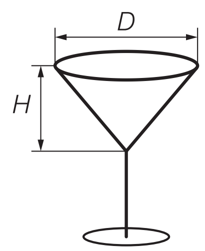
Martinigläser*

Aufgabennummer: B_523

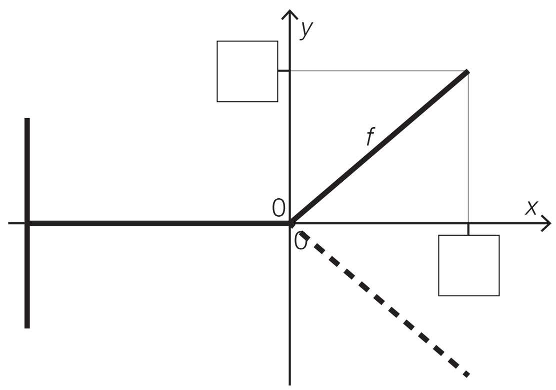
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nebenstehenden Abbildung ist ein Martiniglas dargestellt. Der obere Teil des Martiniglases kann modellhaft als Drehkegel mit dem Durchmesser D und der Höhe H betrachtet werden.



In der unten stehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist ein Modell dieses Martiniglases dargestellt. Der Drehkegel entsteht durch Rotation des Graphen der linearen Funktion f um die x-Achse.

1) Tragen Sie unter Verwendung von H und D die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



2) Stellen Sie mithilfe von H und D eine Gleichung der Funktion f auf.

$f(x) =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe

V_x ist das Volumen des Drehkegels, der bei Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse entsteht.

3) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von V_x auf.

$V_x =$ ____

Der obere Teil eines bestimmten Martiniglases wird durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall [0; 75] um die x-Achse modelliert.

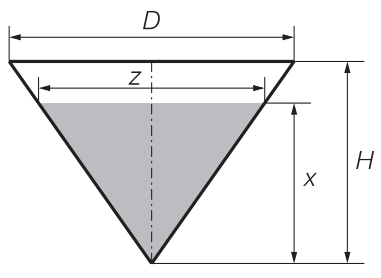
$g(x) = \frac{13}{17} \cdot x$

x, $g(x)$ … Koordinaten in mm

Dieses Martiniglas wird mit einer Flüssigkeitsmenge von 2 dl befüllt.

4) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe (gemessen von der Spitze des Drehkegels).

b) In der nachstehenden Abbildung ist der obere Teil eines teilweise befüllten Martiniglases dargestellt. Dabei handelt es sich um einen Drehkegel mit dem Durchmesser D und der Höhe H.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von z auf. Verwenden Sie dabei H, D und x.

$z =$ ____

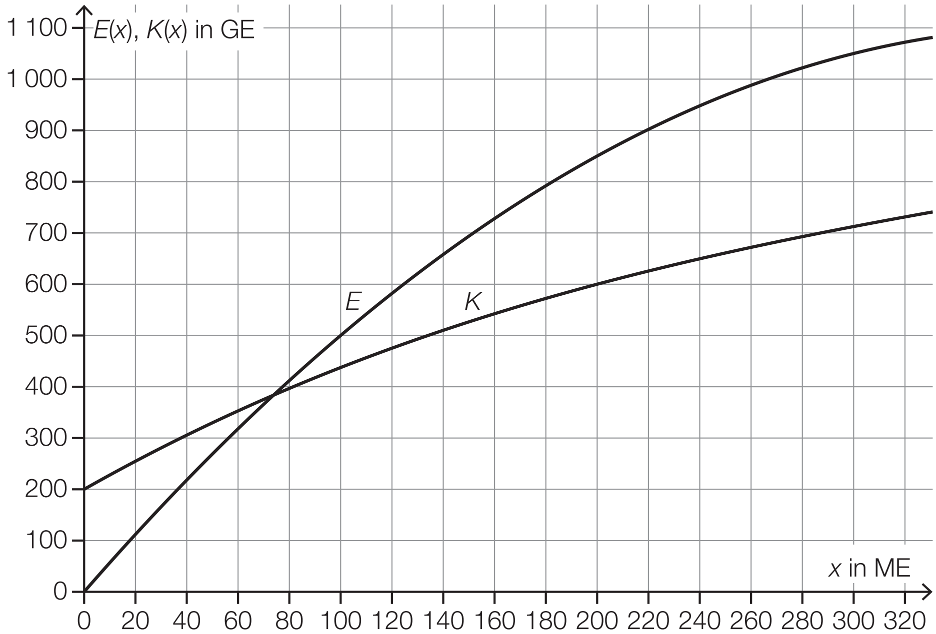
Dieses Martiniglas ist bis zur Höhe x befüllt. Das Füllvolumen entspricht dabei dem halben Volumen des Drehkegels mit dem Durchmesser D und der Höhe H.

2) Zeigen Sie allgemein, dass die Höhe x rund 80 % der Höhe H beträgt.

c) Beim Verkauf von Martinigläsern geht man von einem linearen Zusammenhang zwischen dem Preis in GE/ME und der Verkaufsmenge in ME aus.
Bei einem Preis von 5,00 GE/ME können 100 ME verkauft werden. Sinkt der Preis um 1,50 GE/ME, können um 200 ME mehr verkauft werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



2) Lesen Sie diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der Gewinn 250 GE beträgt.

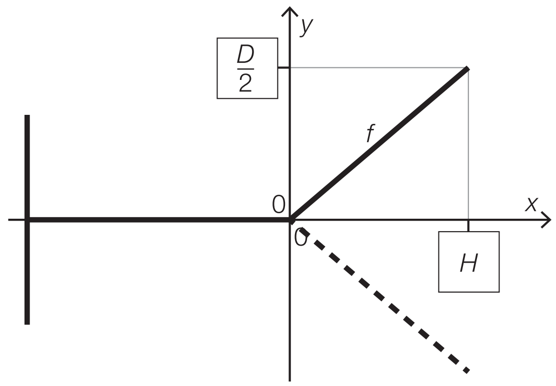
____________________ ME

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Erlös bei einer Verkaufsmenge von 100 ME beträgt 500 GE.	☐
Die Fixkosten betragen 200 GE.	☐
Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend.	☐
Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☐
Für die zugehörige Stückkostenfunktion $\overline{K}$ gilt: $\overline{K}(200) = 3$.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = \frac{D}{2 \cdot H} \cdot x$

a3) $V_x = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{D}{2 \cdot H}\right)^2 \cdot x^2 \,dx$ *oder* $V_x = \pi \cdot \int_0^H (f(x))^2 \,dx$ *oder* $V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H$

a4) $2 \text{ dl} = 200\,000 \text{ mm}^3$

$200\,000 = \pi \cdot \int_0^b (g(x))^2 \,dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$b = 68{,}8\ldots$

Die Füllhöhe beträgt rund 69 mm.

b1) $z = \frac{D \cdot x}{H}$

b2) Für das Volumen V_1 des Drehkegels mit dem Durchmesser D und der Höhe H gilt:

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot H$

Für das Volumen V_2 des Drehkegels mit dem Durchmesser z und der Höhe x gilt:

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D \cdot x}{H}\right)^2 \cdot x$

$\frac{V_1}{2} = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot H = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D \cdot x}{H}\right)^2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot H \approx 0{,}8 \cdot H$

c1) $p_N(x) = a \cdot x + b$
$p_N(100) = 5$
$p_N(300) = 3,5$

oder:

$a \cdot 100 + b = 5$
$a \cdot 300 + b = 3,5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$p_N(x) = -0,0075 \cdot x + 5,75$

c2) 200 ME
Toleranzbereich: [190; 210]

c3)

Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Ausdrücke.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f.
a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a4) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Füllhöhe.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion p_N.
c2) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Verkaufsmenge.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.