Exercícios: Método Delta e transformações estabilizadoras da variância

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Carvalho

Agosto/2022

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Motivação: Em muitas aplicações de inferência paramétrica estamos interessados em estimar quantidades de interesse $g(\theta)$ em vez do parâmetro θ diretamente. Quando vale um teorema central do limite para uma classe de estimadores $(\hat{\theta}_n)_{n\geq 1}$, é possível computar a distribuição assintótica de $g(\hat{\theta}_n)$, sujeito a algumas restrições em g. Ao conjunto de técnicas envolvidas neste procedimento chamamos *método Delta*. Nesta lista veremos algumas aplicações do método Delta, em particular para encontrar as chamadas *transformações estabilizadoras da variância*.

Transformações estabilizadoras da variância

Suponha que $E_\theta[X] = \mu(\theta)$ é a nossa quantidade de interesse. Aplicando o teorema central do limite, temos

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \sigma^2(\theta)). \tag{1}$$

O problema é que $\sigma^2(\theta) = v(\mu)$ é função de μ, a quantidade que queremos estimar. Idealmente, gostaríamos que a distribuição-limite fosse independente de μ. Para tanto, queremos uma transformação $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g(\mu)\right) \xrightarrow{d} \text{Normal}\left(0, [g'(\mu)]^2 v(\mu)\right), \tag{2}$$

tenha variância constante com respeito a μ. Ou seja, queremos g tal que $g'(\mu)v(\mu) = a$ para todo μ. Se g cumpre estes requisitos, dizemos que é uma **transformação estabilizadora da variância**.

Dos livros-texto:

a) KN, Ch8: 4a;

b) CB, Ch5: 5.66.

Extra:

1. (**Família exponecial**) Suponha que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma família dominada P_θ da família exponencial com um parâmetro, sob parametrização canônica, isto é, a densidade é

$$p_\eta(x) = h(x) \exp\left[\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\right].$$

Seja $\hat{\eta}(\boldsymbol{X}_n)$ o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\eta(\theta)$ sob este modelo.

   (a) Encontre a distribuição assintótica de

   $$\sqrt{n}\{\hat{\eta}(\boldsymbol{X}_n) - \eta\},$$

   e discuta se o EMV atinge a cota inferior de Cramér-Rao *assintoticamente.*

   (b) Considere estimar uma quantidade de interesse $g(\theta)$. Assumindo que g é contínua, diferenciável e com derivada diferente de zero, encontre um intervalo de confiança aproximado (assintótico) para $\lambda = g(\theta)$ com nível $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

2. (**Binomial**) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição binomial com número de tentativas $n \in \mathbb{N}$ conhecido e probabilidade de sucesso $\theta \in (0, 1)$ desconhecida.

   (a) Considere estimar $w_1(\theta) = \theta(1 - \theta)$. Seja $\delta_1(\boldsymbol{X}_n)$ o EMV para w_1. Encontre a distribuição assintótica de

   $$\sqrt{n}\left\{\delta_1(\boldsymbol{X}_n) - w_1(\theta)\right\}.$$

   (b) O que acontece com a distribuição assintótica de $\delta_1(\boldsymbol{X}_n)$ quando $\theta = 1/2$? Encontre sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ tal que

   $$a_n\left(\delta_1(\boldsymbol{X}_n) - b_n\right) \xrightarrow{d} X,$$

   com X distribuído Bernoulli com parâmetro $\theta = 1/2$. **Dica:** faça $Y_n = X_n - (n/2)$ e aplique o teorema central do limite a Y_n.

   (c) Mostre que $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ é uma transformação estabilizadora da variância.

3. (**Normal com variância desconhecida**) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição normal com média 0 e variância $\theta > 0$ desconhecida.

   (a) Encontre $\operatorname{Var}_\theta(\bar{X}_n)$;

   (b) Mostre que uma transformação estabilizadora da variância neste caso é $g(x) = \log(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.