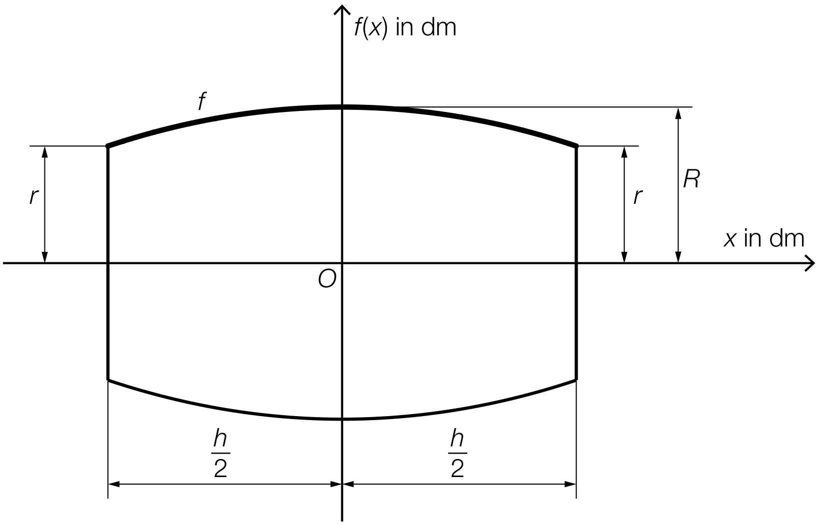
Fässer

Fässer können modellhaft durch Rotation des Graphen einer quadratischen Funktion f im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse beschrieben werden.



r, R, h ... Abmessungen in dm

a) Für das Fass A mit den Abmessungen r_A, R_A und h_A wird die obere Begrenzungslinie durch die Funktion f_A mit $f_A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben.

1) Erklären Sie, warum $b = 0$ gilt. *[0/1 P.]*

Es gilt: $r_A = 2{,}5$ dm, $R_A = 3{,}2$ dm, $h_A = 8$ dm.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten a und c. *[0/1 P.]*

b) Für das Fass B mit den Abmessungen r_B, R_B und h_B wird die obere Begrenzungslinie durch die Funktion f_B beschrieben.

$f_B(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 3$ mit $-4 \leq x \leq 4$
x, $f_B(x)$ ... Koordinaten in dm

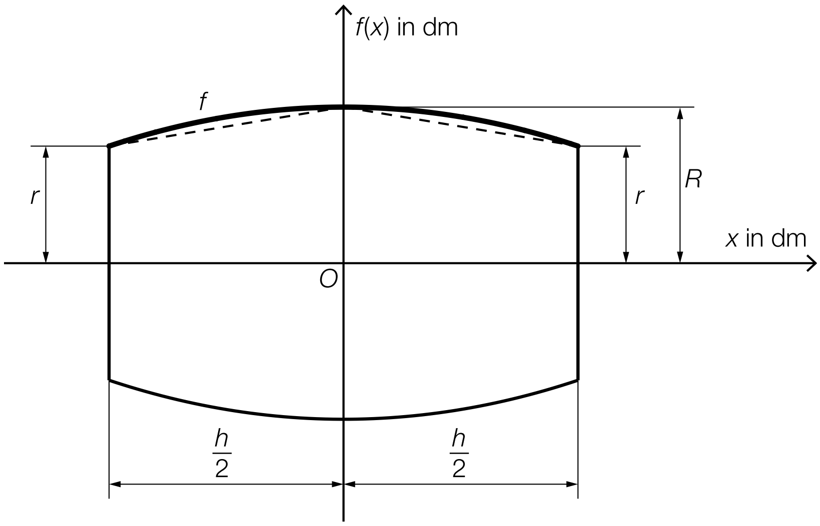
Es gilt: $h_B = 8$ dm.

1) Berechnen Sie das Volumen des Fasses B. *[0/1 P.]*

Jemand behauptet: „Das Volumen des Fasses B lässt sich auch als Volumen eines Zylinders mit der Höhe h_B, dessen Radius das arithmetische Mittel aus r_B und R_B ist, berechnen."

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

c) Um die Länge L des Graphen der Funktion f im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ abzuschätzen, berechnet man die Gesamtlänge L_1 der zwei strichlierten Strecken (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Gesamtlänge L_1 auf.
Verwenden Sie dabei r, R und h.

$L_1 =$ ____ *[0/1 P.]*

Folgende Berechnung wird für das Fass C durchgeführt:

$$\frac{L_1}{L} - 1 = -0{,}015$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes –0,015 im gegebenen Sachzusammenhang.
Beachten Sie dabei insbesondere das Vorzeichen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Graph von f_A ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse.

oder:

An der Stelle $x = 0$ gilt: $f_A'(0) = 0$.

a2) $f_A(0) = 3{,}2$
$c = 3{,}2$

$f_A(4) = 2{,}5$ *oder* $16 \cdot a + 3{,}2 = 2{,}5$
$a = -0{,}04375$

a1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Koeffizienten *a* und *c*.

b1) $V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} (f_B(x))^2 \, \mathrm{d}x = 180{,}95...$
Das Volumen des Fasses *B* beträgt rund 181 dm³.

b2) $\left(\frac{f_B(0) + f_B(4)}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 = \left(\frac{3+2}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 = 157{,}07...$
Da das Volumen des Zylinders rund 157 dm³ beträgt, ist die Behauptung falsch.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Volumens.
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c1) $L_1 = 2 \cdot \sqrt{(R - r)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$

c2) Der Wert –0,015 bedeutet, dass für das Fass *C* die Gesamtlänge L_1 um 1,5 % kleiner als die Länge *L* ist.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang unter Beachtung des Vorzeichens.