

Öffentlicher Verkehr in Wien*

Aufgabennummer: B_515

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen.

- b) Die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für öffentliche Verkehrsmittel in Wien lässt sich für den Zeitraum von 2011 bis 2016 näherungsweise durch die Funktion N beschreiben.

$$N(t) = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^t$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2011

$N(t)$... Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten zur Zeit t

a ... Parameter mit $0 < a < 1$

- 1) Erklären Sie, warum der Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) des Graphen der Funktion N nicht vom Parameter a abhängt.

Im Jahr 2015 wurden 700 000 Jahreskarten verkauft.

- 2) Berechnen Sie den Parameter a .

Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion N auch die zukünftige Entwicklung der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten richtig beschreibt.

- 3) Interpretieren Sie die Zahl 815 000 in der obigen Gleichung der Funktion N im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Personen, die ein öffentliches Verkehrsmittel ohne gültige Fahrkarte benützen, werden als *Schwarzfahrer/innen* bezeichnet.

In der nachstehenden Tabelle ist der Anteil der Schwarzfahrer/innen in den öffentlichen Verkehrsmitteln in Wien für verschiedene Jahre angegeben.

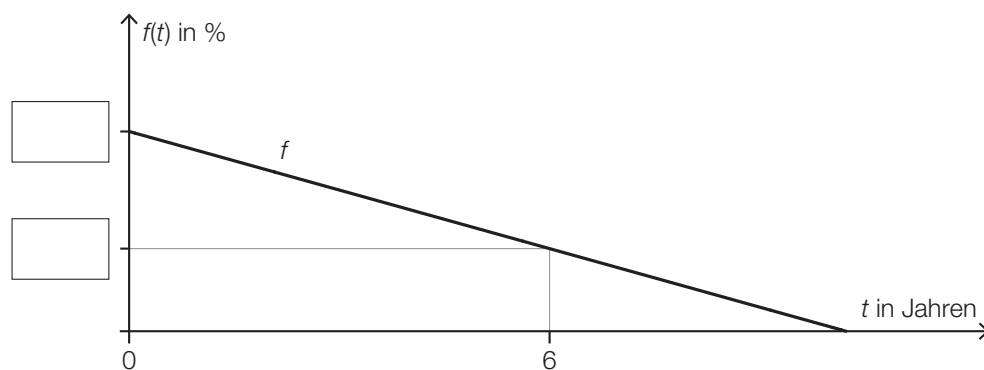
Jahr	2012	2013	2014	2015	2016
Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent bezogen auf alle kontrollierten Personen	2,7	2,4	2,1	1,8	1,7

Datenquelle: <https://wien.orf.at/v2/news/stories/2822992/> [27.10.2017].

Der Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f . Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2012.

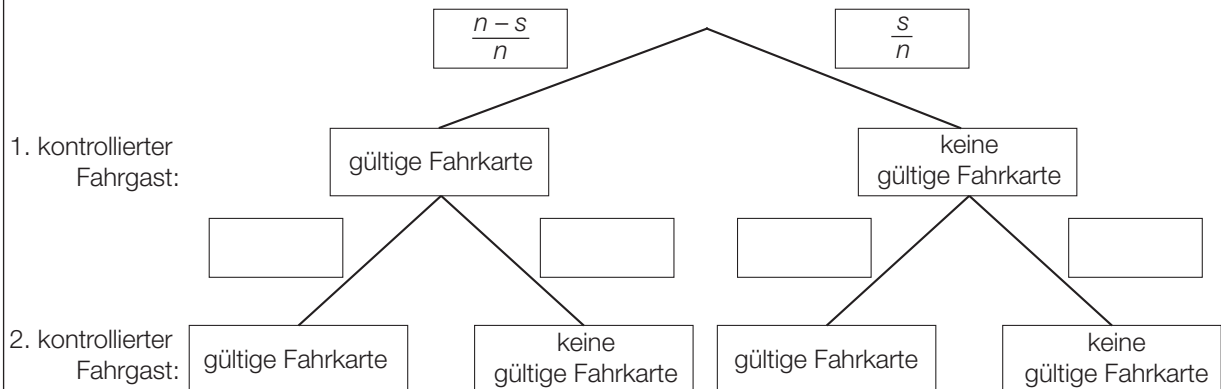
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Regressionsfunktion f dargestellt.



- 2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

d) In einer Straßenbahn befinden sich insgesamt n Fahrgäste, wovon s Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzen. Eine Kontrollorin wählt nacheinander 2 Fahrgäste zufällig aus.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau 1 der beiden kontrollierten Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der diese Wahrscheinlichkeit angibt. [1 aus 5]

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	<input type="checkbox"/>
$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	<input type="checkbox"/>
$\frac{s}{n} \cdot \frac{s-1}{n-1}$	<input type="checkbox"/>

Möglicher Lösungsweg

a1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$365 = 33 \cdot \frac{q_{12}^{12} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{11}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$q_{12} = 1,0151...$$

$$i = q_{12}^{12} - 1 = 0,19818...$$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 19,82 %.

b1) Der Ordinatenabschnitt ist der Funktionswert von N an der Stelle 0. Wegen $a^0 = 1$ ist dieser Ordinatenabschnitt daher unabhängig von a .

$$b2) 700\,000 = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^4 \Rightarrow a = 0,7110...$$

b3) Der Sättigungswert der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten beträgt 815 000.

oder:

Gemäß der Funktion N nähert sich die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für $t \rightarrow \infty$ der Zahl 815 000 beliebig nahe an.

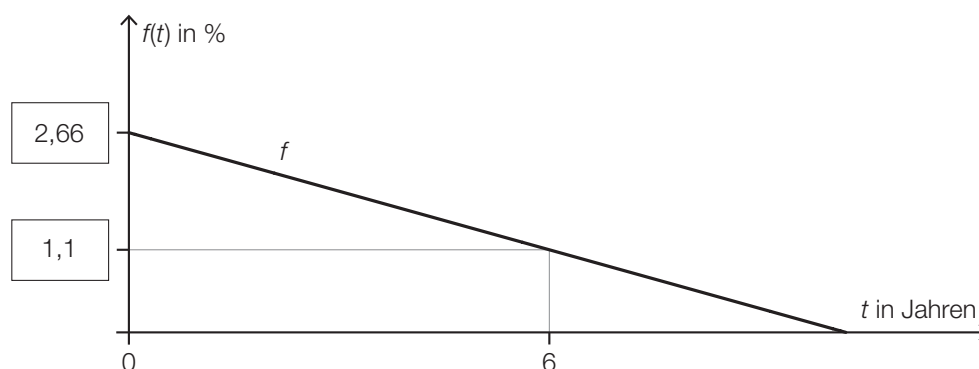
c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = -0,26 \cdot t + 2,66$$

t ... Zeit in Jahren

$f(t)$... Anteil der Schwarzfahrer/innen zur Zeit t in Prozent

c2)



d1)

1. kontrollierter Fahrgast:

2. kontrollierter Fahrgast:

d2)

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes.
- b1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
- b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters a .
- b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
- c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion f .
- c2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
- d1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
- d2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.