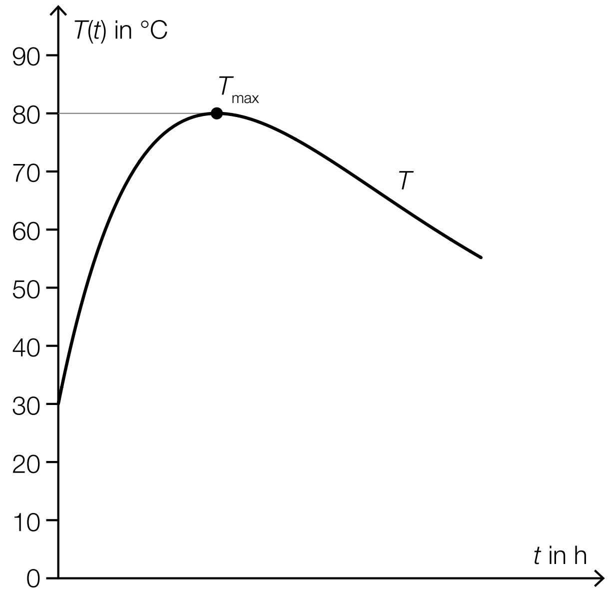
Backofen*

a) Die Temperatur im Inneren eines Bratens nennt man Kerntemperatur. Sie wird mithilfe eines Bratenthermometers gemessen.

Der zeitliche Verlauf der Kerntemperatur lässt sich für einen bestimmten Braten modellhaft durch die Funktion T beschreiben (siehe unten stehende Abbildung).

$T(t) = a + \frac{100}{3} \cdot t \cdot e^{1-c \cdot t}$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn des Bratvorgangs
$T(t)$ ... Kerntemperatur des Bratens zur Zeit t in °C
a, c ... positive Parameter



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung das größtmögliche Zeitintervall, in dem die Kerntemperatur mindestens 70 °C beträgt. *[0/1 P.]*

2) Begründen Sie, warum die Stelle des Maximums von T nicht vom Parameter a abhängt. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter a an.

$a =$ __________ °C *[0/1 P.]*

Die Koordinaten von T_{max} können durch die Parameter a und c beschrieben werden.

Es gilt: $T_{max} = \left(\frac{1}{c} \middle| a + \frac{100}{3 \cdot c}\right)$

4) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter c. *[0/1 P.]*

b) Eine Pizza wird aus dem Backofen genommen und kühlt ab.

Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Pizza kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden. Die momentane Änderungsrate von T ist jeweils proportional zur Differenz zwischen T und der Umgebungstemperatur T_U. Der Proportionalitätsfaktor wird mit k bezeichnet.

t ... Zeit in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
T_U ... Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ ... Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

1) Stellen Sie eine Differenzialgleichung für T auf. *[0/1 P.]*

2) Zeigen Sie, dass eine allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

   $T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$ *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die allgemeine Lösung T_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung an.

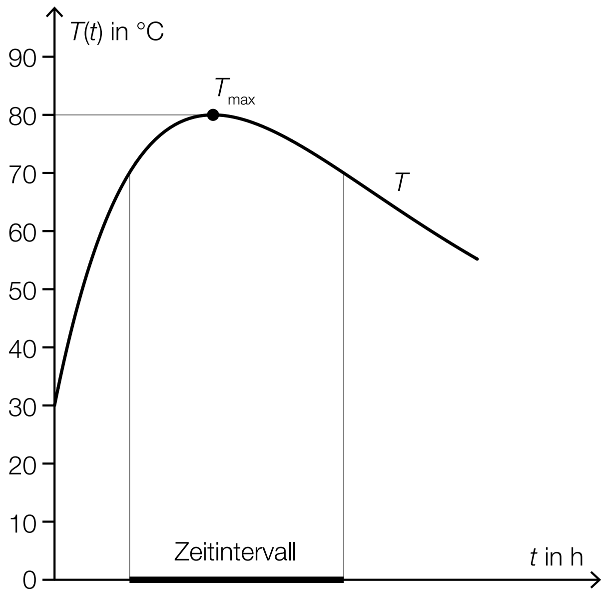
   $T_h(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

Für einen bestimmten Abkühlvorgang gilt: $k = 0{,}026\ \text{min}^{-1}$, $T_U = 20$ °C und $T(0) = 200$ °C.

4) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung für T für diesen Abkühlvorgang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Der Parameter *a* bewirkt nur eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse und beeinflusst die Maximumstelle nicht.

oder:

Die Maximumstelle wird mithilfe der 1. Ableitung berechnet. Beim Ableiten fällt der Parameter *a* weg.

a3) $a = 30$ °C
Toleranzbereich: [29; 33]

a4) $80 = 30 + \frac{100}{3 \cdot c}$

$c = \frac{2}{3}$

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Zeitintervalls.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von *a*.
a4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters *c*.

b1) $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k \cdot (T - T_\mathrm{U})$ *oder* $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_\mathrm{U} - T)$

b2) $\int \frac{\mathrm{d}T}{(T - T_\mathrm{U})} = \int -k\,\mathrm{d}t$ *oder* $\int \frac{T'}{(T - T_\mathrm{U})}\mathrm{d}t = \int -k\,\mathrm{d}t$

$\ln|T - T_\mathrm{U}| = -k \cdot t + C_1$

$T(t) = T_\mathrm{U} + C \cdot e^{-k \cdot t}$

Auch ein Nachweis durch Einsetzen der angegebenen allgemeinen Lösung in die Differenzialgleichung ist als richtig zu werten.

b3) $T_\mathrm{h}(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$

b4) $T(0) = 200$ *oder* $200 = 20 + C \cdot e^{-0{,}026 \cdot 0}$

$C = 180$

$T(t) = 20 + 180 \cdot e^{-0{,}026 \cdot t}$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der speziellen Lösung der Differenzialgleichung.