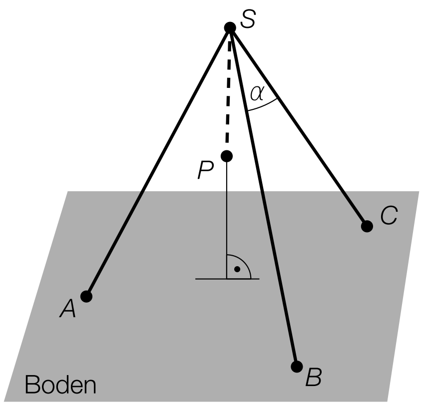
Dreibein*

Auf dem nebenstehenden Foto ist ein Dreibein mit Topf über einer Feuerstelle abgebildet.
An einer Kette am Dreibein ist ein Topf aufgehängt, der für die Zubereitung von Speisen verwendet wird.

Quelle: BMBWF

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft ein Dreibein.



Die Standpunkte A, B und C des Dreibeins befinden sich auf dem horizontalen Boden. Der horizontale Boden liegt in der xy-Ebene. Die Spitze des Dreibeins befindet sich im Punkt S.

1) Stellen Sie mithilfe der Punkte B, C und S eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Es gilt:

$A = (x_A|y_A|0)$
$S = (37|16|108)$
(Koordinaten in cm)

Die Strecke AS liegt auf der Geraden $g: X = S + t \cdot \vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $t \in \mathbb{R}$.

2) Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes A. *[0/1 P.]*

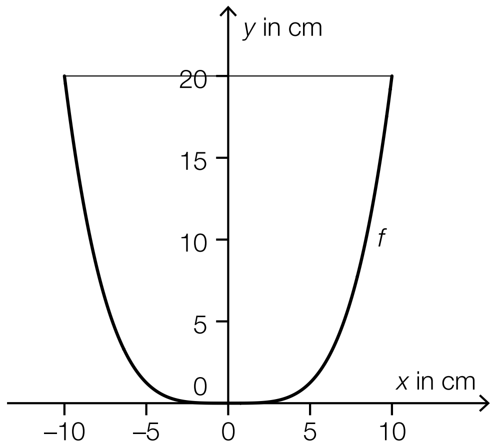
Im Punkt S ist eine senkrecht nach unten hängende Kette befestigt. Am Ende dieser Kette ist im Punkt P ein Topf befestigt. Die Länge $\overline{SP}$ beträgt 50 cm.

3) Tragen Sie die Koordinaten von P in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$P = (\square|\square|\square)$ *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt des Topfes modellhaft dargestellt. Die Form des Topfinneren entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f um die y-Achse.

Für f gilt: $y = \frac{1}{500} \cdot x^4$



Der Topf wird bis 5 cm unter den Rand mit Wasser befüllt. Das Volumen des eingefüllten Wassers wird als Füllvolumen V bezeichnet.

1) Berechnen Sie das Füllvolumen V. *[0/1 P.]*

c) Eine im Topf des Dreibeins zubereitete Suppe kühlt nach der Zubereitung ab.
Der zeitliche Verlauf der Temperatur der Suppe kann durch die Exponentialfunktion T modelliert werden.

$T(t) = a \cdot b^t$

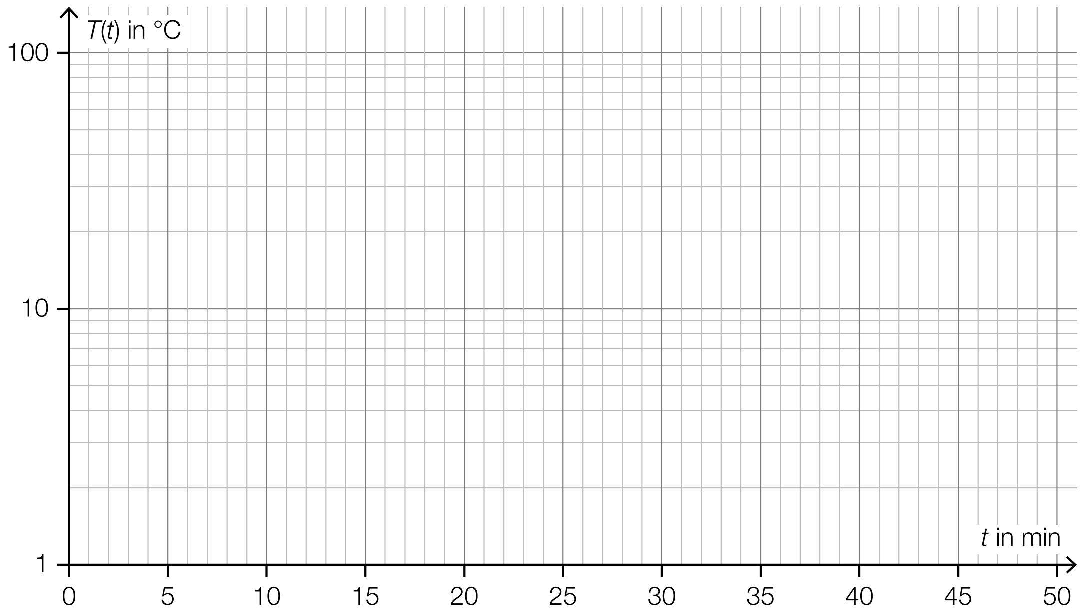
t ... Zeit in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a, b ... positive Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Temperatur der Suppe 80 °C.

Nach 45 min beträgt die Temperatur der Suppe 6 °C.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Temperatur der Suppe 37 °C beträgt. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem den Graphen der Funktion T ein. *[0/1 P.]*



Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{\overline{BC}^2 - \overline{SB}^2 - \overline{SC}^2}{-2 \cdot \overline{SB} \cdot \overline{SC}}\right)$

oder:

$\alpha = \arccos\left(\frac{\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{SB} \cdot \overline{SC}}\right)$

oder:

$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right|}\right)$

a2) Für die z-Koordinate von A gilt:

$0 = 108 + 12 \cdot t$
$t = -9$

$A = S + (-9) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = (10|-20|0)$

a3) $P = (37|16|58)$

a1) Ein Punkt für richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der fehlenden Koordinaten des Punktes A.
a3) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Koordinaten des Punktes P.

b1) $x = \sqrt[4]{500 \cdot y}$
$V = \pi \cdot \int_0^{15} \sqrt{500 \cdot y}\, dy = 2\,720{,}6...$
Das Füllvolumen V beträgt rund 2 721 cm³.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Füllvolumens V.

c1) $T(0) = 80$
$a = 80$

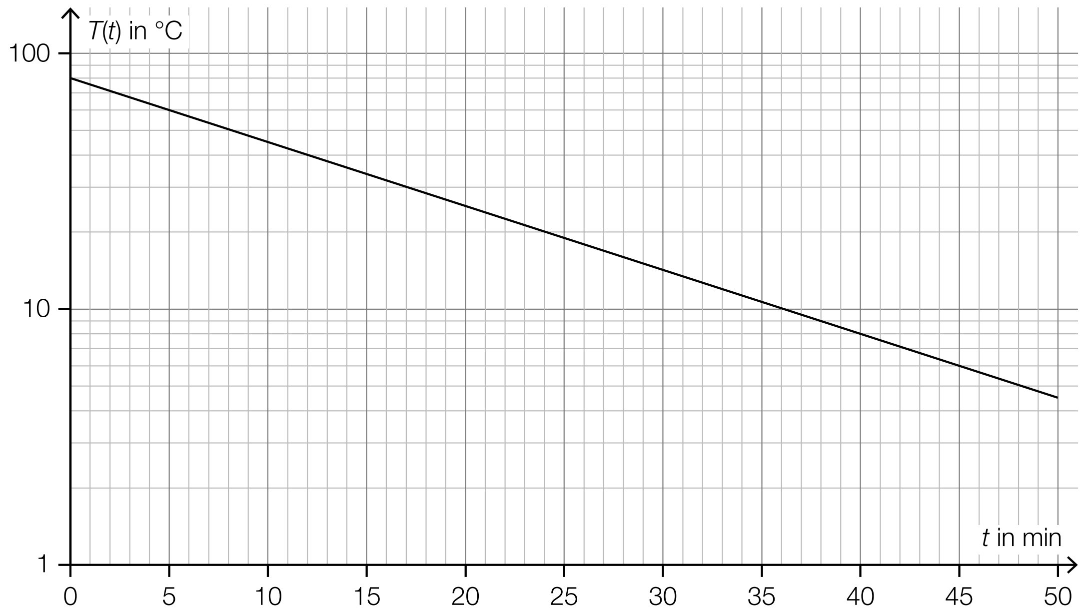
$T(45) = 6$
$80 \cdot b^{45} = 6$
$b = \sqrt[45]{\frac{6}{80}} = 0{,}944...$
$T(t) = 37$ *oder* $80 \cdot 0{,}944...^{t} = 37$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 13{,}39...$

Nach rund 13,4 min beträgt die Temperatur der Suppe 37 °C.

c2)



c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion *T*.