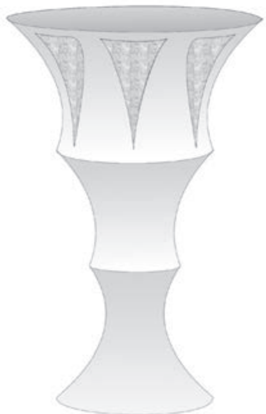
Kunstvolle Becher*

Aufgabennummer: B_472

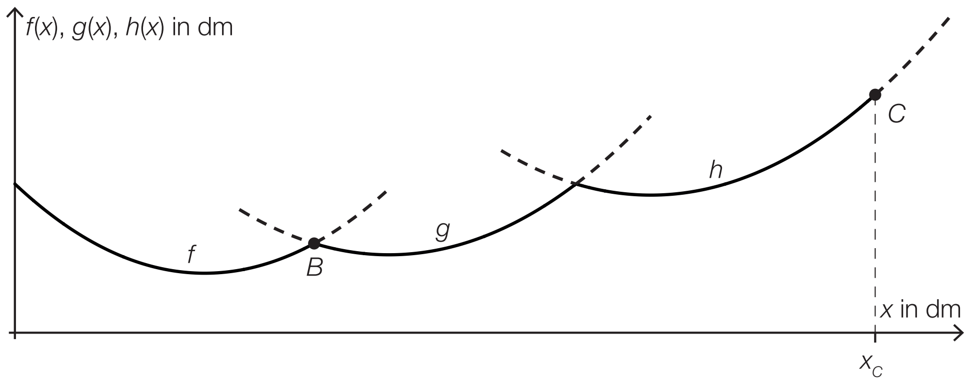
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einer Ausgrabung wurden antike Becher gefunden.
Eine Künstlerin wird anlässlich dieses Fundes damit beauftragt, eine becherförmige Skulptur zu entwerfen.



* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die äußere Begrenzungslinie der becherförmigen Skulptur kann abschnittsweise durch die quadratischen Funktionen f, g und h modelliert werden:



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:
$\gamma = 90° - \arctan(h'(x_C))$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel γ ein.

Für die Funktionen f und g gilt:
$f(x) = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$
$g(x) = 0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

f und g schneiden einander im Punkt B.

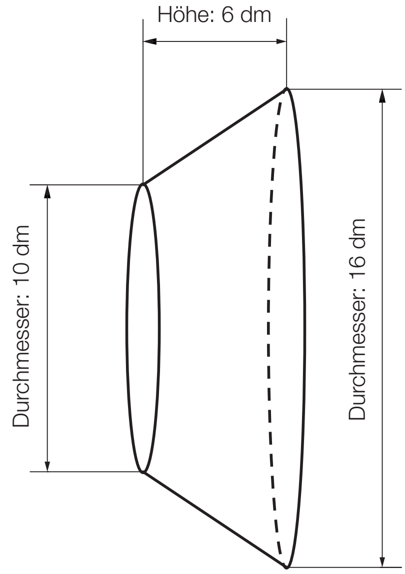
2) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts B.

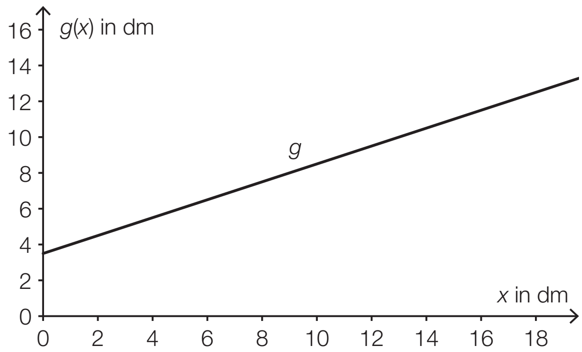
3) Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g im Schnittpunkt B.

Für einen alternativen Entwurf sollen die dargestellten Graphen entlang der vertikalen Achse verschoben werden.

4) Geben Sie an, wie sich eine solche Verschiebung auf die Koeffizienten von f auswirkt.

b) Der Sockel, auf dem die Skulptur montiert werden soll, hat die Form eines Kegelstumpfs (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung):





Dieser Kegelstumpf kann als Rotationskörper mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

1) Kreuzen Sie diejenige Formel an, mit deren Hilfe man das Volumen des dargestellten Kegelstumpfs berechnen kann. *[1 aus 5]*

$V = \pi \cdot \int_0^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_{10}^{16} (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_5^8 (g(x))^2 \, dx$	☐

c) Die Skulptur wird aus einer Legierung hergestellt, die aus Aluminium, Silizium und einer kleinen Menge Magnesium besteht.

Die Dichte von Aluminium beträgt 2,70 g/cm^3.

1) Geben Sie die Dichte ϱ von Aluminium in der Einheit kg/m^3 an.

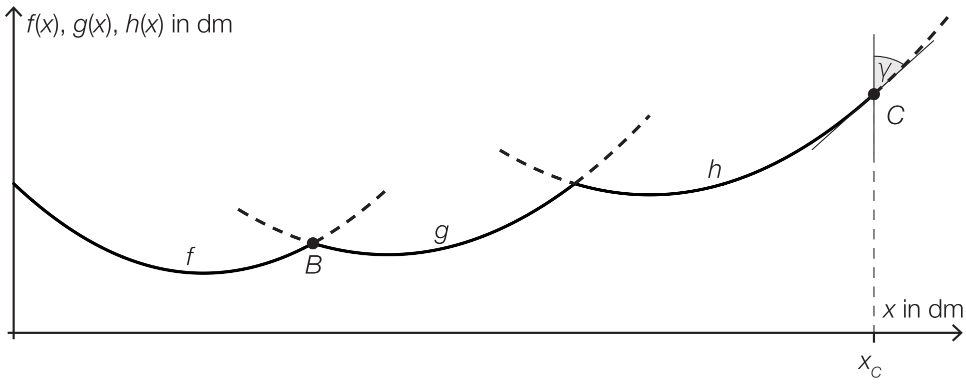
ϱ = ____ kg/m^3

Der Radius eines Magnesium-Atoms beträgt $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. Ein Silizium-Atom hat einen um 0,04 nm kleineren Radius.

2) Berechnen Sie den Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = g(x)$

oder:

$0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1 = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -40{,}975...)$
$x_2 = 7{,}948... \approx 7{,}95$
$f(x_2) = 3{,}012... \approx 3{,}01$
$B \approx (7{,}95|3{,}01)$

a3) $g'(7{,}948...) = -0{,}386...$
$f'(7{,}948...) = 0{,}679...$

Berechnung des Schnittwinkels:
$\arctan(0{,}679...) + |\arctan(-0{,}386...)| = 55{,}350...° \approx 55{,}4°$

Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.

a4) Es ändert sich nur der Koeffizient 5 der Funktion *f*.

b1)

[...]	
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

c1) $\varrho = 2\,700$ kg/m³

c2) $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m = 0,15 nm
0,15 nm – 0,04 nm = 0,11 nm
Der Radius eines Silizium-Atoms beträgt 0,11 nm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für das richtige Einzeichnen des Winkels γ
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von B
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Schnittwinkels (Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.)
a4) 1 × C2: für die richtige Angabe zur Auswirkung auf die Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × A: für das richtige Angeben der Dichte in kg/m³
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern