Exercícios: Estimação não-(en)viesada

Disciplina: Inferência Estatística (MSc)
Instrutor: Luiz Carvalho

Julho/2022

Motivação: Na prática estatística estamos sempre em busca de procedimentos que sejam capazes de retornar estimativas de parâmetros e funções que sejam confiáveis, no sentido de terem boa acurácia (i.e. baixo viés[1]) e alta precisão – variância pequena. Como vimos, estas duas características precisam quase sempre ser balanceadas e em geral não podem ser atingidas conjuntamente. Nesta lista vamos pensar um pouco mais sobre estimadores viesados e não-viesados e as garantias matemáticas que podemos dar sobre o seu comportamento.

Notação: Como convenção adotamos $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ e $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Dos livros-texto:

a) KN, Ch3.7: 1;

b) KN, Ch4.7: 1, 5a, 5b e (**desafio**) 28;

c) CB, Ch6: 6.36.

Extra:

1. Mostre que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição P_θ com $\operatorname{Var}_\theta(X_i) = \sigma^2 < \infty$, então

$$\delta(\boldsymbol{X}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2,$$

é um estimador não-viesado para σ^2.

2. Suponha que temos uma amostra aleatória $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de uma distribuição Normal com média μ e variância σ^2, ambas desconhecidas. Para $c > 0$, considere estimadores da forma

$$\delta_c(\boldsymbol{X}) = c \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n \right)^2, \tag{1}$$

para σ^2.

[1] Lembre-se, jovem padawan: viés zero não quer dizer estimador bom!

- Encontre o erro quadrático médio desta classe de estimadores em função de c.
- Encontre $c^\star$ de modo que $\delta_{c^\star}(\boldsymbol{X})$ seja admissível.
- $\delta_{c^\star}(\boldsymbol{X})$ é não-viesado?

3. **Desafio**: Construir uma desigualdade mais geral para a cota inferior da variância de um estimador não-viesado.

    - Mostre que para duas variáveis aleatórias X, Y quaisquer[2],

    $$\mathrm{Var}_\theta(X) \geq \frac{[\mathrm{Cov}_\theta(X,Y)]^2}{\mathrm{Var}_\theta(Y)};$$

    - Considere a classe $U = \{\delta : E_\theta[\delta] = g(\theta)\}$ de estimadores não-viesados de $g(\theta)$. Tome ϵ tal que $\theta + \epsilon \in \Theta$ para todo $\theta \in \Theta$ e note que
    $$E_{\theta+\epsilon}[\delta] - E_\theta[\delta] = g(\theta+\epsilon) - g(\theta).$$
    Agora, assuma que $f_\theta(x) = 0 \implies f_{\theta+\epsilon}(x) = 0$, e defina
    $$L(x) := \frac{f_{\theta+\epsilon}(x)}{f_\theta(x)}.$$
    Mostre que para qualquer função integrável h vale:
    $$E_{\theta+\epsilon}[h(X)] = E_\theta[L(X)h(X)];$$

    - Encontre função integrável w tal $E_\theta[w] = 0$ e
    $$E_{\theta+\epsilon}[\delta] - E_\theta[\delta] = \mathrm{Cov}_\theta(\delta, w);$$

    - Conclua o argumento para encontrar, para δ não-viesado,
    $$\mathrm{Var}_\theta(\delta) \geq \frac{[g(\theta+\epsilon) - g(\theta)]^2}{E_\theta\left[\{L(X) - 1\}^2\right]}, \tag{2}$$
    que é a cota inferior (ou desigualdade) de Hammersley–Chapman–Robbins (HCR-LB) [3].

    - Discuta como recuperar a cota inferior de Cramér-Rao a partir de HCR-LB. Quais premissas extras precisamos tomar?

[2] Definidas no mesmo espaço de probabilidade.
[3] O denominador da expressão é a divergência χ^2 entre $P_{\theta+\epsilon}$ e P_θ.