Spirometrie

Die sogenannte *Spirometrie* ist ein Verfahren zur Beurteilung der Lungenfunktion anhand des ein- bzw. ausgeatmeten Luftvolumens.

Dabei wird das Luftvolumen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion V beschrieben.

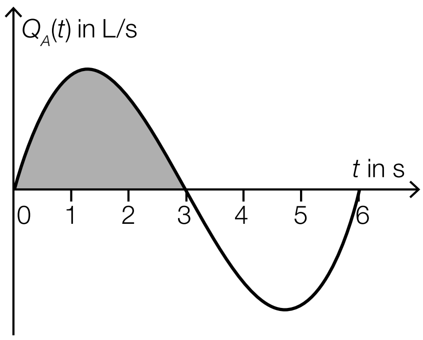
Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens wird als Durchflussrate $Q(t)$ bezeichnet, also $Q(t) = V'(t)$.

a) Im Modell A wird die Durchflussrate durch die Funktion Q_A beschrieben:

$Q_A(t) = a \cdot t \cdot (t - 3) \cdot (t - 6)$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens
$Q_A(t)$ ... Durchflussrate zur Zeit t in L/s
a ... Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion Q_A bei einmaligem Ein- und Ausatmen dargestellt.

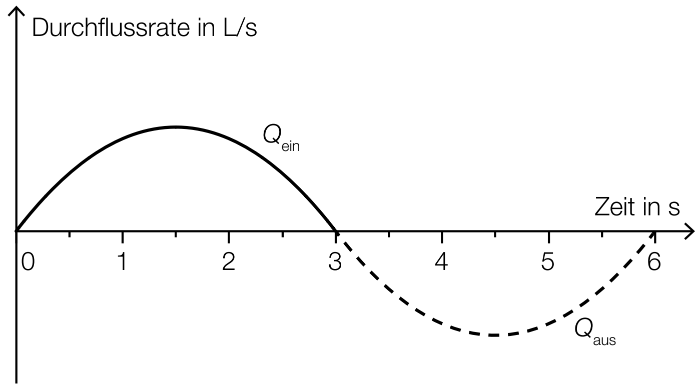


1) Interpretieren Sie den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\int_0^3 Q_A(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}5$

2) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

b) Im Modell *B* wird die Durchflussrate beim Einatmen durch die quadratische Funktion Q_{ein} beschrieben. Die Durchflussrate beim Ausatmen wird durch die quadratische Funktion Q_{aus} beschrieben.



$Q_{ein}(t) = -\frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens
$Q_{ein}(t)$ ... Durchflussrate zur Zeit t in L/s

Der Graph der Funktion Q_{aus} entsteht dabei aus dem Graphen der Funktion Q_{ein} durch Verschiebung nach rechts und Spiegelung an der horizontalen Achse.
Dabei gilt: $Q_{ein}(3) = Q_{aus}(3)$

1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$Q_{aus}(t) = \boxed{} \cdot \left(t \boxed{} \boxed{}\right)^2 - \frac{1}{4}$ *[0/1 P.]*

c) Bei einer Spirometrie atmet man durch ein Rohr, in dem sich viele kleine Lamellen befinden. Dabei wird die Durchflussrate mit folgender Formel berechnet:

$Q = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$

Q ... Durchflussrate in L/s
r ... Innenradius des Rohres in dm
ℓ ... Länge des Rohres in dm
k ... Konstante
Δp ... Druckabfall zwischen Anfang und Ende des Rohres in Pascal (Pa)

1) Zeigen Sie, dass die Konstante k die Einheit Pascalsekunden (Pa · s) hat. *[0/1 P.]*

Es wird behauptet: Bei einem Rohr mit einem um 12 % kleineren Radius ist bei gleicher Durchflussrate und gleichbleibenden anderen Größen der Druckabfall um mehr als 65 % größer.

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Flächeninhalt entspricht dem (in den ersten 3 Sekunden) eingeatmeten Luftvolumen in Litern.

a2) $\int_0^3 a \cdot t \cdot (t-3) \cdot (t-6)\,\mathrm{d}t = 0{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{2}{81} = 0{,}0246...$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters a.

b1) $Q_{\text{aus}}(t) = \frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen und Rechenzeichen.

c1) $k = \frac{r^4}{Q \cdot \ell} \cdot \Delta p$

Einheit der Konstanten k:
$$\frac{\mathrm{dm}^4}{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{dm}} \cdot \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{dm}^4}{\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{dm}} \cdot \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{dm}^4 \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{dm}^4} \cdot \mathrm{Pa} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$$

c2) $\frac{(0{,}88 \cdot r)^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$

$0{,}88^4 \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \Delta p$

$\Delta p_{\text{neu}} = \frac{\Delta p}{0{,}88^4} = \Delta p \cdot 1{,}667...$

Der Druckabfall wird um rund 67 % größer, also ist die Behauptung richtig.

Der geforderte Nachweis kann auch mit konkreten Zahlen erfolgen.

c1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
c2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.