Séries Numéricas

Convergência e Divergência

Isak Paulo de Andrade Ruas

Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Campus Januária
Curso de Licenciatura em Matemática

7 de Dezembro de 2023

Agenda

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus
Januária

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

O que são Séries Numéricas?

Uma série numérica é a soma dos termos de uma sequência infinita de números. Existem diferentes tipos de séries numéricas, as quais são classificadas de acordo com as propriedades dos termos na sequência e da maneira como eles são somados.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

O que são Séries Numéricas?

Definição (1)

Uma série numérica (ou simplesmente série) é a soma dos termos de uma sequência $\{a_n\}$, denotada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

O que são Séries Numéricas?

Por exemplo, considere a sequência $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots\right\}$.
A série correspondente a esta sequência é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

O que são Séries Numéricas?

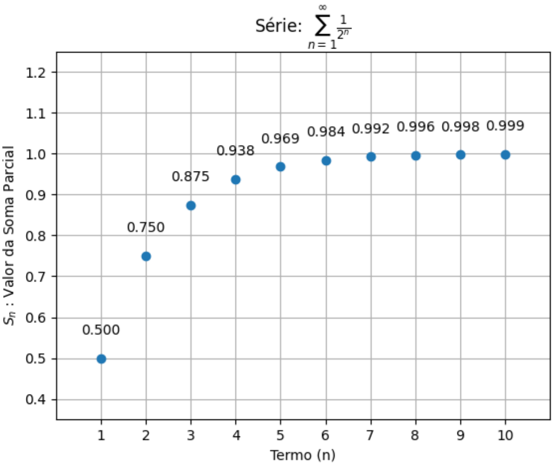

Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Convergência e Divergência

Convergência: Uma série $\sum a_n$ converge se $\lim_{n \to \infty} s_n = s$.

Divergência: Uma série diverge se não converge.

Definição (2)

Dada uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevermos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

O número s é chamado a **soma** da série. Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Observação (1)

A soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevermos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número* s. *Observe que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus
Januária

Convergência e Divergência

Vamos analisar a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ que foi apresentada anteriormente, com o objetivo de determinar se essa série converge ou diverge. Para isso, vamos examinar algumas das somas parciais. A primeira soma parcial é $s_1 = \frac{1}{2}$, a segunda é $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, e a terceira é $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, e assim sucessivamente.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Convergência e Divergência

Observe que s_n pode ser escrito como $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, podemos então escrever s_n como $\lim\limits_{i \to \infty} 1 - \dfrac{1}{2^i} = 1$. Como o limite existe e é um número real, então dizemos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, convergindo para 1.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

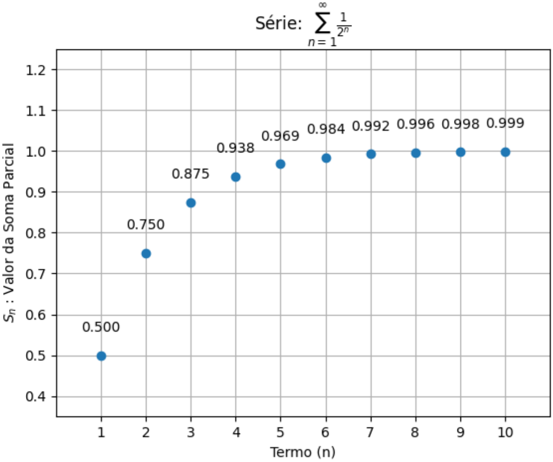

Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Convergência e Divergência

Vamos analisar a série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$, com o objetivo de determinar se essa série converge ou diverge. Seguindo o método anterior, vamos pegar algumas somas parciais desta série. A primeira soma parcial é $s_1 = log\frac{1}{2}$, a segunda é $s_2 = log\frac{1}{2} + log\frac{2}{3} = log\frac{1}{3}$, e a terceira é $s_3 = log\frac{1}{2} + log\frac{2}{3} + log\frac{3}{4} = log\frac{1}{3} + log\frac{3}{4} = log\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Convergência e Divergência

Observe que s_n pode ser escrito como $s_n = log\frac{1}{n+1} = -log(n+1)$. Como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, podemos então escrever s_n como $\lim_{i\to\infty} -log(n+1) = -\infty$. Como o limite não existe, dizemos que e série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$ é divergente.

Convergência e Divergência

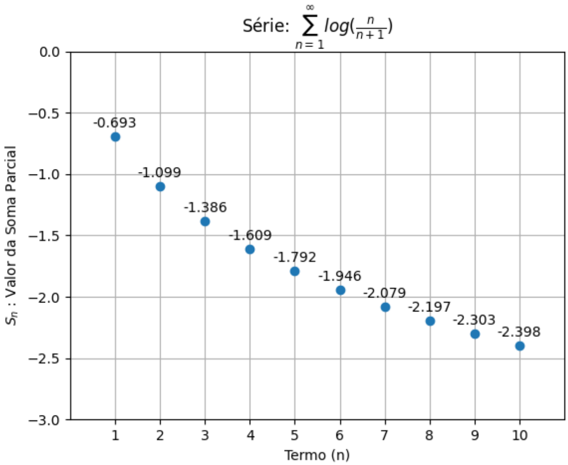

Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n}{n+1})$

INSTITUTO FEDERAL Norte de Minas Gerais Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Teorema (1)

Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, então* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus
Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, também temos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Observação (2)

Com qualquer série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *associamos duas sequências: a sequência* $\{s_n\}$ *de suas somas parciais e a sequência* $\{a_n\}$ *de seus termos. Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *for convergente, o limite da sequência* $\{s_n\}$ *é* s *(a soma da série) e, como o Teorema (1) afirma, o limite da sequência* $\{a_n\}$ *é 0.*

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Considerando o Teorema (1), vamos analisar novamente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Podemos verificar que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, o que sugere a convergência da série. De fato, como já observamos, esta é uma série convergente.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Agora, consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Primeiramente, analisamos o termo individual da série no infinito. Encontramos que $\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)$. Simplificando a expressão $\frac{n}{n+1}$, chegamos a $1-\frac{1}{n+1}$, e no limite isso se aproxima de 1. Portanto, aplicando a propriedade do logaritmo que diz que o logaritmo de 1 é zero, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \log(1-\frac{1}{n+1}) = \log(1) = 0$$

Propriedades das Séries Convergentes

Assim como para o caso da série anterior, o fato de que o termo individual tende a zero é um indicativo necessário, mas não suficiente, para determinar a convergência da série. No entanto, diferente da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que é uma série geométrica claramente convergente, a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ não é imediatamente aparente apenas com esta informação, e requer uma análise mais detalhada.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Observação (3)

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *não podemos concluir que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *não existir ou se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Teste de Divergência

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Teorema (2)

Seja c *uma constante e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série convergente. Então* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *é também convergente e é igual a* $c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Propriedades das Séries Convergentes

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, uma série convergente, então por definição:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Então, considerando c uma constante, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ca_i = \lim_{n\to\infty} c \sum_{i=1}^{n} a_i = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = cs.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ é convergente e é igual a $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Propriedades das Séries Convergentes

Teorema (3)

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries convergentes, então* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *é também convergente e é igual a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Sejam $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $B = \sum_{i=n}^{\infty} b_n$, então por definição:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ e } B = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Considere a soma de A e B:

$$A + B = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e igual a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

INSTITUTO FEDERAL Norte de Minas Gerais Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Teorema (4)

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são séries convergentes, então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *é também convergente e é igual a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Utilizando a mesma lógica do Teorema (3), temos:

$$A - B = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i).$$

Assim, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ é convergente e igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Propriedades das Séries Convergentes

Exemplo (1)

Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

Pelo Teorema (3), podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

.

Pelo Teorema (2), podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

.

Note que podemos escrever,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

no qual seu s_n será:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$, logo $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1} \right) = 1$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Propriedades das Séries Convergentes

Assim, obtemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, e já verificamos anteriormente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, desta forma, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

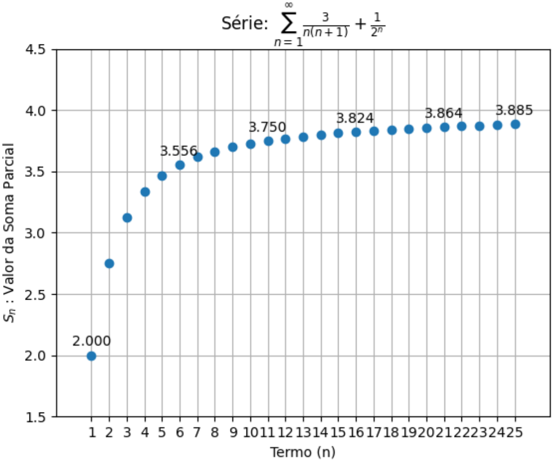

Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$

Definição (3)

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

Vemos desses exemplos que o n-ésimo termo de uma série alternada é da forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \text{ ou } a_n = (-1)^n b_n$$

onde b_n é um número positivo. (De fato, $b_n = |a_n|$)

Teorema (4)

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots$$

Com $b_n > 0$ *satisfaz*

$$\text{(i) } b_{n+1} \leq b_n \text{ para todo } n$$

$$\text{(ii) } \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.

Este é o critério de convergência para séries alternadas, comumente conhecido como o Teste de Leibniz.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Para as somas parciais pares, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
s_2 &= b_1 - b_2 \geq 0, \\
s_4 &= s_2 + (b_3 - b_4) \geq s_2, \\
&\vdots \\
s_{2n} &= s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geq s_{2n-2},
\end{aligned}$$

Isso indica que:

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots \leq b_1$$

A sequência de somas parciais pares $\{s_{2n}\}$ é crescente e limitada superiormente por b_1, o que prova sua convergência pelo Teorema da Convergência Monótona.

Para as somas parciais ímpares, temos:

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1, \\ s_3 &= s_1 + (b_3 - b_2), \\ s_5 &= s_3 + (b_5 - b_4), \\ &\vdots \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} + (b_{2n+1} - b_{2n}), \end{aligned}$$

E isso nos leva a concluir que:

$$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \ldots \geq s_{2n+1} \geq \ldots$$

A sequência de somas parciais ímpares $\{s_{2n+1}\}$ é decrescente e limitada inferiormente pela soma da série (que é o mesmo limite da sequência $\{s_{2n}\}$), garantindo assim sua convergência.

INSTITUTO FEDERAL Norte de Minas Gerais Campus Januária

As aproximações fornecidas pelas somas parciais ímpares e pares são tais que:

$$s_{2n+1} - s_{2n} = b_{2n+1} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

demonstrando que as diferenças entre somas parciais consecutivas decaem para zero à medida que n aumenta.

Porque as sequências $\{s_{2n}\}$ (crescente e limitada superiormente) e $\{s_{2n+1}\}$ (decrescente e limitada inferiormente) têm o mesmo limite e as diferenças entre elas tendem a zero, ambas convergem para o mesmo valor. Isso prova que a série alternada é convergente.

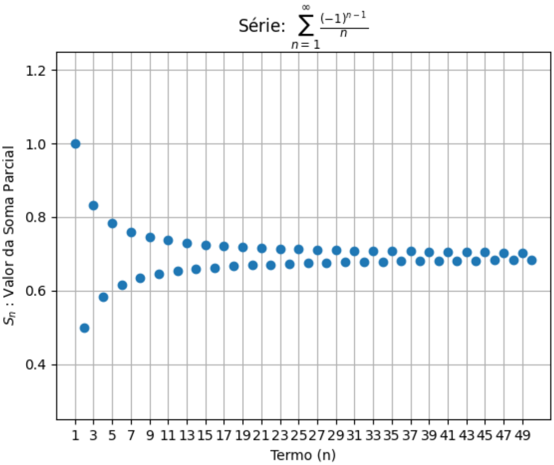

Figura: Soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

satisfaz a condição (i) do Teorema (4), $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n, também, satisfaz a condição (ii): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Logo, a série harmônica alternada é convergente.

Conclusão

Nesta apresentação, exploramos as séries numéricas, um conceito fundamental no estudo da matemática avançada, especialmente em análise e cálculo. Discutimos o que são séries numéricas, como identificar a convergência e a divergência de uma série e também examinamos propriedades importantes das séries convergentes. Por meio do Teorema do Teste de Leibniz, analisamos as séries alternadas, uma categoria especial de séries que seguem um padrão de sinais alternados.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus Januária

Conclusão

A compreensão das séries numéricas nos permite resolver diversos problemas matemáticos e aplicar esses conceitos em situações práticas, incluindo a modelagem matemática em física, economia e outras ciências aplicadas. A habilidade de discernir entre séries convergentes e divergentes é uma ferramenta valiosa para garantir a validade e a aplicabilidade dos resultados obtidos.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus
Januária

Conclusão

Esperamos que esta apresentação tenha esclarecido alguns dos aspectos importantes das séries numéricas e que você esteja agora mais confortável com o tema. A matemática das séries numéricas é vasta e repleta de nuances e esperamos ter despertado o seu interesse para aprofundar-se mais nestes estudos. Obrigado por sua participação e atenção durante a apresentação.

INSTITUTO FEDERAL
Norte de Minas Gerais
Campus
Januária

Obrigado pela atenção!
Perguntas?