LÖSUNGEN ÜBUNGSSCHULARBEIT 5. Jahrgang 24/25

Name:
Klasse:

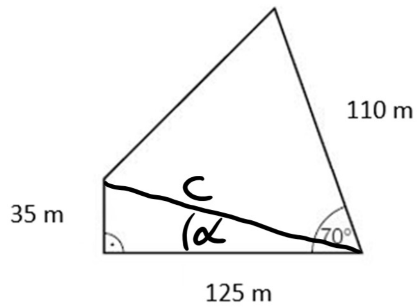
Ü

Aufgabe 1

Grund und Boden

a) Der Grundriss eines Grundstücks hat die untenstehend dargestellte Form:

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks. *[0/1/2 P.]*



$c = \sqrt{125^2 + 35^2} \simeq 129{,}8..\ m$

$\tan(\alpha) = \frac{35}{125}$

$\rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{35}{125}\right) = 15{,}64°$

$70° - \alpha = 54{,}3578° = \beta$

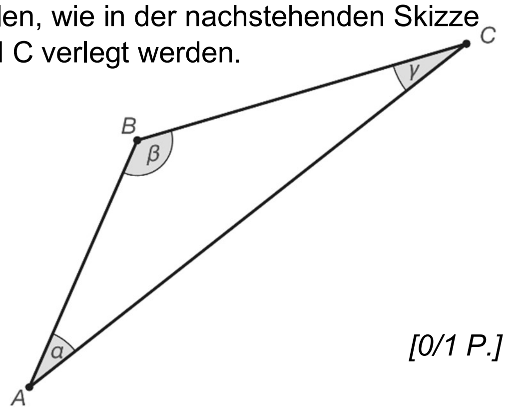
$A = \frac{35 \cdot 125}{2} + \frac{129{,}8 \cdot 110 \cdot \sin(54{,}3..°)}{2} \simeq \underline{\underline{7989{,}16}}\ m^2$

b) Auf dem Grundstück werden Rohrleitungen gelegt. Die Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, geradlinig zwischen den Punkten A, B und C verlegt werden.

Die folgenden Daten des Dreiecks ABC sind bekannt:

$\overline{AB} = 48\,m$, $\overline{AC} = 82\,m$, $\gamma = 25°$.

Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel.



1) Berechnen Sie, den Winkel β aus den obigen Angaben. *[0/1 P.]*

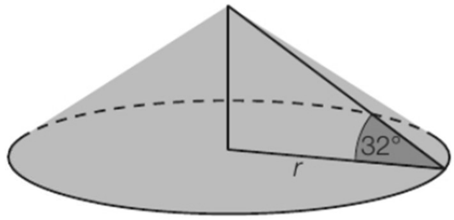
$\frac{82}{\sin(\beta)} = \frac{48}{\sin(\gamma)}$

$\sin(\beta_1) = \frac{\sin(25°)}{48} \cdot 82 \rightarrow \beta_1 = 46{,}2°$

$\beta = 180° - \beta_1 = \underline{\underline{133{,}8°}}$

c) Beim Ausheben des Erdmaterials wird ein Teil dieser Erde zu einem Kegel aufgeschüttet. Dieser Schüttkegel weist einen Neigungswinkel von 32° auf (siehe Abbildung).

1) Berechnen Sie den Radius r des Schüttkegels mit einem Volumen von 250 m³. *[0/1 P.]*



$\tan(32^\circ) = \frac{h}{r} \rightarrow h = r \cdot \tan(32^\circ)$

$250 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot \tan(32^\circ)}{3} \rightarrow r \approx \underline{\underline{7{,}26\,m}}$

d) Im Jahr 2013 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 15 Hektar neu verbaut.
Im Jahr 2017 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 12,4 Hektar neu verbaut.

1) Interpretieren Sie den Wert des nachfolgenden Terms im gegebenen Sachzusammenhang: *[0/1 P.]*

$\frac{12{,}4-15}{15} \approx -0.173$

Im Jahr 2017 war der Wert der in Ö. täglich durchschnittlich neu verbauten Fläche um rund 17,3% geringer als im Jahr 2013.

Die zeitliche Entwicklung der Fläche, die in Österreich täglich durchschnittlich neu verbaut wird, kann modellhaft durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit t = 0 für das Jahr 2013
f(t) ... täglich durchschnittlich neu verbaute Fläche zur Zeit t in Hektar

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf. *[0/1 P.]*

$f(0) = 15 = d \qquad k = \frac{12{,}4-15}{4} = -0{,}65$

$f(t) = -0{,}65 \cdot t + 15$ (oder über Glg sys !)

e) Im Jahr 2015 wurde in Deutschland täglich durchschnittlich eine Fläche von 0,6 km² neu verbaut. Ein typisches Fußballfeld ist rechteckig und hat die Seitenlängen 68 m und 105 m.

1) Berechnen Sie, wie viele solcher Fußballfelder insgesamt eine Fläche von 0,6 km² haben. *[0/1 P.]*

$0{,}6\,km^2 \qquad 68 \cdot 105\,m^2 = 7140\,m^2$

$\frac{600\,000\,m^2}{7140\,m^2} \approx 84$ Fbfelder

f) Die Fläche, die für landwirtschaftliche Nutzung verwendet wird, wird als Agrarfläche bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung der Agrarfläche Österreichs kann modellhaft durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$

t ... Zeit in Jahren mit t = 0 für den Beginn des Jahres 2017
N(t) ... Agrarfläche Österreichs zur Zeit t in Hektar
N_0 ... Agrarfläche Österreichs zu Beginn des Jahres 2017 in Hektar

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,995 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

⇒ pro Jahr sinkt die Agrarfläche Österreichs auf 99,5 % des Vorjahreswertes
(oder ... Verringerung um 0,5 %)

Ein Schüler möchte die Funktionsgleichung mithilfe der Basis *e* (Eulersche Zahl) darstellen.

2) Ergänzen Sie richtig: *[0/1 P.]*

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^{\,t} = N_0 \cdot e^{\boxed{-0{,}005013} \cdot t}$$

$e^{\lambda} = 0{,}995 \Rightarrow \lambda = -0{,}005013$

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die relative Änderung der Agrarfläche Österreichs für jedes Zeitintervall [0; T] berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$-0{,}005 \cdot T$	☐
$0{,}995^T - 1$	☒
$0{,}995^T$	☐
$0{,}005^T$	☐
$1 - 0{,}005^T$	☐

Erklärung: $\dfrac{N_0 \cdot 0{,}995^T - N_0}{N_0} = \dfrac{\cancel{N_0} \cdot (0{,}995^T - 1)}{\cancel{N_0}}$

g) Auf einer Agrarfläche werden Sträucher ausgepflanzt. Die Höhe eines Strauches nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h_1 beschrieben.

$h_1(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ mit $0 \leq t < 55$

t … Zeit in Tagen
$h_1(t)$ … Höhe des Strauches zur Zeit t in m

Die Funktionsgleichung der Funktion h_1 wurde fehlerhaft logarithmiert:

$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e)$

1) Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig. *[0/1 P.]*

$$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot t \cdot \lg(e)$$

$$\left(\text{mit } \ln: \quad \ln(h_1(t)) = \ln(0{,}08) + 0{,}03 \cdot t \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}\right)$$

h) Bei einem Waldgrundstück wird beobachtet, dass sich aufgrund von Schädlingen der Holzbestand dieses Waldes um ca. 2 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr verringert. Zum Zeitpunkt t=0 wurde ein Holzbestand von 36 000 m³ festgestellt.

1) Stellen Sie mit den obigen Informationen eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f(t) auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt. *[0/1 P.]*

$$f(t) = 36000 \cdot 0{,}98^t$$

2) Berechnen Sie wie lange es (theoretisch) dauern würde bis der Holzbestand dieses Waldes auf die Hälfte gesunken ist. *[0/1 P.]*

$$\frac{1}{2} = 0{,}98^t \rightarrow t \approx 34 \text{ Jahre}$$

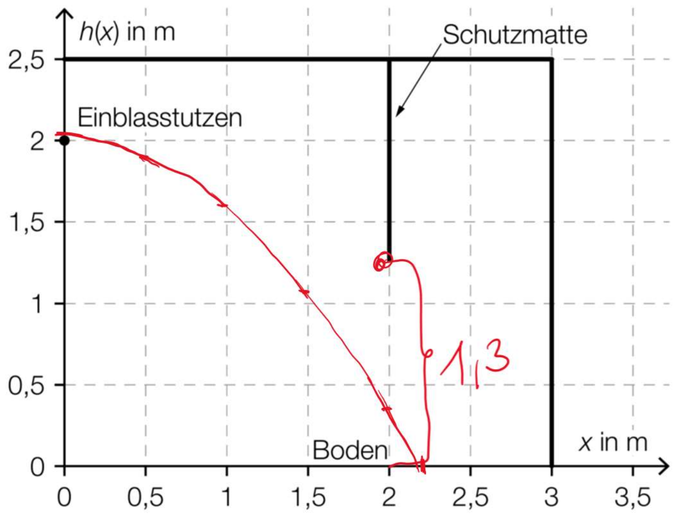
Aufgabe 2

Heizung und Stromversorgung

a) Familie Berger hat eine Heizung, die mit Pellets (kleines kugelförmiges Heizmaterial) betrieben wird. Bei der Lieferung werden die Pellets in einer Höhe von 2 m durch einen Einblasstutzen in den Lagerraum waagrecht eingeblasen. Eine aufgehängte Schutzmatte soll dabei verhindern, dass die Pellets brechen. Die Flugbahn eines Pellets kann modellhaft durch den Graphen der folgenden quadratischen Funktion h(x) beschrieben werden: $h(x) = -\frac{5 \cdot x^2}{{v_0}^2} + 2$

x ... waagrechte Entfernung vom Einblasstutzen in m
h(x) ... Flughöhe eines Pellets über dem Boden bei der Entfernung x in m
v_0 ... Einblasgeschwindigkeit in m/s

1) Zeichnen Sie in das nachstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion h für eine Einblasgeschwindigkeit von v_0= 3,5m/s. *[0/1 P.]*



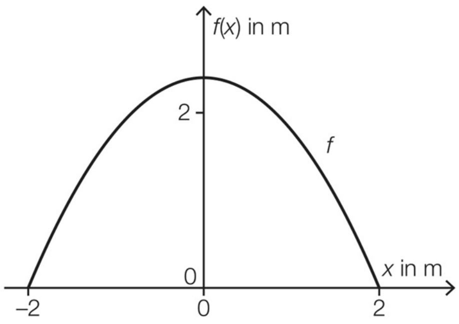
x	h(x)
0	2
0,5	1,888..
1	1,59
1,5	1.08
2	0.36
2,21	0

Bei einer anderen Einblasgeschwindigkeit trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der 1,2 m langen Schutzmatte.

2) Bestimmen Sie diese Einblasgeschwindigkeit. *[0/1 P.]*

$P(2|1,3)$ $\quad 1,3 = -\frac{5 \cdot 2^2}{{v_0}^2} + 2 \xrightarrow[\text{Solve}]{} v_0 \simeq 5,345..$ m/s

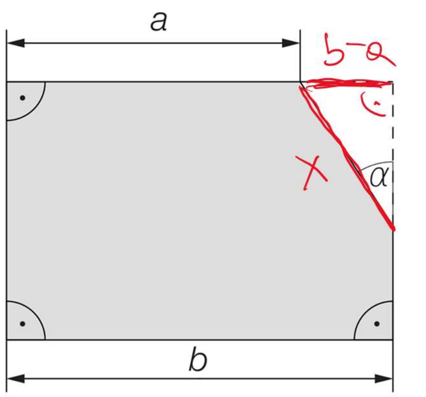
b) Die Heizungsanlage von Familie Berger befindet sich in einem Kellergewölbe dessen Querschnitt mithilfe einer quadratischen Funktion f mit f(x)= a·x² + b·x + c beschrieben werden kann. (siehe Abbildung)



1) Kreuzen Sie die für die Koeffizienten von f zutreffenden Bedingungen an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☒
$a > 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c < 0$	☐
$a < 0,\ b < 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$	☐

c) Die Pellets werden in einem Lagerraum mit folgendem Grundriss gelagert:



1) Zeichnen Sie diejenige Länge x ein, für die $x = \frac{b-a}{\sin(\alpha)}$ gilt. *[0/1 P.]*

$$\sin(\alpha) = \frac{b-a}{x}$$

d) Der Raum für die Pellets muss beheizt werden, um eine trockene Lagerung zu gewährleisten. Die Raumtemperatur kann durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 6 \cdot (4 - e^{-\lambda \cdot t})$

t ... Heizdauer in h
T(t) ... Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung welche Raumtemperatur langfristig im Lagerraum erreicht wird. *[0/1 P.]*

Wenn t gegen unendlich geht, geht der Ausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen Null und der Term in der Klammer geht gegen 4. Durch die Multiplikation mit 6 strebt der Funktionswert (die Raumtemp.) langfristig gegen 24 ° C.

e) In der Gemeinde von Familie Berger werden Überlegungen angestellt, bei der Stromversorgung auch auf den Einsatz von Windrädern zu setzen.

Die vom Hersteller eines Windrads angegebene Nennleistung kann in einer vereinfachten Form durch folgende Formel berechnet werden:

$P_N = c \cdot A$

P_N ... Nennleistung in Megawatt (MW)
A ... Flächeninhalt der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche in Quadratmetern (m²)

$c = 0{,}169 \cdot 10^{-3}$ MW/m²

Ein Windrad hat eine Nennleistung von 0,85 MW.

1) Berechnen Sie den Durchmesser der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche. *[0/1 P.]*

$$0{,}85 = 0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \underbrace{A}_{r^2 \cdot \pi}$$

$$r^2 = \frac{0{,}85}{0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \pi} \Rightarrow r \approx 40{,}01\ m$$

$$r^2 = 1600{,}97\ m^2$$

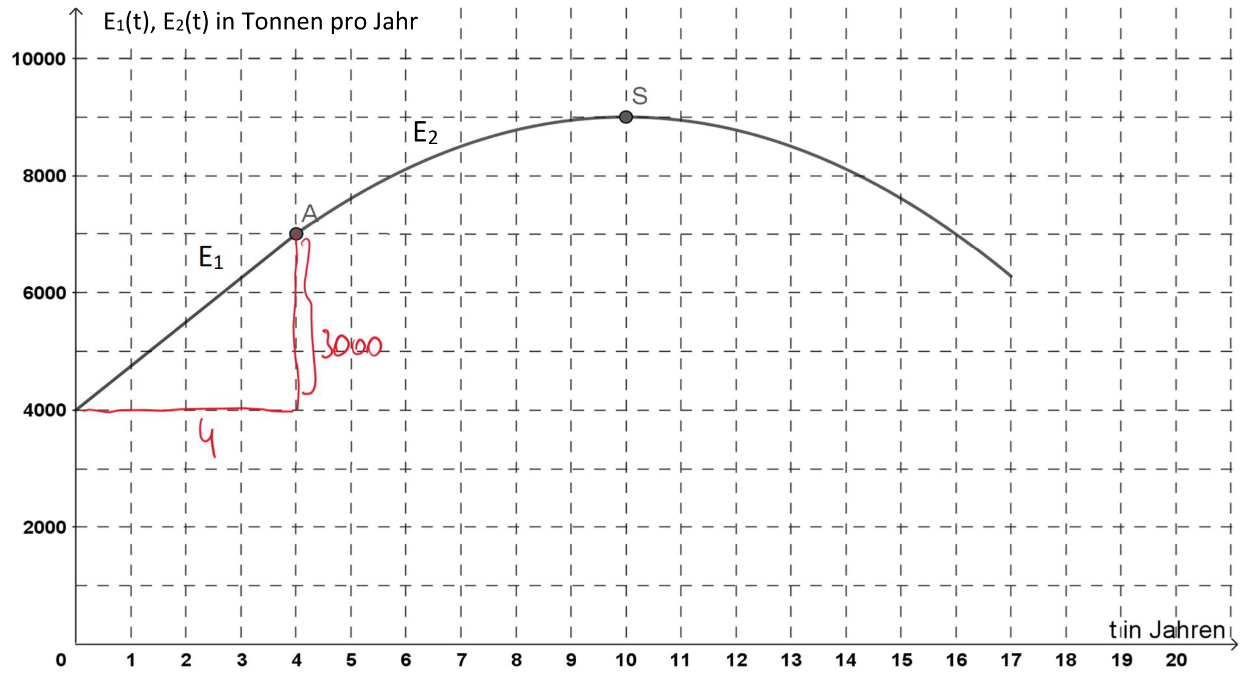
$$d = 2r \approx \underline{\underline{80{,}02\ m}}$$

Aufgabe 3

Umweltprobleme

a) Die durch den Verkehr hervor gerufenen Feinstaubemissionen stellen eine massive Belastung für Mensch und Umwelt dar.

Für ein bestimmtes Gebiet kann die Entwicklung der Emissionen durch die Funktionen E_1 und E_2 modelliert werden, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



t … Zeit nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 17$
$E_1(t)$, $E_2(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

Die Funktion E_1 verläuft in den ersten 4 Jahren linear und die Funktion E_2 ab dem Zeitpunkt t=4 quadratisch, wobei der Scheitel in S liegt.

1) Ergänzen Sie mithilfe der Abbildung die Funktionsgleichung für den linearen Abschnitt von $E_1(t)$: *[0/1 P.]*

$$E_1(t) = \underline{750 \cdot t + 4000} \qquad \text{für} \quad 0 \leq t < 4$$

$k = \frac{3000}{4} = 750 \qquad d = 4000$

2) Berechnen Sie mithilfe der Abbildung unter Verwendung der Punkte A und S die Koeffizienten des quadratischen Funktionsabschnitts E_2 (für $4 \leq t < 17$) und geben Sie die Funktionsgleichung an. *[0/1/2 P.]*

z.B. Scheitelpunktform $E_2(t) = a \cdot (t-10)^2 + 9000$

$A \rightarrow 7000 = a \cdot (4-10)^2 + 9000$

$\hookrightarrow a = -\frac{500}{9}$

$$E_2(t) = -\frac{500}{9}(t-10)^2 + 9000 = -\frac{500}{9}t^2 + \frac{10\,000}{9}t + \frac{31000}{9}$$

oder ... mittels Glsys ... Punkt A, S
S als Extrempunkt

...

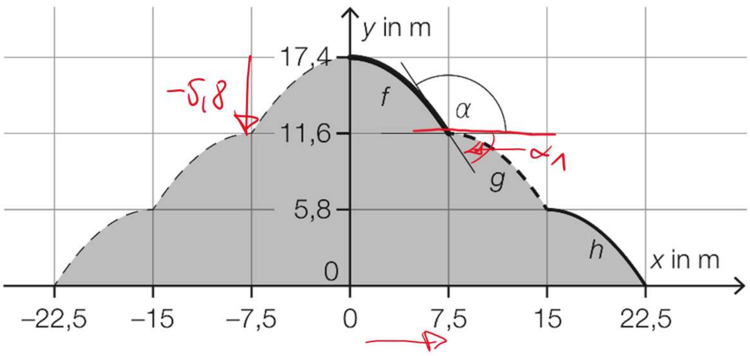
Aufgabe 4

Sehenswürdigkeiten

a) Auf der Insel Mainau steht ein besonderes Gewächshaus (siehe nebenstehende Abbildung).

Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Vorderseite des Gewächshauses in einem Koordinatensystem. Die Vorderseite ist dabei symmetrisch zur y-Achse.



Der Graph der Funktion g ergibt sich durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um 7,5 m nach rechts und 5,8 m nach unten.

1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

$$g(x) = f\left(x \boxed{-} \boxed{7,5}\right) \boxed{-} \boxed{5,8}$$

b) Die Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{87}{5} - \frac{116}{1\,125} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 7,5$$

x, f(x) … Koordinaten in m

An der Stelle x = 7,5 schließt die Tangente an den Graphen von f mit der horizontalen Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein (siehe obige Abbildung).

2) Berechnen Sie den Winkel α. *[0/1 P.]*

$$\alpha = 180° - \underbrace{\arctan(f'(7,5))}_{\alpha_1 \text{ ... Steigungswinkel}}$$

$$\tan(\alpha_1) = f'(7,5) = -1,54...$$

$$\alpha_1 = -57,1152°$$

$$\alpha = 180° - \alpha_1 \approx \underline{\underline{122,88°}}$$

c) Auf der Insel befindet sich eine kleine Waldfläche. Die Höhe der Bäume kann näherungsweise durch die folgende Funktion h beschrieben werden:

$h(d) = 194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(d)$

d … Durchmesser eines Baums auf Brusthöhe in Zentimetern (cm) mit $d \in [3; 14]$
h(d) … Baumhöhe in cm bei einem Durchmesser d

Bei einem Baum wird ein Durchmesser von 5 cm gemessen. Nach einiger Zeit weist der Baum einen Durchmesser von 7 cm auf.

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Baumhöhe bei dieser Durchmesseränderung. *[0/1 P.]*

$\frac{h(7)-h(5)}{2} = 37{,}3$ cm Höhe pro 1 cm Durchmesserzuwachs

d) Der Eiffelturm ist eine Sehenswürdigkeit der Stadt Paris. Die Metallkonstruktion des Eiffelturms hat eine Masse von 7 300 Tonnen, das sind

$\underline{\underline{7300\,t}} = 7{,}3 \cdot 10^3\,\underline{\underline{t}}$

$7{,}3 \cdot 10^{\boxed{6}}$ Kilogramm.

1) Tragen Sie den fehlenden Exponenten in das obige Kästchen ein. *[0/1 P.]*

e) Wimbledon zählt zu den wichtigsten Tennisturnieren der Welt und gilt als weltweite Attraktion im Sport. Das Turnier findet jedes Jahr in Großbritannien statt.

Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert. Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50}$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
f(x) ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Berechnen Sie in welcher horizontalen Entfernung vom Abschlagpunkt der Ball auf den Boden aufkommt. *[0/1 P.]*

$f(x) = 0 \Rightarrow x \underline{\underline{= 21\,m}}$

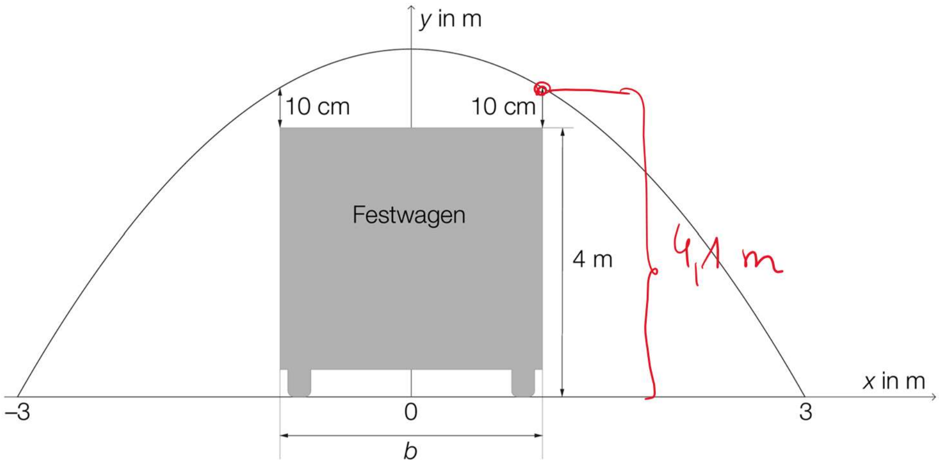
(2. Lösung neg.)

f) Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region. Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben. Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).



1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf. *[0/1 P.]*

$f(x) = 4{,}1 \rightarrow x = \pm 2{,}2$ m

$b = 2 \cdot 2{,}2 = \underline{\underline{4{,}4 \text{ m}}}$

Beurteilung:
ab 25 Punkte Sehr gut
ab 22 Punkte Gut
ab 18 Punkte Befriedigend
ab 14 Punkte Genügend

Auswertung: Erreichte Punktezahl : .... / 28

NOTE:

<14 Punkte Nicht genügend