



**“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”**

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODO DE EULER-CROMER

Curso: Teoría de Física Computacional I

Docente: Dupret Alberto Santana Bejarano

Alumno: Isaúl Tirado López

Grupo 1

19 marzo de 2022

Método de Euler-Cromer

El método semi-implícito de Euler, también conocido como el método de Euler-Cromer, es una modificación del método de Euler utilizado para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales que surgen en la técnica clásica.

Este método se puede aplicar a un par de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, v) \\ \frac{dv}{dt} &= g(t, x)\end{aligned}$$

Donde f y g son funciones, x y v pueden ser escalares o vectores. Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento en la mecánica Hamiltoniana tienen la forma:

$$H = T(t, v) + V(t, x)$$

Las cuales se resuelven utilizando las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0; \quad v(t_0) = v_0$$

El método de Euler-Cromer produce una solución discreta aproximada al iterar lo siguiente:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n + g(t_n, x_n)\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + f(t_n, v_{n+1})\Delta t\end{aligned}$$

Donde Δt es el ancho de paso y $t_n = t_0 + n\Delta t$ es el tiempo después de n pasos.

La diferencia con el método de Euler convencional es que el método de Euler-Cramer usa v_{n+1} en la ecuación x_{n+1} , mientras que el método de Euler usa v_n en dicho sitio.

Aplicando el método con un ancho de paso negativo, el cálculo de (x_n, v_n) obtenido de (x_{n+1}, v_{n+1}) y reorganizando tenemos la segunda variante del método, esto es:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + f(t_n, v_n)\Delta t \\ v_{n+1} &= v_n + g(t_n, x_{n+1})\Delta t\end{aligned}$$

El método de Euler-Cramer posee un error global dependiente de Δt . Una consecuencia de lo anterior es que el método de Euler-Cramer casi conserva la energía (cuando el Hamiltoniano es independiente del tiempo). A menudo, la energía aumenta constantemente cuando se aplica el método estándar de Euler, lo que deja a la vista la precisión del método.

Ejemplo: El movimiento de un resorte satisface la ley de Hooke:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v(t) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x\end{aligned}$$

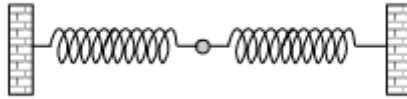
El método de Euler-Cromer transforma esta ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= v_n - \omega^2 x_n \Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1} \Delta t \\ \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 \Delta t & \Delta t \\ -\omega^2 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ v_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Y dado que el determinante de la matriz es 1, la transformación conservativa.

La iteración conserva el funcional de energía modificado $E_h(x, v) = \frac{1}{2} (v^2 + \omega^2 x^2 - \omega^2 \Delta t vx)$ para ser exactos, la cual produce oscilaciones periódicas estables (para un tamaño de adecuado) que se desvían en una aproximación numérica por un factor de $1 + \frac{1}{24}\omega^2 \Delta t^2 + O(\Delta t^4)$.

Planteamiento del problema: En una estación espacial en el espacio exterior, una masa de 0.03 Kg está conectada a dos resortes idénticos horizontales cuya longitud en estado de relajación es de 0.5 m, su constante es $K = 4N/m$ y además, están sujetos a dos paredes como en la figura:

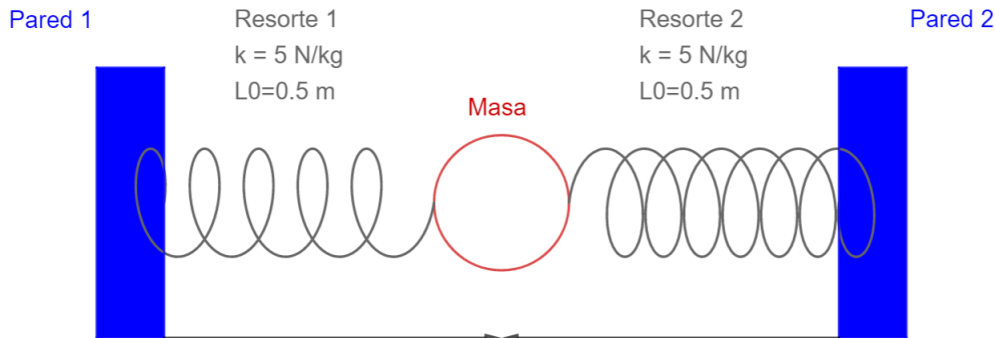


Suponga que la distancia de cada pared al origen es de 1 m. Escriba un programa que modele el movimiento del sistema colocando el origen de coordenadas en la mitad entre las 2 paredes (Utilice el método de Euler-Cromer para su simulación).

1. Inicialmente, coloque la masa en el origen del sistema. Además, utilice una velocidad inicial de 6 m/s a la derecha.
2. Agregue graficas de posición contra tiempo para la masa y determine el periodo de oscilación a partir de esta.
3. Utilizando el periodo calculado en el punto previo, calcule la constante efectiva del resorte para el sistema ¿coincide con la constante K que se usó para nuestro modelo? Explique
4. Experimente con el programa para determinar si cambios en la amplitud de oscilación afecta el periodo del sistema. Describa sus resultados.

Solución Analítica

Tomando en cuenta el diagrama del sistema tenemos:



Podemos ver que la distancia de la masa a cada pared está dada de la siguiente forma:

$$\vec{r}_I = \vec{r}_M - \vec{r}_{P1} \quad (\text{Distancia de la masa ala pared izquierda})$$

$$\vec{r}_D = \vec{r}_M - \vec{r}_{P2} \quad (\text{Distancia de la masa ala pared derecha})$$

Tomando en cuenta que el movimiento del sistema satisface la ley de Hooke:

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

Así, la fuerza total del sistema es:

$$\vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_D$$

Donde,

$$\overrightarrow{FI} = -k(|\overrightarrow{r_I}| - L_r)\hat{r}_I \quad (\text{Fuerza experimentada debido al resorte izquierdo})$$

$$\overrightarrow{FD} = -k(|\overrightarrow{r_D}| - L_D)\hat{r}_D \quad (\text{Fuerza experimentada debido al resorte derecho})$$

Definidas ya los elementos del sistema, lo siguiente es aplicar el método de Euler-Cramer:

Para calcular la aceleración de la masa en cada instante de tiempo se usará la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\overrightarrow{F}}{M}$$

Para calcular la velocidad de la masa en cada instante de tiempo se usará la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{v}(t + dt) = \overrightarrow{v}(t) + \overrightarrow{a}(t)dt$$

Para calcular la posición de la masa en cada instante de tiempo se usará la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{r}(t + dt) = \overrightarrow{r}(t) + \overrightarrow{v}(t)dt$$

Codificación

Antes de iniciar con la codificación del programa, primero hay que interpretar correctamente el algoritmo que el programa implementará, en este caso el método de Euler.

Especificación:

- Entradas:

- # *Ms*: Masa de la partícula (Kg)
- # *kr*: Constante de estiramiento (N/m)
- # *L0r*: Longitud del resorte en reposo (m)
- # *x0*: Posición inicial de la partícula (m)
- # *T*: Tiempo de la simulación (s)
- # *N*: Puntos de malla
- # *L*: Referencia para los lados de las paredes
- # *sep*: Separación entre las paredes (m)

- Salidas:

- # *Res1.axis*: Posición del eje del resorte izquierdo
- # *Res2.axis*: Posición del eje del resorte derecho
- # *C.v*: Velocidad de la partícula
- # *C.pos*: Posición de la partícula

- Auxiliares:

- # *c*: Partícula
- # *P1*: Pared izquierda
- # *P2*: Pared derecha
- # *Res1*: Resorte izquierdo
- # *Res2*: Resorte derecho
- # *rd*: Distancia de la partícula a la pared derecha
- # *ri*: Distancia de la partícula a la pared izquierda
- # *Fd*: Fuerza experimentada por la partícula a la derecha
- # *Fi*: Fuerza experimentada por la partícula a la izquierda

Algoritmo:

1. INICIO
2. Definir los objetos de la simulación: $cC, P1, P2, Res1, Res2$
3. Asignar valores de entrada: $Ms, kr, L0r, x0, T, N, L, sep$
4. Calcular el ancho del paso:

$$h = \frac{T}{N}$$

5. Iniciar el Loop: Mientras $i \leq T$ calcular:

$$C.v+ = acc() * dt$$

Actualizar coordenadas de la partícula:

$$C.pos+ = C.v * dt$$

Actualizar coordenadas de los ejes de los resortes:

$$Res2.axis = C.pos - P2.pos$$

$$Res1.axis = C.pos - P1.pos$$

6. Mostrar la simulación y las gráficas.
7. FIN

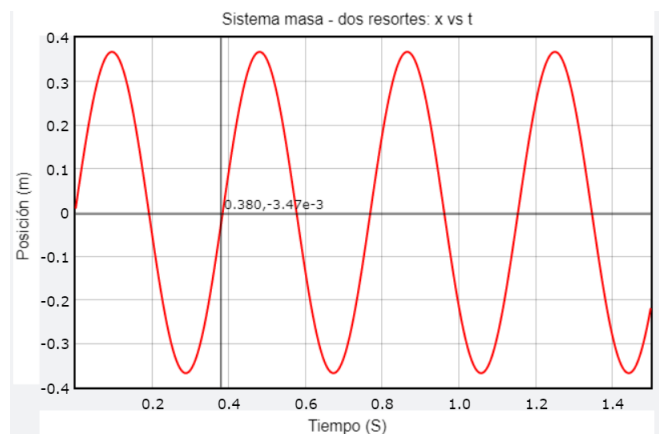
A continuación, se presenta el enlace para acceder a el código:

* Python: https://drive.google.com/file/d/12gVPOCQ_67YJw7YisE9D3j4XSNwHhatF/view?usp=sharing

Resultados

Para el ejercicio en particular, tomamos lo siguiente:

- * $Ms = 0,03$
- * $kr = 4.$
- * $L0r = 0,5$
- * $x0 = 0$
- * $T = 1,5$
- * $N = 1000$
- * $dt = T/N$
- * $L = 0,1$
- * $sep = 1.$



Observamos en el gráfico que el periodo de oscilación del sistema es aproximadamente 0,380s.

Para el cálculo de la constante k del resorte procedemos de la siguiente forma:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{k}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

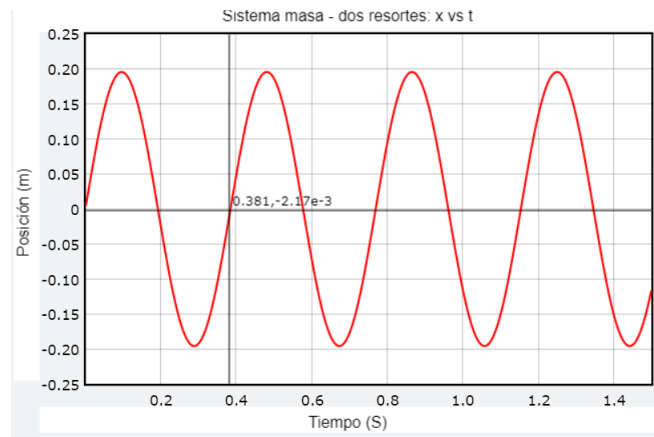
Sustituyendo valores:

$$k = \frac{4\pi^2 \cdot ,04}{(0,38)^2} \approx 8,20$$

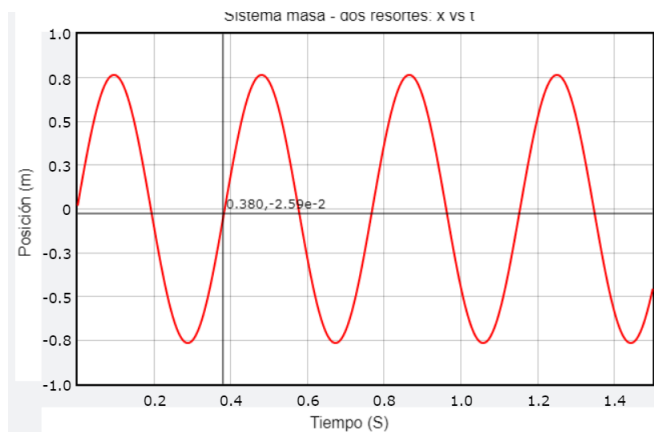
Lo cual concuerda con los datos iniciales del problema, pues el valor para cada resorte individual sería de 4 N/m.

Para probar si al cambiar la amplitud de oscilación probemos con los siguientes valores:

- Para $v = 3,2$ m/s la amplitud fue de aproximadamente 0.20 m:



- Para $v = 12$ m/s la amplitud fue de aproximadamente 0.81 m:



Como podemos observar, el periodo de oscilación no cambia. Así que podemos decir que el periodo no depende de la amplitud.

Conclusión

La práctica fue completamente satisfactoria, puesto que se cumplió con todos los objetivos de esta, habiendo observado como programar en VPython durante clase, realizar el ejercicio correspondiente a esta práctica fue algo fácil.

Respecto a programar, me fue bastante fácil, ya que comprendo perfectamente la teoría del método de Heun, que es casi el mismo que el de Euler-Cromer. Me queda claro que no es lo mismo sólo realizar cálculos manualmente, que sería muy laborioso (sobre todo en trabajos como el presente, donde es necesario realizar una gran cantidad de pasos para llegar al resultado esperado), y a realizarlo mediante la elaboración de programas en algún lenguaje de programación (en este caso Python), es necesario analizar con cuidado los datos, interpretar los, comprobar y contrastar con la teoría con la práctica, así como comprobar la efectividad de los resultados obtenidos.

En esta ocasión no me fue difícil obtener la solución analítica, el ejercicio de aplicación estuve un poco confundido y al inicio tuve resultados inesperados. La confusión fue causada por que la constante de estiramiento del resorte obtenida analíticamente era el doble de la que esperaba, pero al ser dos resortes tenía sentido que así lo fuera. Considero que es muy necesario y de gran importancia aplicar la programación en el área de la Física ya que es una gran herramienta que permite facilitar los cálculos.

Referencias

- [1] Wikipedia contributors. (2021, 16 octubre). Semi-implicit Euler method. Wikipedia. Recuperado 20 de marzo de 2022, de https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler_method