Notes

isakhammer

2020

Contents

1 Exercise Week 35

1.1 B 3.6

Hva skjer når $a \to 0$

Burger equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

(a) Use the method of characteristics as described in Sect 3.4 to find a formula for the solution $u(t,x)$ given the inital condition

$$u(0,x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{a}, & 0 < x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

(b) Suppose that $a > b$ and

$$u(0,x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ a(1-x) + bx, & 0 < x < 1, \\ b, & x \geq 1 \end{cases}$$

Show that all of th characteristics originating from $x_0 \in [0,1]$ meet at the same point.

1.1.1 Answer a

1.1.2 Answer b

1.2 X1

Gitt en PDE med initaldata

$$u_t + u^2 u_x = 0, \quad u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Hva er største verdi at T slik at problemet har en klassisk løsning for $x \in \mathbb{R}$ og $t \in [0,T)$

1.2.1 Answer

2 Exercise Week 36

2.1 B 3.7

(you may need to assume that $u \in C^2$). Additionally, note that $w = u_x$ satisfies Burgers' equation!

2.2 B 4.1

2.3 B 4.5

2.4 X2

Løs initialproblemet

$$uu_x + y^2 u_y = yu, \quad u\,(x, 1) = x$$

Hva er det største området i planet som tillater en klassisk løsning?

3 Exercise Week 37

3.1 B 4.2

3.2 B 4.4

3.3 X3

Benytt løsningen til B 4.1 til å vise at den homogene bølgeligningen på et område gitt ved $a_0 < x + ct < a_1$, $b_0 < x - ct < b_1$ har generell løsning $u(t,x) = f_1(x - ct)\,0 f_2(x + ct)$ for funksjoner f_1 of f_2. Hvordan kan du utvide resultatet til $x \in \mathbb{R}, t > 0$?

3.4 X4

En alternativ utledning av D'Alemberts løsning: Fyll ut de manglende detaljene nedenfor.

Start med ligningen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Anta at u er en løsning, of definer de to funksjonene $u_t \pm c u_x$. Disse oppfyller enkle transportligninger, så ver av dem er en bølge med hastight $\pm x$. Med andre ord finned funksjoner $w_\pm$ slik at

$$\begin{aligned} u_t - cu_x &= -2cw'_+(x - ct), \quad \text{(høyrebølge)} \\ u_t + cu_x &= 2cw'_-(x + ct), \quad \text{venstrebølge} \end{aligned}$$

(Faktorene $\pm 2c$ of derivasjonen på høyre side er ikke vesentlige; de er bare for å forenkle regningen videre.) Adder de to ligningene og integrer mhp t, of subtraher dom of integrer mhp. x. Du trenger to integrasjonskosntanter, $C_1(x), \quad C_2(t)$. Konkluder at de integrasjonskonstantene må være like, og derfor en virkelig konstant C. Konkludr at

$$u(t,x) = w_+(x - ct) + w_-(x + ct) + C$$

(Men vi kan like godt inkorporere C i en av de to funksjonene $w_\pm$.)

Til slutt, sett inn i initaldataene

$$u(0,x) = g(x), \quad u_t(0,x) = h(x)$$

og utled D'Alemberts løsning.

4 Exercise Week 38

4.1 B 4.7

4.2 B 4.9

4.3 X5

Bjelkeligningen har formen $u_{tt} + u_{xxxx} = f(t, x)$. FInn en tilhørende energitetthet og fliks, og bruk disse til å vise entydighet av øsninger for et inital-og randverdiproblem på intervallet $(0, 1)$. Det er en del av oppgaven å finne egnede initalverdier of randbetingelser som sikrer entydighet.

5 Exercise Week 39

5.1 B 6.1

5.2 6.3

5.3 6.4

6 Prewritten Exercises

7 References