Resumo de Propriedades e Operações Matemáticas

1. Matrizes

Uma matriz é uma organização retangular de números, símbolos ou expressões, dispostos em linhas e colunas.

Notação: Uma matriz A com m linhas e n colunas é denotada por Am×n .

Propriedades Básicas:

Matriz Nula: Todos os elementos são zero.

Matriz Quadrada: O número de linhas é igual ao número de colunas (m=n).

Matriz Identidade (I): Matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são 1 e os demais são 0.

Matriz Transposta (AT): Obtida trocando as linhas pelas colunas da matriz original.

Matriz Simétrica: Uma matriz quadrada onde A=AT.

Matriz Antissimétrica: Uma matriz quadrada onde A=−AT.

Operações com Matrizes:

Adição e Subtração: Só podem ser realizadas entre matrizes de mesma dimensão. Soma-se ou subtrai-se elemento a elemento.

Exemplo: Se A=(13 24) e B=(57 68), então A+B=(1+53+7 2+64+8)=(610 812).

Multiplicação por um Escalar: Multiplica-se cada elemento da matriz pelo escalar.

Exemplo: Se A=(13 24) e k=3, então k⋅A=(3⋅13⋅3 3⋅23⋅4)=(39 612).

Multiplicação de Matrizes: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. O elemento cij da matriz resultante é o produto escalar da i-ésima linha da primeira matriz pela j-ésima coluna da segunda matriz.

Exemplo 1: Se A=(13 24) e B=(57 68), então A⋅B=((1⋅5+2⋅7)(3⋅5+4⋅7) (1⋅6+2⋅8)(3⋅6+4⋅8))=((5+14)(15+28) (6+16)(18+32))=(1943 2250).

Exemplo 2: Se A=(2 1) e B=(34), então A⋅B=((2⋅3+1⋅4))=((6+4))=(10).

Exemplo 3 (Matriz Identidade): Se A=(13 24) e I=(10 01), então A⋅I=((1⋅1+2⋅0)(3⋅1+4⋅0) (1⋅0+2⋅1)(3⋅0+4⋅1))=(13 24)=A.

2. Determinantes

O determinante é um número escalar associado a uma matriz quadrada. Ele é fundamental para resolver sistemas de equações lineares, calcular a matriz inversa e transformações geométricas.

Cálculo do Determinante:

Matriz 1×1: O determinante é o próprio elemento.

Exemplo 1: Se A=(5), então det(A)=5.

Matriz 2×2: det(ac bd)=ad−bc.

Exemplo 2: Se A=(21 34), então det(A)=(2⋅4)−(3⋅1)=8−3=5.

Matriz 3×3 (Regra de Sarrus ou Cofatores):

Regra de Sarrus: Repetir as duas primeiras colunas ao lado da matriz e somar os produtos das diagonais principais e subtrair os produtos das diagonais secundárias.

Exemplo 3 (Regra de Sarrus): Se A= 147 258 369 147 258 369 147 258 det(A)=(1⋅5⋅9+2⋅6⋅7+3⋅4⋅8)−(3⋅5⋅7+1⋅6⋅8+2⋅4⋅9) det(A)=(45+84+96)−(105+48+72) det(A)=(225)−(225)=0.

3. Progressão Aritmética (P.A.)

Uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante. Essa constante é chamada de razão (r).

Fórmulas Principais:

Termo Geral: $a_n = a_1 + (n-1)r$

a_n : n-ésimo termo

a_1 : primeiro termo

n: número de termos

r: razão

Soma dos n Primeiros Termos: Sn =2n(a1 +an) ou Sn =2n[2a1 +(n−1)r]

Exemplos:

Exemplo 1 (Encontrar um termo): Dada a P.A. (2, 5, 8, ...), encontre o 10º termo. $a_1 = 2$, $r = 5-2 = 3$, $n = 10$. $a_{10} = a_1 + (10-1)r = 2 + 9 \cdot 3 = 2 + 27 = 29$.

Exemplo 2 (Soma dos termos): Calcule a soma dos 5 primeiros termos da P.A. (1, 3, 5, 7, 9). a1 =1, a5 =9, n=5. S5 =25(1+9) =25⋅10 =250 =25.

Exemplo 3 (Encontrar a razão): Uma P.A. tem a1 =7 e a4 =16. Encontre a razão. a4 =a1 +(4−1)r 16=7+3r 9=3r r=3.

4. Progressão Geométrica (P.G.)

Uma Progressão Geométrica é uma sequência numérica em que a razão entre termos consecutivos é constante. Essa constante é chamada de razão (q).

Fórmulas Principais:

Termo Geral: an =a1 ⋅qn−1

an : n-ésimo termo

a1 : primeiro termo

n: número de termos

q: razão

Soma dos n Primeiros Termos: Sn =q−1a1 (qn−1) (se q⍰=1)

Soma dos Termos de uma P.G. Infinita Convergente: S∞ =1−qa1 (se |q|<1)

Exemplos:

Exemplo 1 (Encontrar um termo): Dada a P.G. (2, 6, 18, ...), encontre o 5º termo. a1 =2, q=6/2=3, n=5. a5 =a1 ⋅q5−1=2⋅34=2⋅81=162.

Exemplo 2 (Soma dos termos): Calcule a soma dos 4 primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, 24). a1 =3, q=6/3=2, n=4. S4 =2−13(24−1) =13(16−1) =3⋅15=45.

Exemplo 3 (Soma de P.G. infinita): Calcule a soma da P.G. infinita (1, 1/2, 1/4, 1/8, ...). a1 =1, q=(1/2)/1=1/2. Como |q|<1, a P.G. é convergente. S∞ =1−1/21 =1/21 =2.

5. Funções Seno e Cosseno

As funções seno e cosseno são funções trigonométricas fundamentais, que descrevem a relação entre os ângulos de um triângulo retângulo e as razões dos seus lados. São periódicas e essenciais para descrever fenômenos ondulatórios.

Propriedades Básicas:

Domínio: Todos os números reais (R).

Contradomínio/Imagem: $[-1,1]$.

Período: 2π (ou 360°).

Sen(x) é uma função ímpar: $\sin(-x)=-\sin(x)$.

Cos(x) é uma função par: $\cos(-x)=\cos(x)$.

Identidade Fundamental: $\sin2(x)+\cos2(x)=1$.

Valores Notáveis:

Ângulo (x), sin(x), cos(x)

0° (0 rad), 0, 1

30° ($\pi/6$ rad), 1/2, 3 /2

45° ($\pi/4$ rad), 2 /2, 2 /2

60° ($\pi/3$ rad), 3 /2, 1/2

90° ($\pi/2$ rad), 1, 0

Exemplos:

Exemplo 1 (Cálculo de valores): Calcule $\sin(30^\circ)$, $\cos(0^\circ)$, $\sin(90^\circ)$.

De acordo com a tabela de valores notáveis: $\sin(30^\circ)=1/2$. $\cos(0^\circ)=1$. $\sin(90^\circ)=1$.

Exemplo 2 (Uso da identidade fundamental): Se $\sin(x)=0.6$ e x está no primeiro quadrante, calcule cos(x).

$\sin2(x)+\cos2(x)=1$

$(0.6)2+\cos2(x)=1$

$0.36+\cos2(x)=1$

$\cos2(x)=1-0.36=0.64$

$\cos(x)=0.64=0.8$ (positivo, pois x está no primeiro quadrante).

Exemplo 3 (Transformação de ângulo): Calcule $\sin(210^\circ)$.

210° está no 3º quadrante. O ângulo de referência é $210^\circ-180^\circ=30^\circ$.

No 3º quadrante, o seno é negativo.

Portanto, $\sin(210^\circ)=-\sin(30^\circ)=-1/2$.