

Weltbevölkerung

Die Vereinten Nationen veröffentlichen Daten und Prognosen zur Entwicklung der Weltbevölkerung.

Datenquelle: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2019). World Population Prospects 2019, Online Edition. Rev. 1.

a) Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung gemäß dieser Daten 2,536 Milliarden Menschen.

In einem Modell geht man davon aus, dass die Weltbevölkerung im Zeitraum von 1950 bis 1980 um jeweils 1,9 % pro Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr gewachsen ist.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1950 soll näherungsweise durch die Funktion N_1 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950

$N_1(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1 auf.

$N_1(t) =$ _____ [0/1 P.]

2) Berechnen Sie denjenigen Zeitraum, in dem sich die Weltbevölkerung gemäß diesem Modell jeweils verdoppelt. [0/1 P.]

- b) In der nachstehenden Tabelle ist die Weltbevölkerung für einige ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1980 bis 2020 angegeben.

Jahr	Weltbevölkerung in Milliarden Menschen
1980	4,458
1990	5,327
2000	6,143
2010	6,957
2020	7,795

In diesem Zeitraum ist die Weltbevölkerung annähernd linear gewachsen.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1980 soll näherungsweise durch die lineare Funktion N_2 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1980

$N_2(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

- 1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion N_2 auf.
Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 1980. [0/1 P.]

Für das Jahr 2030 prognostizieren die Vereinten Nationen eine Weltbevölkerung von 8,5 bis 8,6 Milliarden Menschen.

- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob der zugehörige Funktionswert der linearen Funktion N_2 zwischen 8,5 und 8,6 Milliarden Menschen liegt. [0/1 P.]

- c) Die Fertilitätsrate (Anzahl der Lebendgeburten pro Frau) ist seit 1970 weltweit gesunken und lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$$f(t) = 2 + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970

$f(t)$... Fertilitätsrate zur Zeit t

b, λ ... positive Parameter

- 1) Argumentieren Sie mathematisch, dass die Fertilitätsrate gemäß diesem Modell für $t \rightarrow \infty$ dem Wert 2 beliebig nahe kommt. [0/1 P.]

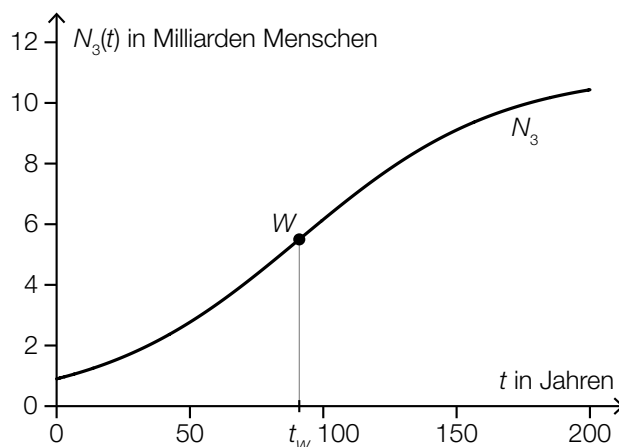
- d) Die Vereinten Nationen gehen davon aus, dass sich die Weltbevölkerung langfristig stabilisieren wird.

Die zeitliche Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1900 kann näherungsweise durch die logistische Funktion N_3 beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1900

$N_3(t)$... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden Menschen

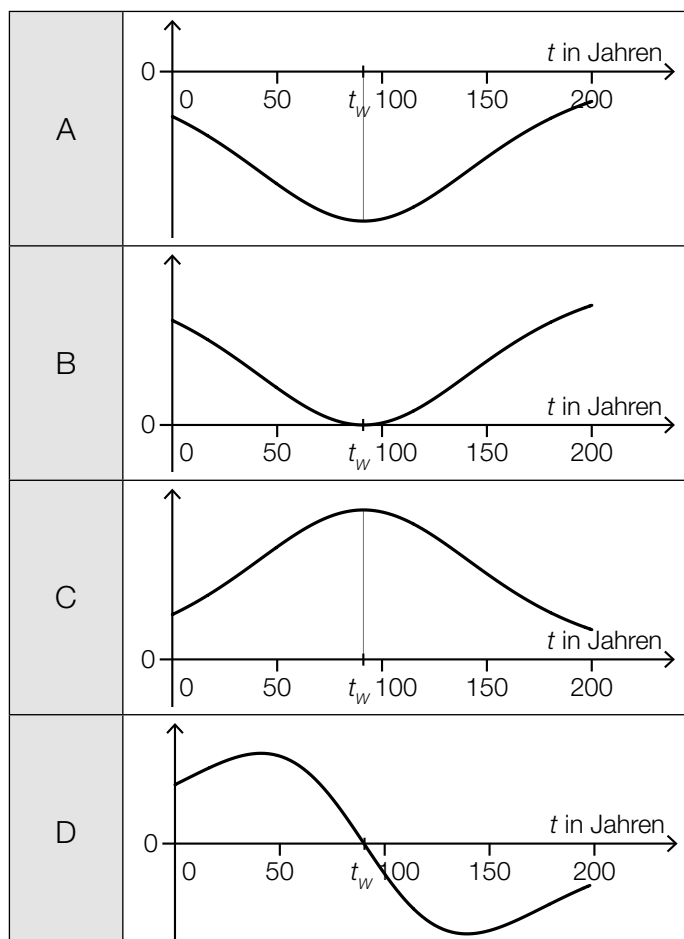
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von N_3 mit dem Wendepunkt W dargestellt.



- 1) Ordnen Sie den beiden Ableitungen jeweils den zutreffenden Graphen aus A bis D zu.

[0/1 P.]

1. Ableitung von N_3	<input type="checkbox"/>
2. Ableitung von N_3	<input type="checkbox"/>



Möglicher Lösungsweg

a1) $N_1(t) = 2,536 \cdot 1,019^t$

a2) $2 = 1,019^t$
 $t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,019)} = 36,8\dots$

Gemäß diesem Modell verdoppelt sich die Weltbevölkerung nach jeweils rund 37 Jahren.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion N_1 .

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Verdoppelungszeit.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$N_2(t) = 0,083 \cdot t + 4,475 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

b2) $N_2(50) = 8,627\dots$

Der zugehörige Funktionswert der linearen Funktion N_2 liegt nicht zwischen 8,5 und 8,6 Milliarden Menschen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion N_2 .

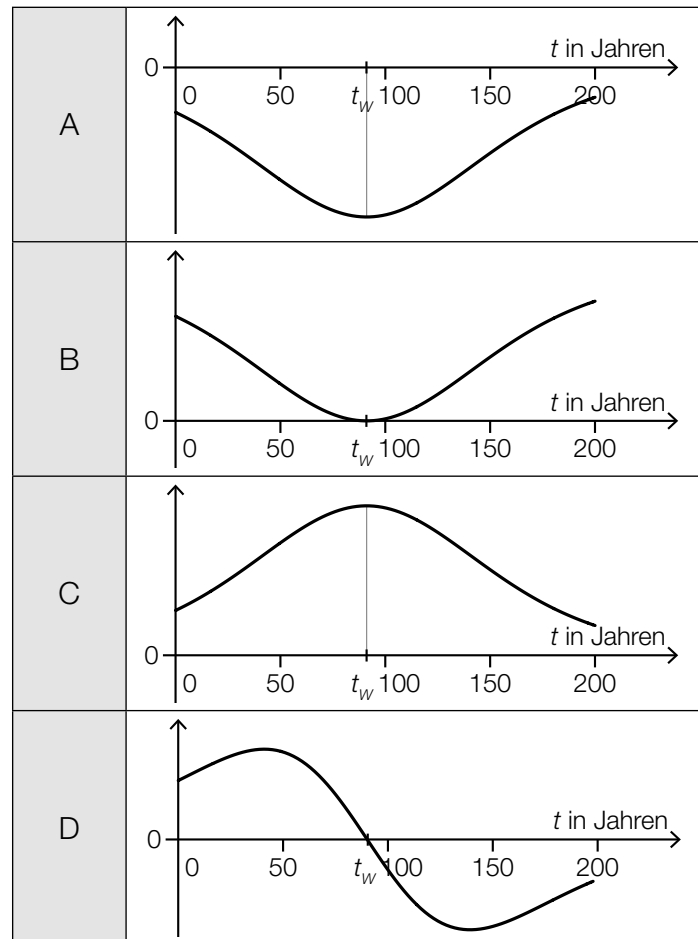
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c1) Für $t \rightarrow \infty$ geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 0, damit geht auch $b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 0 und $f(t)$ geht gegen 2.

c1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

d1)

1. Ableitung von N_3	<input type="text" value="C"/>
2. Ableitung von N_3	<input type="text" value="D"/>



d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.