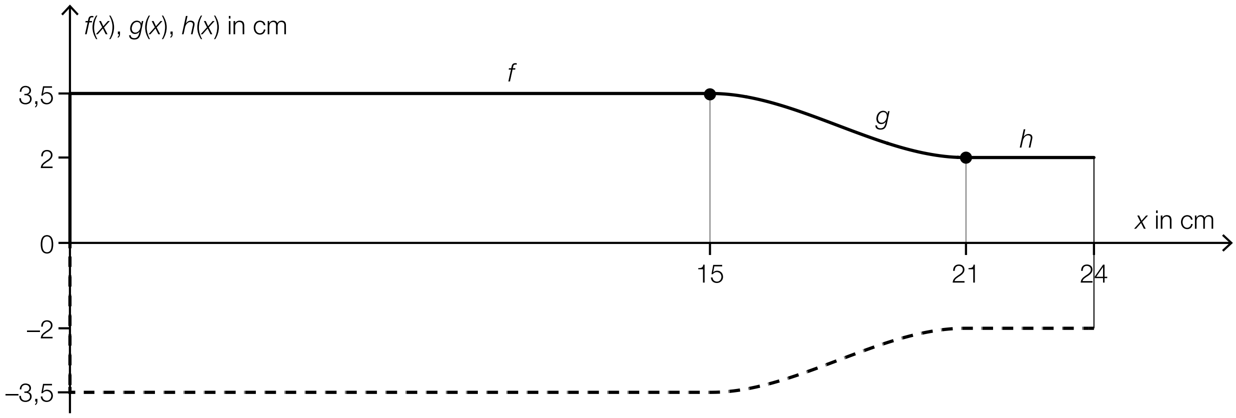
Trinkflasche

Die Innenwand einer liegenden 24 cm hohen Trinkflasche kann durch Rotation der Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* um die *x*-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



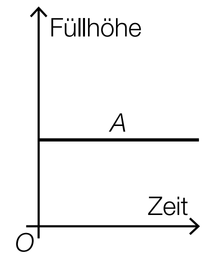
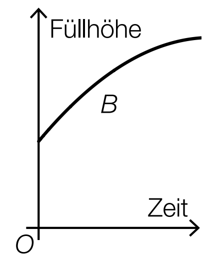
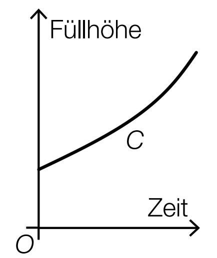
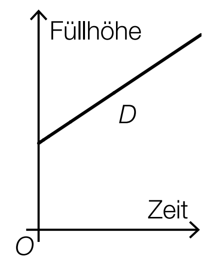
$f(x) = 3{,}5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 15$
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit} \quad 15 \leq x \leq 21$
$h(x) = 2 \quad \text{mit} \quad 21 \leq x \leq 24$

x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in cm

a) In der Trinkflasche befindet sich Wasser. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird zusätzlich Wasser eingefüllt. Die Wassermenge, die pro Zeiteinheit eingefüllt wird, ist konstant.

1) Ordnen Sie den beiden beschriebenen Füllvorgängen jeweils die passende Abbildung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Die Trinkflasche ist zur Zeit $t = 0$ bis zur Höhe 9 cm befüllt und wird bis zur Höhe 15 cm zusätzlich befüllt.	☐
Die Trinkflasche ist zur Zeit $t = 0$ bis zur Höhe 15 cm befüllt und wird bis zur Höhe 21 cm zusätzlich befüllt.	☐

A	
B	
C	
D	

2) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung des gesamten Volumens V der Trinkflasche.

$$V = \boxed{}^2 \cdot \pi \cdot 15 + \pi \cdot \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} (g(x))^2 \, \mathrm{d}x + 2^2 \cdot \pi \cdot \boxed{}$$

[0/1 P.]

b) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.

1) Begründen Sie, warum g genau eine Wendestelle hat. *[0/1 P.]*

Die Graphen der Funktionen f und g haben an der Stelle 15 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.
Die Graphen der Funktionen g und h haben an der Stelle 21 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffzienten von g. *[0/½/1 P.]*

3) Berechnen Sie a, b, c und d. *[0/1 P.]*

c) Es werden 630 ml Wasser, die sich in der Trinkflasche befinden, in einen leeren Zylinder mit einem Volumen von 630 ml umgefüllt. Der Durchmesser dieses Zylinders ist gleich groß wie seine Höhe.

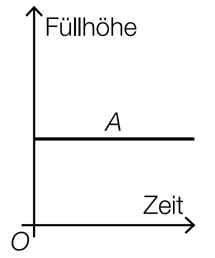
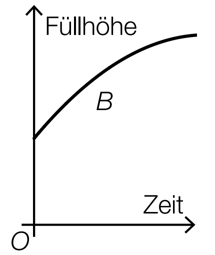
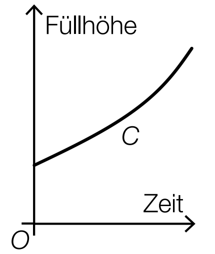
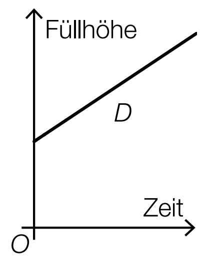
D … Höhe bzw. Durchmesser des Zylinders in cm

1) Berechnen Sie D. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

Die Trinkflasche ist zur Zeit $t = 0$ bis zur Höhe 9 cm befüllt und wird bis zur Höhe 15 cm zusätzlich befüllt.	D
Die Trinkflasche ist zur Zeit $t = 0$ bis zur Höhe 15 cm befüllt und wird bis zur Höhe 21 cm zusätzlich befüllt.	C

A	
B	
C	
D	

a2) $V = \boxed{3{,}5}^2 \cdot \pi \cdot 15 + \pi \cdot \int_{\boxed{15}}^{\boxed{21}} (g(x))^2 \, \mathrm{d}x + 2^2 \cdot \pi \cdot \boxed{3}$

a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.

b1) An der Wendestelle gilt: $g''(x) = 0$
Die 2. Ableitung der Polynomfunktion g ist eine lineare Funktion, die genau eine Nullstelle (mit Vorzeichenwechsel) hat. Daher hat die Polynomfunktion g genau eine Wendestelle.

b2) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $g(15) = 3{,}5$
II: $g(21) = 2$
III: $g'(15) = f'(15)$
IV: $g'(21) = h'(21)$

oder:

I: $a \cdot 15^3 + b \cdot 15^2 + c \cdot 15 + d = 3{,}5$
II: $a \cdot 21^3 + b \cdot 21^2 + c \cdot 21 + d = 2$
III: $3 \cdot a \cdot 15^2 + 2 \cdot b \cdot 15 + c = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 21^2 + 2 \cdot b \cdot 21 + c = 0$

b3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{1}{72} = 0{,}0138...$
$b = -\frac{3}{4} = -0{,}75$
$c = \frac{105}{8} = 13{,}125$
$d = -\frac{143}{2} = -71{,}5$

b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein halber Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte, ein halber Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a, b, c und d.

c1) 630 ml = 630 cm^3
$\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot D = 630$
$D = 9{,}29...$ cm

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von D.