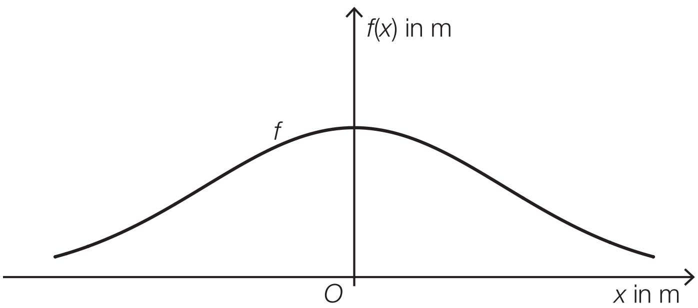
Grünbrücken*

Aufgabennummer: B_495

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Über Grünbrücken können wildlebende Tiere stark befahrene Verkehrswege wie z. B. Autobahnen gefahrlos überqueren.

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Grünbrücke modellhaft dargestellt.



Die Höhe der Grünbrücke kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... positive Parameter

Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 0$ m eine Höhe von 10 m.
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 20$ m eine Höhe von 6 m.

1) Geben Sie den Parameter a an.
2) Berechnen Sie den Parameter b.
3) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Steigung von f am größten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Verschiedene Formen von Grünbrücken sollen modelliert werden. Dazu wird der Graph der Funktion g untersucht.

$g(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x+c)^2}$ mit $a, b, c > 0$

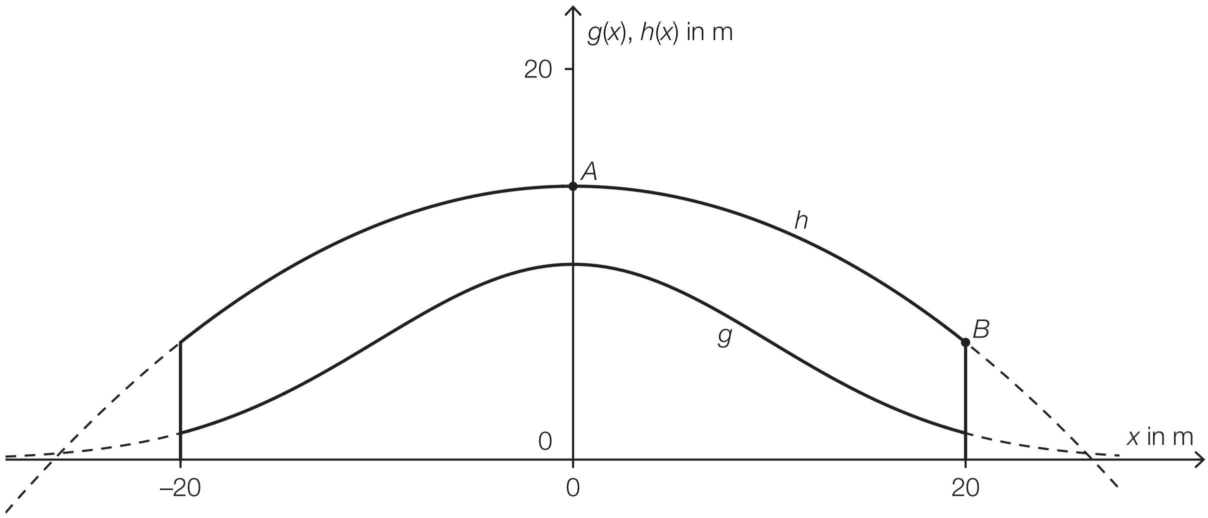
1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils die zutreffende Fortsetzung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Eine Vergrößerung des Parameters a bewirkt, ...	
Eine Vergrößerung des Parameters c bewirkt, ...	

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c) Als Geländer einer Grünbrücke ist eine Betonmauer geplant.

Die obere und die untere Begrenzungslinie der Betonmauer (in der Seitenansicht) können im Intervall [–20; 20] näherungsweise durch den Graphen der Funktion h und den Graphen der Funktion g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.
$\int_0^{20} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{20} g(x)\,\mathrm{d}x$

Die Funktion h ist eine Polynomfunktion 2. Grades.

Der Scheitelpunkt von h ist $A = (0\,|\,14)$. Weiters verläuft h durch den Punkt $B = (20\,|\,6)$.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Funktion h.
3) Berechnen Sie die Länge des Graphen von h im Intervall [–20; 20].

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 10$

a2) $f(20) = 6$ *oder* $6 = 10 \cdot e^{-400 \cdot b}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$b = 0{,}001277...$

a3) $f''(x) = 0$ *oder* $-2 \cdot a \cdot b \cdot e^{-b \cdot x^2} \cdot (1 - 2 \cdot b \cdot x^2) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = -19{,}78...$; $x_2 = 19{,}78...$

Die Steigung von f ist an der Stelle $x \approx -19{,}8$ m am größten.

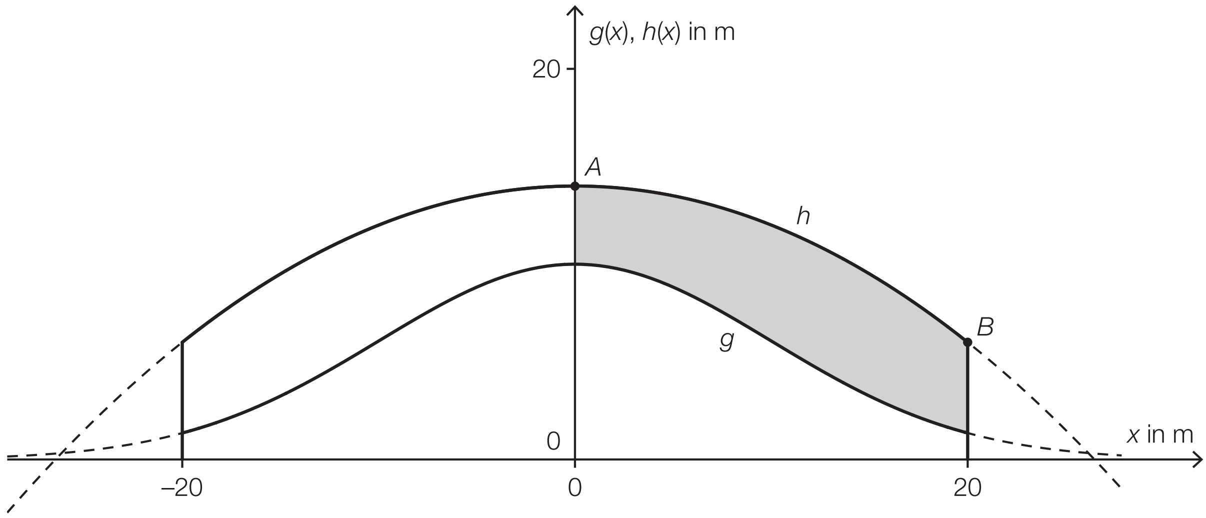
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 \approx -19{,}8$ die Lösung $x_2 \approx 19{,}8$ angegeben ist.

b1)

Eine Vergrößerung des Parameters *a* bewirkt, ...	A
Eine Vergrößerung des Parameters *c* bewirkt, ...	B

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c1)



c2) $h(x) = a \cdot x^2 + c$

$h(0) = 14 \quad \Rightarrow \quad c = 14$

$h(20) = 6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 400 + 14 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}02$

c3) $s = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$s = 43{,}929...$

Die Länge des Graphen von h beträgt rund 43,93 m.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Angeben des Parameters a

a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters b

a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Stelle mit der größten Steigung
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 = -19{,}8$ die Lösung $x_2 = 19{,}8$ angegeben ist.

b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen

c1) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen

c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Länge des Graphen von h im gegebenen Intervall