# Partial Differential Equations

isakhammer

2020

## Contents

# 1 Lecture 1

## 1.1 Praktiske Ting

- Borthwick, Introduction to Partial Differential Equations - Springer Link
- Ingen obligatoriske øvinger.

## 1.2 Bevaring av Konserveringslov

- **Konserveringslov**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$
$$u(t,x) \quad \text{ukjent}$$
$$f \quad \text{er oppgit}$$

- **Hamilton Jacobi**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

- **Bølgelingingen**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- **Varmeligningen**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbb{H} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = f(t,x)$$

- **Possion lingingen**

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = f(x,y)$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f$$

- **Korteweg - de vries**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- **Navier Stokes**

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}$$

## 1.3 Notation

En generell pde kan beskrives som

$$F\left(t, x, y, \ldots, u_t, u_t, \ldots, u_y, u_{xy}, \ldots\right) = 0$$

og blir beskrevet som en partiell diffligning.

$$u_t + f'(u)\, u_x = 0$$

En **klassisk løsning** til en PDE av order $m$ er en $C^m$- funksjon som i ligningen.

*Example* 1. Bølgeligningen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ har en klassisk løsning $u(t, u) = f(x \pm ct)$ med $f \in C^2$ der $[f, f', f'']$ er kontinuerlig.

$$\begin{aligned}
u_t &= \pm c f'(x \pm ct) \\
u_{tt} &= f''(x \pm ct) \\
u_{xx} &= c^2 f''(x \pm ct) \\
u_{tt} &= f''(x \pm ct) \\
u_{tt} &= c^2 u_{xx}.
\end{aligned}$$

Der av løsningen

$$u(t, x) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

## 1.4 PDE-Teori

- Fine løsninger
- Analyse
  - Velstilt.
    - Løsninger eksisteres
    - De er entydige.
    - De avhenger kontiuerlig av data.
  - General opp oppførsel

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} \quad t > 0 \\
u(0, x) = u_0(x)
\end{aligned}$$

  - Tilnærmede løsninger (numerikk)

## 1.5 Kap 3, Transportligningen

$$u_t + vu_x = 0 \quad \text{der} \quad v(t,x) = 0 \quad , u(0,x) = u_0(x)$$

Som kan omskrives til

$$\frac{du(t,x(t))}{dt} = u_t + \dot{x}u_x = 0$$
$$\text{dersom} \quad \dot{x} = v(t,x) \quad \text{har entydig løsning gitt} \quad x(0) = x_0$$
$$\text{forutsatt} \quad v \in C^1$$

derfor er $u(t,x(t)) = u(0,x(0)) = u_0(x_0)$. La oss definere $X(t,x_0) = x(t)$

$$\text{dersom} \quad x \quad \text{løser} \quad \begin{cases} \dot{x} & = v(t,x) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

La $u(t,X(t,x_0)) = u_0(x_0)$ . For a finne $u(t,x)$, løs $(X(t,x_0))$ med hennold pa $x_0$ og sett inn

*Example* 2.

$$u_t + (at+b)u_x = 0 \quad a,b \quad \text{er kont}$$

Da er ligningen $\dot{x} + at = b$ slik at

$$x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$
$$x_0 = x - \frac{1}{2}at^2 - bt$$
$$u(t,x) = u_0\left(x - \frac{1}{2}at^2 - bt\right)$$
$$u_t = -(at+b)$$

# 2 Lecture 2

## 2.1 Høy Dimensional Kalkulus

Definition av funksjon

$$
\begin{aligned}
f :& \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R} \\
f \in& C^1 (\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}\mathbb{R}) \quad \text{betyr kontinuerlig}
\end{aligned}
$$

For gradienter

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \partial_{x_1} f_1, \ldots, \partial_{x_n} f \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

For vectorfelt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} :& \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\
\mathbf{F} \in& C_1 (\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n) \\
\nabla \mathbf{F} =& \partial F_1 + \ldots + \partial F_n
\end{aligned}
$$

**Definition 2.1.** *Divergensteoremet*

$$\int_\omega \nabla \mathbf{F} d^n x = \int_{\partial\omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS$$

*Proof.*

$$\int_\sigma f dS = \int_w f(\sigma(\mathbf{y})) \, det \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_1} \ldots , \frac{\partial \sigma}{\partial y_{n-1}}, \mathbf{v} \right] dy_1 \ldots dy_{n-1}$$

□

,

**Definition 2.2.** *Området er definert som åpen delmengde av $\mathbb{R}^n$ sammenhengende. La $x_0$ være sentrum av sirkelen med radius $R$, da er*

$$
\begin{aligned}
B(\mathbf{x_0}; R) &= B_R(\mathbf{x_0}) \\
&= \{ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \| < R \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\textit{En omegn om } \mathbf{x_0} \textit{ er en mengde som inneholder } B(\mathbf{x_0}; R) \textit{ for en } R > 0 \\
\textit{En åpent mengde som er en omegn om alle sine punkter.}
\end{cases}
$$

## 2.2 Konserveringslov

$u(t, \mathbf{x})$ er en tetthet, det vil si

$$\int_\omega u(t, \mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}.$$

Menger av $u$ inneholdt i $\omega$ vet tid $t^n$.

$$\frac{d}{dt}\int_\omega u(t, \mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \int_\omega \partial_t u(t, \mathbf{x})\, d^n x$$

Derivasjon under integraltegniet. Ok dersom

- $\omega$ er begrenset.
- $\partial_t u \in C(\overline{\omega})$ der $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_\Omega u(t+\Delta t, \mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}}{\Delta t} - \int_\Omega u_t(t, \mathbf{y})\, d^n\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \left(\frac{u(t+\Delta t, \mathbf{x}) - u_t(t, \mathbf{x})}{\Delta t}\right) d^n\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega u_t(\theta(\mathbf{x}, \Delta t), \mathbf{x}) - u_t(t, \mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} \\
&\theta \text{ mellom } t \text{ og } t + \Delta t \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}
\end{aligned}$$

Bruker alt for lang tid på å skrive dette. Må øve på ø-operator, fjerne default values på dint og begynne å skrive tegninger for å ta bilde av på mobil(?)

## 2.3 Flukstetthet

Fluks gjennom $S$ pr tidsenhet

$$\int_S \mathbf{q}(t, \mathbf{x})\, \mathbf{v} dS$$

Der $\mathbf{v}$ er en enhetsnormal.

**Bevaringslov.**

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u d^n\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{q}\cdot\mathbf{v} dS = 0.$$

$$\int_\Omega u_t d^n\mathbf{x} + \int_\Omega d^n x = 0$$

$$\int_\Omega (u_t + \nabla\mathbf{q})\, d^n\mathbf{x} = 0$$

For et området $\Omega$ (begrenset , $C_1$ rand.)

**Definition 2.3.** *Generell bevaringslov på differensiell form*

$$u_t + \nabla \mathbf{q} = 0$$

### 2.3.1 Spesialtilfelle

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= u\mathbf{v}\,(t, \mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{q} &= \nabla u \cdot \mathbf{v} + v \nabla \mathbf{v} \\ q_1 &= u v_j \\ \frac{\partial q_j}{\partial x_j} &= u_{x_j} v_j + u \cdot v_{x_j} \\ u_t + \mathbf{v} \nabla u &= -u \nabla \mathbf{v} \\ \nabla \mathbf{v} &= 0 \text{ som gir} \\ u_t + \mathbf{v} \nabla u = 0 & \end{aligned}$$

**Definition 2.4.** *Transportlingingen.*

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0$$

*For $n = 1$ er*

$$u_t + v u_x = 0$$

Karakteristisk kunne $\mathbf{x}\,(t)$ løse

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}\,(t, \mathbf{x})$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} \frac{Du}{Dt} &= \frac{d}{dt} u\,(t, \mathbf{x}\,(t)) = u_t + \dot{\mathbf{x}} u \\ &= u_t + \mathbf{v} \nabla u \end{aligned}$$

Mer generell variant kan skrives som

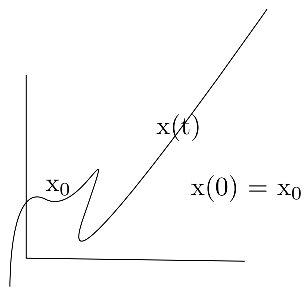
$$u_t + \mathbf{v} \nabla u = w\,(t, \mathbf{x}, u)$$

Nå blir

$$\frac{Du}{Dt} = w\,(t, x\,(t)\,, u)$$

Anta initialverdi

$$u\,(0, x\,(0)) = u_0\,(x_0)$$




Her er $x_t(t) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ og $x(0) = x_0$.
Løs

$$\begin{aligned} \dot{\hat{u}} &= w(t, x(t), n) \\ \hat{u}(0) &= u_0(\mathbf{x}_0) \\ \text{og finne} \quad u(t, \mathbf{x}(t)) &= \hat{u}(t) \\ \mathbf{x} \to \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0) & \quad \text{er kontinuerlig og one-to-one} \end{aligned}$$

## 2.4 Kvasilineære ligninger

$$u_t + a(u) u_x = 0$$

Eksempel

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_t + f'(u) u_x = 0$$

Kan. Ligning $\dot{x} = a(u(t, x))$

$$\frac{Du}{Dt} = u_t + a(u) u_x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{u er kontakt langt kovakttastikk.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + t(a \circ u_0)'(x_0) \geq 1 + t \cdot min(a_0 u_0)' \begin{cases} x(t) & = x_0 + ta(u) \\ & = x_0 + ta(u_0(x_0)) \end{cases}$$

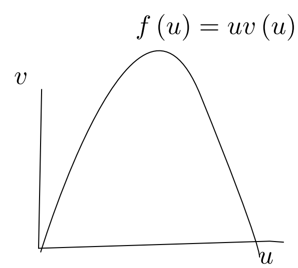



Figure 1: Bil