Kondensator*

Aufgabennummer: B_496

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)
U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V
τ ... Zeitkonstante in s

a) Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = U_0$$

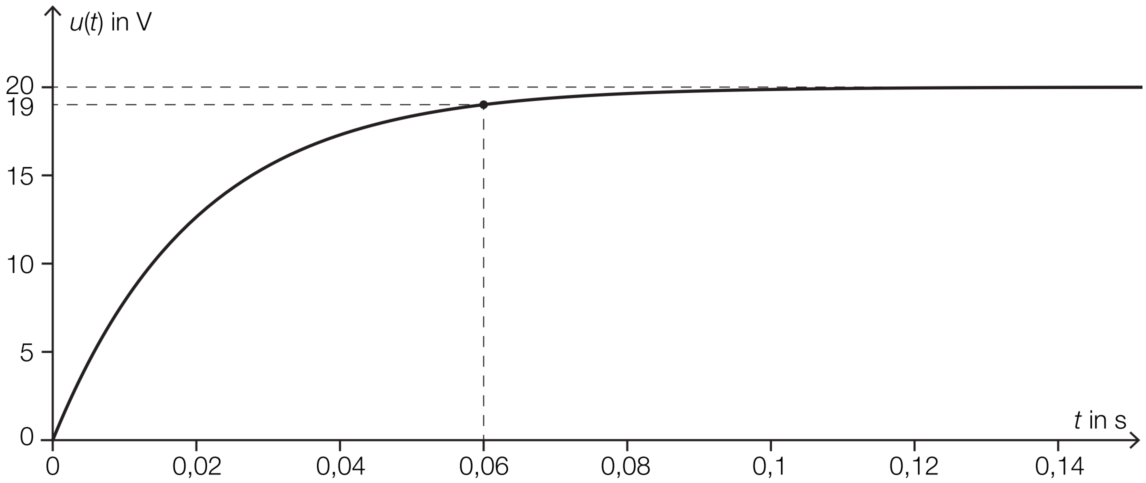
1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ der oben angegebenen Funktion u entspricht.

b) 1) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Kondensatorspannung für $t \to \infty$ asymptotisch gegen U_0 geht.

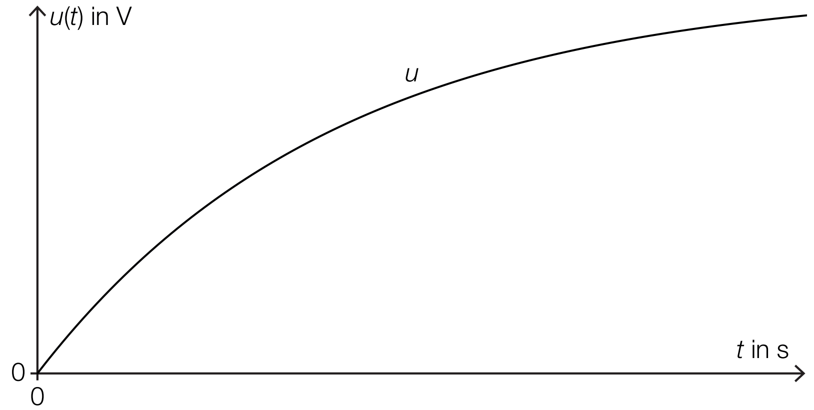
* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung für $U_0 = 20$ V dargestellt.



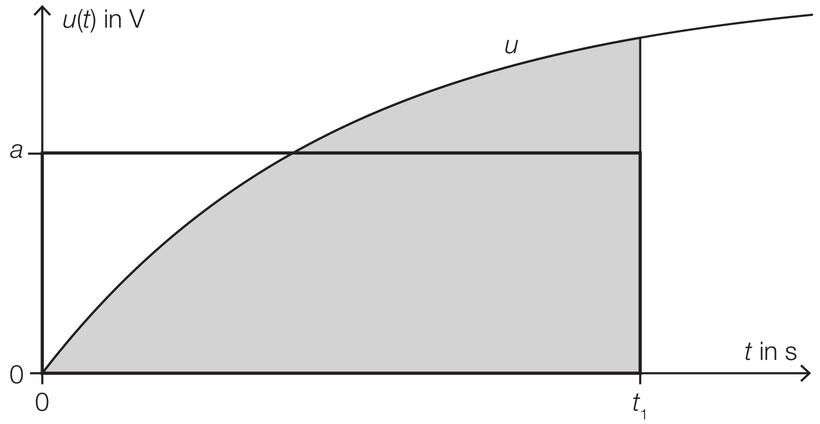
1) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Aufladevorgang dargestellt.



1) Markieren Sie diejenige Stelle, an der die 1. Ableitung von u im dargestellten Bereich den maximalen Wert annimmt.

Der Inhalt der grau markierten Fläche und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen t_1 und a sind gleich groß (siehe nachstehende Abbildung).



2) Beschreiben Sie die Bedeutung von a im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Erstellen Sie mithilfe der Funktion u eine Formel zur Berechnung von a.

a = ______________________

Möglicher Lösungsweg

a1) $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$

$\int \frac{u'}{U_0 - u} dt = \int \frac{1}{\tau} dt \quad \left(oder: \quad \int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{1}{\tau} dt \right)$

$-\ln|U_0 - u(t)| = \frac{t}{\tau} + C_1$

$U_0 - u(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

a2) $u(0) = 0 \quad oder \quad U_0 - C \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = U_0$

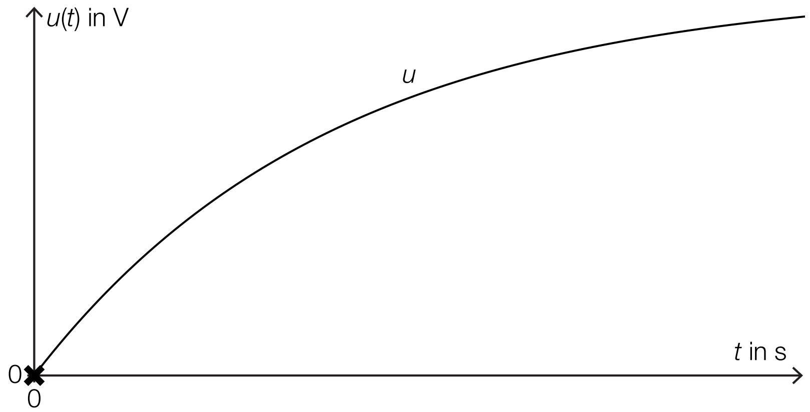
$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

b1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\frac{t}{\tau}}$ gegen null, und damit geht $u(t)$ gegen U_0.

c1) $u(0{,}06) = 19 \quad oder \quad 20 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}06}{\tau}}\right) = 19$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\tau = 0{,}020...$

d1)



d2) a ist die mittlere Kondensatorspannung im Zeitintervall $[0; t_1]$.

d3) $a = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} u(t)\, dt$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*

a2) 1 × D: für das richtige Zeigen

b1) 1 × D: für das richtige Begründen

c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Zeitkonstanten τ

d1) 1 × C1: für das richtige Markieren der Stelle

d2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben der Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang

d3) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel