Séries Numéricas Convergência e Divergência

Isak Paulo de Andrade Ruas

Instituto Federal do Norte de Minas Gerais Campus Januária Curso de Licenciatura em Matemática

5 de Dezembro de 2023

Agenda

- 1 Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- 3 Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão



- 1 Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- ③ Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão





Uma série numérica é a soma dos termos de uma sequência infinita de números. Existem diferentes tipos de séries numéricas, as quais são classificadas de acordo com as propriedades dos termos na sequência e da maneira como eles são somados.





Definição (1)

Uma série numérica (ou simplesmente série) é a soma dos termos de uma sequência $\{a_n\}$, denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.





Por exemplo, considere a sequência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\dots\right\}$. A série correspondente a esta sequência é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$





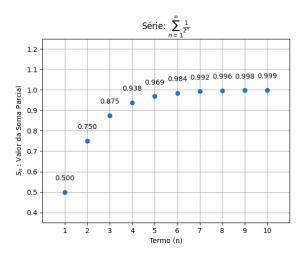


Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$





- Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- 3 Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão





Convergência: Uma série $\sum a_n$ converge se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Divergência: Uma série diverge se não converge.





Definição (2)

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número

real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevermos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = s$$
 ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

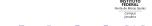
O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Observação (1)

A soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevermos $\sum a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$





Vamos analisar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ que foi apresentada anteriormente, com o objetivo de determinar se essa série converge ou diverge. Para isso, vamos examinar algumas das somas parciais. A primeira soma parcial é $s_1 = \frac{1}{2}$, a segunda é $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, e a terceira é $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, e assim sucessivamente.





Observe que s_n pode ser escrito como $s_n=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, podemos então escrever s_n como $\lim_{i\to\infty}1-\frac{1}{2^i}=1$. Como o limite existe e é um número real, então dizemos que a série $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}$ é convergente, convergindo para 1.





5 de Dezembro de 2023

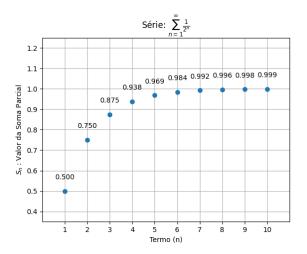


Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$



Vamos analisar a série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$, com o objetivo de determinar se essa série converge ou diverge. Seguindo o método anterior, vamos pegar algumas somas parciais desta série. A primeira soma parcial é $s_1 = log\frac{1}{2}$, a segunda é $s_2 = log\frac{1}{2} + log\frac{2}{3} = log\frac{1}{3}$, e a terceira é $s_3 = log\frac{1}{2} + log\frac{2}{3} + log\frac{3}{4} = log\frac{1}{3} + log\frac{3}{4} = log\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente.





Observe que s_n pode ser escrito como $s_n = log \frac{1}{n+1} = -log(n+1)$. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, podemos então escrever s_n como $\lim_{i\to\infty} -log(n+1) = -\infty$. Como o limite não

existe, dizemos que e série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$ é divergente.





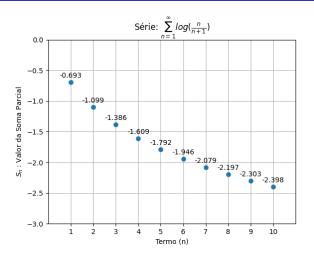


Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$



- Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- 3 Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão





Teorema (1)

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$





Seja $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Então, $a_n=s_n-s_{n-1}$. Como $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n=s$. Como $n-1\to\infty$ quando $n\to\infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1}=s$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$





Observação (2)

Com qualquer série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ associamos duas sequências: a sequência $\{s_n\}$

de suas somas parciais e a sequência $\{a_n\}$ de seus termos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

convergente, o limite da sequência $\{s_n\}$ é s (a soma da série) e, como o Teorema (1) afirma, o limite da sequência $\{a_n\}$ é 0.





Considerando o Teorema (1), vamos analisar novamente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Podemos verificar que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, o que sugere a convergência da série.

De fato, como já observamos, esta é uma série convergente.





Agora, consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Primeiramente, analisamos o termo individual da série no infinito. Encontramos que $\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)=\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)$. Simplificando a expressão $\frac{n}{n+1}$, chegamos a $1-\frac{1}{n+1}$, e no limite isso se aproxima de 1. Portanto, aplicando a propriedade do logaritmo que diz que o logaritmo de 1 é zero, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\log(1-\frac{1}{n+1})=\log(1)=0$$





Assim como para o caso da série anterior, o fato de que o termo individual tende a zero é um indicativo necessário, mas não suficiente, para determinar a convergência da série. No entanto, diferente da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, que é uma série geométrica claramente convergente, a convergência ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ não é imediatamente aparente apenas com esta informação, e requer uma análise mais detalhada.



5 de Dezembro de 2023

Observação (3)

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, não podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teste de Divergência



Teorema (2)

Seja c uma constante e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é

também convergente e é igual a c $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$





Seja $\sum a_n$, uma série convergente, então por definição:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Então, considerando c uma constante, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n ca_i = \lim_{n\to\infty}c\sum_{i=1}^n a_i = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n a_i = cs.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ é convergente e é igual a $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.





Teorema (3)

Se
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é também

convergente e é igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.





Sejam
$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 e $B = \sum_{i=n}^{\infty} b_n$, então por definição:
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ e } B = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Considere a soma de A e B:

$$A + B = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

Logo,
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$
 é convergente e igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.



Teorema (4)

Se
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ é também

convergente e é igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.





Utilizando a mesma lógica do Teorema (3), temos:

$$A - B = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i).$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ é convergente e igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.





Exemplo (1)

Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right).$



32 / 49



Pelo Teorema (3), podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Pelo Teorema (2), podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$





5 de Dezembro de 2023

Note que podemos escrever,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

no qual seu s_n será:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$=1-rac{1}{n+1}$$
, logo $\lim_{n o\infty}\left(1-rac{1}{n+1}
ight)=1$





Assim, obtemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, e já verificamos anteriormente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
, desta forma, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$



35 / 49



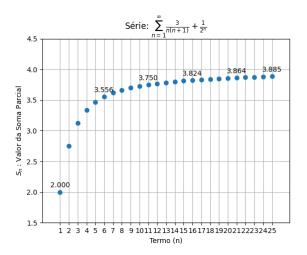
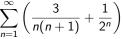


Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$





- Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- 3 Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão





Definição (3)

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o *n*-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1}b_n$$
 ou $a_n = (-1)^nb_n$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$)

Teorema (4)

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots$$

Com $b_n > 0$ satisfaz

(i)
$$b_{n+1} \leq b_n$$
 para todo n

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

Este é o critério de convergência para séries alternadas, comumente conhecido como o Teste de Leibniz.



5 de Dezembro de 2023

 $s_2 = b_1 - b_2 > 0$

Para as somas parciais pares, temos que:

$$\begin{aligned} s_4 &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \ge s_2 \\ &\vdots \\ s_{2n} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2n-1} - b_{2n}) \\ &= s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \\ &= b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_n \ge s_{2n-2} \end{aligned}$$

A sequência das somas parciais pares é crescente e limitada superiormente, uma vez que para cada termo subtraído, existe um termo não maior que este adicionado antes.

Para as somas parciais ímpares, observamos que:

$$s_1 = b_1$$

 $s_3 = s_2 + b_3 \le s_2 + b_2 = s_1$
 $s_5 = s_4 + b_5 \le s_4 + b_4 = s_3$
 \vdots
 $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1} \le s_{2n} + b_{2n} = s_{2n-1}$

A sequência das somas parciais ímpares é decrescente e limitada inferiormente por zero.





5 de Dezembro de 2023

Dado que $b_n \to 0$, a diferença entre uma soma parcial ímpar e a soma parcial par anterior tende a zero, e assim as sequências de somas parciais pares e ímpares convergem para o mesmo limite. Isso mostra que a série alternada é convergente



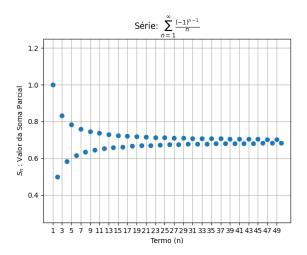


Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$





Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

satisfaz a condição (i) do Teorema (4), $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n, também, satisfaz a condição (ii): $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo, a série harmônica alternada é convergente.



44 / 49



- Introdução às Séries Numéricas
- 2 Convergência e Divergência
- ③ Propriedades das Séries Convergentes
- Séries Alternadas
- Conclusão





Conclusão

Nesta apresentação, exploramos as séries numéricas, um conceito fundamental no estudo da matemática avançada, especialmente em análise e cálculo. Discutimos o que são séries numéricas, como identificar a convergência e a divergência de uma série e também examinamos propriedades importantes das séries convergentes. Por meio do Teorema do Teste de Leibniz, analisamos as séries alternadas, uma categoria especial de séries que seguem um padrão de sinais alternados.



5 de Dezembro de 2023

Conclusão

A compreensão das séries numéricas nos permite resolver diversos problemas matemáticos e aplicar esses conceitos em situações práticas, incluindo a modelagem matemática em física, economia e outras ciências aplicadas. A habilidade de discernir entre séries convergentes e divergentes é uma ferramenta valiosa para garantir a validade e a aplicabilidade dos resultados obtidos.



Conclusão

Esperamos que esta apresentação tenha esclarecido alguns dos aspectos importantes das séries numéricas e que você esteja agora mais confortável com o tema. A matemática das séries numéricas é vasta e repleta de nuances e esperamos ter despertado o seu interesse para aprofundar-se mais nestes estudos. Obrigado por sua participação e atenção durante a apresentação.



Perguntas?

Obrigado pela atenção! Perguntas?



