die Geschwindigkeit der Offline-Lösung nicht erreicht werden, sie darf lediglich nicht überschritten werden. Bei ausreichendem Planungshorizont sind die Auswirkungen dieser Rückführung auf die Offline-Lösung gering, weil nur der Anfang der berechneten Trajektorie auf den Regler gegeben wird. Daher wird der Planungshorizont unabhängig vom Erfassungsbereich der Objekte so groß gewählt, wie es die Rechenzeit erlaubt (s. Abschnitt 5).

Bei Ausweichtrajektorien um Objekte herum stellt sich immer die Frage, auf welcher Seite das Objekt überholt werden soll. Dieser Beitrag beschränkt sich dabei auf statische Objekte. Für dynamische Objekte muss zusätzlich die Zeit für Ego-Fzg (das eigene Fzg) und Objekte parametrisiert über s berücksichtigt werden, was den Rahmen dieses Beitrags sprengen würde. Gradientenbasierte Optimierungsverfahren laufen in Richtung des Gradienten der Startlösung in ein lokales Optimum. Daher lässt sich oft schon anhand der Startlösung bestimmen, auf welcher Seite des Objekts die Lösung liegen wird, und es bringt keinen Vorteil, die Entscheidung dem Optimierer zu überlassen. Wenn dem Algorithmus eine Manöver-Planung vorgeschaltet ist, die eine Seite als globales Optimum bestimmt, oder Verkehrsregeln eine Seite vorschreiben, wird die Entscheidung übernommen. Anderenfalls entscheidet eine vorgeschaltete Logik, welche Seite ausreichend Platz

bietet und zu einer geringeren Abweichung von der Ideallinie führt. Bei dynamischen Objekten ist diese Entscheidung von der zu optimierenden Ego-Dynamik abhängig und daher nicht rein logisch durchzuführen.

Wegen der Verwendung des Querversatzes d als Optimierungsvariable (Abschnitt 3.3) kann das Objekt durch $d_{obj}(s)$ beschrieben werden. Um Kollisionsfreiheit zu garantieren, wird auf einer Seite um das Objekt eine Box-Restriktion gelegt, die aufgrund der „Adaptiven Barriere-Update-Strategie“ [21] in Ipopt effizient gelöst wird. Zusätzlich drückt ein Potential in Form eines lokal definierten kubischen Polynoms in d das Fzg vom Objekt weg, um im Kompromiss zur Rundenzeit den Sicherheitsabstand zu erhöhen. Diese Objektbeschreibung hat den Vorteil, dass sie die Struktur des Optimierungsproblems nicht verändert. So können beliebig viele Objekte mit einbezogen werden.

5 Ergebnisse

Die Ergebnisse werden für ein seriennahes Fahrzeug der Kompaktklasse mit 147 kW Motorleistung und Frontantrieb auf dem 4,5 km langen *Autódromo do Algarve* präsentiert. Die Diskretisierung beträgt entlang der Strecke je nach Krümmungsverlauf 1 – 5 m, sodass sich insgesamt 1.512 DP ergeben. Abb. 6 zeigt den Streckenverlauf und in rot die berechnete Ideallinie. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, kann das resultierende Optimierungsproblem ohne Startlösung (alle Variablen 0) mit seinen knapp 12.100 Variablen auf einer Intel Core i7 Mobile-CPU der 4. Generation (2014) in unter 2 s gelöst werden, was einen deutlichen Performance-Vorteil gegenüber [17, 11, 18, 10] darstellt.

5.1 Planung mit Objekten

Nun werden entlang der Strecke 6 Hindernisse gemäß Tab. 1 positioniert. Zur besseren Analyse wurde auch hierfür die Ideallinie für einen gesamten Rundkurs unter der Annahme berechnet, dass alle Objekte im Voraus bekannt seien. Die Ideallinie ist in Abb. 6 blau gestrichelt dargestellt. Abb. 7 zeigt für beide Linien die Krümmung und die Geschwindigkeit sowie die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta v_{id \rightarrow ob} := v_{obj} - v_{ideal}$ zwischen beiden Linien.

Abb. 7 unten zeigt deutlich, wie Objekt 6 das Herausbeschleunigen aus der letzten Kurve vor der Start-/Zielgeraden behindert, sodass auf der Geraden immer eine negative Geschwindigkeitsdifferenz bleibt. Objekt 1 verhindert ein frühzeitiges Einlenken in die Kurve, sodass das Fzg länger geradeaus fahren muss. Dies ergibt quasi eine Kampflinie, welche ein späteres Bremsen erlaubt, sodass kurz

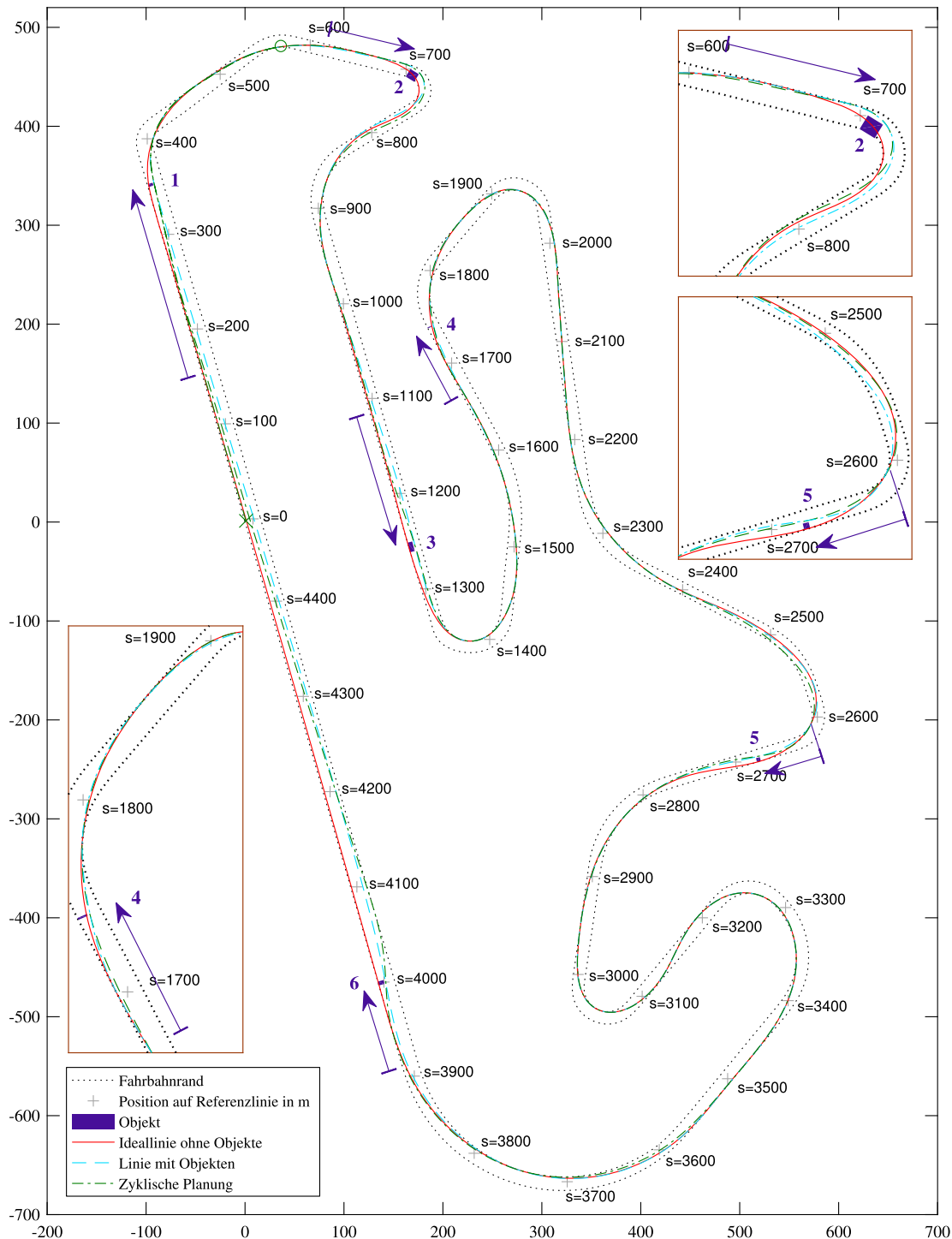


Abb. 6: Ideallinie für das Autódromo do Algarve für ein Serienfahrzeug der Kompaktklasse (rot durchgezogen ohne Objekte, blau gestrichelt mit Objekten) und im Vergleich dazu die resultierende Linie einer zyklischen Neuplanung (grüne Strichpunkt-Linie). Die Fahrbahnränder sind bereits abzüglich der halben Fzg-Breite gezeichnet. Die Pfeile kennzeichnen den Bereich, in dem die Objekte von der Planung berücksichtigt werden können. Die braunen Kästen zeigen Ausschnittsvergrößerungen.

vor Objekt 1 sogar $v_{\text{obj}} > v_{\text{ideal}}$ ist, jedoch muss die Kurve dann so eng durchfahren werden, dass die Ausweich-Linie in Summe langsamer ist als die Ideallinie. Durch Objekt 2 verschiebt sich der Apex um 10 m nach vorne. Die Kurve

ist dadurch zwar enger und muss viel langsamer durchfahren werden, jedoch steht das Fzg am Kurvenausgang bereits gerade und kann so früher und schneller herausbeschleunigen, sodass hinter Objekt 2 wieder $v_{\text{obj}} > v_{\text{ideal}}$

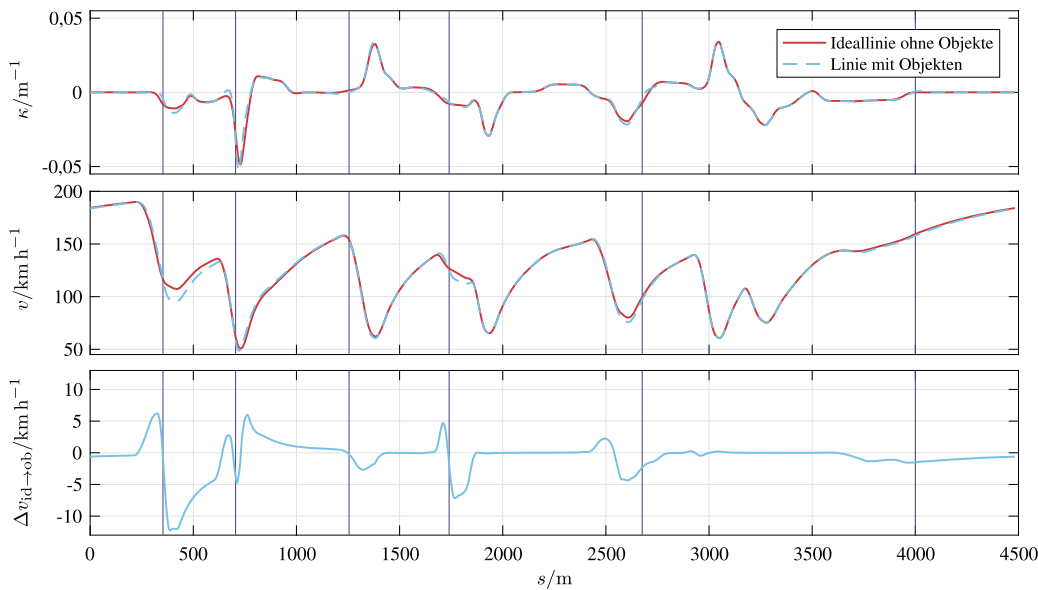


Abb. 7: Für die Ideallinie mit und ohne Objekte ist **oben** die Krümmung, in der **Mitte** die Geschwindigkeit und **unten** die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der Rundkurs-Planung mit und ohne Objekte dargestellt. Die vertikalen Linien markieren die Objektpositionen.

Tab. 1: Objekte entlang der Strecke mit folgenden Angaben: s_{obj} : Position des Objekt-Mittelpunkts, l_{obj} : Länge des Objekts, Δd_{ideal} : Mindestquerablage zur Ideallinie für Ausweichmanöver, Δs_{kol} : Streckenlänge von Beginn der Umplanung bis zum Objekt, Δt_{kol} : Zeit in ursprünglicher Planung bis zur Kollision (TTC).

Nr.	s_{obj}	l_{obj}	Δd_{ideal}	Δs_{kol}	Δt_{kol}
1	353 m	3 m	-5,3 m	190 m	3,9 s
2	705 m	10 m	3,9 m	85 m	2,9 s
3	1255 m	10 m	4,0 m	130 m	3,1 s
4	1740 m	1 m	-1,2 m	70 m	1,8 s
5	2676 m	4 m	-4,8 m	65 m	2,5 s
6	4000 m	4 m	-6,4 m	80 m	1,8 s

ist. Ähnliches Verhalten ist an den anderen Objekten zu beobachten. Insgesamt ist die Linie durch die Objekte 1,3 s langsamer als die knapp 134 s lange Ideallinie.

5.2 Zyklische Planung

Für die zyklische Online-Planung werden in jedem Planungsschritt 95 Punkte berechnet, was bei der verwendeten Diskretisierung einem Planungshorizont von 95 – 480 m entspricht. Bei einer *exemplarischen* Geschwindigkeit von 80 km/h ergäben sich umgerechnet eine Diskretisierung zwischen 45 und 225 ms und ein Horizont von ca. 4 – 21 s. Die Objekte sind immer nur ab einem gewissen Abstand sichtbar, woraus sich eine räumliche und zeitliche Distanz Δs_{kol} bzw. Δt_{kol} ergibt, in welcher eine

Änderung der ursprünglich geplanten Trajektorie erfolgen muss, um eine Kollision zu verhindern. Die Werte stehen in Tab. 1 und sind in Abb. 6 durch Pfeile neben der Strecke verbildlicht.

Die Trajektorienplanung benötigt eine durchschnittliche Rechenzeit von 41 ms. In diesem Test lagen 90 % der Rechenzeiten unter 72 ms und 99 % unter 133 ms. Die Rechenzeit muss selbstverständlich bei der Planung einkalkuliert werden, indem der Anfangspunkt der Optimierung auf einen Punkt vor dem Fzg gelegt wird, welcher anhand der vorherigen Optimierung prädictiert wird.

Zum Vergleich seien Eckdaten aus [13] für die Planung eines Brems-Ausweich-Manövers zum Fußgängerschutz mittels nichtlinearer Optimierung angegeben. Trotz anderer Zielsetzung weist [13] Parallelen auf, da ebenfalls eine Trajektorie im Grenzbereich in Bezug zu einer Referenzlinie geplant wird. Die Berechnung erfolgte auf einer Intel Core i5 Mobile-CPU für einen Planungshorizont von 2 s (konstant, da über die Zeit parametrisiert) und 100 ms Zykluszeit, welche bei einer Ausgangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 60$ km/h weitgehend eingehalten werden konnte. Leider ist die Diskretisierung dort nicht angegeben.

Die zyklische Planung („moving horizon“, mh) startet in diesem Beispiel bei $s = 0$ mit dem Zustandsvektor der Ideallinie. Immer wenn die Optimierung eine neue Trajektorie berechnet hat, werden die entsprechenden Werte der vorherigen Trajektorie durch die neuen ersetzt. So entsteht eine resultierende Trajektorie, die sich durch Aneinander-

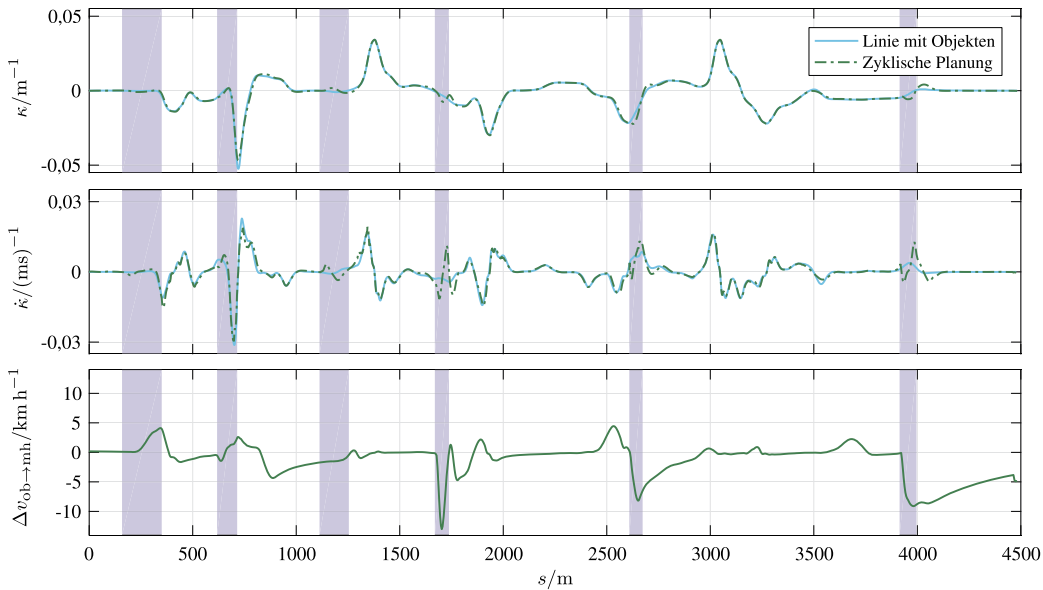


Abb. 8: Für die Rundkurs-Linie mit Objekten sowie die zyklische Neuplanung („moving horizon“) ist oben der Krümmungsverlauf dargestellt und in der Mitte die zeitliche Ableitung der Krümmung durch Vorwärts-Differenzenquotienten. Unten ist die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen der Rundkurs-Planung mit Objekten und der zyklischen Planung abgebildet. Während der lila hinterlegten Bereiche ist das jeweilige Objekt für die Planung sichtbar. Der Plot beschränkt sich auf eine volle Runde $s = 0 \dots 4,5$ km.

reihung aller Trajektorienabschnitte ergibt. In Abb. 6 ist diese resultierende Trajektorie als grüne Strichpunkt-Linie abgebildet, deren Anfang durch ein Kreuz gekennzeichnet ist. Die letzte Neuplanung erfolgte nach einer vollen Runde für einen Streckenabschnitt ab $s = 350$ m, welcher auf dem grünen Kreis bei $s = 570$ m endet.

Bei der Aneinanderreihung ist besonders darauf zu achten, dass die resultierende Trajektorie immer noch glatt und komfortabel genug ist. Deswegen ist in Abb. 8 unter der Krümmung auch die zeitliche Ableitung der Krümmung (Vorw.-Differenzenquotient) geplottet. Man sieht, dass gerade bei den Objekten mit kürzerer Vorausschau (4, 5 und 6) der Krümmungsverlauf zwar nicht mehr so glatt ist wie bei der Offline-Planung, jedoch ergibt sich insgesamt in $\dot{\kappa}$ ein glatter und komfortabler Verlauf. Das ist ein wesentliches Ziel des Projekts: Bis ans Limit gehen zu können, dabei aber immer so komfortabel wie möglich zu bleiben.

Interessant ist, dass gerade das in Abb. 6 so unscheinbare Objekt 4, das nur 1,2 m Querversatz verlangt (Tab. 1), im Krümmungsverlauf die signifikanteste Auswirkung hat. Grund hierfür ist, dass sich die Online-Planung vor dem Objekt an der Ideallinie orientiert und daher links hält. Das Objekt erscheint recht plötzlich und verlangt einen Bogen nach rechts. In diesem Radius kann die nachfolgende Kurve aber nicht durchfahren werden und der Bogen muss korrigiert werden. Dieser Schlenker kostet viel Zeit, was in Abb. 8 unten an $v_{mh} \ll v_{obj}$ zu sehen ist.

Ebenso kostet auch die kurze Sichtbarkeit von Objekt 6 viel Zeit. Zu Beginn der Geraden muss sogar erst verzögert werden, um das Ausweichmanöver überhaupt fahren zu können, während die Offline-Planung ab dem Apex bei $s = 3,3$ km permanent mehr oder weniger stark beschleunigt.

Daran, dass die Offline-Planung mit Objekten und die zyklische Planung keine identischen Ergebnisse liefern, sieht man sofort, dass die zyklische Planung im Sinne der minimalen Rundenzeit suboptimal ist. Zum einen liegt das an der bereits behandelten Sichtbarkeit der Objekte, was man besonders deutlich auf der Start-/Ziel-Geraden sieht (Abb. 6): Die Offline-Planung berücksichtigt nach Objekt 6 auch Objekt 1 und bleibt gleich rechts. Die Online-Planung „sieht“ Objekt 1 nicht und tendiert langsam zum linken Rand, um eine scheinbar gute Ausgangsposition für die nachfolgende Kurve zu erhalten. Zum anderen entstehen aber auch Abweichungen, die nicht auf die Objekt-Sichtbarkeit zurückzuführen sind: Bei $s \approx 800$ m und $s \approx 2500$ m weichen die Linien deutlich ab. Die Endkosten-Bewertung $\vartheta(\mathbf{x}(S_{Ab}))$ bestraft zwar die Abweichung zur Ideallinie und sollte im Idealfall zur selben Lösung führen, jedoch wiegt an den genannten Stellen der Zeitvorteil durch das primäre Gütemaß mehr. Denn die Abweichung am Ende des Planungshorizonts ($\vartheta(\mathbf{x}(S_{Ab})) \gg 0$) erlaubt zuvor bei $s \ll S_{Ab}$ eine deutlich höhere Geschwindigkeit $v(s) \gg v_{ideal}(s)$ (\rightarrow Abb. 8) bei einer kürzeren Weglänge (\rightarrow Abb. 6). In dem nachfolgenden

Streckenabschnitt erweist sich die überhöhte Geschwindigkeit jedoch als nachteilig und führt zu einer suboptimalen Gesamtlösung, bei der die Geschwindigkeit stark reduziert werden muss (\rightarrow Abb. 8). Insgesamt ist die Online-Planung in der Simulation aber lediglich 0,87 s (0,6 %) langsamer als die Offline-Planung mit Objekten.

Des Weiteren sieht man in Abb. 6, dass die zyklische Planung der ersten Runde ab Objekt 1 identisch mit der gesamten restlichen Planung des letzten Planungsschritts ist. Dies deutet auf eine gute zeitliche Konsistenz hin, da die zuletzt berechnete Trajektorie dem tatsächlichen Verlauf der zyklischen Neuplanung entspricht.

5.3 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine zeitoptimale Trajektorienplanung vorgestellt, die eine simultane Optimierung von Quer- und Längsplanung auf Basis eines nichtlinearen Einspurmodells mit quasi-statischer Achslast- und Bremskraftverteilung durchführt. Die Optimierung erfolgt in Ipot. Die Planung wird sowohl für Rundkurse als auch zur zyklischen Planung unter Berücksichtigung statischer Hindernisse eingesetzt. Ein besonderes Augenmerk wird auf einen glatten und verhältnismäßig komfortablen Trajektorienverlauf gelegt. Dies ist für die zyklische Planung besonders wichtig, da sich dort die resultierende Trajektorie aus vielen Abschnitten zusammensetzt. Ein wichtiges Kriterium ist die benötigte Rechenzeit für eine Online-Umsetzung. In diesem Ansatz konnten sehr kurze Rechenzeiten erzielt werden. Sie entstehen durch

- das referenzlinienbasierte Koordinatensystem in Kombination mit der rein ortsabhängigen Parametrierung aller Größen, was zu einer kompakten Problembeschreibung führt,
- einen effizienten Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und -komplexität für die Struktur und Dimension der Nebenbedingungen,
- einer effizienten Berücksichtigung der Aktordynamik im Optimierungsproblem,
- die analytische Vorausberechnung aller Ableitungen einschließlich der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion
- und die verwendete Diskretisierung, die eine simultane Optimierung der gesamten Trajektorie erlaubt. Sie führt zwar zu einem hochdimensionalen Optimierungsproblem, jedoch sind seine Matrizen (Jacoby- und Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion) dünn besetzt, sodass das entstehende LGS effizient gelöst werden kann.

Die Ergebnisse wurden sowohl bei einer Offline-Planung als auch bei einer zyklischen Planung für eine 4,5 km lange Rennstrecke präsentiert, auf der mehrere Objekte entlang der Ideallinie positioniert wurden. Die resultierenden Trajektorien wurden anhand relevanter Größen analysiert. Aktuelle und weitere Forschungsthemen sind unter anderem die Berücksichtigung dynamischer Hindernisse, die Adaption an den realen Straßenverkehr und die Verwendung einer sich sukzessive aufbauenden Referenzlinie.

Literatur

1. K.-H. Siedersberger. „Von der Rennstrecke auf die Straße“. In: *at - Automatisierungstechnik* 65.7 (2017). DOI: 10.1515/auto-2017-0012.
2. J. Betz et al. „What can we learn from autonomous level-5 motorsport?“ In: 9th International Munich Chassis Symposium 2018. Hrsg. P. von Pfeffer. Proceedings, Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2019, S. 123–146. DOI: 10.1007/978-3-658-22050-1_12.
3. S. Schacher, J. Hoedt und R. King. „Fahrspezifische Geschwindigkeitsprofile für die automatische oder die kooperative Fahrt“. In: *at - Automatisierungstechnik* 66.1 (2018), S. 53–65. DOI: 10.1515/auto-2017-0093.
4. P. Waldmann. *Entwicklung eines Fahrzeugführungssystems zum Erlernen der Ideallinie auf Rennstrecken*. Zugl.: Cottbus, Brandenburgische Techn. Univ., Diss., 2008, Bd. 1. Schriftenreihe des Lehrstuhls Fahrzeugtechnik und -antriebe der BTU Cottbus Aachen: Shaker, 2009.
5. T. Hansen. *Kombinierte Längs- und Quertrajektorienplanung für automatisierte Fahrstreifenwechsel*. Zugl.: TU Darmstadt, Diss., 2018, 1. Aufl. Berlin: epubli, 2018. URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/8081/>.
6. M. Gadola et al. „A Tool for Lap Time Simulation“. In: *Motorsports Engineering Conference & Exposition*, SAE Technical Paper Series. Warrendale, PA, United States: SAE International 400 Commonwealth Drive, 1996. DOI: 10.4271/962529.
7. M. Werling. *Ein neues Konzept für die Trajektoriengenerierung und -stabilisierung in zeitkritischen Verkehrsszenarien*. Zugl.: Karlsruhe, KIT, Diss., 2010, print on demand ed, Bd. 34. Schriftenreihe des Instituts für Angewandte Informatik - Automatisierungstechnik, Universität Karlsruhe (TH) KIT Scientific Publishing, 2011. DOI: 10.5445/KSP/1000021738. URL: <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01fn12/685609162.pdf>.
8. A. Wächter and L. T. Biegler. „On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming“. In: *Mathematical Programming* 106.1 (2006), S. 25–57. DOI: 10.1007/s10107-004-0559-y.
9. F. Braghin et al. „Race driver model“. In: *Computers & Structures* 86.13-14 (2008), S. 1503–1516. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.04.028.
10. N. R. Kapania. „Trajectory planning and control for an autonomous race vehicle“. Phd thesis. Stanford University, 2016.

11. D. Brayshaw and M. F. Harrison. „A quasi steady state approach to race car lap simulation in order to understand the effects of racing line and centre of gravity location“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 219.6 (2005), S. 725–739. DOI: 10.1243/095440705X11211.
12. I. Gundlach, U. Konigorski und J. Hoedt. „Zeitoptimale Trajektorienplanung für automatisiertes Fahren im fahrdynamischen Grenzbereich: Eine modellbasierte Rundenzeitoptimierung für seriennahe Fahrzeuge“. In: *AUTOREG 2017*, Bd. 2292. VDI-Berichte Düsseldorf: VDI-Verlag, 2017, S. 223–234.
13. M. Werling, P. Reinisch und K. Gresser. „Kombinierte Brems-Ausweich-Assistenz mittels nichtlinearer modellprädiktiver Trajektorienplanung für den aktiven Fußgängerschutz“. In: *8. Workshop Fahrerassistenzsysteme, FAS2012*. Hrsg. K. von Dietmayer. Darmstadt: Uni-DAS e.V., 2012, S. 77–86.
14. J. P. Timings and D. J. Cole. „Minimum Maneuver Time Calculation Using Convex Optimization“. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 135.3 (2013), S. 31015–1–31015–9. DOI: 10.1115/1.4023400.
15. B. Gutjahr und M. Werling. „Optimale Fahrzeugquerführung mittels linearer, zeitvarianter MPC“. In: *10. Workshop Fahrerassistenzsysteme*. Hrsg. C. von Stiller. Darmstadt: Uni-DAS e.V., 2015, S. 61–70.
16. C. Rathgeber. *Trajektorienplanung und -folgeregelung für assistiertes bis hochautomatisiertes Fahren*, Diss., Technische Universität Berlin, 2016. DOI: 10.14279/depositonce-5506.
17. D. Casanova. *On Minimum Time Vehicle Manoeuvring: The Theoretical Optimal Lap*, Phd thesis, Cranfield University, 2000. URL: <http://hdl.handle.net/1826/1091>.
18. G. Perantoni and D. J. N. Limebeer. „Optimal control for a Formula One car with variable parameters“. In: *Vehicle System Dynamics* 52.5 (2014), S. 653–678. DOI: 10.1080/00423114.2014.889315.
19. M. Mitschke und H. Wallentowitz. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, 5. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. DOI: 10.1007/978-3-658-05068-9.
20. M. Papageorgiou, M. Leibold und M. Buss. *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. 4 Aufl., Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-46936-1.
21. J. Nocedal, A. Wächter and R. A. Waltz. „Adaptive Barrier Update Strategies for Nonlinear Interior Methods“. In: *SIAM Journal on Optimization* 19.4 (2009), S. 1674–1693. DOI: 10.1137/060649513.

Autoreninformationen



Ingmar Gundlach

TU Darmstadt, Institut für
Automatisierungstechnik und Mechatronik,
Landgraf-Georg-Straße 4, 64283
Darmstadt, Germany
igundlach@iat.tu-darmstadt.de

Ingmar Gundlach ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik im Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Sein Forschungsgebiet ist die Trajektorienplanung für automatisiertes Fahren bis in den fahrdynamischen Grenzbereich. Im Rahmen eines Kooperationsprojekts arbeitet er mit der Konzernforschung der Volkswagen AG, Wolfsburg zusammen.



Ulrich Konigorski

TU Darmstadt, Institut für
Automatisierungstechnik und Mechatronik,
Landgraf-Georg-Straße 4, 64283
Darmstadt, Germany
ukonigorski@iat.tu-darmstadt.de

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski ist Leiter des Fachgebietes Regelungstechnik und Mechatronik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Methodenorientierte Forschungsschwerpunkte sind der Entwurf linearer und nichtlinearer Mehrgrößenregelungen, die Anwendung von Walshfunktionen in der Systemtheorie, Multiratenabtastsysteme sowie iterativ lernende Regelungen. Anwendungsorientierte Schwerpunkte sind die Analyse, der Entwurf und die digitale Regelung mechatronischer Systeme.