

# Exercícios: Testes de hipóteses

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)  
Instrutor: Luiz Carvalho

Agosto/2022

**Notação:** Como convenção adotamos  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  e  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

**Motivação:** Testes de hipóteses são ferramentas matemáticas para avaliar a compatibilidade de dados observados com afirmações sobre a configuração do espaço de medidas que os possam ter gerado. Estes instrumentos encontram vasta aplicação nas ciências aplicadas, onde afirmações científicas sobre o funcionamento do mundo são traduzidas em afirmações matemáticas do tipo discutido acima. Nesta lista de exercícios vamos ver a construção de testes uniformemente mais poderosos, de razão de verossimilhanças e o cálculo do valor  $p$ .

## Dos livros-texto:

- a) KN, Ch12: 10, 17, 25, 32;
- b) CB, Ch8: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.8, 8.18, 8.20, 8.28, 8.31, 8.38;
- b) CB, Ch9: 9.5, 9.6, 9.44.

## Extra:

1. **(Existência de um TUMP)** Suponha que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são amostra aleatória de uma distribuição normal com média  $\mu$  desconhecida e variância  $\sigma$  conhecida. Considere testar  $H_0 : \mu = \mu_0$  versus  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ . Mostre que não existe teste uniformemente mais poderoso neste caso. **Dica:** Construa um teste da forma

$$\psi_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \bar{X}_n \geq -\frac{\sigma z_\alpha}{\sqrt{n}} + \mu_0, \\ 1, & c.c., \end{cases}$$

e investigue o que acontece num ponto  $\theta_1 < \mu_0$ . Depois, construa um segundo teste, complementar e use o Teorema de Neyman-Pearson para concluir que nenhum TUMP pode existir.

2. **(Testes aleatorizados)** Tome  $X_1, \dots, X_{10}$  amostra aleatória de uma distribuição Bernoulli com parâmetro  $\theta \in (0, 1)$ , desconhecido. Considere testar  $H_0 : \theta \leq 1/2$  versus  $H_1 : \theta > 1/2$ .
  - (a) Escreva um teste de razão de verossimilhanças para este caso;

- (b) Mostre que não é possível atingir qualquer nível de significância  $\alpha_0 \in (0, 1)$
- (c) Proponha um *teste aleatorizado* que atinja um tamanho  $\alpha_0 = 0.05$ . Isto é, proponha um teste aleatório  $\psi_A$  tal que a decisão de aceitar ou não  $H_0$  dependa do lançamento de uma moeda com probabilidade de sucesso  $\omega_A$ , e dê uma forma para  $\omega_A$ .