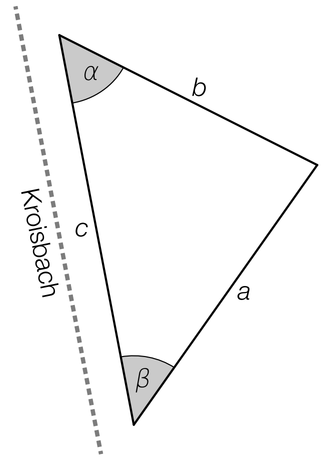
Der Grazbach

Der Kroisbach und der Leonhardbach sind Bäche in Graz, die nach ihrem Zusammenfluss den Grazbach bilden.

a) Vor dem Zusammenfluss zum Grazbach fließt der Kroisbach unter einer Straße. Diese Straße begrenzt zusammen mit zwei anderen Straßen einen dreieckigen Platz mit den Seitenlängen a, b und c. (Siehe nachstehende Abbildung – Ansicht von oben.)



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf. Verwenden Sie dabei a, b und c.

$\alpha =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

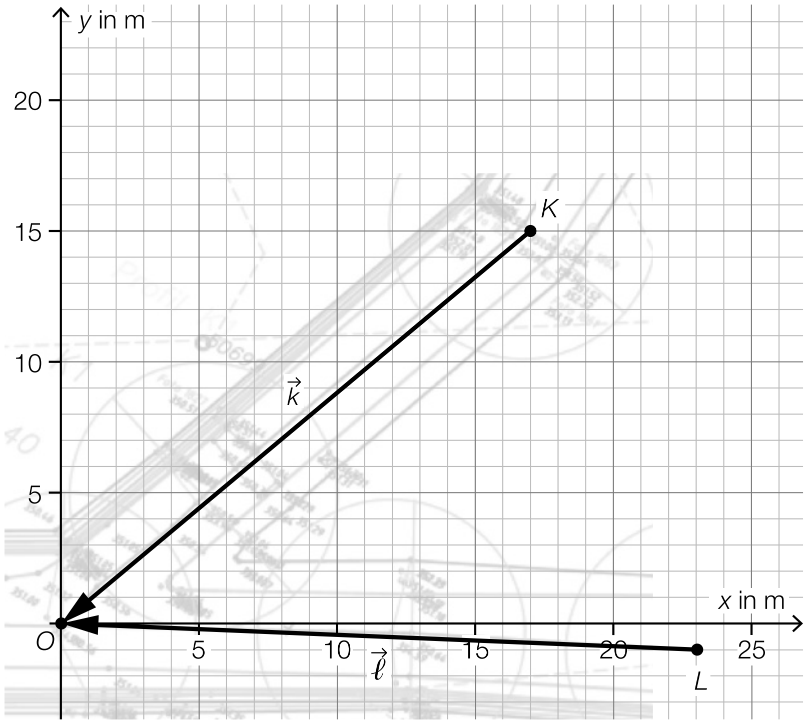
Die folgenden Abmessungen dieses dreieckigen Platzes sind bekannt:
$c = 54$ m, $b = 39{,}6$ m, $\alpha = 51{,}8°$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$\frac{54 \cdot 39{,}6 \cdot \sin(51{,}8°)}{2} \approx 840$ *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel β. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Bereich des Zusammenflusses in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt. Im Koordinatenursprung O fließen die beiden Bäche zusammen.



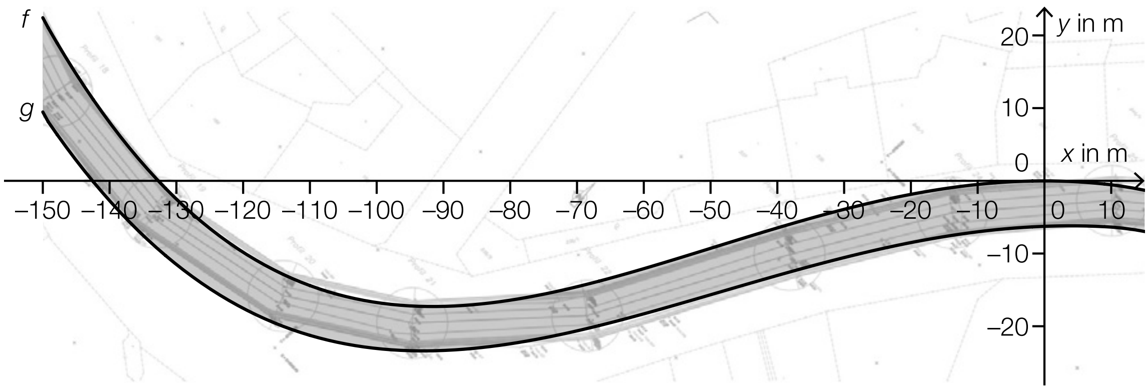
Der Kroisbach fließt vom Punkt P zum Punkt K.

Es gilt: $\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt P ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie denjenigen spitzen Winkel, den die Vektoren $\vec{\ell}$ und $\vec{k}$ miteinander einschließen. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Abschnitt des Kanals des Grazbachs in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt.



Ein Vermesser modelliert die Begrenzungslinien des Kanals im Intervall [–150; 15] mit den Graphen der Funktionen f und g.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche auf.

A = ____ *[0/1 P.]*

Für die Polynomfunktion 4. Grades f gilt: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2$

Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T = (-92{,}2 \mid -17{,}6)$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -133{,}5$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
[0/1/2 P.]

Die Funktion g ist ebenfalls eine Polynomfunktion 4. Grades.

3) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g im Intervall [–150; 15] zutrifft.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

g hat genau 2 Nullstellen.	☐
g ändert genau 1-mal das Monotonieverhalten.	☐
g hat nur negative Funktionswerte.	☐
g hat genau 1 lokale Extremstelle.	☐
g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$

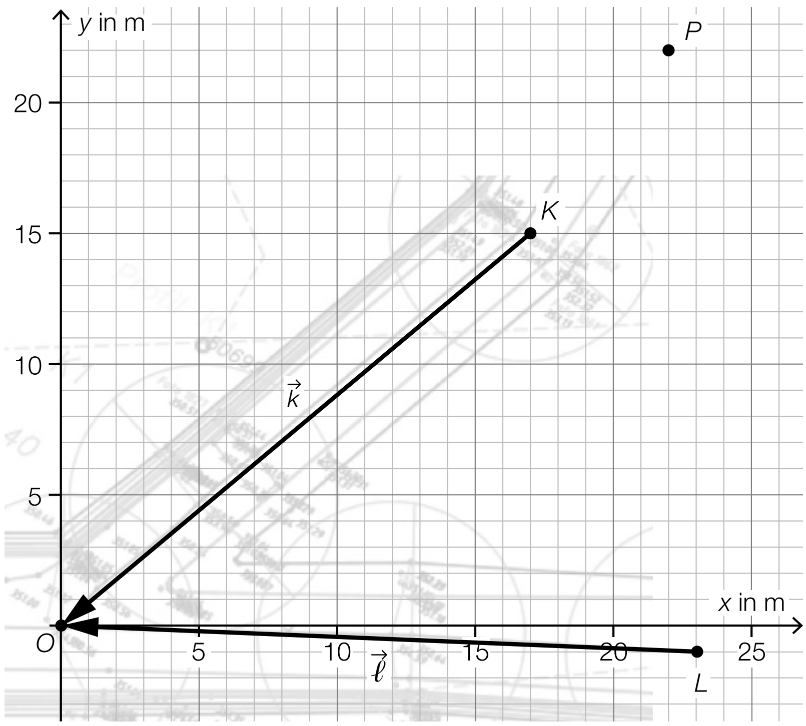
a2) Der Flächeninhalt des dreieckigen Platzes beträgt rund 840 m².

a3) $a = \sqrt{54^2 + 39{,}6^2 - 2 \cdot 54 \cdot 39{,}6 \cdot \cos(51{,}8°)} = 42{,}8...$

$\beta = \arcsin\left(\frac{39{,}6 \cdot \sin(51{,}8°)}{42{,}8...}\right) = 46{,}5...°$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Ergebnisses unter Angabe der zugehörigen Einheit.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels β.

b1)



b2) $\vec{k} = \begin{pmatrix} -17 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -23 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\arccos\left(\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{k}}{|\vec{\ell}| \cdot |\vec{k}|}\right) = 43{,}9...°$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Punktes P.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des spitzen Winkels.

c1) $A = \int_{-150}^{15} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

c2) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x$

I: $f(-92{,}2) = -17{,}6$
II: $f(-133{,}5) = 0$
III: $f'(-92{,}2) = 0$

oder:

I: $a \cdot (-92{,}2)^4 + b \cdot (-92{,}2)^3 + c \cdot (-92{,}2)^2 = -17{,}6$
II: $a \cdot (-133{,}5)^4 + b \cdot (-133{,}5)^3 + c \cdot (-133{,}5)^2 = 0$
III: $4 \cdot a \cdot (-92{,}2)^3 + 3 \cdot b \cdot (-92{,}2)^2 + 2 \cdot c \cdot (-92{,}2) = 0$

c3)

g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.