Partial Differential Equations

isakhammer

2020

Contents

1 Lecture 1

1.1 Praktiske Ting

- Borthwick, Introduction to Partial Differential Equations - Springer Link
- Ingen obligatoriske øvinger.

1.2 Bevaring av Konserveringslov

- **Konserveringslov**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$
$$u(t,x) \quad \text{ukjent}$$
$$f \quad \text{er oppgit}$$

- **Hamilton Jacobi**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

- **Bølgelingingen**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- **Varmeligningen**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbb{H}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = f(t,x)$$

- **Possion lingingen**

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = f(x,y)$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = f$$

- **Korteweg - de vries**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- **Navier Stokes**

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}$$

1.3 Notation

En generell pde kan beskrives som

$$F\left(t, x, y, \ldots, u_t, u_t, \ldots, u_y, u_{xy}, \ldots\right) = 0$$

og blir beskrevet som en partiell diffligning.

$$u_t + f'(u)\, u_x = 0$$

En **klassisk løsning** til en PDE av order m er en C^m- funksjon som i ligningen.

Example. Bølgeligningen $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ har en klassisk løsning $u(t,u) = f(x \pm ct)$ med $f \in C^2$ der $[f, f', f'']$ er kontinuerlig.

$$\begin{aligned}
u_t &= \pm c f'(x \pm ct) \\
u_{tt} &= f''(x \pm ct) \\
u_{xx} &= c^2 f''(x \pm ct) \\
u_{tt} &= f''(x \pm ct) \\
u_{tt} &= c^2 u_{xx}.
\end{aligned}$$

Der av løsningen

$$u(t,x) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

1.4 PDE-Teori

- Fine løsninger
- Analyse
  - Velstilt.
    - Løsninger eksisteres
    - De er entydige.
    - De avhenger kontiuerlig av data.
  - General opp oppførsel

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} \quad t > 0 \\
u(0,x) = u_0(x)
\end{aligned}$$

  - Tilnærmede løsninger (numerikk)

1.5 Kap 3, Transportligningen

$$u_t + v u_x = 0 \quad \text{der} \quad v(t,x) = 0 \quad , u(0,x) = u_0(x)$$

Som kan omskrives til

$$\begin{aligned}\frac{du\left(t,x\left(t\right)\right)}{dt} &= u_t + \dot{x}u_x = 0 \\ \text{dersom} \quad & \dot{x} = v\left(t,x\right) \quad \text{har entydig løsning gitt} \quad x\left(0\right) = x_0 \\ \text{forutsatt} \quad & v \in C^1\end{aligned}$$

derfor er $u\left(t,x\left(t\right)\right) = u\left(0,x\left(0\right)\right) = u_0\left(x_0\right)$. La oss definere $X\left(t,x_0\right) = x\left(t\right)$

$$\text{dersom} \quad x \quad \text{løser} \quad \begin{cases}\dot{x} & = v\left(t,x\right) \\ x\left(0\right) & = x_0\end{cases}$$

La $u\left(t,X\left(t,x_0\right)\right) = u_0\left(x_0\right)$. For a finne $u\left(t,x\right)$, løs $\left(X\left(t,x_0\right)\right)$ med hennold pa x_0 og sett inn

Example.

$$u_t + \left(at+b\right)u_x = 0 \quad a,b \quad \text{er kont}$$

Da er ligningen $\dot{x} + at = b$ slik at

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}at^2 + bt + c \\ x_0 &= x - \frac{1}{2}at^2 - bt \\ u\left(t,x\right) &= u_0\left(x - \frac{1}{2}at^2 - bt\right) \\ u_t &= -\left(at+b\right)\end{aligned}$$

2 Lecture 26/08

2.1 ODE teori

Theorem 2.1.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Anta ligningen er et apoent interval $o \in I$ slik at $\Omega\mathbb{R}^n$ er et område slik at $\mathbf{f} \in C^1(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$. Da finnes et største intervall J $o \in J \subseteq I$ moden funcksjon $\mathbf{x} : I \to \Omega$ som løser problemet. Videre er løsningen gitt.

Proof. Ideen er eksistense. Pcard iterasjon

$$\mathbf{x}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(\tau, \mathbf{x}_k(\tau))\, d\tau$$

Entydighet

Kontiuerlig /derivering avhenging av dote

□

Theorem 2.2. *Anta gitt*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, \hat{c})$$

der $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$

Dersom f er C^{k+1} , så vil $\mathbf{f}$ vare en C^k funksjon av $(t, \mathbf{a}, \hat{c})$

Autonome system

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

Løsningkurvene blander en en-dimensional foliering av Ω. Har en kurve gjennom hvert punkt med ingen krysninger.

Ikke autonomt system

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$$

Ekvivalent

$$\begin{aligned}
\dot{\tau} &= 1 \\
\dot{\mathbf{x}} &= f(\tau,) \\
\tau(0) &= 0 \\
x^{(n)} &= f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) \\
&.
\end{aligned}$$

Hvis vi setter

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \left(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right) \\
\dot{w}_1 &= w_2 \\
\dot{w}_2 &= w_3 \\
&\vdots \\
\dot{w}_n &= f(t, \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{w}} = F(t, \mathbf{w}).$$

2.2 Kvasilinær Ligning

$$au_x + bu_y = c$$

a, b, c er alle funksjoner av $x, y, u(x, y)$

Grafen til u er

$$\{(x,y,z) \mid z = u(x,y)\}$$

Da antar vi en løsning u , en kurve γ i (x,y) - planet.

$$(x(\tau), y(\tau))$$

Git enn løsning $u(x,y)$ får vi en kurve i T i $\mathbb{R}^3$ i $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$. Da ender vi opp med

$$\begin{aligned} z(\tau) &= u(x(\tau), y(\tau)) \\ \dot{z} &= \dot{x}u_x(x,y) + \dot{y}u_y(x,y) \\ \text{anta} \quad &\begin{cases} \dot{x}(\tau) = & a(x,y,u(x,y)) = a(x,y,z) \\ \dot{y}(\tau) & = b(x,y,u(x,y)) = b(x,y,z) \end{cases} \end{aligned}$$

da blir

$$\dot{z} = au_x + bu_y = x(x,y,u(x,y)) = c(x,y,z)$$

Vi får da

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(x,y,z) \\ \dot{y} &= b(x,y,z) \\ \dot{z} &= c(x,y,z) \end{cases}$$

Som er kaldt de karakteristiske ligningene til

$$au_x + bu_y = c$$

Grafen til en løsning u er an union av løsningkurven av de karakteristiske ligningene. (karakteristikk).

Ikke-karakteristiske data for ligningen har formen

$$u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \gamma$$

der γ er en kurve i $\mathbb{R}^2$, slik at

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \gamma \quad \text{og} \quad z = k(x,y)\}$$

Blir en kurve Γ i $\mathbb{R}^3$ ned en tangent som stiller en parabola med

$$(a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$$

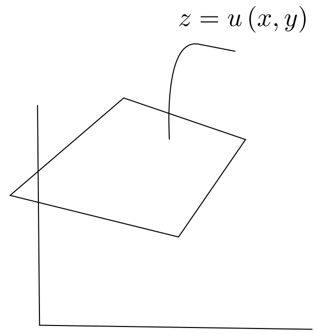

Figure 1: kurveiplan

Theorem 2.3. *Problemet har en entydig løsning $u(x,y)$ for (x,y) i et åpent område som inneholder γ .*

Konkret: Anta γ er gitt ved

$$(\chi(\sigma), \mu(\sigma), (\dot{\chi}, \dot{\mu}) \neq 0, 0)$$

Sett $\chi(\sigma) = u_0(\chi(\sigma), \mu(\sigma))$ og Γ gitt ved (χ, μ, ζ). Da løser vi k ?? med initialdata $(\chi(\sigma), \mu(\sigma), \zeta(\sigma))$. of kall resultatet

$$(x(\sigma,\tau), y(\sigma,\tau), z(\sigma,\tau))$$

Vi skal ha

$$u(x(\sigma,\tau), y(\sigma,\tau)) = z(\sigma,\tau)$$

Som er en implisitt løsning. Finn (σ,τ) skal være en funksjojn av (x,y).

Example.

$$\begin{aligned} u_t + a(t,u)\, u_x &= c(t,u) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Kontuerlighet slik at

$$\begin{aligned} &\dot{t} = 1, \quad t(0) = 0 \quad t(\tau) = \tau \\ &\dot{x} = a(t,x,z) \\ &\dot{z} = c(t,z) \end{aligned}$$

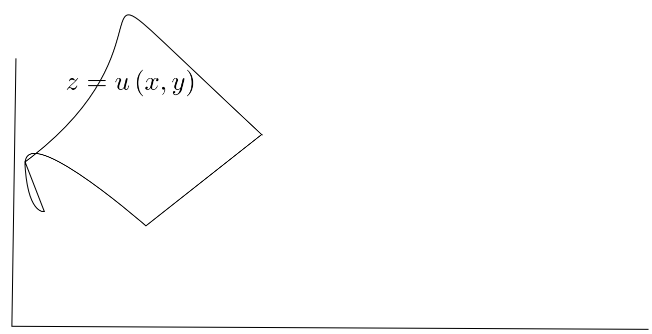

Figure 2: kurveiplan2

som kan forenkles til

$$.\begin{cases} \dot{x} & = a(t,x,z) \\ \dot{z} & = c(t,z) \end{cases}$$

Spesialtilfeller er

Tramert $a = (t,x)$

$$\text{så} \quad \begin{cases} \dot{x} & = a(t,x) \\ x(0) & = \zeta \end{cases}$$

Kan løses hver for seg of så løser vi

$$\begin{cases} \dot{z} = & c(t,x(t),z) \\ z(0) & = u_0(\zeta) \end{cases}$$

Slik at

$$\frac{Du}{Dt} = c(t,x,y) \implies u(0,\zeta) = u_0(\zeta)$$

Spesialtilfelle

$$\begin{aligned} u_t + a(u)\,u_x = 0 \\ \dot{t} = 1, t(0) = 0, t = \tau \\ \dot{x} = & a(z) \\ \dot{z} = 0 \end{aligned}$$

$x = \zeta + ta(u_0(\zeta))$ slik at $u(t,x) = u_0(\zeta)$

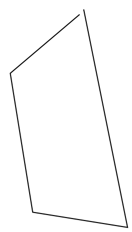

Figure 3: kdfkdkfd

Siste spesialtilfelle

$$
\begin{aligned}
&-yuu_x + xuu_y = 1, \quad u(x,0) = 0 \\
&\dot{x} = -yz \quad x(0) = \sigma \\
&\dot{y} = xz, \quad y(0) = 0 \\
&\dot{z} = 1 \quad z(0) = \sigma \quad z(\tau) = \sigma + \tau
\end{aligned}
$$

Et av resultatene er

$$\frac{d}{d\tau}\left(x^2 + y^2\right) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

Slik at $x^2 + y^2 = \text{konstant} = \sigma^2$.

La oss skrive

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma\cos(\phi(t)) \\ y &= \sigma\sin(\phi(t)) \end{aligned}\right\} \phi(0) = 0$$

da er

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = -\sigma\sin(\phi(\tau)) \cdot \dot{\phi(\tau)} = -y\dot{\phi(\tau)} \\
&\dot{y} = \sigma\cos(\phi(\tau))\,\dot{\phi} = x\dot{\phi}(\tau)
\end{aligned}
$$

derfor er

$$\dot{\phi}(\tau) = z = \sigma + \tau\phi = \sigma\tau + \frac{1}{2}\tau^2$$

$$\frac{1}{2}\tau^2 + \sigma\tau - \phi = 0, \quad \tau = \frac{1}{2}\left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\phi}\right)$$

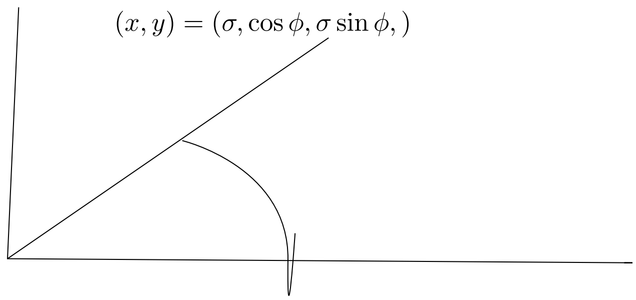

Figure 4: polarfigure

3 Lecture 02/09

3.1 Duhamds Prinsipp

$$u_t + c^2 u_{xx} = f(t, x)$$
$$u(0, x) = 0$$
$$u_t(0, x) = 0$$

La $\eta_s(t, x)$ løse

$$\eta_{s,tt} + c^2 \eta_{s,xx} = 0$$
$$\eta_s(s, x) = 0$$
$$\eta_{s,j}(s, x) = f(s, x)$$

D. Alembtert

$$\eta_s(t, x) = \frac{1}{2c} \int_{x - x(t-s)} f(s, \chi)\, d\chi$$

Duhamed

$$u(t, x) = \int_0^t \eta_s(t, x)\, ds$$

Theorem 3.1. *Hvis $f \in C_1$ så vil dette løse probleme.*

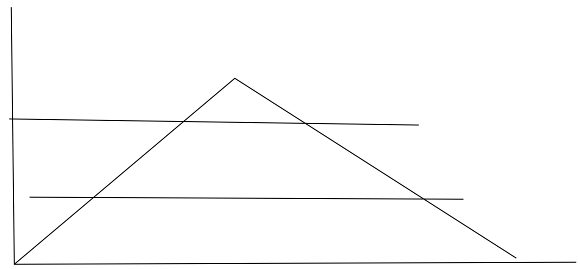

Figure 5: dkdkkd

Proof. la $u(0,x)=0$.

$$\begin{aligned}
u_t &= \overbrace{\eta_t(t,x)}^{=0} + \int_0^t \eta_{s,t}(t,x)\,ds \\
u_t(0,x) &= 0 \\
u_{tt} &= \eta_{t,t}(t,x) + \int_0^t \eta_{s,tt}(t,x)\,ds \\
&= f(t,x) - c^2 \int_0^t \eta_{s,xx}(t,x)\,ds \\
&= f(t,x) - c^2 \partial_{xx} \int_0^t \eta_s(t,x)\,ds \\
&= f(t,x) - c^2 + u_{xx}(t,x)
\end{aligned}$$

We trenger $\eta \in C^2$, $\eta_{s,tt}$ og $\eta_{s,xx}$ kontinuerlig mhp. s, t, x .

$$\eta_{s,x} = \frac{1}{2c}\left(f\left(x + c(t-s) - f\left(x - c(t-s)\right)\right)\right)$$

$\eta_{s,xx}, \eta_{s,tt}$ er kontinuerlig . Merk at

$$u(t,x) = \int_0^t \overbrace{\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\chi)\,d\chi}^{\eta_s(t,x)}\,ds$$

□

Eksempel.

La $f\left(t,x\right)=\psi\left(t\right)\cdot h\left(x\right)$ og

$$\eta_s\left(t,x\right)=\frac{1}{2c}\int_{x-x(t-s)}^{x+c(t-s)}\psi\left(s\right)h\left(\chi\right)d\chi$$

$$=$$

$$frac\psi\left(s\right)2c\left(H\left(x+c\left(t-s\right)\right)-H\left(x-c\left(t-s\right)\right)\right)$$

Der $\dot{H}\left(x\right)=h\left(x\right)$.

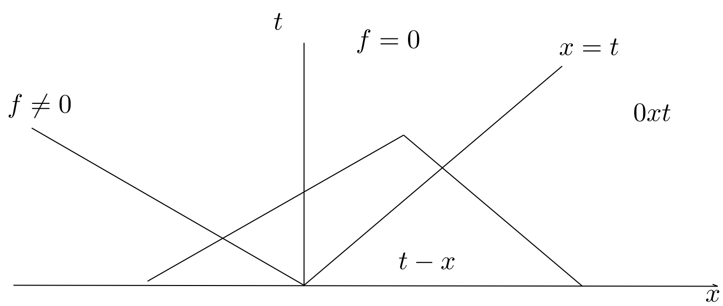

Figure 6: bølgeomraade

$$\begin{aligned}
\eta_s\left(t,x\right) &= 0 \quad \text{hvis} \quad s>t-x \\
\eta_s\left(t,s\right) &= \frac{\psi\left(s\right)}{2c}\left(x+t-s\right) \quad 0<s<t-x \\
u\left(t,x\right) &= \int_0^{t-x}\frac{\cos s}{2}\left(x+t-s\right)ds \\
&= \frac{1}{2}\left[-s\sin s-\cos s+\left(t-x\right)\sin s\right]_{s=0}^{s=t-x} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(t-x\right)\right)
\end{aligned}$$

Her ble det brukt at

$$\int s\cos^2 s ds=s\sin s+\cos s$$

3.2 Randverdier

Vi kan ta bølgeligningen

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(0,x) &= g(x) \\ u_t(0,x) &= h(x) \\ u(t,0) &= 0 \end{aligned}\right\} x > 0$$

En forutsetning for en klassisk løsning er $g(0) = 0$ or $h(0) = 0$. Hvis ikke er ikke initalialbetingelsene konsistente.

D'Alembert

$$u(t,c) = \frac{g(x+ct) - g(x-ct)}{2} = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\zeta)\, d\zeta$$

Løsning. Utvid g, h antisymmetrisk om 0

$$\begin{aligned} g(-x) &= -g(x) \\ h(-x) &= -h(x) \end{aligned}$$

Konsenvensen av antisymmentrien er at

$$u(t,-x) = -u(t,x)$$

Alternativt til randbetingelsen, også kjent som**Neumann betingelse** $u(t,0) = 0$ er

$$u_x(t,0) = 0$$

Analogien er at man har en trå festet på en ring i et stivt rør som ikke har friksjon. Da må tråen være horisontal.

Hvis vi ser på

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d}{dx} \left(g(x+ct) - g(x-ct) \right) \right\}_{x=0} \\ &= \dot{g}(ct) + \dot{g}(-ct) \\ &\vdots \\ \dot{g}(ct) &= -\dot{g}(-ct) \\ g(x) &= g(-x) \\ g, h &\quad \text{symmetriske} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} h(\zeta)\, d\zeta \quad \text{for} \quad x = 0$$

Utvid g (og h) antisymmetrisk om $0, L$

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= -g(x) \\
g(L-x) &= -g(L+x) \\
g(L+x) &= g(L-x) = g(x-L) \\
g(x+L) &= g(x-L) \quad x \to x+L \\
g(x+2L) &= g(x)
\end{aligned}
$$

Notater om kuler

$$
\begin{aligned}
B_r(\mathbf{a}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r\} \\
\overline{B}_r(\mathbf{a}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq r\} \\
\partial B_r(\mathbf{a}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}
\end{aligned}
$$

For integratler

$$\int_{B_r(\mathbf{a})} f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(\mathbf{a})} f(\mathbf{x})\, dS dr$$

Vi kan skrive $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \rho\mathbf{y}$ der $\|\mathbf{y}\| = 1$ og $\mathbf{y} \in S^{n-1}$ For $f = 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r(\mathbf{a})} d^n\mathbf{x} &= \int_0^r \underbrace{\int_{\partial B_\rho(s)} dS}_{A_n\rho^{r-n}} dr \\
&= A_n \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \frac{A_n}{n} r^n
\end{aligned}
$$

Der A_n er volumet av $S^{n-1} = \partial B_1(\mathbf{o}) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A_2 = 2\pi, \quad A_3 = 4\pi, \ldots$$

$$\int_{B_r(\mathbf{a})} f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \int_0^r, \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{a} + \rho\mathbf{y})\, dS \rho^{n-1} d\rho$$

Integrasjon i generaliserte polarkoordinater.

$$\frac{d}{dr} \int_{B_r(\mathbf{a})} f(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{a} + r\mathbf{y})\, dS$$

3.3 Darboux Formel

La oss ha en kule med sentrum $\mathbf{x}$ og radius ρ. Definer $\overline{f}(\mathbf{x};\rho)$ der

$$\begin{aligned}\overline{f(\mathbf{x};\rho)} &= \int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) := \frac{1}{A_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} f(\mathbf{y})\,dS. \\ &= \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{x}+\rho\mathbf{z})\,dS(\mathbf{z}) := \frac{1}{A_n}\int_{S^{n-1}}\cdots \\ \Delta\overline{f}(\mathbf{x};\rho) &= \overline{\Delta f}(\mathbf{x};\rho)\end{aligned}$$

Derbours Formel

$$\left(\rho^{n-1}\overline{f}_\rho\right)_\rho = \rho^{n-1}\Delta\overline{f}$$

4 References