

On étudie un fibré G principal P au dessus de M . On suppose qu'on a fixé une connexion particulière et un produit scalaire sur \mathfrak{g} , de sorte qu'on identifie connexions et 1 formes \mathfrak{g} valuées. Les formes sont supposées \mathfrak{g} valuées, sauf lorsqu'on précise "forme scalaire" ou " $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ forme".

On appelle p -courant une fonctionnelle linéaire sur l'espace des $3 - p$ formes lisses. On identifie une p -forme lisse A avec le p -courant $B \mapsto \int_M A \wedge B$. La dérivée extérieure s'étend naturellement par $dA : B \mapsto \pm A(dB)$. Si A est un p -courant et B une q forme lisse sur le support de A , $p + q \leq 3$, on note $A \wedge B$ le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ $p + q$ -courant $C \mapsto A(B \wedge C)$. Pour une $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ forme A , on note $\langle A \rangle_{\mathfrak{g}}$ la forme scalaire obtenue par contraction.

On note ℓ une boucle orientée simple, $S(\ell)$ son support. On lui associe le 2-courant fermé d'ordre 0

$$[\ell] : B \mapsto \int_{S(\ell)} \ell^*(B)$$

Soit ℓ' est une autre boucle simple, de support disjoint de ℓ , et supposons que $[\ell]$ et $[\ell']$ soient exact. C'est en particulier le cas si ℓ et ℓ' sont contractiles: il existe alors des surfaces de Seifert Σ, Σ' , et on a $d[\Sigma] = \pm[\ell]$. Soit $F_\ell, F_{\ell'}$ des 1-courants telles que $dF_\ell = [\ell]$, $dF_{\ell'} = [\ell']$. On suppose également que F_ℓ (resp. $F_{\ell'}$) est lisse hors de $S(\ell)$ (resp. $S(\ell')$). On peut former le produit extérieur $F_\ell \wedge [\ell']$. Si \tilde{F}_ℓ vérifie également $d\tilde{F}_\ell = [\ell]$, alors

$$(\tilde{F} - F)_\ell \wedge [\ell'] = \pm d(\tilde{F} - F)_\ell \wedge F_{\ell'} = 0$$

à condition que M soit sans bord. La quantité $CS(\ell, \ell') := F_\ell \wedge dF_{\ell'}$ est donc un invariant des noeuds orientés ℓ, ℓ' .

D'un autre côté $F_\ell \wedge dF_{\ell'}$ est une quantité mal définie a priori qui demande au moins une régularisation.

Si l'on travaille sur $M = \mathbb{R}^3$, on pose explicitement

$$A_\ell : (x, v) \mapsto \int_{U(1)} \frac{\det(x - \ell_s; \dot{\ell}_s; v)}{\|x - \ell_s\|^3} ds$$

Lorsqu'on calcule l'holonomie de A_ℓ le long d'un lacet simple ℓ' , on obtient la formule de Gauss pour le linking number entre ℓ et ℓ' . En particulier la connexion est plate hors du support $S(\ell)$ de ℓ . Il faut encore calculer dA_ℓ sur $S(\ell)$: pour B une 1 forme lisse à support compact, et avec les coordonnées standards,

$$\begin{aligned} dA(B) &= A_\ell(dB) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{\epsilon^{ijk} (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j dx_k \wedge dB_x}{\|x - \ell_s\|^3} ds \end{aligned}$$

Comme B est à support compact, on peut intégrer par partie. Comme de plus la connexion est plate hors de $S(\ell)$, seul le terme de bord est non nul:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{\epsilon^{ijk} (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j (B_x)_l}{\|x - \ell_s\|^3} \iota^*(dx_k \wedge dx_l) ds \\ &= \int_{U(1)} \epsilon^{ijk} \left(\int_{S(0,1)} z_i \iota^*(dz_k \wedge dz_l) \right) (\dot{\ell}_s)_j (B_{\ell_s})_l ds \\ &= \int_{U(1)} \epsilon^{ijk} \left(\int_{S(0,1)} z_i \iota^*(dz_k \wedge dz_l) \right) (\dot{\ell}_s)_j (B_{\ell_s})_l ds \\ &= \int_{U(1)} \epsilon^{ijk} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \sin(\phi)^3 \cos(\theta)^2 \delta_{jl} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \sin(\phi)^2 \cos(\phi) \cos(\theta)^2 \delta_{il} \right) (\dot{\ell}_s)_j (B_{\ell_s})_l ds \\ &= C \int_{U(1)} \langle \dot{\ell}_s; B_{\ell_s} \rangle ds \end{aligned}$$

Le courant A_ℓ vérifie donc bien $dA_\ell = [\ell]$, et il est alors clair que CS (testé sur la fonction identiquement égale à 1, ou plus précisément sur une suite quelconque de fonctions $0 \leq f_n \leq 1$ à supports compacts, égales à 1 sur une exhaustion de compacts K_n . On note encore CS le résultat) est le linking number. Cette formulation se prête bien à interpréter le linking number à partir de boucles de Wilson: pour une connexion A lisse et une boucle simple ℓ , $Hol_A(\ell) = \exp(i[\ell] \wedge A)$. On a alors, formellement, et en notant $\langle A; B \rangle = \int_M A \wedge dB$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} Hol_A(\ell) e^{ikCS(A)} DA &= \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} e^{ik\langle A; A+F_\ell \rangle} DA \\
&= e^{i\langle F_\ell; F_\ell \rangle / 4} \\
&= e^{iSLK(\ell)/4}
\end{aligned}$$

Ici on a interprété $CS(\ell)$ comme le self linking number, même si l'on a vu que la quantité était mal définie, avec l'idée que, si l'on remplace l'holonomie de ℓ par un polynôme d'holonomies de plusieurs noeuds, on obtiendra une expression similaire en remplaçant SLK par LK . Si l'on a choisi le polynôme de telle sorte qu'à la fin seul des termes de la forme $LK(\ell, \ell')$ pour $S(\ell) \cap S(\ell') = \emptyset$, le calcul sera "exact".

Cependant dans ce calcul informel, et qui donne le résultat attendu, on a supposer implicitement que le domaine d'intégration était stable par translation de $F_\ell/2$. Si l'on veut que le domaine soit indépendant du lien choisi, on doit donc considérer un espace de connections qui contienne l'espace engendré par les F_ℓ . Notons \mathcal{A} cet espace (qui dépend de la régularité qu'on impose sur les boucles: considérons déjà qu'elles sont toutes linéaires par morceaux). Pour une boucle fixée ℓ , \mathcal{A} va typiquement se diviser en trois sous espaces: la "majorité de l'espace", correspondant à des ℓ' sans intersections avec ℓ , puis les ℓ' avec un nombre fini d'intersections, puis les ℓ' ayant au moins un segment commun avec ℓ .

On se concentre pour l'instant sur la "grosse partie".

Soit $\Gamma = (V, E, F, P)$ un "graphe" fini dans $M = \mathbb{R}^3$. On suppose que tous les éléments de P sont des polygones sans topologie dans $M \cup \{\infty\}$. De plus deux faces n'ont jamais le même ensemble d'arêtes. On fixe une connexion A et on s'intéresse à l'holonomie de A le long des boucles de Γ .

Soit Γ^t le dual de Γ . On modifie Γ^t de la manière suivante:

Chaque fois qu'un sommet est de degré $d > 3$, attaché à des arêtes e_0, \dots, e_{d-1} , on le remplace par $d-2$ sommets, tous trivalents, v_1, \dots, v_{d-2} , avec le sommet v_1 attaché à e_0 et e_1 , et connecté à v_1 ; le sommet v_{d-2} attaché à e_{d-2} et e_{d-1} et connecté à v_{d-3} , et chaque autres sommets v_i attaché à e_i et connecté à v_{i+1} et v_{i-1} . Ces opérations sont faites "localement": pour chaque sommet initial, on fixe un petit voisinage du sommet, de sorte que ces voisinages sont deux à deux disjoints, inclus dans $M - E$, et chaque un difféomorphe à une sphère. On note $\Gamma^* = (V^*, E^*)$ le nouveau graphe (il dépend de la manière dont on a fait les opérations, même en temps que graphe), qui est trivalent.

On introduit encore un graphe, "bidual", qu'on note Γ^{**} , obtenu en associant à chaque arête e^* de Γ^* une petite boucle l_{e^*} qui tourne une fois autour de e^* . On fixe aussi deux points v_{e^*in} et v_{e^*out} de l_{e^*} arbitraires, et on sépare l_{e^*} en deux arêtes l_{e^*1} et l_{e^*2} entre v_{e^*in} et v_{e^*out} . On fixe un arbre T orienté sur l'ensemble E^* , et pour toute arête (e^*, f^*) de T on relie les sommets v_{e^*in} et v_{f^*out} (par des arêtes qui n'intersectent aucune des arêtes des différents graphes précédents...) Le graphe Γ^{**} a alors pour sommets les v_{e^*in} et v_{e^*out} , et pour arêtes les arêtes de T et les l_{e^*1} et l_{e^*2} . We fixe a privileged orientation for edges: for l_{e^*1} , it goes from v_{e^*in} to v_{e^*out} . For l_{e^*2} , it goes from v_{e^*out} to v_{e^*in} .

We define a new connection A' on M as the sum $\sum_e g_{e^*} A_{e^*}$, where g_{e^*} is the holonomy of A around l_{e^*} and A_{e^*} is defined by the same formula as before, which still make sense for open paths.

Up to changing the gauge, we have a connection A'' so that the holonomy of A'' is zero along the T -edges and the l_{e^*2} (because this is still a tree T'). Then g_{e^*} is the holonomy of A'' around l_{e^*1} .

Conjecture 1: The knot type of K in Γ is fully determined by its homology type in $M - E^*$.

Conjecture 2: The homotopy class in $M - E^*$ of a simple loop L in Γ can be represented by a loop in Γ^{**} , in the following way:

-If P is an open or closed path which is homotopy equivalent (with fixed ends if the path is open) to a simple path P' in $\Gamma^{**} \cup (L - P)$, then we map it to $\Phi(P) = P'$.

-If a path P goes from v_{e^*in} to v_{e^*out} (or the other way) winding twice around e^* , without turning around anything else including itself or $(L-P)$, we associate it to the path $\Phi(P) = l_{e^*1} l_{e^*2} l_{e^*1}$ in Γ^{**} (or $\Phi(P) = l_{e^*2} l_{e^*1} l_{e^*2}$ if it turns the other way). It goes similarly when it winds more times.

-Then, if $L = P_1 P_2 \dots P_n$ with the P_i falling in the previous two cases, we represent it as $\Phi(P_1) \Phi(P_2) \dots \Phi(P_n)$. Here the conjecture says that it is always possible to do so, not that there is a unique way to do so. We also conjecture the homotopy type of L in $M - \Gamma^*$ is fully determined by such a transformation.

Thus, once we have fixed Γ^* and Γ^{**} , choosing a class of connections on Γ is equivalent to choosing the g_{e^*} .

If we want this connection to be spanned by the (A_ℓ) where ℓ are loops supported by Γ^* , clearly we must have, for any vertex v^* of V^* attached to the three edges e_a^* , e_b^* and e_c^* , in "cyclic order" (defined below), that

$g_{e_a^*} g_{e_b^*} g_{e_c^*} = 1$ (1 being the neutral element in G). Here "cyclic order" means we can go from e_a^{*in} to e_b^{*out} without using the edges $l_{e_a^*1}$ nor $l_{e_a^*2}$, and we can go from e_b^{*in} to e_c^{*out} without using the edges $l_{e_b^*1}$ nor $l_{e_b^*2}$, (or any cyclic permutation of this condition, which would lead to the same relation). This is simply because this condition is preserved by adding gA_ℓ to the connection, whatever are $g \in G$ and ℓ a loop supported by Γ^* .

Reciprocally, any choice of function g from E^* to G that respect this condition (let's call it "consistency condition") and behave as expected under change of orientation of an edge corresponds to the holonomy of a connection generated by the F_ℓ for ℓ in Γ^* .

We can prove this by recursion on the number of vertices of the graph: if there is at least 1 such vertex, we can take an edge e attached to it, and find a loop ℓ it belongs to. Then we subtract ℓg_e from the connection. Thus, we can delete the edge e . Because of the consistency condition, the edges that have to be fused are now endowed with the same G element, thus can indeed be fused. In the case the two vertex that should be deleted are connected together twice, making them disappear lead to a "free edge" ℓ' , connected to no vertex at all, with an element g . We then make it disappear directly by subtracting $\ell' g$. The new graph is clearly trivalent, with less vertices, and the new connection on it still satisfy the consistency condition. Thus we can apply the recursion. When finally there is no vertices at all, the connection is zero, which conclude the proof.

The fact is that, in our case, that is with A and B being flat connections singular on a finite trivalent graph Γ with cyclic ordering of the edges (v_1, v_2, v_3) at each vertex v , the functional $A \wedge dB$ is well defined as soon as A and B are in fact singular on two subgraphs G_A, G_B which are disjoint one from the other. When trying for example to compute $A \wedge dA$, for a commutative Lie group, we fall on a problem which basically is the same as the one dimensional problem of defining the product of the distribution associated to $\log|x|$ and the distribution δ_0 . Another way to see the problem is that it leads to evaluate a distribution on 0 while this distribution a priori is not even an L^2 function. This view leads to an heat kernel based regularization, which implies to choose a metric but for which metric dependency are in general well understood.

Still, we can do remarks, only at an informal level, before we choose such a metric. We look first at the compact commutative case.

The finite trivalent graph $\Gamma^* = (V, E)$ is fixed, $E = e_1, \dots, e_n$ (we fix a dialing only to lighten notations, nothing will ultimately depend on it). For a singular flat connection A , we note A_e the holonomy associated to A when we wind once around the oriented edge e . Reciprocally, for elements $g_e \in G$ -where for e running over nonoriented edges, we have also fixed an orientation of e - we write $\sum_e g_e e$ for the singular flat connection A so that $A_e = g_e$.

From the consideration above, it seems natural to think that the Chern Simons action that we would like to associate to a singular flat connection should be infinite as soon as the connection A is truly singular (i.e. it is not a smooth connection, i.e. there is an edge e so that A_e is different from e). Thus our Chern Simons measures, which should at a very first sight looks like (forgetting the ghost terms...)

$$\mu_\Gamma(G_1, \dots, G_n) = d\lambda_{G_1, \dots, G_n} \exp(ixCS(\sum_k G_k e_k))$$

(here λ is the normalized Haar measure on the subspace where the consistency condition is satisfied) may in reality give a non null relative weight to the set of connections C with $C_{e_i} = 1$ for some i : indeed around such connection, the measure is very less oscillating than when all the G_i are different from 1 (in the large k approximation, it is a term of lesser order). If e_i connects s to t , as $C_{s_1} C_{s_2} C_{s_3} = C_{t_1} C_{t_2} C_{t_3} = 1$, the vertices s and t and the edges e_i can be deleted from the graph (whilst the two left edges attached to s are fused, as those attached to t). This left us with a new trivalent graph Γ_i^* with cyclic order. Let's say the dialing is such that the two fused edges at s were numbered $i+1, i+2$, whilst the ones at t were numbered $i+3, i+4$. Then to Γ_i^* we give the dialing so that the order between edges is the same (that is, the edge e_j in G is e_j in Γ_i^* if $i < j$, and e_{j-3} if $j > i+5$. The fusion between e_{i+1} and e_{i+2} is now e_i , and the fusion between e_{i+3} and e_{i+4} is now e_{i+1}). Then the measure μ_Γ looks more like

$$\begin{aligned} \mu_{\Gamma^*}(G_1, \dots, G_n) &= \sum_i \delta_{G_i, 1} \delta_{G_{i+1}, G_{i+2}} \delta_{G_{i+3}, G_{i+4}} \\ &\mu_{\Gamma_i^*}(G_1, G_2, \dots, G_{i-2}, G_{i-1}, G_{i+1}, G_{i+3}, G_{i+5}, G_{i+6}, \dots, G_{n-5}, G_{n-3}) \\ &+ d\lambda_{G_1, \dots, G_n} \exp(ixCS_{\Gamma^*}(\sum_k G_k e_k)) \end{aligned}$$

In the large k approximation, the last term should be of order 1 more (in $1/k$). This looks very similar to the usual large k approximation, but here it's in some sense dual, as diagrams are not attached to the link in Γ we're looking at, but to Γ^* .

Lorsqu'on essaye d'étendre la forme bilinéaire $A \wedge dB$ associée à l'action de Chern Simons sur des connexions singulières, on obtient très naturellement une quantité CS qui coïncide avec $A \wedge dB$, et est définie dès que A ou B est à support compact et que les supports singuliers coïncident. On remarque alors que $CS(A_\ell, A_\ell)$ n'est a priori pas définie par cette formule, tandis que $CS(A_\ell, A_{\ell'})$ est bien défini dès lors que ℓ et ℓ' sont à support disjoints. Mieux: cette quantité coïncide alors avec le linking number entre ces deux quantités, en particulier

$$e^{iC/kCS(A_\ell+A_{\ell'})-CS(A_\ell)-CS(A_{\ell'})} = e^{iC/kLK(\ell,\ell')} \\ = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} Tr(Hol_A(\ell)Hol_A(\ell') - Hol_A(\ell) - Hol_A(\ell')) e^{ikCS(A)} DA \quad (1)$$

Où le second terme est calculé comme [Albeverio, Hahn, Sengupta]. Or cette identité ne semble pas être un pur hasard. Au moins dans l'approximation de la phase stationnaire ($k \rightarrow \infty$), il est usuelle de considérer, par analogie avec les intégrales oscillantes en dimension finie, que la contribution principale à $\int_{\mathcal{A}} u(A) e^{ikCS(A)} DA$ est donnée par les connexions plates. Ceci vaut dans le cas fini dimensionnel pour u suffisamment lisse et à support compact. Hors ici, puisque la fonctionnelle $A \mapsto Tr(Hol_A(\ell))$ peut devenir arbitrairement oscillante lorsque A se concentre près de $S(\ell)$ (en tant que 1 forme), on ne peut a priori pas supposer que les connexions qui contribuent à la phase stationnaire soient plates le long $S(\ell)$: on peut seulement dire que les connexions non plates, mais lisses sur $S(\ell)$, ne contribuent pas à la phase stationnaire. Il semble donc que la contribution principale vienne en fait des connexions plates hors de $S(\ell)$, mais potentiellement singulière sur $S(\ell)$.

Hors de la phase stationnaire, on a vu que, pour un lien L et un noeud ℓ de supports disjoints, on a

$$e^{iCS(hA_\ell, A_L)} = e^{ihLK(\ell, L)} = Tr(Hol_{hA_\ell}(L))$$

Si on étend formellement cette relation en remplaçant hA_ℓ par une connexion quelconque, l'expression $\frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} Tr(Hol_A(\ell)) e^{ikCS(A)}$ se calcule simplement en "complétant le carré", sous l'hypothèse d'invariance du domaine d'intégration \mathcal{A} par translation de A_ℓ . En particulier, on ne peut effectivement pas supposer que les connexions sur lesquelles on intègre soient "non singulières".

Quitte à étendre l'espace d'intégration \mathcal{A} , on peut en fait supposer qu'il est -
bla bla

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{\epsilon^{ijk} (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j dx_k \wedge (\partial_l B_m dx_l \wedge dx_m)}{\|x - \ell_s\|^3} ds \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{\epsilon^{kij} \epsilon^{klm} (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j (\partial_l B_m)}{\|x - \ell_s\|^3} ds dx \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j (\partial_l B_m)}{\|x - \ell_s\|^3} ds dx \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} \frac{(x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j (\partial_i B_j - \partial_j B_i)}{\|x - \ell_s\|^3} ds dx
\end{aligned}$$

A s fixé, on fait un changement de variable $x_i - \ell_s \mapsto -(x_i - \ell_s)$

$$\begin{aligned}
dA(B) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \int_{U(1)} ds \frac{\epsilon^{ijk} (x - \ell_s)_i (\dot{\ell}_s)_j (\partial_i B^j - \partial U_2^j - U_1^j U_2^i)}{\|x - \ell_s\|^3} ds dx \left(v \mapsto \frac{\langle (x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s; v \rangle}{\|x - \ell_s\|^3} \right)_x d \wedge dB_x \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{U(1)} d\dot{\ell}_s \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} \left(\frac{(x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s}{\|x - \ell_s\|^3} \right)_x \wedge dB_x \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{U(1)} d\dot{\ell}_s \int_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus B(\ell_s, \epsilon)} B_x \wedge d \star \left(\frac{(x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s}{\|x - \ell_s\|^3} \right)_x \\
&\quad + \int_{U(1)} d\dot{\ell}_s \int_{x \in S(\ell_s, \epsilon)} B_x \wedge \star \left(\frac{(x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s}{\|x - \ell_s\|^3} \right)_x \\
&= 0 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{U(1)} d\dot{\ell}_s \int_{S(\ell_s, \epsilon)} \left\langle \frac{x - \ell_s}{\|x - \ell_s\|} \middle| B_{\ell_s} \wedge \star \left(\frac{(x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s}{\|x - \ell_s\|^3} \right)_z \right\rangle d\sigma_x \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{U(1)} d\dot{\ell}_s \int_{S(0,1)} \left\langle \frac{x - \ell_s}{\|x - \ell_s\|} \middle| B_{\ell_s} \wedge \star \left(\frac{\epsilon z \wedge \dot{\ell}_s}{\|\epsilon z\|^3} \right)_z \right\rangle \epsilon^2 d\sigma_z
\end{aligned}$$

On part d'une étude sur $M = \mathbb{R}^3$ (muni de toute sa structure), avec le groupe de gauge $G = U(1)$. On identifie $\mathfrak{u}(1)$ avec \mathbb{R} . Le fibré de G sur M est supposé trivialisé, de sorte qu'on identifie finalement les connections à des 1 formes.

On peut alors remarquer la chose suivante:

A une boucle simple orientée ℓ , on associe la connection singulière L_{loc}^1

$$A_\ell : (x, v) \mapsto \int_{U(1)} \frac{\det(x - \ell_s; \dot{\ell}_s; v)}{\|x - \ell_s\|^3} ds$$

Lorsqu'on calcule l'holonomie de A_ℓ le long d'un lacet simple ℓ' , on obtient la formule de Gauss pour le linking number entre ℓ et ℓ' . En particulier la connexion est plate hors du support $S(\ell)$ de ℓ .

Si on considère des connections plus singulières, c'est à dire des fonctionnelles linéaires sur l'espace des 2 formes lisses valuées (en identifiant une 1 forme lisse A avec la fonctionnelle $B \mapsto \int A \wedge B$), on peut calculer la différentielle extérieure de A_ℓ :

$$dA_\ell(B) = A_\ell(dB) = \int_M \int_{U(1)} \frac{dB_x \wedge \star((x - \ell_s) \wedge \dot{\ell}_s)}{\|x - \ell_s\|^3} ds$$

Puisque A_ℓ est plate hors de $S(\ell)$, la 2 forme singulière dA_ℓ peut être étendu à l'espace des 1 formes L_{loc}^1 , lisses seulement sur un voisinage U de $S(\ell)$ (Une intégration par partie montre directement que $dA_\ell(B) = 0$ lorsque B est nulle sur U).

. Lorsqu'on essaye d'étendre la forme bilinéaire $A \wedge dB$ associée à l'action de Chern Simons sur des connexions singulières, on obtient très naturellement une quantité CS qui coïncide avec $A \wedge dB$, et est définie dès que A ou B est à support compact et que les supports singuliers coïncident. On remarque alors que $CS(A_\ell, A_\ell)$ n'est a priori pas définie par cette formule, tandis que $CS(A_\ell, A_{\ell'})$ est bien défini dès lors que ℓ et ℓ' sont à support disjoints. Mieux: cette quantité coïncide alors avec le linking number entre ces deux quantités, en particulier

$$\begin{aligned} e^{iC/kCS(A_\ell+A_{\ell'})-CS(A_\ell)-CS(A_{\ell'})} &= e^{iC/kLK(\ell,\ell')} \\ &= \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} Tr(Hol_A(\ell)Hol_A(\ell') - Hol_A(\ell) - Hol_A(\ell')) e^{ikCS(A)} DA \end{aligned} \quad (2)$$

Où le second terme est calculé comme [Albeverio, Hahn, Sengupta]. Or cette identité ne semble pas être un pur hasard. Au moins dans l'approximation de la phase stationnaire ($k \rightarrow \infty$), il est usuelle de considérer, par analogie avec les intégrales oscillantes en dimension finie, que la contribution principale à $\int_{\mathcal{A}} u(A) e^{ikCS(A)} DA$ est donnée par les connexions plates. Ceci vaut dans le cas fini dimensionnel pour u suffisamment lisse et à support compact. Hors ici, puisque la fonctionnelle $A \mapsto Tr(Hol_A(\ell))$ peut devenir arbitrairement oscillante lorsque A se concentre près de $S(\ell)$ (en tant que 1 forme), on ne peut a priori pas supposer que les connexions qui contribuent à la phase stationnaire soient plates le long $S(\ell)$: on peut seulement dire que les connexions non plates, mais lisses sur $S(\ell)$, ne contribuent pas à la phase stationnaire. Il semble donc que la contribution principale vienne en fait des connexions plates hors de $S(\ell)$, mais potentiellement singulière sur $S(\ell)$.

Hors de la phase stationnaire, on a vu que, pour un lien L et un noeud ℓ de supports disjoints, on a

$$e^{iCS(hA_\ell, A_L)} = e^{ihLK(\ell, L)} = Tr(Hol_{hA_\ell}(L))$$

Si on étend formellement cette relation en remplaçant hA_ℓ par une connexion quelconque, l'expression $\frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} Tr(Hol_A(\ell)) e^{ikCS(A)}$ se calcule simplement en "complétant le carré", sous l'hypothèse d'invariance du domaine d'intégration \mathcal{A} par translation de A_ℓ . En particulier, on ne peut effectivement pas supposer que les connexions sur lesquelles on intègre soient "non singulières".

Quitte à étendre l'espace d'intégration \mathcal{A} , on peut en fait supposer qu'il est -