Алгебра. Практика. 2023-24

Занятие 1. 09.09.2024.

0. Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0{=}0$.

1. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.

2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

3. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.

4. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i\sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i\sin(\frac{4\pi}{7})$.
а) Найдите $(a+b)^4$.
б) Найдите все корни 3 степени из $(a+b)$.

5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Пусть $z \in$ C, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t, что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2024.

1. Пусть $x + iy = (s+it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2+t^2)^n$.

2. Решите уравнение:
а) $z^5 = \overline{z}$; б) $z^5 + \overline{z} = 0$.

3. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
а) $(2453, 2007)$;
б) $(2376, 702)$.

4. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
а) Найдите (F_n, F_{n+1}).
б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}).

5. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты

6. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что $\varphi(n) \,\vdots\, 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 30.09.2024.

1. Решите в целых числах уравнение.
а) $258x - 172y = 112$;
б) $209x - 513y = 76$.

2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.

3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.

4. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

7. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?

б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 07.10.2024.

1. Решите систему сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$;

2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.

3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n?

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j} + \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j+4} + \ldots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).

а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^\mathrm{n})$.

б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3.

5. Число $\varepsilon \in \mathrm{C}$ называется *первообразным* корнем из 1 степени n, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k < n$.

а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \ldots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.