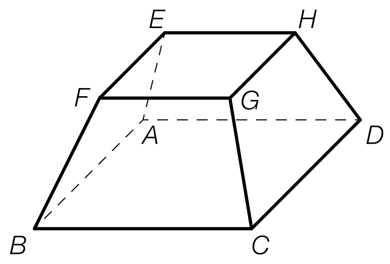
Grundstücke und Gebäude

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Betonsockel modellhaft dargestellt.

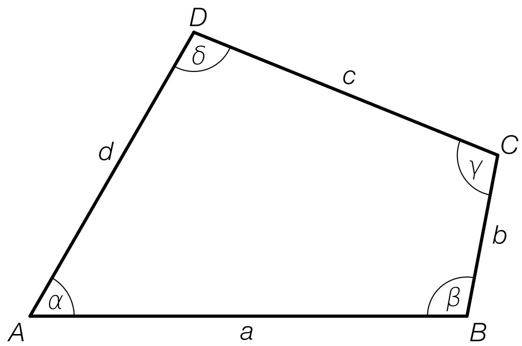


Bei der Darstellung des Modells in einem Koordinatensystem werden folgende Punkte verwendet:
$B = (12|6|2)$, $C = (2|26|2)$, $D = (-10|20|0)$,
$E = (-1{,}5|5{,}5|15{,}5)$, $F = (4{,}5|8{,}5|16{,}5)$, $G = (-0{,}5|18{,}5|16{,}5)$

Die Grundfläche *ABCD* ist rechteckig.

1) Weisen Sie nach, dass die Kante *BC* parallel zur Kante *FG* ist. *[0/1 P.]*
2) Zeigen Sie, dass das Viereck *EFGH* im Punkt *F* einen rechten Winkel hat. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie denjenigen Winkel, den die Kante *BF* mit der Diagonalen *BD* einschließt. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Skizze eines Baugrundstücks.

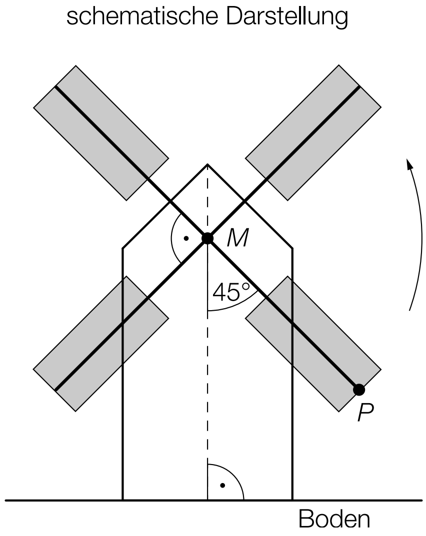


1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *F* des skizzierten Baugrundstücks auf.

   $F =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen *BD* für $a = 40$ m, $d = 30$ m und $\alpha = 60°$. *[0/1 P.]*

c) Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Windmühle Oppelhain in Deutschland.



Bildquelle: Edweisch – own work, public domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/BockwindmühleOppelhain.jpg [21.11.2018].

Der Drehpunkt M der Flügel befindet sich 13 m über dem Boden.
Die Länge eines Flügels (Strecke MP) beträgt 10,62 m.

1) Berechnen Sie die Höhe des Punktes P über dem Boden. *[0/1 P.]*

Die Flügel drehen sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn und benötigen für eine volle Umdrehung 10 s. Die obige schematische Darstellung zeigt die Flügelstellung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Höhe des Punktes P über dem Boden kann durch eine Funktion h in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

$h(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Punktes P über dem Boden zur Zeit t in m

2) Geben Sie die Parameter a und c der Funktion h an.

a = ____________________

c = ____________________ *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die Parameter ω und φ der Funktion h an.

ω = ____________________

φ = ____________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{FG}$ Die beiden Kanten sind daher parallel.

a2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-5) + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 0 = 0$

Das Viereck *EFGH* hat daher im Punkt *F* einen rechten Winkel.

a3) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 2{,}5 \\ 14{,}5 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -22 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BF}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}\right) = 66{,}67...°$

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen der Parallelität.
a2) Ein Punkt für das richtige Zeigen, dass im Punkt *F* ein rechter Winkel vorliegt.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels.

b1) $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(\delta)$

oder:

$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\gamma)$

b2) $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos(60°)} = 36{,}0...$

Die Länge der Diagonalen *BD* beträgt rund 36 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge der Diagonalen *BD*.

c1) $\cos(45°) = \frac{13 - h_P}{10{,}62}$

$h_P = 5{,}49...$ m

Der Punkt *P* befindet sich rund 5,5 m über dem Boden.

c2) $a = 10{,}62$

$c = 13$

c3) $\omega = \frac{\pi}{5}$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$ *oder* $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Punktes *P* über dem Boden.
c2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter *a* und *c*.
c3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter ω und φ.