Lista 4 - Q3

September 18, 2022

Enunciado

Considere uma cadeia de Markov com matriz de transição de probabilidade

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Defina por:

$$P_{ij} = \begin{cases} i/(i+i), & \text{se} \quad j = 1 \\ 1/(i+i), & \text{se} \quad j = i+1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

(a) A cadeia possui distribuição estacionária? Se sim, exiba a distribuição. Se não, explique o porquê.

(b) Classifique os estados da cadeia.

(c) Repita o item (a) com as entradas de P trocadas. Isto é,

$$P_{ij} = \begin{cases} 1/(i+i), & \text{se} \quad j = 1 \\ i/(i+i), & \text{se} \quad j = i+1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Resolução

Para o item (a) a distribuição estacionária deve satisfazer:

$$\pi = \pi P, \quad \pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots),$$

onde

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i = 1.$$

Então π, deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 + \dots \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_3 \\ \vdots \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = 1 \end{cases}$$

Simplificando, deve valer que:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 + \dots \\ \pi_n = \frac{\pi_1}{n!}, \quad n \geq 2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = 1 \end{cases}$$

Então

$$\pi_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1!} = 1 \rightarrow \pi_1 = \frac{1}{e-1}.$$

*Lembre da série de Taylor para e^x que:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots \rightarrow e^1 = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots$$

Então temos distribuição estacionária dada por:

$$\pi_n = \frac{1}{(e-1)n!}.$$

Note que a primeira equação é satisfeita por essas condições. O i-ésimo termo vale:

$$\frac{i\pi_1}{(i+1)i!} = (1 - \frac{1}{i+1})\frac{\pi_1}{i!} = \frac{\pi_1}{i!} - \frac{\pi_1}{(i+1)!},$$

Então temos uma soma telescópica com o último termo tendendo a zero.

Para o item (b) vamos calcular o valor esperado do tempo de retorno ao zero

$$\mathbb{E}[T], \quad T = \min\{n : X_n = 0, X_0 = 0, n \geq 1\}.$$

Note que

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1},$$

portanto

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = i) \cdot i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{(i-1)!} < +\infty$$

Então a cadeia é recorrente positiva.

Para o item (c), nas mesmas linhas que fizemos no item (a), obtemos que:

$$\pi_n \cdot \frac{n}{n+1} = \pi_{n+1} \to n\pi_n = (n+1)\pi_{n+1}$$

$$\pi_1 = 2\pi_2 \to \pi_1 = n\pi_n \to \pi_n = \frac{\pi_1}{n}$$

Mas

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots = 1 \to \pi_1(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots) = 1$$

Então neste caso não existe distribuição estacionária.