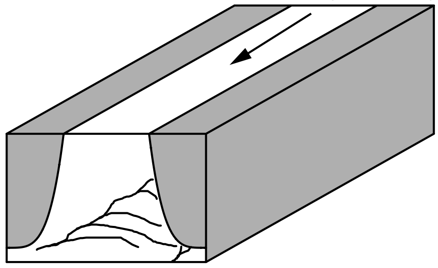
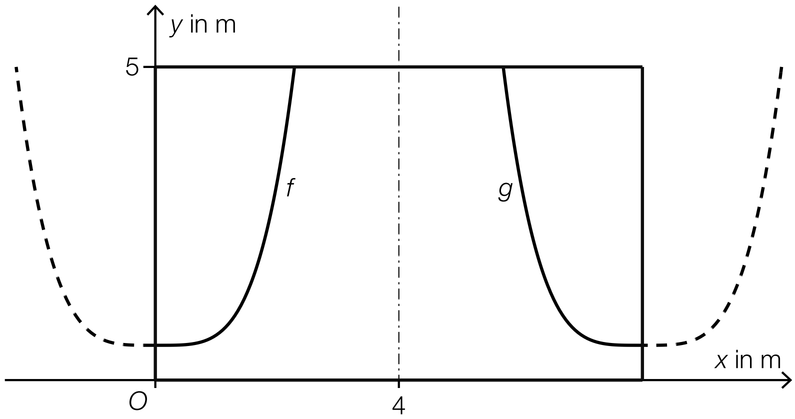
Sandfang einer Kläranlage

In einer Kläranlage strömt das Abwasser langsam durch den sogenannten *Sandfang*. Dabei sinken Sand und kleine Steine auf den Boden und können somit abgeschieden werden (siehe nebenstehende Abbildung).



a) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Sandfangs dargestellt.



Die Graphen der Funktionen f und g beschreiben einen Teil des oben dargestellten Querschnitts.

$f(x) = 0{,}25 \cdot x^4 + 1$

$g(x) = a \cdot (x - u)^4 + v$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m
a, u, v ... Parameter

Die Graphen der Funktionen f und g sind zueinander symmetrisch bezüglich der Senkrechten bei $x = 4$.

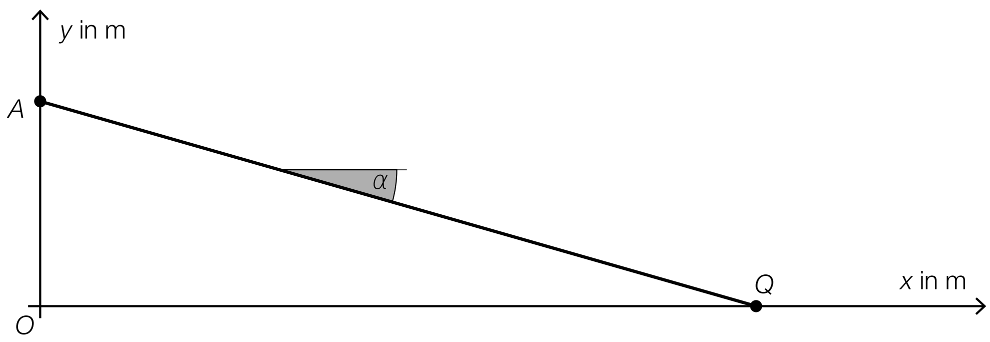
1) Geben Sie die Werte der Parameter a, u und v der Funktion g an.

$a =$ ____________________

$u =$ ____________________

$v =$ ____________________ *[0/1 P.]*

b) Das Abwasser durchströmt den Sandfang. Dabei sinken die im Abwasser enthaltenen Sandkörner zu Boden. In der nachstehenden Abbildung ist ein stark vereinfachtes Modell dieses Vorgangs für ein bestimmtes Sandkorn dargestellt.



Das Sandkorn bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zum Punkt Q.
Die Position X des Sandkorns zur Zeit t (in Sekunden) wird beschrieben durch:

$$X = A + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ v_y \end{pmatrix}$$

v_y ist die senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors dieses Sandkorns (in m/s).

1) Stellen Sie mithilfe von v_y eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ ____ *[0/1 P.]*

Es gilt: $A = (0|4)$ und $Q = (15|0)$

2) Berechnen Sie v_y. *[0/1 P.]*

c) Die Sinkgeschwindigkeit eines Steinchens in einer Flüssigkeit kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - k \cdot v$
t ... Zeit
$v(t) \geq 0$ ... Sinkgeschwindigkeit
g, k ... positive Konstanten

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. *[0/1 P.]*

Die Sinkgeschwindigkeit des Steinchens nähert sich dabei dem Wert v_E.

2) Geben Sie v_E an.

v_E = ____________________ *[0/1 P.]*

Die Eigenschaften der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a hängen unter anderem von der Anfangsbedingung ab.

3) Ordnen Sie den beiden Anfangsbedingungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$v(0) = 0$	
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	

A	v und a sind streng monoton steigend.
B	v ist streng monoton steigend und a ist streng monoton fallend.
C	v und a sind streng monoton fallend.
D	v ist streng monoton fallend und a ist streng monoton steigend.

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 0{,}25$
$u = 8$
$v = 1$

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter a, u und v.

b1) $\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{0{,}3}\right)$

Auch die Formel $\alpha = \arctan\left(\frac{-v_y}{0{,}3}\right)$ *ist als richtig zu werten.*

b2) $15 = 0 + t \cdot 0{,}3$
$t = 50$

$0 = 4 + 50 \cdot v_y$
$v_y = -0{,}08$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von v_y.

c1) $\int \frac{\mathrm{d}v}{g - k \cdot v} = \int \mathrm{d}t$ *oder* $\int \frac{v'}{g - k \cdot v}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t$

$\frac{\ln|g - k \cdot v(t)|}{-k} = t + C_1$

$g - k \cdot v(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C_2$

$v(t) = \frac{g}{k} - C \cdot e^{-k \cdot t}$

c2) $v_E = \frac{g}{k}$

c3)

$v(0) = 0$	B
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	D

A	v und a sind streng monoton steigend.
B	v ist streng monoton steigend und a ist streng monoton fallend.
C	v und a sind streng monoton fallend.
D	v ist streng monoton fallend und a ist streng monoton steigend.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
c2) Ein Punkt für das richtige Angeben von v_E.
c3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.