Prova de Processos Estocásticos

2 de outubro de 2021

Instruções

- A prova é individual, com consulta permitida apenas às anotações pessoais e aos materiais do curso (slides, aulas gravadas, notas do Prof. Yuri). Não é permitida a consulta a colegas ou outras pessoas.
- É permitido o uso de calculadora.
- Se fizer a prova a lápis, use grafite escuro, para que a prova fique legível após ser digitalizada.
- Você pode usar mais de uma folha para uma questão, mas comece cada questão em uma nova folha.
- Coloque as folhas de questões em ordem, antes de fotografar (neste caso, utilizando um aplicativo como o CamScanner) ou escanear, consolidando sua prova em um único arquivo pdf, que deverá conter seu nome (por exemplo, *fulano_de_tal_a1.pdf*)
- A prova também poderá ser realizada em um tablet (ou outro dispositivo), utilizando um aplicativo como o OneNote. As mesmas instruções acima sobre a organização das questões deverão ser seguidas
- Envie o arquivo por meio da entrega de atividades do Eclass. Apenas em caso de completa impossibilidade utilize o email pcezar52@gmail.com para fazer a entrega.
- O sistema estará aberto até às 12:10 para receber o envio da prova.

Enunciados

1. (2,0) Uma moeda honesta é lançada seguidamente até que sejam observadas três caras ou três coroas seguidas.
   a) Forneça a matriz de transição de probabilidades da cadeia de Markov com estados 0, 1, 2 e 3, onde o estado da cadeia é o número de resultados iguais consecutivos que acabaram de ser observados.
   b) Calcule o número médio de lançamentos até que o experimento termine.

2. (1,5) Considere a cadeia de Markov nos estados {0, 1, 2, 3, 4, 5} com a matriz de transição de probabilidades dada abaixo.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

   a) Determine os estados transientes e as classes irredutíveis.
   b) Determine o período de cada estado.

3. (3,0) Suponha que um processo de produção muda de estado diariamente de acordo com uma cadeia de Markov (X_n), $n \geq 0$, cuja matriz de transição de probabilidade é

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

   a) Verifique que $\pi = \left(\frac{6}{21}, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}\right)$ é uma distribuição estacionária da cadeia. Existem outras?
   b) Os estados 0 e 1 são "normais", enquanto o estado 2 é "anormal". No longo prazo, em que fração dos dias a cadeia passa de um estado "normal" para o estado "anormal"?
   c) Calcule $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1}$ é "normal" | X_n é "normal").

4. (3,5) Considere a cadeia de Markov nos inteiros não-negativos, com matriz de transição de probabilidade dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

   Isto é, $P_{0i} = p_i$ para $i \geq 0$, $P_{i+1,i} = 1$ para $i \geq 0$ e $P_{ij} = 0$ nos demais casos, com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

a) Quais são as condições necessárias e suficientes para que a cadeia seja irredutível?
b) Mostre que, se π é uma distribuição estacionária da cadeia, então, para cada n, tem-se $\pi_n = \pi_0 \sum_{i=n}^{\infty} p_i$.
c) Use (b) para obter a distribuição estacionária da cadeia quando $p_0 = 0$ e $p_i = \frac{1}{2^i}$ para $i \geq 1$.
d) Use (b) novamente para mostrar que não existe distribuição estacionária quando $p_i = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}$, para $i \geq 0$. Neste caso, a cadeia é recorrente ou transiente?