Segunda avaliação (A2)

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Max Carvalho
Monitor: Lucas Moschen

05 de Setembro de 2022.

- O tempo para realização da prova é de 3 horas e 55 minutos;
- Leia a prova toda com calma antes de começar a responder;
- Responda todas as questões sucintamente;
- Marque a resposta final claramente com um quadrado, círculo ou figura geométrica de sua preferência;
- A prova vale 100 pontos. A pontuação restante é contada como bônus;
- Apenas tente resolver a questão bônus quando tiver resolvido todo o resto;
- Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

1. Pivotal insights.

A construção de intervalos de confiança a partir de quantidades pivotais (pivôs) é uma pedra angular da Estatística aplicada. Contudo, pivôs podem ser difíceis de encontrar na prática. Nesta questão desenvolveremos um método geral de construção de intervalos de confiança utilizando um pivô que sempre existe, dadas certas condições de regularidade. Suponha que temos uma amostra aleatória $\boldsymbol{X}_n = X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma família dominada P_θ e uma estatística $T(\cdot)$ que é contínua com f.d.a. $F_T(t \mid \theta) := P_\theta(T(\boldsymbol{X}_n) \leq t)$.

a) (10 pontos) Considere a quantidade $F_T(T(\boldsymbol{X}_n) \mid \theta)$. Encontre sua distribuição e mostre que é um pivô.

b) (10 pontos) Tome $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ com $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in (0, 1)$. Considere o seguinte conjunto de confiança:

$$C(t) = \{\theta : \alpha_1 \leq F_T(t \mid \theta) \leq \alpha_2\}.$$

Assuma que $F_T(t \mid \theta)$ é função decrescente de θ para todo t fixo. Tomando $T(\boldsymbol{X}_n) = t$, mostre que $C(T(\boldsymbol{X}_n))$ é um **intervalo** de confiança exato de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para θ dado por $(a_n(T(\boldsymbol{X}_n)), b_n(T(\boldsymbol{X}_n)))$ com

$$F_T(t \mid a_n(T(\boldsymbol{X}_n))) = \alpha_1, \quad F_T(t \mid b_n(T(\boldsymbol{X}_n))) = 1 - \alpha_2.$$

c) (20 pontos) Suponha $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória com densidade comum com respeito a Lebesgue dada por

$$f_\theta(x) = \exp\left[-(x - \theta)\right] \mathbb{I}(x \in (\theta, \infty)),$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre uma estatística suficiente para θ e use os itens anteriores para obter um intervalo de confiança de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para θ.

Dica: Considere estatísticas de ordem. Ademais, considere tomar $\alpha_1 = \alpha_2$.

d) (20 pontos) Construa um teste de razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ *versus* $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Depois, inverta a região de rejeição para obter um intervalo de confiança de $(1 - \alpha) \times 100\%$ para θ. Compare com o intervalo obtido no item anterior. Qual deles é mais curto?

2. Experimental design.

Tome $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecida e variância σ^2 conhecida.

a) (20 pontos) Construa um teste de razão de verossimilhanças $\psi(\boldsymbol{X}_n)$ para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *versus* $H_1 : \theta > \theta_0$, com $\theta_0 \in \mathbb{R}$ uma constante conhecida.

b) (20 pontos) Determine o tamanho amostral n para que a probabilidade de erro do tipo I de $\psi(\boldsymbol{X}_n)$ seja 0.1 e a probabilidade de erro do tipo II fique abaixo de 0.2.

3. Balancing it out.

Como discutido em aula, às vezes é interesssante, ao invés de controlar só o erro do tipo I ou o erro do tipo II de um teste, controlar a soma destes erros. Em particular queremos minimizar $a\alpha(\psi)+b\beta(\psi)$, onde a, b são constantes positivas pré-definidas e $\alpha(\psi)$e $\beta(\psi)$ são os erros do tipo I e II, respectivamente.

a) (20 pontos) Suponha que H_0 e H_1 são hipóteses simples e escreva $f_0(\boldsymbol{x})$ e $f_1(\boldsymbol{x})$ para a densidade conjunta sob H_0 e H_1 respectivamente. Tome $\psi^\star$ um teste tal que se $af_0(\boldsymbol{x}) \leq bf_1(\boldsymbol{x})$, rejeitamos H_0 e se $af_0(\boldsymbol{x}) > bf_1(\boldsymbol{x})$ falhamos em rejeitar H_0. Mostre que para todo outro teste ψ,

$$a\alpha(\psi^\star) + b\beta(\psi^\star) \leq a\alpha(\psi) + b\beta(\psi).$$