5ª ESCUELA DE VERANO DE CONTROL TURIX-DYNAMICS

El filtro de Kalman

Un curso sobre estimación de estados y parámetros

I. Santos-Ruiz & F.R. López-Estrada

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez

Turix-Dynamics Diagnosis and Control Group

Agenda: Día 5

- Resumen sobre EKF
- Estimación de estados con MATLAB
- Estimación de estados con Simulink
- Estimación de parámetros

Documentos y código fuente:

https://github.com/isantosruiz/kalman

Linealización de modelos no lineales

El filtro de Kalman está diseñado para modelos dinámicos **lineales**.

Es posible linealizar un modelo dinámico no lineal en un punto de operación $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$. Por lo general, se omite la tilde $\sim$ en la notación del modelo linealizado.

Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son las jacobianas de $\boldsymbol{f}$:

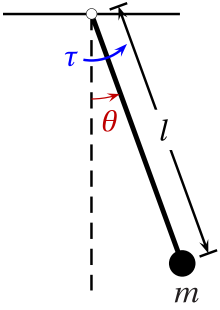
$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0,\, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0,\, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$$

Ejercicio

Hallar un modelo lineal del péndulo, tomando como punto de operación la condición de reposo donde el péndulo cuelga libremente sin torque.

El péndulo

Modelo determinista, sin fricción



$$\tau - mgl\,\mathrm{sen}(\theta) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = 1/\left(ml^2\right)\tau - \left(g/l\right)\mathrm{sen}(\theta)$$

Tomando $\omega = \dot{\theta}$, se reescribe como:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= 1/\left(ml^2\right)\tau - \left(g/l\right)\mathrm{sen}(\theta)\end{aligned}$$

Con $\mathbf{x} = [\theta, \omega]^\top$ y $u = \tau$, se obtiene $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, u)$:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1/\left(ml^2\right)u - \left(g/l\right)\mathrm{sen}(x_1)\end{bmatrix}$$

MATLAB

```
% Definición de variables y parámetros
syms theta omega tau m l g
x = [theta;omega];
u = [tau];
% Dinámica del sistema no lineal
xdot = [omega;1/(m*l^2)*tau-g/l*sin(theta)];
% Cálculo de las matrices jacobianas
A = sym(zeros(numel(x),numel(x)));
B = sym(zeros(numel(x),numel(u)));
for i = 1:numel(x)
    for j = 1:numel(x)
        A(i,j) = diff(xdot(i),x(j));
    end
end
```

MATLAB (continuación)

```
for i = 1:numel(x)
    for j = 1:numel(u)
        B(i,j) = diff(xdot(i),u(j));
    end
end
% Evaluación de las jacobianas en el punto de operación
x0 = [0;0];
u0 = [0];
A0 = subs(A,[x;u],[x0;u0])
B0 = subs(B,[x;u],[x0;u0])
```

- El código para calcular simbólicamente las matrices jacobianas está disponible como subrutina en el repositorio de MathWorks:

  https://mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/71075-jacobians

Discretización de modelos no lineales

Tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Discretización de modelos no lineales

Tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Tiempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$
$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

Discretización de modelos no lineales

Tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Tiempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$
$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T_s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_s\,\dot{\mathbf{x}}(t)$$

Discretización de modelos no lineales

Tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Tiempo discreto

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$
$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T_s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_s\,\dot{\mathbf{x}}(t)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_s\, f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$ Forward Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_s\, f(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$$ Backward Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{T_s}{2}\big(f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + f(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})\big)$$ Trapezoidal

Filtro de Kalman extendido (EKF)

El EKF una extensión del Filtro de Kalman para sistemas no lineales. **Linealiza el sistema en cada nueva estimación del estado** usando las matrices jacobianas. Si no se tiene una expresión analítica de las jacobianas, se pueden calcular numéricamente.

☞ Para sistemas altamente no lineales, se recomienda usar el Unscented Kalman Filter (UKF). Si la distribución del ruido no es gaussiana, se recomienda usar un filtro de partículas.

Requisitos del EKF en tiempo discreto:

- Función de transición de estados: $\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$
- Función de medición: $\mathbf{y}_k = \boldsymbol{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$
- Covarianza del ruido del proceso: $\mathbf{Q}$
- Covarianza del ruido de medición: $\mathbf{R}$
- Estimación inicial: $\widehat{\mathbf{x}}_0^-$, $\mathbf{P}_0^-$

El Control Systems Toolbox de MATLAB incluye la clase `extendedKalmanFilter` con los métodos `correct()` y `predict()`.

MATLAB

```matlab
% Parámetros del sistema
m = 1; l = 0.5; g = 9.8; Ts = 0.01;
% Función de transición en tiempo continuo
f = @(x,u) [x(2);1/(m*l^2)*u-g/l*sin(x(1))];
% Función de transición en tiempo discreto (forward Euler)
funTran = @(x,u) x+Ts*f(x,u);
% Función de medición
funMeas = @(x,u) x(1);
% Configuración del filtro de Kalman extendido
ekf = extendedKalmanFilter(funTran,funMeas);
ekf.ProcessNoise = diag([0,1e-4]);
ekf.MeasurementNoise = 1e-2;
ekf.State = [0;0];
```

EKF en MATLAB

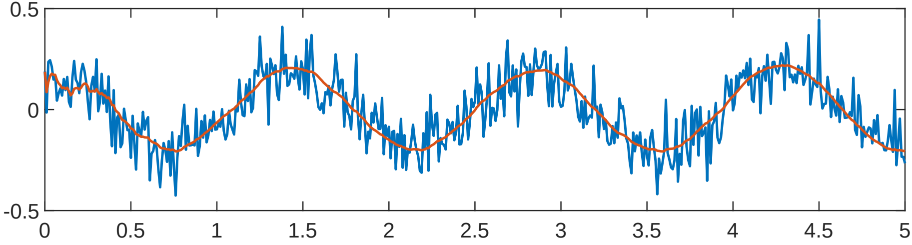
Estimación de estados del péndulo

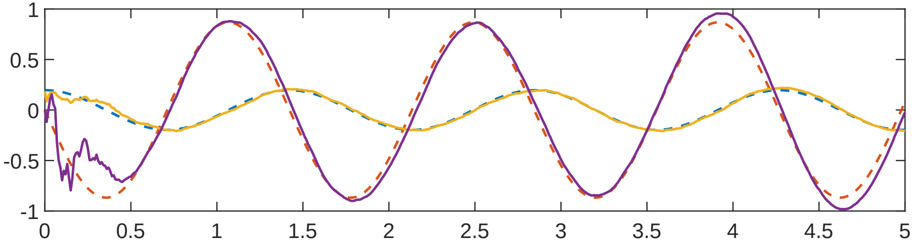
MATLAB (continuación)

```
% Simulación del péndulo sin torque de entrada
[t,x] = ode45(@(t,x) f(x,0),0:Ts:5,[pi/16;0]);
y = x(:,1) + 0.1*randn(size(x(:,1)));
u = zeros(size(t));
% Estimación de estados
xhat = zeros(2,length(t));
for k = 1:length(t)
    ekf.correct(y(k),u(k));
    xhat(:,k) = ekf.State;
    ekf.predict(u(k));
end
subplot(211); plot(t,y,t,xhat(1,:),'LineWidth',1)
subplot(212); plot(t,x,'--',t,xhat,'LineWidth',1);
```

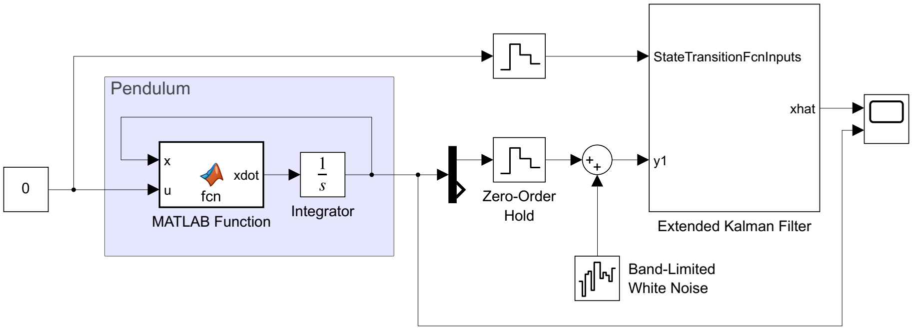
EKF en MATLAB

Estimación de estados del péndulo





Estimación de estados del péndulo



funTran.m

```
function xnext = funTran(x,u)
m = 1; l = 0.5; g = 9.8; Ts = 0.01;
xdot = [x(2);1/(m*l^2)*u-g/l*sin(x(1))];
xnext = x + Ts*xdot;
```

funMeas.m

```
function y = funMeas(x)
y = x(1);
```

Estimación de parámetros con EKF

¿Qué hacer si no conocemos algún parámetro del sistema?

Por ejemplo, supongamos desconocida la aceleración de la gravedad en el modelo del péndulo.

Estimación de parámetros con EKF

¿Qué hacer si no conocemos algún parámetro del sistema?
Por ejemplo, supongamos desconocida la aceleración de la gravedad en el modelo del péndulo.

Podemos consider al parámetro desconocido como una variable de estado adicional $x_3 := g$ y obtener un **modelo aumentado** agregando una ecuación diferencial con la derivada del parámetro igual a cero:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u/\left(ml^2\right) - \left(x_3/l\right)\operatorname{sen}(x_1) \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

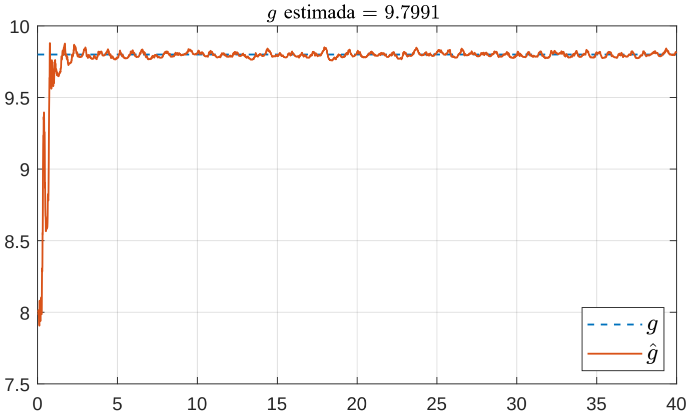
El parámetro se obtendrá de la estimación de x_3. Se debe asignar a x_3 un valor inicial "razonable" distinto de cero. Por el transitorio en la respuesta inicial del estimador, el valor del parámetro se obtendrá promediando sólo los valores finales de x_3.

MATLAB

```
% Parámetros del sistema
m = 1; l = 0.5; g = 9.8; Ts = 0.01;
% Función de transición en tiempo continuo
f = @(x,u) [x(2);1/(m*l^2)*u-g/l*sin(x(1))];
% Función de transición aumentada
f_aum = @(x,u) [x(2);1/(m*l^2)*u-x(3)/l*sin(x(1));0];
% Función de transición en tiempo discreto (forward Euler)
funTran = @(x,u) x+Ts*f_aum(x,u);
% Función de medición
funMeas = @(x,u) x(1);
% Configuración del filtro de Kalman extendido
ekf = extendedKalmanFilter(funTran,funMeas);
ekf.ProcessNoise = diag([0,1e-5,1e-5]);
ekf.MeasurementNoise = 1e-4;
ekf.State = [0;0;8];
```

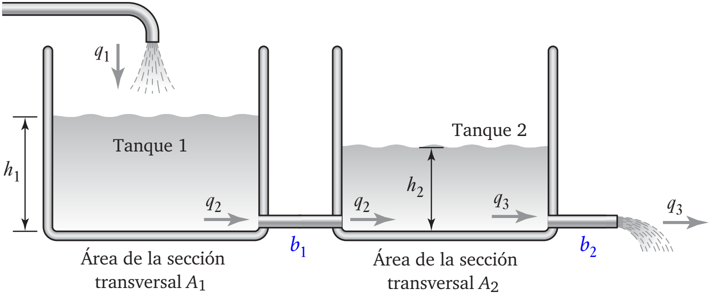
MATLAB

```
% Simulación del péndulo sin torque de entrada
t = 0:Ts:40;
[t,x] = ode45(@(t,x) f(x,0),t,[pi/16;0]);
y = x(:,1) + 0.01*randn(size(x(:,1)));
u = zeros(size(t));
% Estimación de estados y parámetro
xhat = zeros(3,length(t));
for k = 1:length(t)
    ekf.correct(y(k),u(k));
    xhat(:,k) = ekf.State;
    ekf.predict(u(k));
end
plot(t,g*ones(size(t)),'--',t,xhat(3,:))
gest = mean(xhat(3,2000:end));
title("g estimada = " + gest)
```

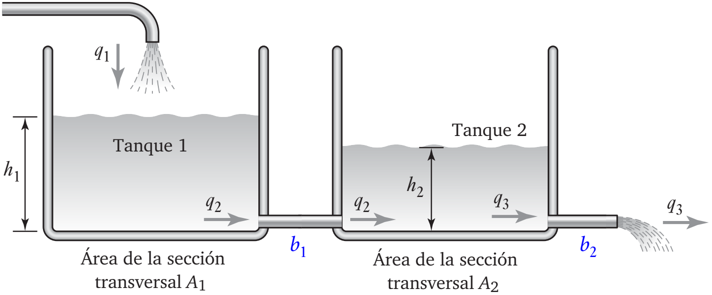


g estimada = 9.7991
10
9.5
9
8.5
8
7.5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
g
$\hat{g}$

Propósito: Estimar los coeficientes b_1 y b_2 a partir de mediciones de las alturas h_1 y h_2 y del caudal q_2 que fluye entre los dos tanques.



Propósito: Estimar los coeficientes b_1 y b_2 a partir de mediciones de las alturas h_1 y h_2 y del caudal q_2 que fluye entre los dos tanques.



$$q\,(b, h_1, h_2) \;=\; \cancel{b\sqrt{h_1 - h_2}} \;=\; b\,\mathrm{sign}(h_1 - h_2)\sqrt{|h_1 - h_2|}$$

Ecuaciones del balance de masa:

$$A_1\,\dot{h}_1 = q_1 - q_2$$
$$A_2\,\dot{h}_2 = q_2 - q_3$$

Ecuaciones del balance de masa:

$$A_1\,\dot{h}_1 = q_1 - q_2$$
$$A_2\,\dot{h}_2 = q_2 - q_3$$

Definiendo $x_1 := h_1$, $x_2 := h_2$, $u := q_1$, y despejando las derivadas, se obtiene el modelo dinámico no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \big(u - q(b_1, x_1, x_2)\big)\,/\,A_1 && \textbf{Estado 1}\\ \dot{x}_2 &= \big(q(b_1, x_1, x_2) - q(b_2, x_2, 0)\big)\,/\,A_2 && \textbf{Estado 2}\\ y_1 &= x_1 && \textbf{Medición 1}\\ y_2 &= x_2 && \textbf{Medición 2}\\ y_3 &= q(b_1, x_1, x_2) && \textbf{Medición 3} \end{aligned}$$

Estimación de parámetros con EKF

Cálculo de parámetros hidráulicos

Ecuaciones del balance de masa:

$$
\begin{aligned}
A_1\,\dot{h}_1 &= q_1 - q_2 \\
A_2\,\dot{h}_2 &= q_2 - q_3
\end{aligned}
$$

Definiendo $x_1 := h_1$, $x_2 := h_2$, $u := q_1$, y despejando las derivadas, se obtiene el modelo dinámico no lineal:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \big(u - q(b_1, x_1, x_2)\big)\,/\,A_1 && \textbf{Estado 1} \\
\dot{x}_2 &= \big(q(b_1, x_1, x_2) - q(b_2, x_2, 0)\big)\,/\,A_2 && \textbf{Estado 2} \\
y_1 &= x_1 && \textbf{Medición 1} \\
y_2 &= x_2 && \textbf{Medición 2} \\
y_3 &= q(b_1, x_1, x_2) && \textbf{Medición 3}
\end{aligned}
$$

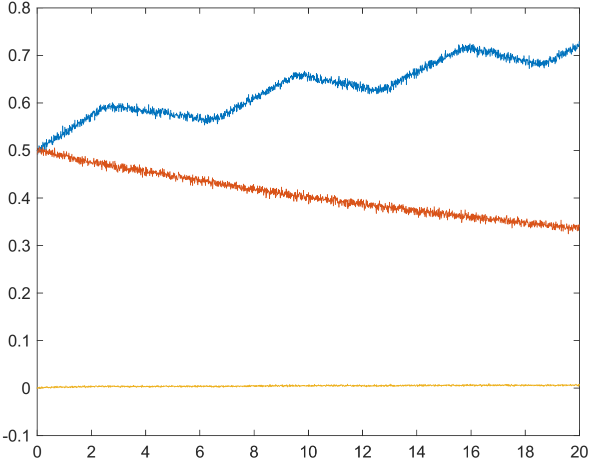
¡Tanto $\dot{\mathbf{x}}$ como $\mathbf{y}$ son funciones no lineales del estado! 😐 ☹

MATLAB

```
% Parámetros del sistema
A1 = 0.5; A2 = 1; b1 = 0.01; b2 = 0.02; Ts = 0.01;
% Relación de las alturas de presión con los caudales (Bernoulli)
q = @(b,h1,h2) b*sign(h1-h2).*sqrt(abs(h1-h2));
% Suponemos un patrón de flujo de entrada
u = @(t) 1e-2*(1+square(t));
% Obtenemos las "mediciones" con la dinámica determinista...
xprima = @(t,x) [1/A1*u(t)-1/A1*q(b1,x(1),x(2));
    1/A2*q(b1,x(1),x(2))-1/A2*q(b2,x(2),0)];
[t,x] = ode45(xprima,0:Ts:20,[0.5;0.5]);
y = [x,q(b1,x(:,1),x(:,2))];
% ...pero agregamos ruido en los sensores
y(:,1) = y(:,1) + 0.005*randn(size(y(:,1)));
y(:,2) = y(:,2) + 0.005*randn(size(y(:,2)));
y(:,3) = y(:,3) + 0.002*randn(size(y(:,3)));
figure(1); plot(t,y)
```

Estimación de parámetros con EKF

Cálculo de parámetros hidráulicos

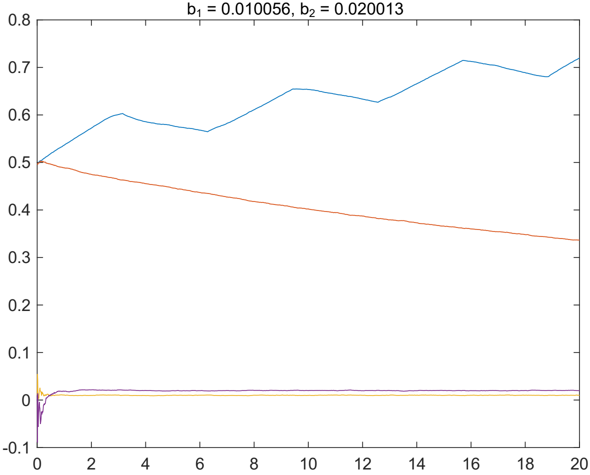


MATLAB (continuación)

```
% Dinámica del modelo aumentado con x3 := b1, x4 := b2
f = @(x,u) [1/A1*u-1/A1*q(x(3),x(1),x(2));
    1/A2*q(x(3),x(1),x(2))-1/A2*q(x(4),x(2),0);0;0];
funTran = @(x,u) x + Ts*f(x,u);  % Discretización forward Euler
funMeas = @(x,u) [x(1);x(2);q(x(3),x(1),x(2))];
ekf = extendedKalmanFilter(funTran,funMeas,[0.5;0.5;0.01;0.01]);
ekf.ProcessNoise = 1e-8;
ekf.MeasurementNoise = diag([0.005,0.005,0.002].^2);
uu = u(t);
xhat = zeros(4,numel(t));
for k = 1:numel(t)
    ekf.correct(y(k,:)',uu(k));
    xhat(:,k) = ekf.State;
    ekf.predict(uu(k));
end
figure(2); plot(t,xhat)
b1est = mean(xhat(3,1000:end)); b2est = mean(xhat(4,1000:end));
title("b1 = " + b1est + ", b2 = " + b2est)
```

Estimación de parámetros con EKF

Cálculo de parámetros hidráulicos



https://www.facebook.com/GTurix/