# Teste 1

28 de Agosto de 2022

## Questão 3

Segue a matriz de transição da questão:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Basta montar uma visualização da cadeia para identificar que {0,1} é transiente e {2,3} é classe irredutível.

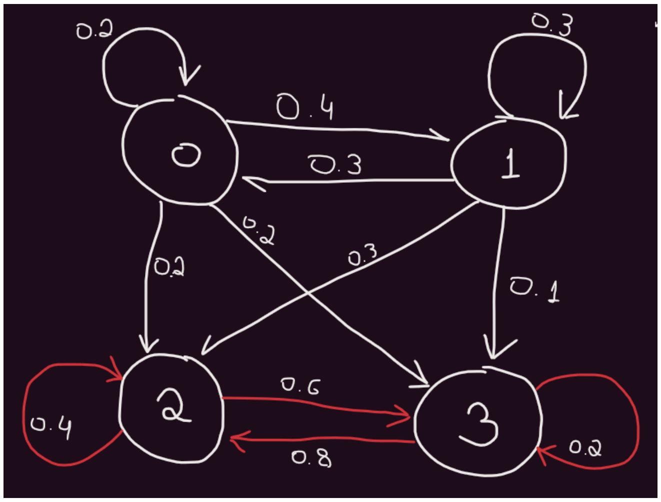


Figura 1: Teste 1 - Questão 3.

(b) Seja $p$ a probabilidade em questão. Pela Lei da Probabilidade Total, e sabendo que começamos no estado 0, vale que:

$$p = p_{0,0} \cdot p + p_{0,1} \cdot 0 + p_{0,2} \cdot 1 + p_{0,3} \cdot 1$$

Pois indo para os estados 2 ou 3, claramente nunca mais visitamos 1. Se visitarmos 1 o problema acaba. Se voltarmos para 0, temos probabilidade p de nunca visitar 1. Resolvendo a equação obtemos $p = 0.5$.

(c) Seja $p_0$ a probabilidade de visitar o estado dois antes do 3 começando em 0, e $p_1$ a probabilidade de visitar 2 antes de 3 começando em 1. Fazendo uma análise de primeiro passo, assim como no item anterior, obtemos:

$$p_0 = 0.2p_0 + 0.4p_1 + 0.2$$

$$p_1 = 0.3p_0 + 0.3p_1 + 0.3$$

Resolvendo o sistema obtemos que $p_0 = \frac{13}{22}$

## Questão 4

Começamos calculando $\rho_{00}$. A análise de primeiro passo nos dá que:

$$\rho_{00} = q + p\rho_{10}$$

Aqui $\rho_{10}$ certamente é o mesmo da ruína do jogador, e vale $\frac{q}{p}$. Então:

$$\rho_{00} = 2q$$

A probabilidade de avançar é maior que a de recuar, isso já nos dá que $\rho_{ij}$, para $i < j$, vale 1 (não precisamos nos preocupar com perder tudo no estado 0). Por desencargo de consciência, vamos também fazer as contas:

$$\rho_{0,1} = p + q \cdot \rho_{0,1} \to \rho_{0,1} = 1$$

$$\rho_{0,2} = p\rho_{1,2} + q\rho_{0,2} \to \rho_{0,2} = \rho_{1,2}$$

$$\rho_{1,2} = p + q\rho_{0,2} \to \rho_{0,2} = \rho_{1,2} = 1$$

$$\dots$$

Seguindo a mesma lógica é possível ver por um argumento indutivo que para $i < j$, a probabilidade é sempre 1.
Para $i > j$, $\rho_{i+1,i}$ continua o mesmo da ruína do jogador. Temos então que:

$$\rho_{ij} = \rho_{i,i-1} \cdot \rho_{i-1,i-2} \dots \rho_{j+1,j} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-j}$$

Para $i = j$, resolvemos a equação para os casos diferentes de $i = j = 0$:

$$\rho_{ii} = q\rho_{i-1,i} + p\rho_{i+1,i} = 2q$$