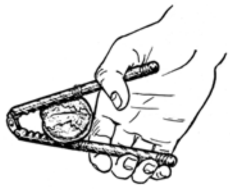
Walnüsse

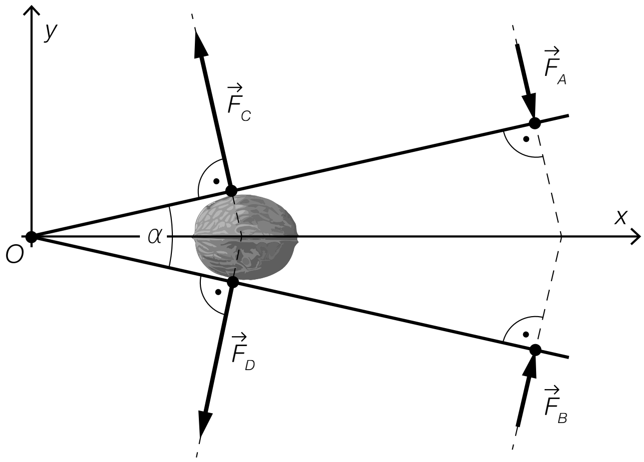
a) Nussknacker sind Werkzeuge zum Öffnen von Nüssen (siehe Abbildung 1). Ein Nussknacker ist in Abbildung 2 modellhaft dargestellt.

Abbildung 1



Bildquelle: Pearson Scott Foresman, public domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=80563725 [18.10.2021].

Abbildung 2



1) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____________________ *[0/1 P.]*

Für die Kraft $\vec{F}_A$ (in Newton) gilt: $\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix}$

Der Einheitsvektor von $\vec{F}_A$ wird mit $\vec{e}_A$ bezeichnet.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

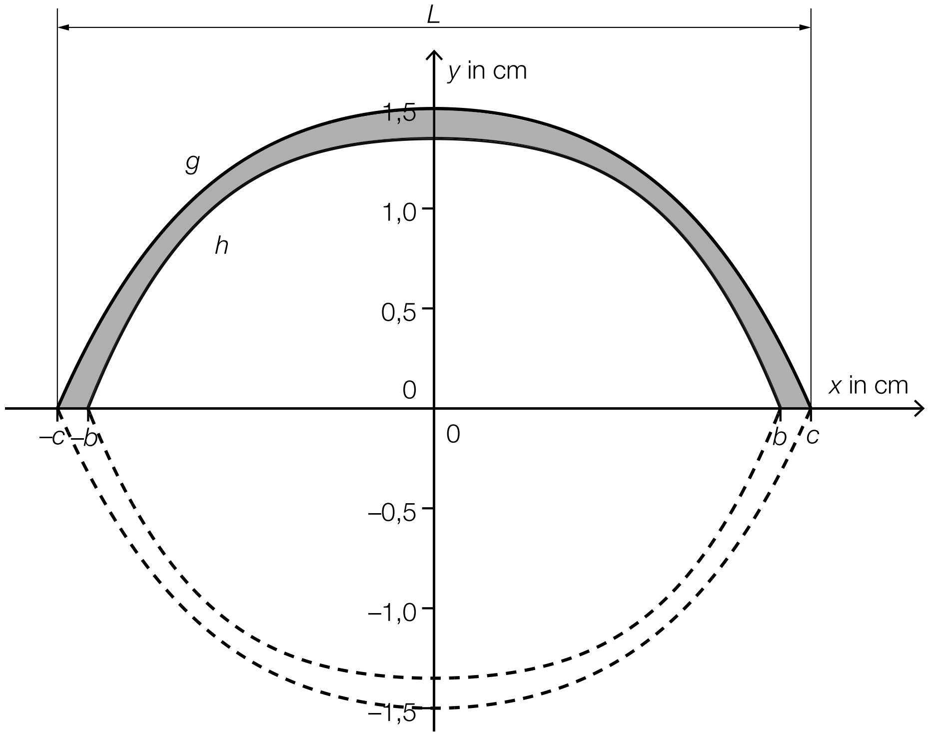
$\vec{e}_A = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

Für die Kraft $\vec{F}_C$ gilt: $|\vec{F}_C| = 65$ N

3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Walnuss modellhaft dargestellt. Die Schale der Walnuss entsteht durch Rotation der grau markierten Fläche um die x-Achse.



$g(x) = -0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5$
$h(x) = -0{,}057 \cdot x^4 - 0{,}14 \cdot x^2 + a$

x, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in cm
a ... Parameter

1) Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Walnuss mehr als 4 cm beträgt. *[0/1 P.]*

An der Stelle $x = 0$ beträgt die Dicke der Walnussschale 1,7 mm.

2) Geben Sie den Parameter a der Funktion h an.

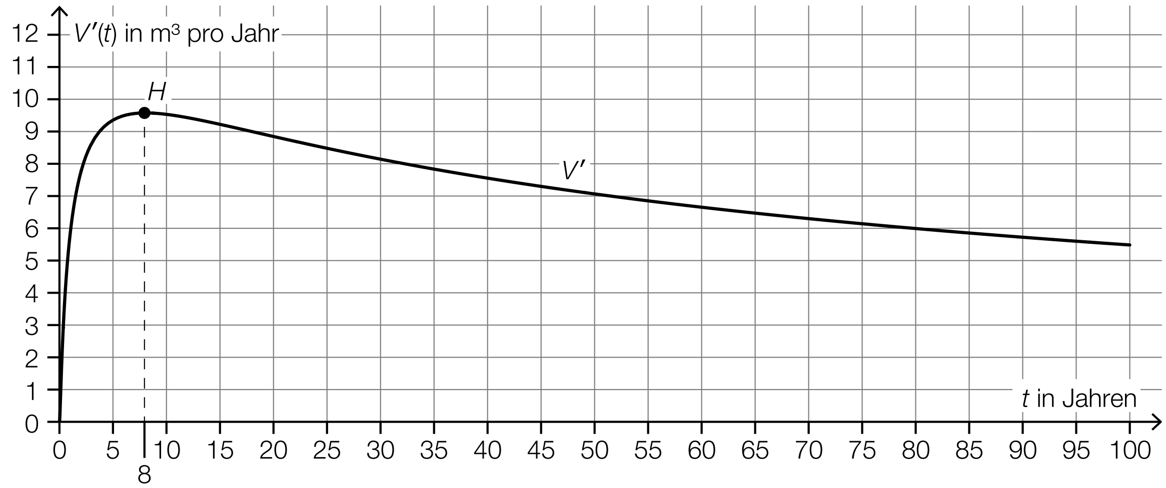
a = ____________________ cm *[0/1 P.]*

3) Ordnen Sie den beiden Volumen jeweils die zutreffende Formel aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	
Volumen der Walnussschale	

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2\,\mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2\,\mathrm{d}x$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2\,\mathrm{d}x$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{b} h(x)^2\,\mathrm{d}x$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2)\,\mathrm{d}x$

c) In einer Studie wurde die zeitliche Entwicklung des Holzvolumens einer bestimmten Walnussplantage ermittelt.
In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate des Holzvolumens als Graph der Funktion V' mit dem Hochpunkt H dargestellt.



t ... Zeit ab Beginn der Studie in Jahren
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Holzvolumens zur Zeit t in m^3 pro Jahr

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die zugehörige Stammfunktion V für das Zeitintervall [0; 100] an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

V hat bei $t = 8$ einen Hochpunkt.	☐
V ist monoton fallend.	☐
V hat an der Stelle $t = 8$ die kleinste Steigung.	☐
V ist monoton steigend.	☐
V ist an der Stelle $t = 8$ negativ gekrümmt.	☐

2) Ermitteln Sie näherungsweise den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von V' und der Zeitachse im Zeitintervall [50; 80].

Flächeninhalt: ____________________ *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = 180° - \arccos\left(\frac{\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B}{|\vec{F}_A| \cdot |\vec{F}_B|}\right)$

oder:

$\alpha = \arccos\left(\frac{-\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B}{|\vec{F}_A| \cdot |\vec{F}_B|}\right)$

a2) $\vec{e}_A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{-12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}384... \\ -0{,}923... \end{pmatrix}$

a3) $\vec{F}_C = -\vec{e}_A \cdot |\vec{F}_C| = \begin{pmatrix} -25 \\ 60 \end{pmatrix}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
a3) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

b1) $g(x) = 0$ *oder* $-0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = -2{,}1...$ $x_2 = 2{,}1...$
$L = 4{,}2...$ cm

Die Länge der Walnuss ist größer als 4 cm.

b2) $a = 1{,}33$ cm

b3)

Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	C
Volumen der Walnuss-schale	A

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2 \, dx$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2 \, dx$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{b} h(x)^2 \, dx$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2) \, dx$

b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes des Parameters *a*.
b3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)

V ist monoton steigend.	☒

c2) Flächeninhalt: 195

Toleranzbereich: [185; 205]

c3) Im Zeitintervall [50; 80] hat das Holzvolumen um 195 m^3 zugenommen.

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Flächeninhalts.
c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.