Kalt – warm (1)*

Aufgabennummer: B_394

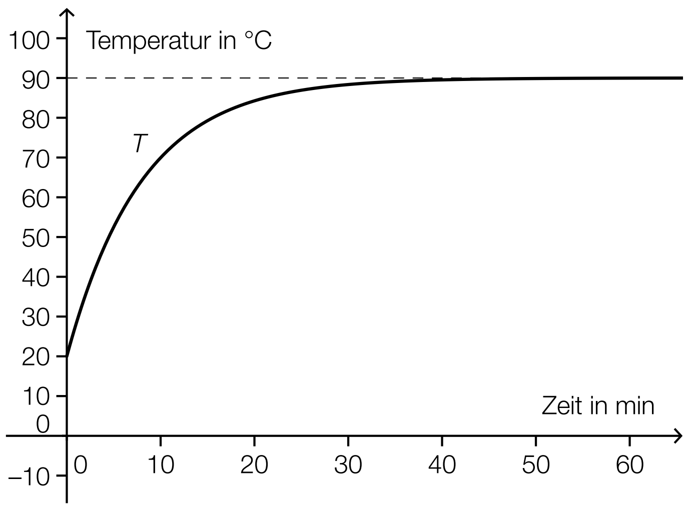
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a.
– Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t)\,\mathrm{d}t = 60\text{ °C}$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Temperaturverlauf von abkühlendem Wasser wird durch die Funktion T beschrieben:

$T(t) = 8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur des Wassers zur Zeit t in °C

– Stellen Sie den Temperaturverlauf in den ersten 5 Stunden grafisch dar.
– Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von T zur Zeit $t = 0$ auf.

Die Tangente soll zur näherungsweisen Beschreibung des Temperaturverlaufs verwendet werden. Dabei werden Abweichungen von maximal 2 °C toleriert.

– Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem die Abweichung maximal 2 °C beträgt.

c) Folgende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit:

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T - T_U)$ mit $T > T_U$

t ... Zeit
T ... Temperatur
T_U ... Umgebungstemperatur (konstant)
k ... Konstante

Dabei nähert sich die Temperatur T des abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur T_U.

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, welches Vorzeichen k haben muss.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
– Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $T(0) = T_0$.

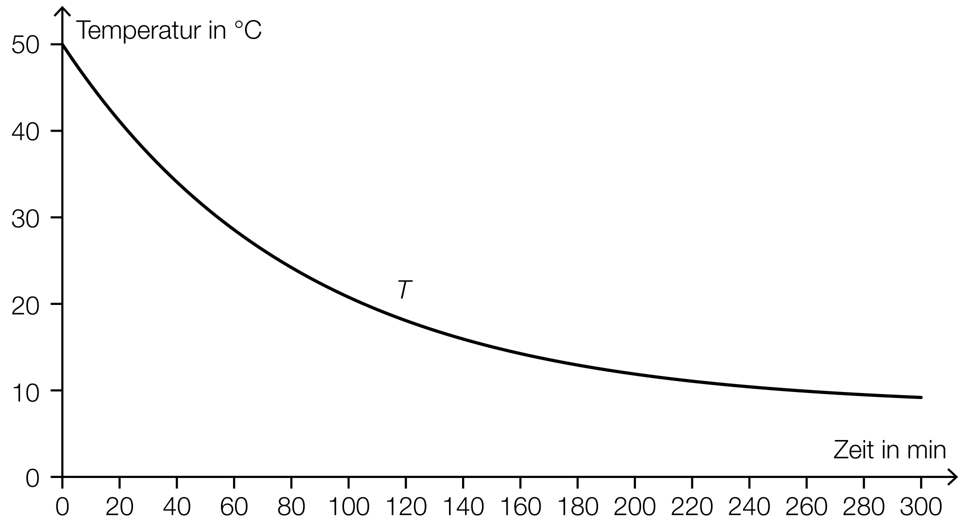
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $a = 70$

Im Intervall [0; b] beträgt die mittlere Temperatur 60 °C.

b)



Gleichung der Tangente(nfunktion): $f(t) = k \cdot t + d$
$k = T'(0) = -0{,}5$
$d = 50$
$\Rightarrow \quad f(t) = -0{,}5 \cdot t + 50$

$8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} - (-0{,}5 \cdot t + 50) = 2$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz für $t > 0$: $t = 27{,}3\ldots$
Zeitintervall: [0; 27]

c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein.
Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$$

$$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt \quad \left(\text{oder: } \frac{T'}{T - T_U} = k\right)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt \quad \left(\text{oder: } \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U}\, dt = k \cdot \int dt\right)$$

$$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$$

allgemeine Lösung: $T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$

$T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_U + C$
$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Konstanten *a*
1 × C2: für die richtige Interpretation der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B1: für das richtige Darstellen des Temperaturverlaufs in den ersten 5 Stunden
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls

c) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lösung mit $T(0) = T_0$