Segunda avaliação (A2)

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Max Carvalho
Monitor: Lucas Moschen

05 de Setembro de 2022.

- O tempo para realização da prova é de 3 horas e 55 minutos;
- Leia a prova toda com calma antes de começar a responder;
- Responda todas as questões sucintamente;
- Marque a resposta final claramente com um quadrado, círculo ou figura geométrica de sua preferência;
- A prova vale 100 pontos. A pontuação restante é contada como bônus;
- Apenas tente resolver a questão bônus quando tiver resolvido todo o resto;
- Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

1. Pivotal insights.

A construção de intervalos de confiança a partir de quantidades pivotais (pivôs) é uma pedra angular da Estatística aplicada. Contudo, pivôs podem ser difíceis de encontrar na prática. Nesta questão desenvolveremos um método geral de construção de intervalos de confiança utilizando um pivô que sempre existe, dadas certas condições de regularidade. Suponha que temos uma amostra aleatória $\boldsymbol{X}_n = X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma família dominada P_θ e uma estatística $T(\cdot)$ que é contínua com f.d.a. $F_T(t \mid \theta) := P_\theta(T(\boldsymbol{X}_n) \leq t)$.

a) (10 pontos) Considere a quantidade $F_T(T(\boldsymbol{X}_n) \mid \theta)$. Encontre sua distribuição e mostre que é um pivô.

b) (10 pontos) Tome $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ com $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \in (0,1)$. Considere o seguinte conjunto de confiança:

$$C(t) = \{\theta : \alpha_1 \leq F_T(t \mid \theta) \leq \alpha_2\}.$$

Assuma que $F_T(t \mid \theta)$ é função decrescente de θ para todo t. Tomando $T(\boldsymbol{X}_n) = t$, mostre que $C(T(\boldsymbol{X}_n))$ é um **intervalo** de confiança exato de $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ dado por $(a_n(T(\boldsymbol{X}_n)), b_n(T(\boldsymbol{X}_n)))$ com

$$F_T(t \mid a_n(T(\boldsymbol{X}_n))) = \alpha_1, \quad F_T(t \mid b_n(T(\boldsymbol{X}_n))) = 1 - \alpha_2.$$

c) (20 pontos) Suponha $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória com densidade comum com respeito a Lebesgue dada por

$$f_\theta(x) = \exp\left[-(x-\theta)\right] \mathbb{I}(x \in (\theta, \infty)),$$

com $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre uma estatística suficiente para θ e use os itens anteriores para obter um intervalo de confiança de $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ.

Dica: Considere estatísticas de ordem. Ademais, considere tomar $\alpha_1 = \alpha_2$.

d) (20 pontos) Construa um teste de razão de verossimilhanças para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ *versus* $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Depois, inverta a região de rejeição para obter um intervalo de confiança de $(1-\alpha) \times 100\%$ para θ. Compare com o intervalo obtido no item anterior. Qual deles é mais curto?

Conceitos trabalhados: suficiência, quantidades pivotais, intervalos de confiança, testes de razão de verossimilhanças.
Nível de dificuldade: médio.
Resolução: A discussão aqui vai seguir a seção 9.2.3 de Casella & Berger. Defina a variável aleatória $Y = F_T(T(\boldsymbol{X}_n) \mid \theta)$ que pertence a $[0,1]$ por definição. Tome $t \in \mathbb{R}$. Vamos provar inicialmente que

$$P_\theta(F_T(T) \leq F_T(t)) = F_T(t). \tag{1}$$

Defina os conjuntos

$$A = \{\omega : F_T(T(\omega)) \leq F_T(t)\} \cap \{\omega : T(\omega) \leq t\},$$
$$Z = \{\omega : F_T(T(\omega)) \leq F_T(t)\} \cap \{\omega : T(\omega) > t\}.$$

Como F_T é função não decrescente, vale que $\{T \leq t\} \subseteq \{F_T(T) \leq F_T(t)\}$ e $\{T > t\} \cap \{F_T(T) < F_T(t)\} = \emptyset$, que implica que

$$A \cup Z = \{T \leq t\} \cup (\{F_T(T) = F_T(t)\} \cap \{T > t\}) \implies P_\theta(A \cup Z) = P_\theta(T \leq t),$$

visto que o segundo conjunto tem probabilidade 0 pela continuidade de F_T. Então, temos o resultado que desejávamos mostrar. Agora, tome $y \in (0,1)$. O Teorema do Valor Intermediário diz que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $F_T(t) = y$. Portanto,

$$P_\theta(Y \leq y) = P_\theta(F_T(T) \leq F_T(t)) = F_T(t) = y,$$

usando o resuldado acima provado. Concluímos que $Y \sim \text{Unif}(0,1)$. Com essa hipótese, como $1-\alpha_2 > \alpha_1$, vale que $a_n(t) > b_n(t)$ e que são únicos. Além disso, $F_T(t|\theta) < \alpha_1 \iff \theta > a_n(t)$ e $F_T(t|\theta) > 1-\alpha_2 \iff \theta < b_n(t)$. Portanto, $C(t) = \{\theta : b_n(t) \leq \theta \leq a_n(t)\}$. Para resolver c), vamos primeiro computar a f.d.a. de X:

$$\begin{aligned} F_\theta(x) &= \int_\theta^x f_\theta(t)\, dt, \\ &= \int_\theta^x \exp(-(t-\theta))\, dt = 1 - \exp(\theta - x). \end{aligned}$$

Note que a densidade conjunta da amostra é

$$f_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i + n\theta\right) \mathbb{I}\left(x_{(1)} > \theta\right),$$

o que nos indica que $T(\boldsymbol{X}) = X_{(1)}$ é uma estatística suficiente para θ. A cdf de $X_{(1)}$ é

$$\begin{aligned} P_\theta\left(X_{(1)} \leq u\right) &= 1 - P_\theta\left(X_1 > u, \ldots, X_n > u\right), \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P_\theta\left(X_i > u\right) = 1 - \left[1 - P_\theta(X \leq u)\right]^n, \\ &= 1 - \exp(n\left(\theta - u\right)) := F_T(u;\theta). \end{aligned}$$

Assim, a f.d.p. de T é

$$f_T(t;\theta) = \frac{d}{dt} P_\theta\left(X_{(1)} \leq t\right) = n\exp(-n(\theta - t)).$$

Agora, vamos tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ e definir $a(x_{(1)}) \equiv a$ e $b(x_{(1)}) \equiv b$ tal que

$$\begin{aligned} F_a(x_{(1)}) - F_a(a) &= \frac{\alpha}{2}, \\ 1 - F_b(x_{(1)}) &= \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} a(x_{(1)}) &= x_{(1)} + \frac{1}{n}\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \\ b(x_{(1)}) &= x_{(1)} + \frac{1}{n}\log\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Sendo assim, o intervalo de confiança

$$I_1(\boldsymbol{X}) = \left(X_{(1)} + \frac{1}{n}\log\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), X_{(1)} + \frac{1}{n}\log\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

tem cobertura $1 - \alpha$ e comprimento

$$\Delta_1 = \frac{1}{n}\log\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right).$$

Agora vamos resolver o exercício 9.25 de Casella & Berger para responder d). Vamos construir uma razão de verossimilhança baseada na f.d.p. da estatística suficiente:

$$\begin{aligned}
\lambda(x_{(1)}) &= \frac{\sup_{\theta=\theta_0} f_T(x_{(1)};\theta)\mathbb{I}(x_{(1)} > \theta_0)}{\sup_{\theta\in\mathbb{R}} f_T(x_{(1)};\theta)\mathbb{I}(x_{(1)} > \theta)}, \\
&= \frac{\exp(-n(\theta_0 - x_{(1)}))\mathbb{I}(x_{(1)} > \theta_0)}{\exp(-n(x_{(1)} - x_{(1)}))}, \\
&= \begin{cases} 0, x_{(1)} < \theta_0, \\ \exp(-n(\theta_0 - x_{(1)})), x_{(1)} \geq \theta_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Assim, rejeitamos H_0 se $\lambda(x_{(1)}) < c_\alpha$, para $c_\alpha \in [0,1]$ escolhida de modo que tenhamos um teste de nível α. Para determinar c_α vamos calcular

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_{\theta_0}(\lambda(X_{(1)}) < c_\alpha), \\
&= P_{\theta_0}\left(\exp(-n(\theta_0 - X_{(1)})) < c_\alpha\right), \\
&= P_{\theta_0}\left((X_{(1)}) > \theta_0 - \frac{\log(c_\alpha)}{n}\right), \\
&= 1 - F_T\left(\theta_0 - \frac{\log(c_\alpha)}{n};\theta_0\right) = c_\alpha,
\end{aligned}$$

o que nos leva a concluir que $c_\alpha = \alpha$. Dessa forma, o intervalo de confiança obtido ao inverter esse teste de razão de verossimilhanças é

$$I_2(\boldsymbol{X}) = \left(X_{(1)} + \frac{1}{n}\log(\alpha), X_{(1)}\right),$$

com comprimento

$$\Delta_2 = -\frac{1}{n}\log(\alpha).$$

Não é difícil mostrar que $\Delta_2 < \Delta_1$ para todo $\alpha \in (0,1)$. ■

Discussão: Esta questão ilustra que sob condições brandas de regularidade, como a continuidade da f.d.a., sempre temos um pivô para usar na construção de um intervalo de confiança. Essa metodologia tem longa história na estatística, começando com Clopper and Pearson (1934) para o caso binomial. A formulação geral foi feita por Barlow et al. (1968). Uma observação importante é que o método do pivô baseado na f.d.a. dá um intervalo um pouco mais largo que o método de inverter o TRV; isso não deve ser surpreendente, já que o método da f.d.a. quase sempre está presente, mas o TRV é mais difícil de obter. Sob algumas condições, o intervalo que obtivemos com o método do pivô pode ser melhorado; ver exercício 9.41 de Casella & Berger.

2. Experimental design.

Tome $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média $\theta \in \mathbb{R}$ desconhecida e variância σ^2 conhecida.

a) (20 pontos) Construa um teste de razão de verossimilhanças $\psi(\boldsymbol{X}_n)$ para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *versus* $H_1 : \theta > \theta_0$, com $\theta_0 \in \mathbb{R}$ uma constante conhecida.

b) (20 pontos) Determine o tamanho amostral n para que a probabilidade de erro do tipo I de $\psi(\boldsymbol{X}_n)$ seja 0.1 e a probabilidade de erro do tipo II fique abaixo de 0.2.

Conceitos trabalhados: LRT, desenho amostral.
Nível de dificuldade: fácil.
Resolução: Vamos começar a responder a) calculando a razão de verossimilhanças

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{\sup_{\theta \in (-\infty, \theta_0]} f_\theta^n(\boldsymbol{x})}{\sup_{\theta \in (\theta_0, \infty)} f_\theta^n(\boldsymbol{x})}, \\
&= \frac{\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_0)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{2\sigma^2}\right)}, \\
&= \begin{cases} \exp\left(\frac{-n(\bar{x}_n - \theta_0)^2}{2\sigma^2}\right), \bar{x}_n \geq \theta_0, \\ 1, \bar{x}_n < \theta_0. \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos montar um teste que rejeita H_0 quando $\lambda(\boldsymbol{X}) < c$, com $c \in (0, 1)$. Note que existe c' tal que $\lambda(\boldsymbol{X}) < c \iff (\bar{X}_n - \theta_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > c'$. Para proceder à resposta do item b), precisamos computar a função poder do teste em questão:

$$
\begin{aligned}
\beta(\theta) &= P_\theta\left(\lambda(\boldsymbol{X}) < c\right), \\
&= P_\theta\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta_0}{\sigma} > c'\right), \\
&= P_\theta\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \theta}{\sigma} > c' + \sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma}\right), \\
&= 1 - \Phi\left(c' + \sqrt{n}\frac{\theta_0 - \theta}{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Agora queremos que $\beta(\theta_0) = 0.1$ e $\beta(\theta_1) = 0.8$ para algum $\theta_1 \in (\theta_0, \infty)$. Vamos notar que $\beta(\theta_0) = \Phi(c)$, e portanto, podemos tomar $c = -\Phi^{-1}(0.1) = 1.28$, que independe de n. Agora, para nos facilitar a vida, vamos tomar $\theta_1 = \theta_0 + \sigma$, o que além de fazer sentido[1], também leva à expressão $\beta(\theta_0 + \sigma) = \Phi\left(c - \sqrt{n}\right)$. Consultando uma tabela[2], temos que $\Phi^{-1}(0.8) = -0.84$, o que sugere que $1.28 - \sqrt{n} = -0.84 \implies n = 4.49$. Ajustando para um tamanho de amostra inteiro temos que $n \geq 5$ satisfaz os requisitos do problema.

[1]Basicamente estamos pedindo que a probabilidade de erro do tipo II quando a média verdadeira θ difere da média hipotética θ_0 por um desvio padrão ou mais seja menor ou igual a 0.2.

[2]Não era necessário dar valor númerico na prova

Discussão: Esta questão baseia-se nos exemplos 8.3.3 e 8.3.4 de Casella & Berger. A questão é bem simples, mas ilustra bem como podemos controlar os dois tipos de erro quando conseguimos especificar o tamanho de amostra. ■

3. Balancing it out.

Como discutido em aula, às vezes é interesssante, ao invés de controlar só o erro do tipo I ou o erro do tipo II de um teste, controlar a soma destes erros. Em particular queremos minimizar $a\alpha(\psi)+b\beta(\psi)$, onde a, b são constantes positivas pré-definidas e $\alpha(\psi)$e $\beta(\psi)$ são os erros do tipo I e II, respectivamente.

a) (20 pontos) Suponha que H_0 e H_1 são hipóteses simples e escreva $f_0(\boldsymbol{x})$ e $f_1(\boldsymbol{x})$ para a densidade conjunta sob H_0 e H_1 respectivamente. Tome $\psi^\star$ um teste tal que se $af_0(\boldsymbol{x}) \leq bf_1(\boldsymbol{x})$, rejeitamos H_0 e se $af_0(\boldsymbol{x}) > bf_1(\boldsymbol{x})$ falhamos em rejeitar H_0. Mostre que para todo outro teste ψ,

$$a\alpha(\psi^\star) + b\beta(\psi^\star) \leq a\alpha(\psi) + b\beta(\psi).$$

Conceitos trabalhados: LRT, probabilidades de erro, otimalidade.
Nível de dificuldade: médio.
Resolução: A prova do resultado pedido (usando distribuições discretas) pode ser encontrada no teorema 9.2.1 de DeGroot & Schervish (2012).

Discussão: Este resultado simples na verdade nos dá um TRV poderoso no sentido de que quando $a, b > 0$ temos um TRV que rejeita H_0 quando $\lambda(\boldsymbol{X}) > a/b$. Assim, conseguimos montar um TRV com os dois tipos de erro controlados. Fazendo $a(n)$ e $b(n)$, isto é, fazendo os pesos que damos a cada tipo de erro dependerem do tamanho de amostra, temos uma abordagem bem flexível para problemas do tipo abordado na questão 2. ■

Bibliografia

Barlow, R. E., Madansky, A., Proschan, F., and Scheuer, E. M. (1968). Statistical estimation procedures for the "burn-in" process. *Technometrics*, 10(1):51–62.

Clopper, C. J. and Pearson, E. S. (1934). The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrika*, 26(4):404–413.