

Péndulo Físico

Planteamiento del problema: En una actividad anterior se modeló el movimiento de un péndulo no lineal con amortiguamiento. En esta ocasión, vamos a modificar el código utilizado para realizar dicha simulación agregando una fuerza extra la cual llamaremos fuerza impulsora (F_I).

Igual que antes, llamaremos θ al ángulo que forma la varilla del péndulo con la vertical. Usaremos una fuerza de fricción además del peso y la tensión de la varilla. Para la fuerza impulsora, vamos a suponer que el péndulo se encuentra en la presencia de un campo eléctrico oscilatorio. Una manera conveniente de representar a dicha fuerza es: $F_I = F_D \sin(\Omega_D t)$ donde F_D es la amplitud y Ω_D es la frecuencia angular, la cual no debe confundirse con la frecuencia natural del péndulo simple (Ω). Un sistema que posee todos los ingredientes antes descritos se conoce como péndulo físico.

1. Utilice la segunda ley de Newton para plantear la ecuación diferencial que rige la dinámica del sistema. Para que el sistema se vuelva no lineal, evite utilizar la aproximación de oscilaciones pequeñas.
2. La fuerza de fricción que se va a utilizar debe ser proporcional a la velocidad del péndulo: $F_f = -q \frac{d\theta}{dt}$. Donde q es un parámetro que mide la magnitud del amortiguamiento y el signo negativo garantiza que dicha fuerza siempre sea opuesta a la dirección del movimiento del péndulo.
3. Descomponga la ecuación obtenida en el punto 1 en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.
4. Considerando que la longitud de la varilla es de 9.8 m y que además el péndulo se libera del reposo cuando el ángulo $\theta(0) = 0.2$ rad, simule el movimiento del sistema durante 150 segundos, utilizando para esto el método RK4 con $\Delta t = 0.04$ s, $q = 0.5$ Kg/s, $\Omega_D = 23$ y $F_D = 0.5$. Para graficar los resultados, es conveniente mantener el valor de θ en el rango de $-\pi$ a π . Agregue en su programa una sección de código que realice esto en cada iteración.
5. Repita el inciso 4) pero ahora utilice un valor de $F_D = 1.2, 0.1$ y 0.99 .
6. Acompañe sus resultados con las graficas de θ vs t y de θ vs ω .
7. Compare los resultados obtenidos en 4 y 5. ¿Cómo son las desviaciones obtenidas en cada caso con respecto a la forma senoidal pura? ¿Qué diferencias observa con respecto a los resultados obtenidos en cada caso?
8. Compare los resultados obtenidos con ambos métodos: ¿Qué diferencias observa con respecto a los resultados obtenidos en cada caso?
9. Calcule en sus simulaciones, la energía total del sistema como función del tiempo.

Análisis Preliminar

Básicamente hay que modelar el movimiento de un péndulo con amortiguamiento. Para ello definimos los siguientes elementos del sistema:

1. l : Longitud de la cuerda
2. m : Masa del objeto oscilador (puntual)
3. θ : Ángulo que forma la varilla del péndulo con la vertical
4. F_I : Fuerza impulsora
5. F_D : Amplitud de la fuerza impulsora
6. Ω_D Frecuencia de la fuerza impulsora

Con lo anterior podemos establecer las fuerzas que rigen el movimiento. Estas fuerzas son las siguientes:

$$(1) \quad F_T = -mg \sin \theta \quad (\text{Fuerza tangencial})$$

$$(2) \quad F_f = -q\dot{\theta} \quad (\text{Fuerza de fricción})$$

$$(3) \quad F_I = F_D \sin(\Omega_D t) \quad (\text{Fuerza impulsora})$$

Además para el movimiento oscilatorio sabemos que:

$$s = l\theta \quad (\text{Desplazamiento de la masa})$$

$$a_T = l\ddot{\theta} \quad (\text{Aceleración tangencial})$$

Por lo que la expresión 2 se puede escribir de la siguiente forma:

$$(2^*) \quad F_f = -ql\dot{\theta} \quad (\text{Fuerza de fricción})$$

Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$\begin{aligned} \sum F = ma &\implies ml\ddot{\theta} = F_D \sin(\Omega_D t) - mg \sin \theta - ql\dot{\theta} \\ \implies \ddot{\theta} &= \frac{F_D}{ml} \sin(\Omega_D t) - \frac{q}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta \end{aligned}$$

Para descomponer en un sistema de dos ecuaciones de primer orden tomamos $\dot{\theta} = \omega$, de esta forma:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{F_D}{ml} \sin(\Omega_D t) - \frac{q}{m}\omega - \frac{g}{l} \sin \theta \end{aligned}$$

Las anteriores son las funciones pendiente que utilizaré para modelar el movimiento del péndulo.

Especificación

Especificación: La idea central utilizar un programa principal donde puedan manipularse las condiciones iniciales del sistema, así como algunos factores importantes de la simulación. Para los calculos se implementará un modulo que contenga las funciones y subrutinas a utilizar. Particularmente, para este problema es conveniente crear un objeto que contenga los datos importantes del pendulo. Los datos son ingresados desde el programa principal.

Elementos del objeto: Pendulo

1. Posición: Matriz de 1×2
2. Velocidad: Matriz de 1×2
3. Longitud de la cuerda: Escalar
4. Masa de la partícula oscilane: Escalar
5. Constante de fricción : Escalar
6. Amplitud de la fuerza impulsora: Escalar
7. Frecuencia angular de la fuerza impulsora: Escalar

Ingresados los datos, se llama a una subrutina que modela el movimiento del péndulo.

Elementos de la subrutina:

1. Objeto con los datos del pendulo: Objeto
2. Tiempo total de la simulación: Escalar

La subrutina posee la siguiente especificación:

- *Entradas:* *masa, T0*

masa: Objeto con los datos del pendulo, TYPE

T0: Tiempo total de simulación

- *Salidas:* *masa*

t: Objeto con los datos actualizados del pendulo, TYPE

- *Auxiliares: t, dt, the, ome, K, U, E, n, i, unit0, f1, f2*

t: Controlador del ciclo; Variable de tipo REAL

dt: Valor del ancho de paso; Variable de tipo REAL

ome, the: Valores de theta/omega respectivamente, Variable de tipo REAL

K, U, E: Valores de Energía cinética/potencial/mecánica del sistema respectivamente; Variable de tipo REAL

n: Numero de particiones del intervalo, Variable de tipo INTEGER

i, unit0: Contadores/Auxiliares

La subrutina emplea a otra subrutina que implementa el método RK4, dicha subrutina posee la siguiente especificación:

- *Entradas: t, h, ome, the, masa*

t: I-ésimo tiempo; Variables de tipo REAL

h: Valor del ancho de paso; Variable de tipo REAL

ome, the: Valores de theta/omega respectivamente, Variable de tipo REAL

masa: Objeto con los datos del pendulo, TYPE

- *Salidas: the, ome*

ome, the: Valores de theta/omega respectivamente, Variable de tipo REAL

- *Auxiliares: k11, k12, k13, k14, k21, k22, k23, k24, f1, f2*

k11, k12, k13, k14: k's de la posición; Variable de tipo REAL

k21, k22, k23, k24: k's de la velocidad; Variable de tipo REAL

f1, f2: Funciones pendientes obtenidas en la sección de análisis preliminar; funciones de Fortran

Lo siguiente es desarrollar las ideas expuestas al principio, teniendo en cuenta las especificaciones realizadas.

****El código está adjunto en la sección de avaus****

Resultados

Para este ejercicio los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Elementos de simulación 1:

1. Masa: 1.0 Kg
2. Longitud de la cuerda: 9.8 m
3. Coeficiente de fricción: 0.5 Kg/s
4. Se libera del reposo con ángulo: $\theta = 0.2$
5. Fuerza impulsora: $\Omega_D = 23.0$, $F_D = 0.5$
6. Ancho de paso: $\Delta t = 0.04$ s
7. Tiempo total de simulación: 150 s

Pendulo Forzado con Amortiguamiento

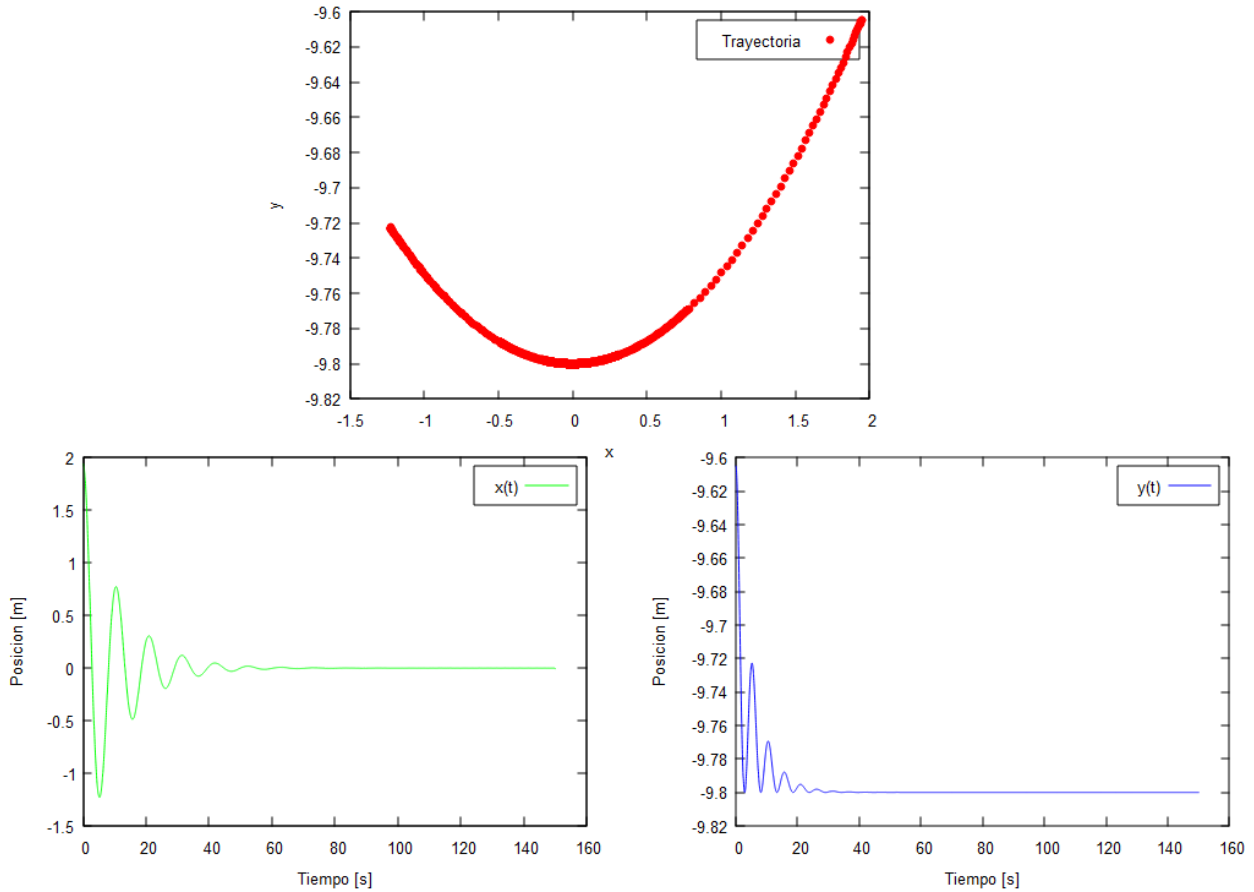


Figura 1: Gráficas de posición de la masa en el tiempo.

Observamos que la masa del péndulo parte de una altura inicial de aproximadamente -9.6 m respecto a la horizontal y toma una altura máxima de -9.72 m, lo que quiere decir que una vez parte la masa no alcanza la altura con la que parte. Lo anterior lo podemos constatar con la gráfica de $y(t)$. La gráfica $x(t)$ nos permite observar que después de aproximadamente 80 segundos de simulación el péndulo deja de moverse.

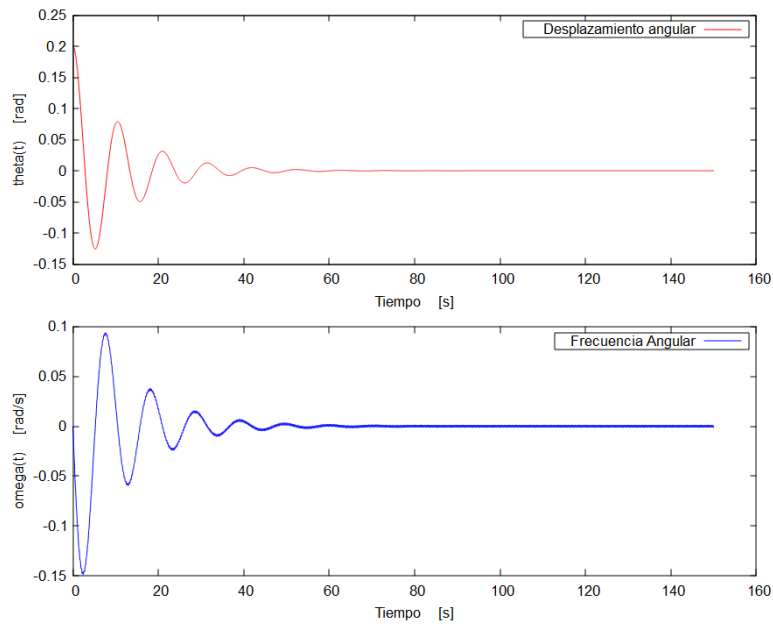


Figura 2: Gráficas de θ y ω en el tiempo.

Observamos que el comportamiento del oscilador es muy prácticamente el de un péndulo amortiguado, pero notamos que en la gráfica de $\omega(t)$ oscila un poco, lo cual es claramente consecuencia de la fuerza impulsora.

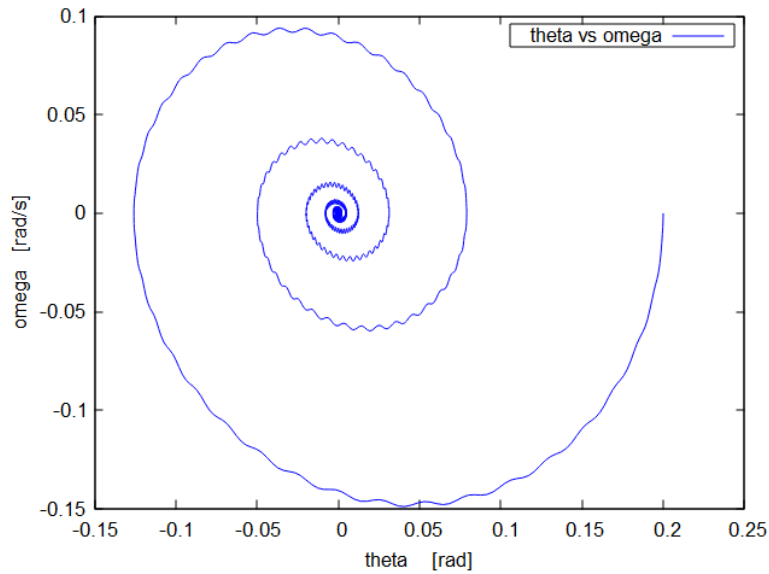


Figura 3: Gráficas de θ vs ω

En este gráfico observamos que el comportamiento de θ vs ω es muy similar a los obtenidos en la práctica del péndulo amortiguado pero con oscilaciones algo distinguidas sobre la misma línea, lo cual es claramente consecuencia de la fuerza impulsora.

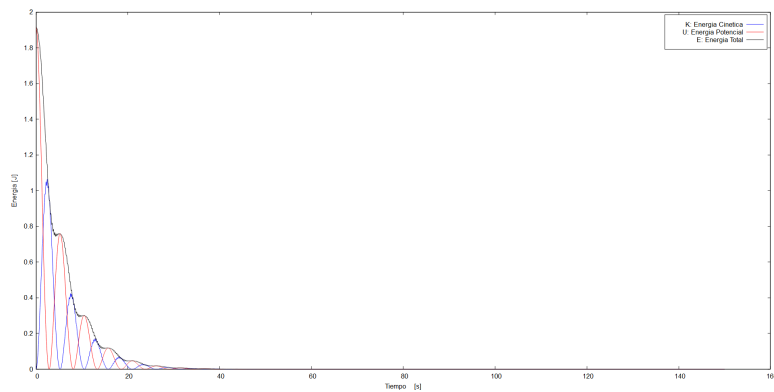


Figura 4: Gráficas de U, K y E en el tiempo.

Observamos un comportamiento bastante interesante en las gráficas de energía, pues observamos como las energías oscilan de una forma bastante llamativa. Nótese que después de aproximadamente 40 segundos la energía total del sistema es cero, es decir, el sistema llega al equilibrio energético.

Elementos de simulación 2:

1. Masa: 1.0 Kg
2. Longitud de la cuerda: 9.8 m
3. Coeficiente de fricción: 0.5 Kg/s
4. Se libera del reposo con ángulo: $\theta = 0.2$
5. Fuerza impulsora: $\Omega_D = 23.0$, $F_D = 1,2$
6. Ancho de paso: $\Delta t = 0.04$ s
7. Tiempo total de simulación: 150 s

Pendulo Forzado con Amortiguamiento

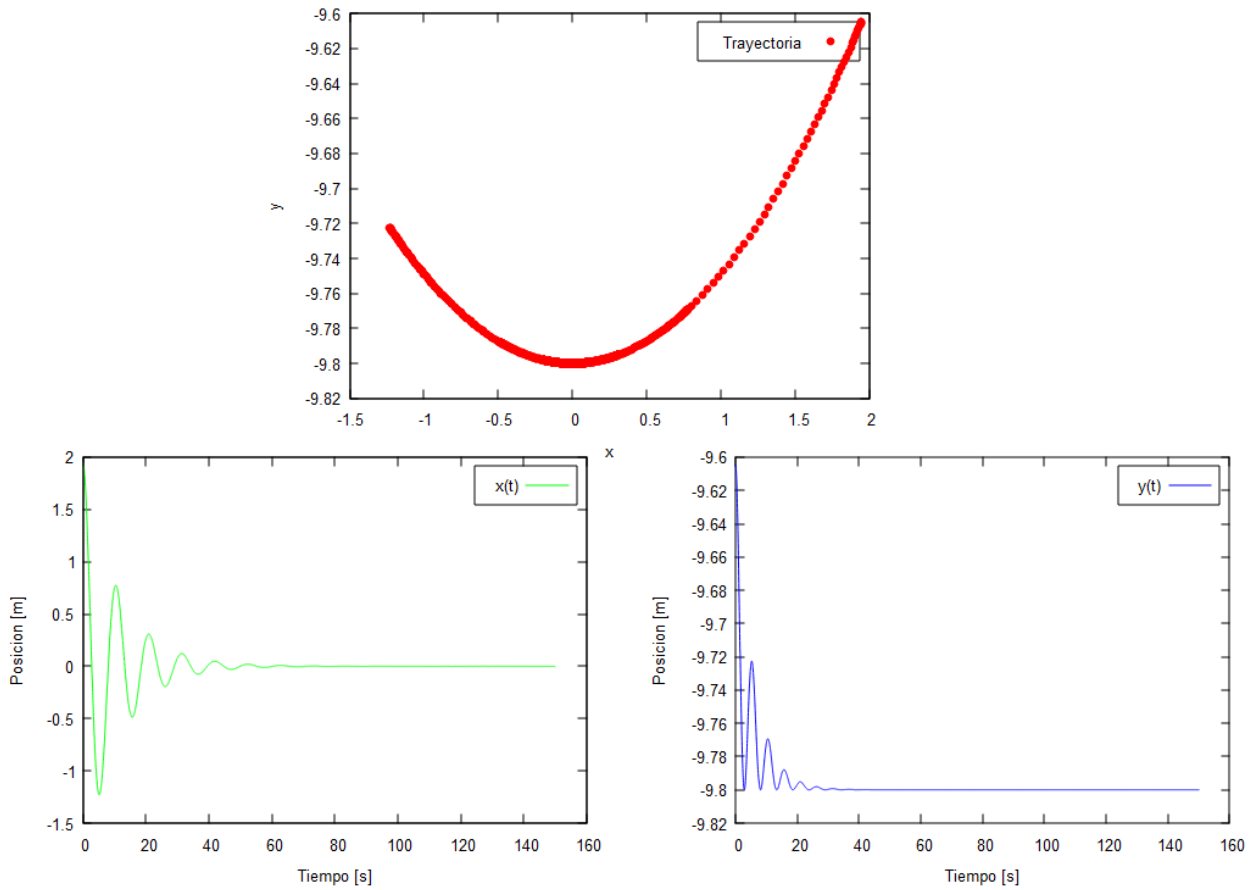


Figura 5: Gráficas de posición de la masa en el tiempo.

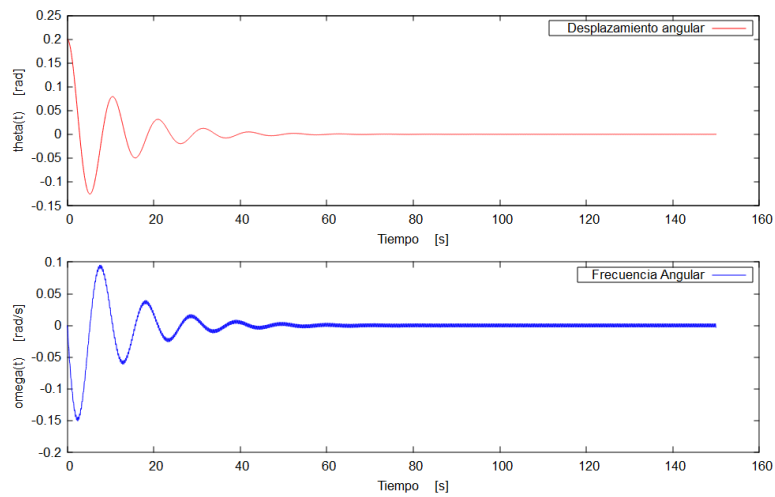


Figura 6: Gráficas de θ y ω en el tiempo.

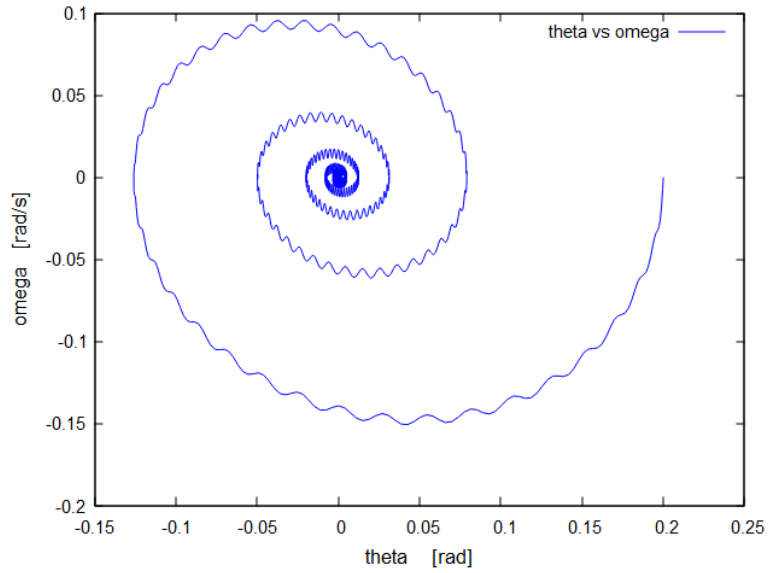


Figura 7: Gráficas de θ vs ω

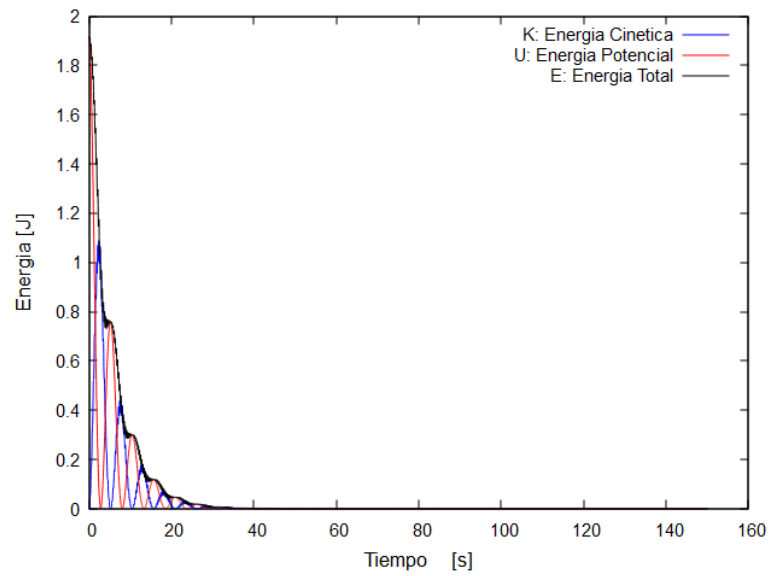


Figura 8: Gráficas de U, K y E en el tiempo.

Elementos de simulación 3:

1. Masa: 1.0 Kg
2. Longitud de la cuerda: 9.8 m
3. Coeficiente de fricción: 0.5 Kg/s
4. Se libera del reposo con ángulo: $\theta = 0.2$
5. Fuerza impulsora: $\Omega_D = 23.0$, $F_D = 0,1$
6. Ancho de paso: $\Delta t = 0.04$ s
7. Tiempo total de simulación: 150 s

Pendulo Forzado con Amortiguamiento

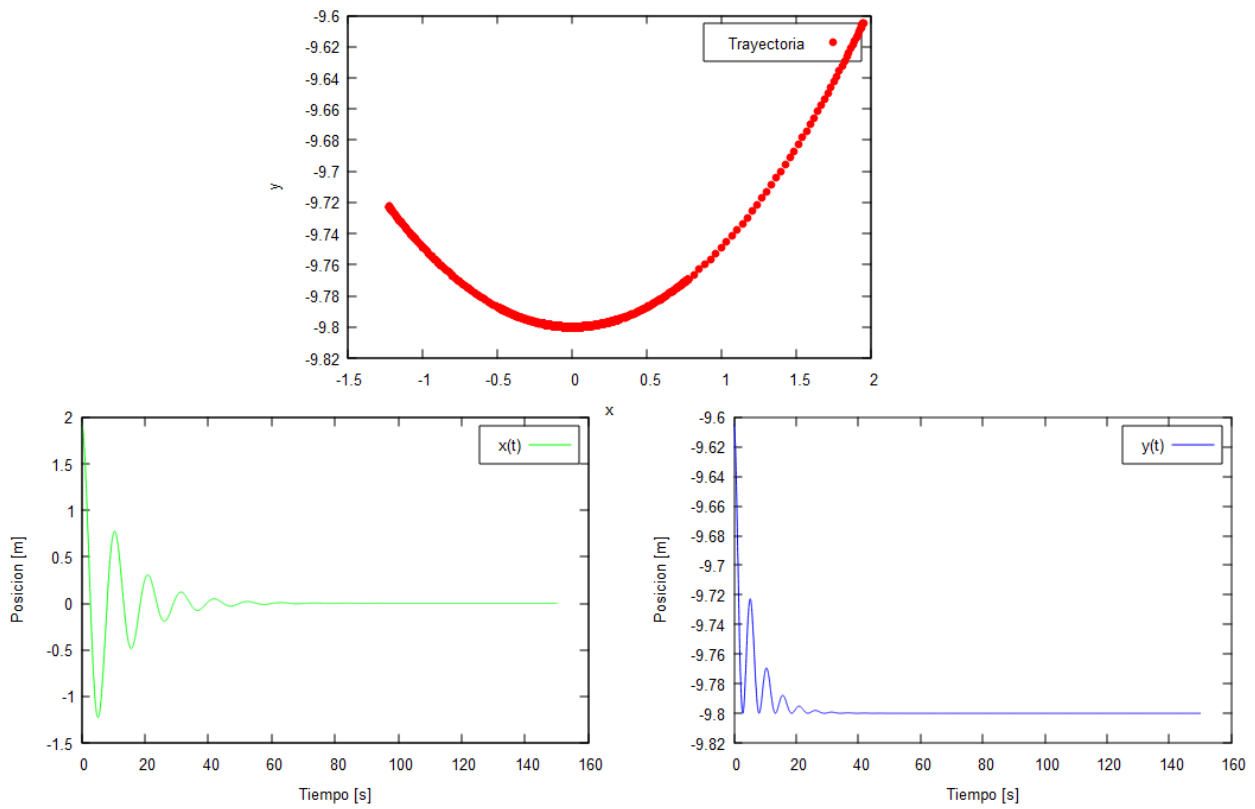


Figura 9: Gráficas de posición de la masa en el tiempo.

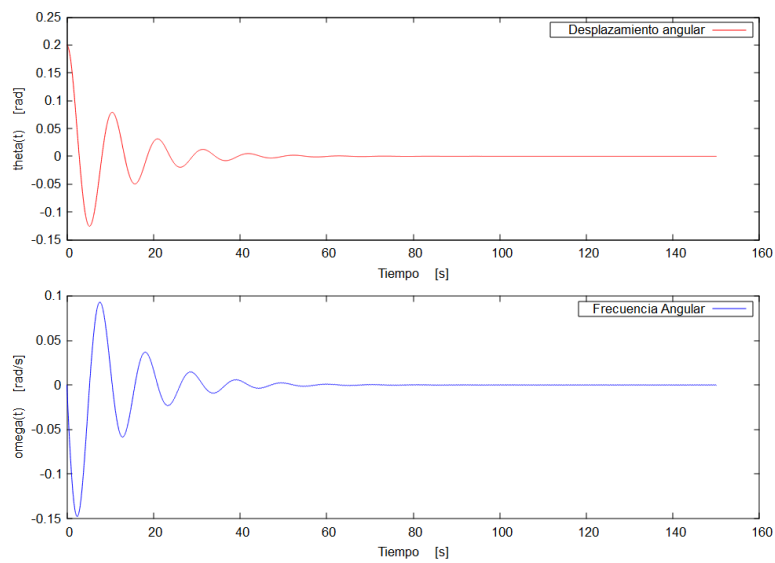


Figura 10: Gráficas de θ y ω en el tiempo.

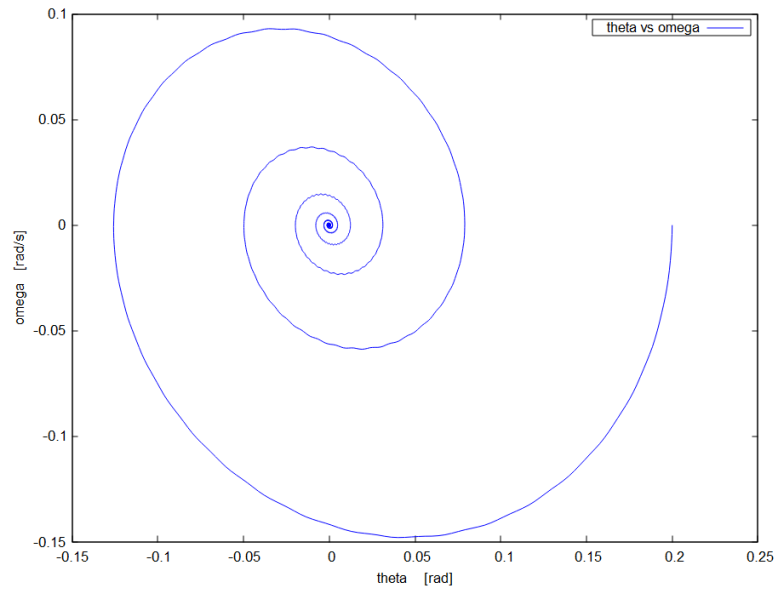


Figura 11: Gráficas de θ vs ω

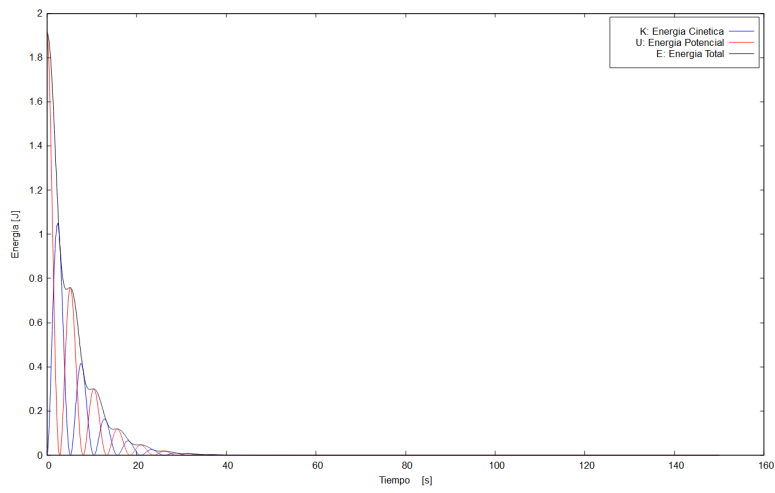


Figura 12: Gráficas de U, K y E en el tiempo.

Elementos de simulación 4:

1. Masa: 1.0 Kg
2. Longitud de la cuerda: 9.8 m
3. Coeficiente de fricción: 0.5 Kg/s
4. Se libera del reposo con ángulo: $\theta = 0.2$
5. Fuerza impulsora: $\Omega_D = 23.0$, $F_D = 0.99$
6. Ancho de paso: $\Delta t = 0.04$ s
7. Tiempo total de simulación: 150 s

Pendulo Forzado con Amortiguamiento

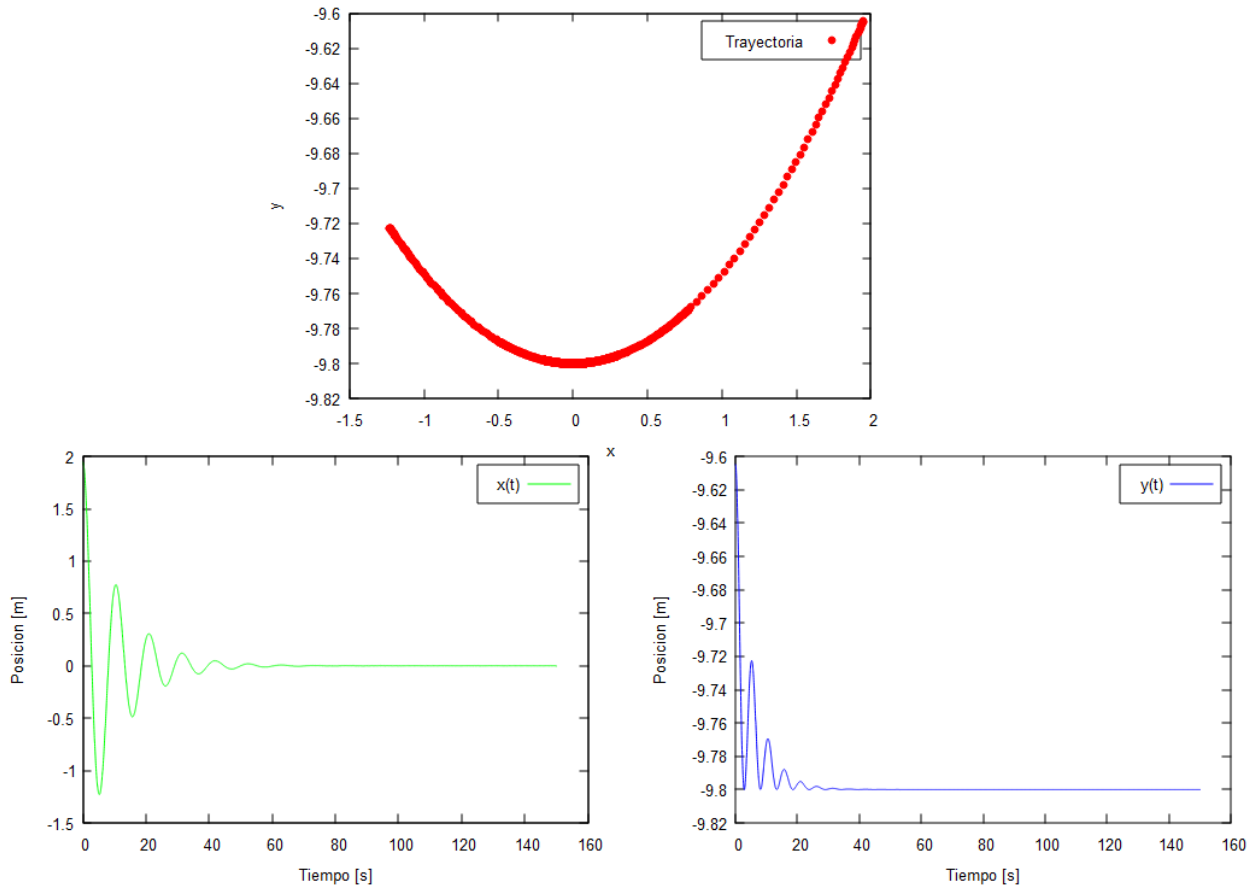


Figura 13: Gráficas de posición de la masa en el tiempo.

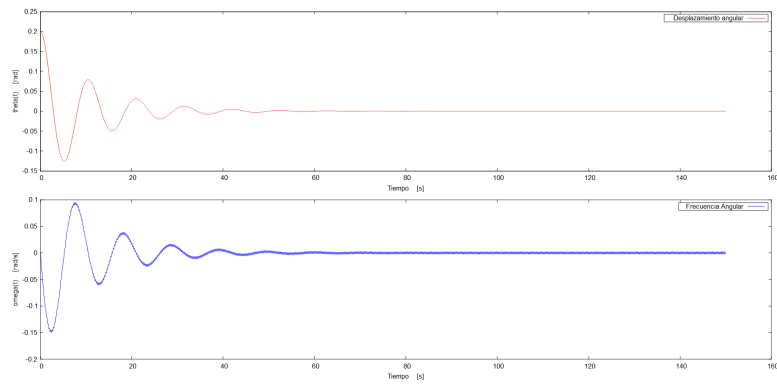


Figura 14: Gráficas de θ y ω en el tiempo.

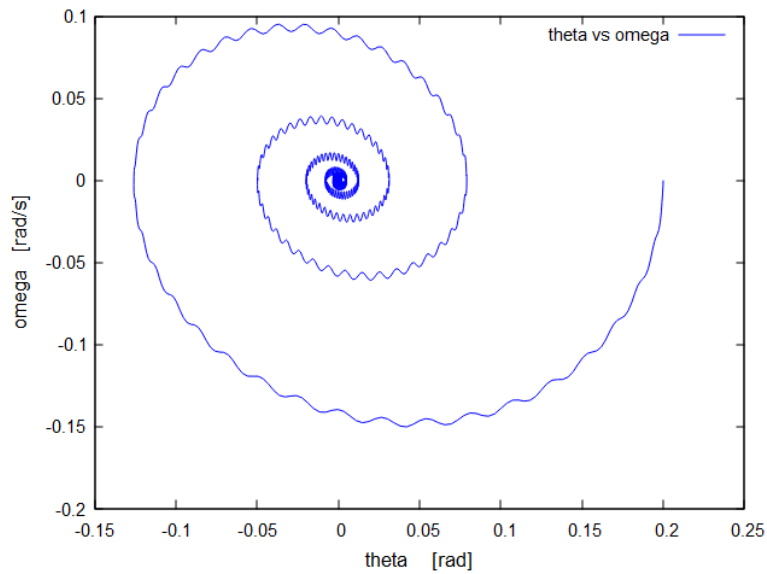


Figura 15: Gráficas de θ vs ω

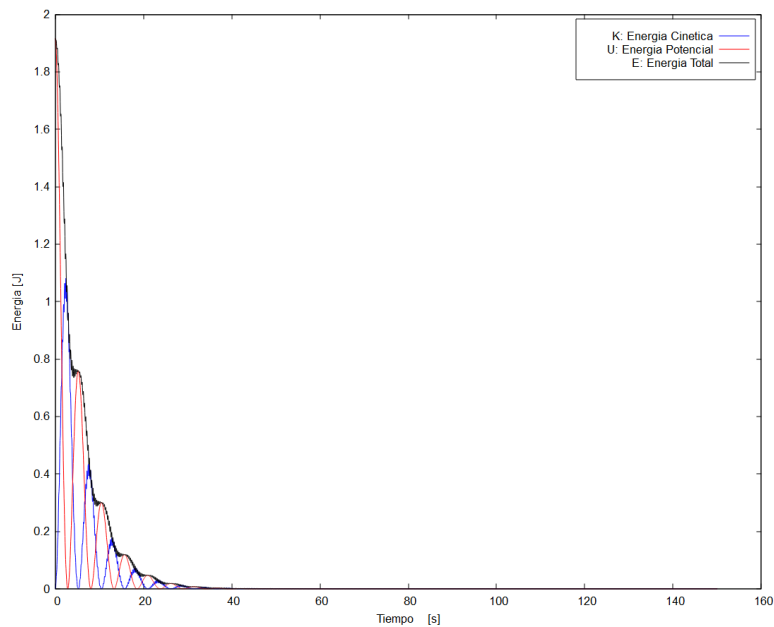


Figura 16: Gráficas de U, K y E en el tiempo.

Las simulaciones 2, 3 y 4 tienen un comportamiento muy similar al de la simulación 1, lo cual tiene bastante sentido ya que la única variación que se aplicó fue un cambio en la amplitud de la fuerza impulsora y no fue de manera significativa. Cabe mencionar que en la simulación 3, donde la amplitud de la fuerza impulsora es de 0.1, el gráfico de θ vs ω difiere respecto a la primera simulación en cuanto a que el comportamiento es mucho más similar al de un péndulo amortiguado, pero con una pequeña oscilación. Lo anterior tiene sentido, pues al reducir la amplitud de la fuerza impulsora los efectos de la misma se ven opacados.

Para realizar una simulación un poco más interesante tomaré en cuenta los siguientes parámetros:

1. Masa: 3.0 Kg
2. Longitud de la cuerda: 9.8 m
3. Coeficiente de fricción: 0.5 Kg/s
4. Se libera del reposo con ángulo: $\theta = 0.2$
5. Fuerza impulsora: $\Omega_D = \pi.0$, $F_D = 1.0$
6. Ancho de paso: $\Delta t = 0.04$ s
7. Tiempo total de simulación: 150 s

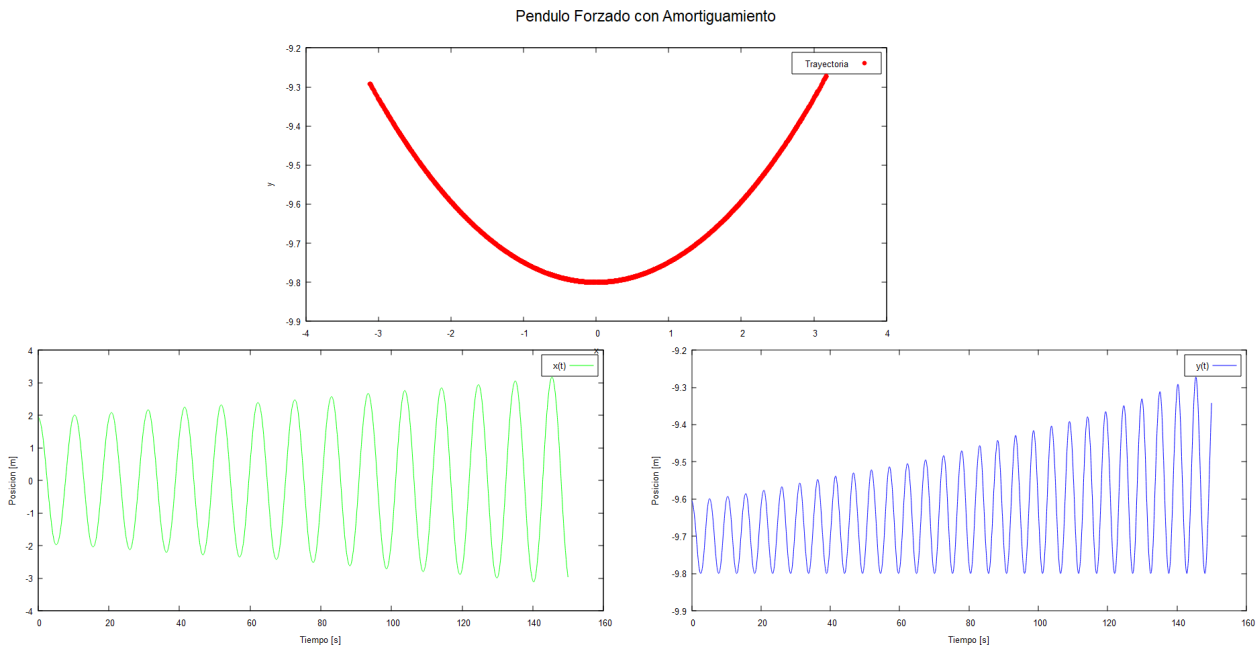


Figura 17: Gráficas de posición de la masa en el tiempo.

Observamos que la masa del péndulo parte de una altura inicial de aproximadamente -9.3 m respecto a la horizontal y casi alcanza la misma altura, lo que quiere decir que una vez parte la masa no alcanza la altura con la que parte. Notamos que tanto en x como en y la masa sigue oscilando senoidalmente.

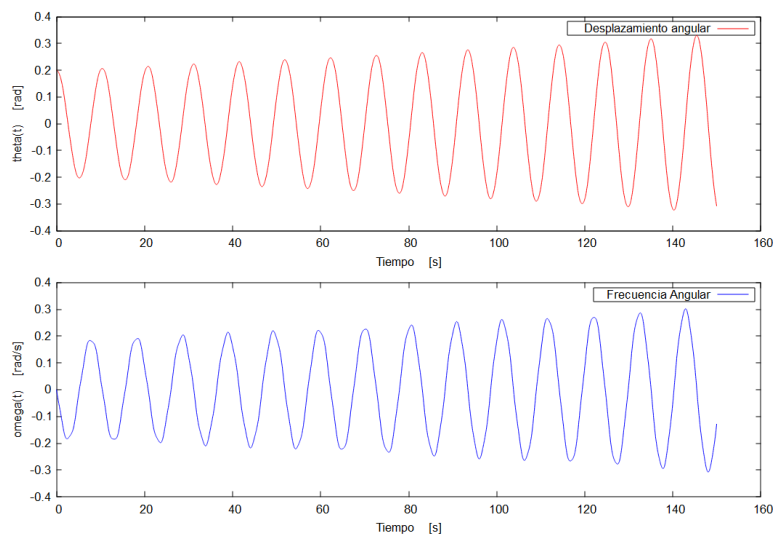


Figura 18: Gráficas de θ y ω en el tiempo.

Observamos que el comportamiento del oscilador se comporta como un péndulo forzado, pues la fuerza impulsora es suficiente como para superar la fuerza de rozamiento. En cuanto al compararlo con una forma senoidal pura, podemos observar que no es pura, pero la amplitud aumenta conforme avanza en el tiempo.

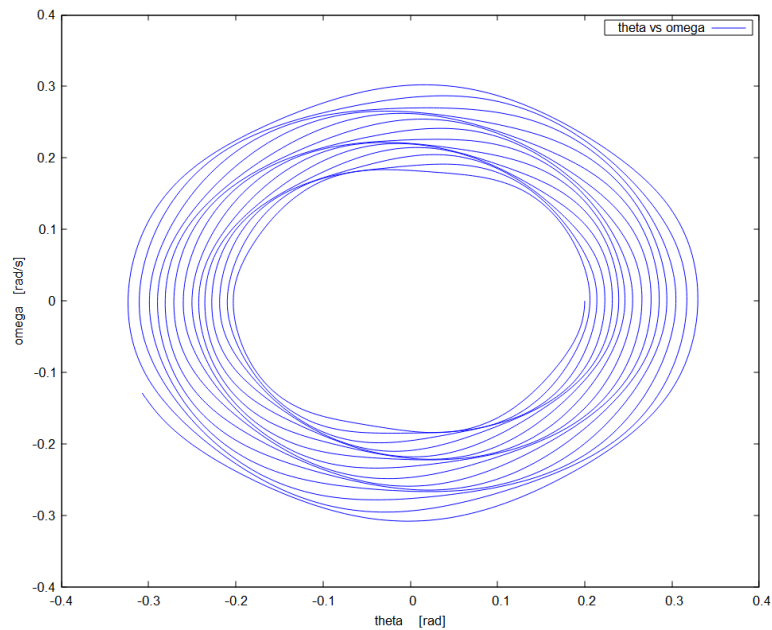


Figura 19: Gráficas de θ vs ω

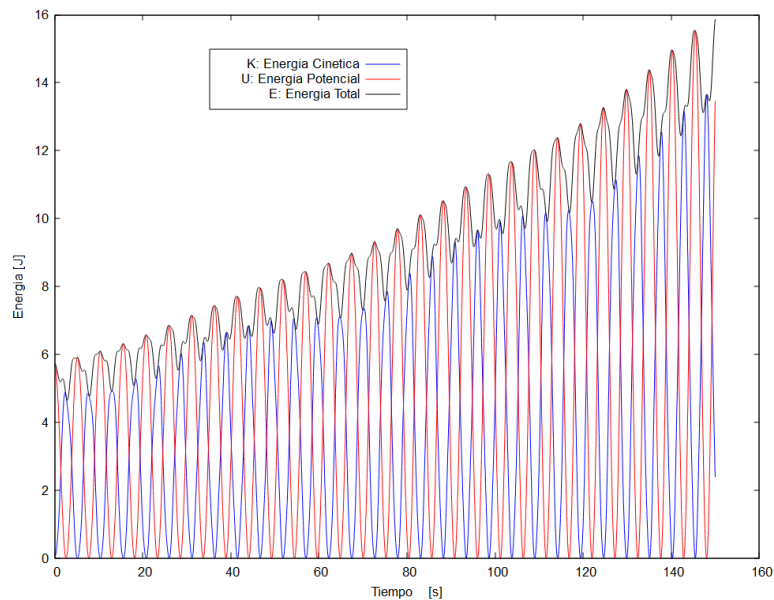


Figura 20: Gráficas de U, K y E en el tiempo.

Observamos un comportamiento bastante interesante en las gráficas de energía, pues observamos como las energías oscilan de una forma bastante llamativa. Nótese que después de aproximadamente una vez se cumple el tiempo de la simulación empleado la masa sigue oscilando, lo cual quiere decir que la fuerza impulsora es considerable.

Conclusión

La práctica fue completamente satisfactoria, puesto que se cumplió con todos los objetivos de esta, habiendo tenido experiencia con los ejercicios anteriores en esta misma clase, realizar el ejercicio correspondiente a esta práctica fue tedioso, pero bastante fácil.

Respecto a programar, fue algo complicado ya que es a primer ocasión que programo objetos en Fortran, ya que inicialmente estuve teniendo problemas de compilación debido a errores de sintaxis que no me acostumbro aún, pero pude solucionarlos checando bibliografía. Otra situación que me marcó bastante en esta parte del trabajo fue al momento de establecer las k's en el método que me confundía bastante el hecho de que las funciones pendiente no necesariamente dependen del tiempo. Me queda claro que no es lo mismo sólo realizar cálculos manualmente, que sería muy laborioso (sobre todo en trabajos como el presente, donde es necesario realizar una gran cantidad de pasos para llegar al resultado esperado), y a realizarlo mediante la elaboración

de programas en algún lenguaje de programación (en este caso Fortran), es necesario analizar con cuidado los datos, interpretarlos, comprobar y contrastar con la teoría con la práctica, así como comprobar la efectividad de los resultados obtenidos.

Por último, hay bastantes cosas que me gustaría cambiar en cuanto a la presentación de resultados pues no soy experto en Gnuplot y la documentación no es de gran ayuda en mi opinión. Intente hacer un Gif para simular el movimiento del péndulo, pero no tuve el resultado que me gustaría, lo cual me frustró bastante. Sin embargo, pude hacer el programa en VPython y el resultado fue el esperado. Intenté introducir el Gif que cree con VPython en Latex para que se pudiera observar el movimiento de la masa, pero no pude.

Considero que es muy necesario y de gran importancia aplicar la programación en el área de la Física ya que es una gran herramienta que permite facilitar los cálculos.