Исаева А.А. Номер ИСУ: 466049

Группа практики 11.2

Типовой расчет №2.

Вариант 11

№1 Элементарные функции и их графики

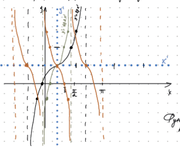
а) $y = 1 - \frac{2tg(2x+1)}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} tg(2x+1) = 1 - \frac{2}{\pi} tg(2(x+\frac{1}{2}))$

Введем нов. коорд. (x', y'): $y' = y - 1$ $\quad x' = x + \frac{1}{2}$.

Тогда зависимость $y = 1 - \frac{2}{\pi} tg(2(x+\frac{1}{2}))$ в новых координ.

будет иметь вид $y' = -\frac{2}{\pi} tg(2x')$

Теперь на одной коорд. пл-ти строим системы координат XOY и $X'O'Y'$, и относительно системы $X'O'Y'$ строим график функции $y' = tg x'$.



Сжимая его в 2 раза относит. оси $O'y'$ получим $y' = tg 2x'$

Увеличивая капд. орд. y' в $\frac{2}{\pi}$ и отображая получ. граф. относит. оси $O'x'$, приходим к графику $y' = -\frac{2}{\pi} tg(2x')$.

Функция определена на $R \setminus \{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{2}\}$, $k \in Z$

б) $y = 2 + \left| \frac{3 - 2|x+5|}{2 - |x+5|} \right|$

Посмотрим для начала график функции

$y = 2 + \frac{3 - 2|x+5|}{2 - |x+5|}$. Для этого уберем модуль в выражении:

$$2 + \frac{3 - 2|x+5|}{2 - |x+5|} = \begin{cases} 4 + \frac{1}{3+x}, & x \geq -5 \\ 4 - \frac{1}{7+x}, & x < -5 \end{cases}$$

Прямая $x = -5$ разделит коорд. пл-ть на две полупл. На правой полупл. построим $y = 4 + \frac{1}{3+x}$, на левой – $y = 4 - \frac{1}{7+x}$

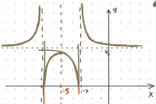
Для построения гипербол введем новую сист. коорд., где $y' = y - 4$, $x' = x$

В новой коорд. функции примут вид:

$y_1' = -\frac{1}{7+x}$ и $y_2' = \frac{1}{3+x}$

$y = \frac{1}{x}$ сдвин. на 7 влево, отобр. отн. Ox

$y = \frac{1}{x}$ сдвинутое на 3 влево



Отметим, что $y_1'(-5) = y_2'(-5) = -\frac{1}{2}$

Мы построили график функции

$$y = 2 + \frac{3 - 2|x+5|}{2 - |x+5|}$$

Для построения граф. исх. функц. отобраз. часть ниже Ox наверх

Функция определена для $\mathbb{R} \setminus \{-7; -3\}$.

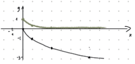
$E(y) = [0; +\infty)$.

в) $y = 3^{-\sqrt{x}}$

Функция определена для всех $x \geq 0$.

Функция $\sqrt{x}$ возрастает от 0 до $+\infty$, поэтому $-\sqrt{x}$ убывает на всем этом промежутке.

Строим график функции $y = -\sqrt{x}$, а затем $y = 3^{-\sqrt{x}}$



Мн-во значений функц.

$(0; 1]$.

№2. Доказать по определению предела функции в точке по Коши

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1$$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \quad \forall \varepsilon \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и попытаемся найти решения нер-ва:

$$\left| \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} + 1 \right| < \varepsilon$$

При $x \neq \frac{1}{3}$ преобразуем дробь:

$$\frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = \frac{(6x - 3)(x - 1/3)}{x - 1/3} = 6x - 3$$

Поэтому наше нер-во равносильно:

$$|6x - 3 + 1| < \varepsilon$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Значит, если $\delta = \varepsilon/6$, то из нер-ва

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$ следует нер-во

$$\left| \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} + 1 \right| < \varepsilon,$$ что означает, что

число -1 явл. пределом функции

$$f(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}}$$ при $x \to \frac{1}{3}$

№3 Д-ть, что данный предел не сущ-ет.

$$\lim_{x \to +\infty} tg\left(\sqrt{x-1}\right)$$

Воспользуемся определением функции по Гейне:

Если найти две посл-ти $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, сходящ. к числу 1 при $n \to \infty$ и такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, то это будет означать, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ не сущ-ет.

$\exists$ $x_n' = n^2\pi^2 + 1$ и $x_n'' = \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$

Тогда: 1) $\sqrt{x_n' - 1} = \sqrt{n^2\pi^2} = n\pi$, т.е. $tg\left(\sqrt{x_n' - 1}\right) = 0$

2) $\sqrt{x_n'' - 1} = \frac{\pi}{4} + n\pi$, т.е. $tg\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1$

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(tg\sqrt{x_n' - 1}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(tg\sqrt{x_n'' - 1}\right) = 1$

Так как эти пределы не совпадают, то общ. предела $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\sqrt{x-1}\right)$ не сущ.

№4. Вычислить пределы.

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}=\frac{(x-2)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{(x-2)}(x-1)(x+2)}=0$$

2) $$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt[3]{x/16}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\cdot x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)'}{\left(\left(\frac{1}{4}+x\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)'}=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+x\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\frac{1}{6\sqrt[3]{2x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+4x}}-\frac{1}{\sqrt{2x}}}=\lim_{x\to 1/4}\frac{\sqrt{2x+8x^2}}{6\sqrt[3]{2x^2}\cdot\left(-\sqrt{1+4x}+\sqrt{2x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{16}}}{6\sqrt[3]{2\cdot\frac{1}{16}}\left(-\sqrt{1+4\cdot\frac{1}{4}}+\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}}\right)}=\frac{1}{6\cdot\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

3) $$\lim_{x\to 1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}=$$

$\exists\ x=t+1$:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3^{5t+5-3}-3^{2t^2+4t+2}}{\operatorname{tg}(\pi t+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{3^{5t+2}-3^{2t^2+4t+2}}{\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{-3^{5t+2}\left(-1+3^{2t^2-t}\right)}{\pi t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-3^{5t+2}\cdot(2t^2-t)\ln 3}{\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{-3^{5t+2}\cdot\cancel{t}(2t-1)\ln 3}{\pi\cancel{t}}=\frac{+3^2\cdot(2\cdot 0+1)\ln 3}{\pi}=\frac{9\ln 3}{\pi}$$

4) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}=$$

$\exists\ x=t+1$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\ln^2(t+1)}-1}{1+(\cos\pi t+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t^2}-1}{-(-\cos\pi t+1)+2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t^2}-1}{2-t^2/2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{1+0}-1}{2-0/2}=\frac{0}{2}=0$$

5) $$\lim_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+5\left(\frac{\cos x-1}{\cos x}\right)\right)^{\frac{1}{5\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}}\right]^{\operatorname{ctg}^2 x\left(5\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\left(5\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)\right)}=e^0=1$$

6) $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} (3-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Сначала исследуем поведение данного выражения в окр-ти пред. точки. В точке $x=1$ $3-x = 3-1 = 2$ — const.

$$\lim_{x \to 1} 3-x = 2 > 1.$$

Показат. степ. в т. $x=1$ не $\exists$, причем

$$\lim_{x \to 1-0} tg\,\frac{\pi x}{2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1+0} tg\,\frac{\pi x}{2} = -\infty$$

Отсюда

$$\lim_{x \to 1-0} (3-x)^{tg\,\frac{\pi x}{2}} = 2^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1+0} (3-x)^{tg\,\frac{\pi x}{2}} = 2^{-\infty} = 0$$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+\ln(e+x\sin\frac{1}{x})}{\cos x + \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+\ln(e + x\sin\frac{1}{x})}{\cos x + \sin x} =$

Рассмотрим $x \sin\frac{1}{x}$: при $x \to 0$, $x = 0$, $\sin\frac{1}{x}$ — не имеет предела, но явл. огранич. Значит, их произведение стремится к 0 как произв. б/м. на огр.

Тогда:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2+\ln(e+0)}{\cos x + \sin x} = \frac{2+1}{1+0} = 3$$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^x - a^a}{x-a} =$

Рассмотрим x^x

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

при $x \to 0$, $x\ln x \to 0$, и, знач., $x^x \to 1$

Тогда:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-a^a}{x-a} \overset{\text{при } a \neq 0}{=} \frac{1-a^a}{-a} = \frac{a^a - 1}{a}$$

№5 Провести полное исследование функции и построить их графики.

а) $x = \frac{1}{1+t^2}$

$$y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1. $t \in \mathbb{R}$, т.к. $1+t^2 > 0$ при $\forall t$

2.

$$x'(t) = \frac{0-2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$y'(t) = \frac{(1+t^2)(1-3t^2)-(t-t^3)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$k = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1-4t^2-t^4 \cdot \cancel{(1+t^2)^2}}{\cancel{(1+t^2)^2} \cdot (-2t)} = \frac{t^4+4t^2-1}{2t}$$

$$\frac{-2t}{(1+t^2)^2} = 0 \qquad \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2} = 0$$

$$t = 0 \qquad t^4 + 4t^2 - 1 = 0$$

$\supset R = t^2$: $R^2 + 4R - 1 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 1 = 20 = 4 \cdot 5$

$$k = \frac{\pm 2\sqrt{5} - 4}{2} = \pm\sqrt{5} - 2$$

$$t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

При $t = 0$: $(x;y) = (1;0)$

$t = \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$

$$x = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

$$y = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\,(1-\sqrt{5}+2)}{1+\sqrt{5}-2} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\,(3-\sqrt{5})}{-1+\sqrt{5}}$$

$$(x;y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}; \pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\,(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}\right)$$

Проверим функц. на симметр.:

$x(-t) = \frac{1}{1+t^2} = x(t)$ $y(-t) = \frac{-t(1-t^2)}{1+t^2} = -y(t)$

Т.е. кривая симметр. отн. Ox.

При $t \to \pm\infty$ $x \to 0$

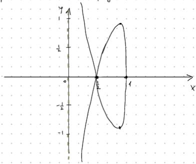
$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t-t^3}{1+t^2} = -t = -\infty$

$\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$

Т.е. кривая имеет вертикальную ассимптоту - ось Oy.

При $t=0$: $x=1$, $y=0$

При $t \to \pm 1$: $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$



б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

Функция $y(x)$ опред. для x, для котор. выполняется

$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$

$(x-1)^2 \geq 0$ - верно $\forall x$ $(x+1)^2 \geq 0$ - верно $\forall x$.

$D(f) = \mathbb{R}$

Очев, что функц. не явл. ни четн., ни нечет., ни периодичн.

Исслед. её на монотон. и экстр. Найдем производн.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = + \left|\frac{1+x^2}{x^2-1}\right| \cdot \frac{2(-1+x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|\cdot(1+x^2)} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x|>1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x|<1 \end{cases}$$

Получаем критическую т. $x=1$. Произв. не $\exists$ в этой т., но функц. определена и непрерывна.

Промежутки монотон.:

y': $+$ max $-$ 1 $+$ x

y: $\nearrow$ -1 $\searrow$ min $\nearrow$

Вычислим экстремум:

$y_{min} = f(1) = \arccos\frac{2\cdot 1}{1+1} = \arccos 1 = 0$

$y_{max} = f(-1) = \arccos\frac{2\cdot(-1)}{2} = \pi$

Найдем право- и лево-сторон. пределы

$\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{-2}{1+x^2} = -1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{2}{1+x^2} = 1$

$\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{2}{1+x^2} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -1+0} \frac{-2}{1+x^2} = -1$

Вторая произв.

$$y'' = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & |x|>1 \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & |x|<1 \end{cases}$$

y'': $+$ $-$ $+$ $-$

y: $\cup$ -1 $\cap$ 0 $\cup$ 1 $\cap$ x

Отметим, что т. перегиба явл. только т.0, т.к. в т. ± 1 направл. выпукл. меняется, но касат. в этих т. не сущ-ет.

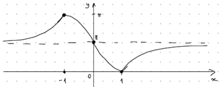
$f(0) = \arccos 0 = \pi/2$

Найдем асимптоты.

Вертикальн. асимпт. график не имеет. Заметим, что

$\lim\limits_{x\to\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; откуда следует, что

$y = \frac{\pi}{2}$ явл. горизонт. асимпт. граф. функции.



в) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$

Областью определения функции является мн-во $D = (0; +\infty)$

Функция не явл. ни чет, ни нечет, ни периодич.

Найдем промежутки монотон. и экстремумы.

$y' = \frac{2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \ln^2 x\cdot 1}{x^2} = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$

$y' = 0$: $\ln^2 x - 2\ln x = 0$

$\ln x = 0 \qquad \ln x = 2$

$x = 1 \qquad x = e^2$

y': $-$ on $(0;1)$, $+$ on $(1;e^2)$, $-$ on $(e^2;+\infty)$

y: 0 ↘ 1 (min) ↗ e^2 (max) ↘ x

Т. экстр.: т. min в $x = 1$: $y_{min} = 0$

т. max. в $x = e^2$; $y_{max} = \frac{4}{e^2}$

Исследуем направления выпуклости. Вычислим 2-ю произв.

$$y'' = \frac{(2\ln x - \ln^2 x)' \cdot x^2 - (2\ln x - \ln^2 x)\cdot 2x}{x^{4}} =$$

$$= \frac{\left(2\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x - 4\ln x + 2\ln^2 x}{x^3} = \frac{2 - 6\ln x + 2\ln^2 x}{x^3}$$

Обращ. в ноль при:

$\ln x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ или $\ln x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ $\qquad x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

y'': $+$ на $(0;\ e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})$, $-$ на $(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};\ e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$, $+$ на $(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};\ +\infty)$

y: $\cup$ $\quad e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ $\quad\cap\quad$ $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ $\quad\cup$ $\quad x$

Найдем асимптоты. Для этого исследуем поведение функции в окр-ти $x=0$.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln^2 x}{x} = +\infty$$

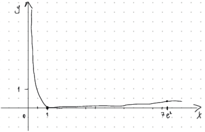
Т.е. $x=0$ явл правосторон. вертик. ассимпт.

Найдем накл. ассимпт.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2\cdot x\cdot x}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$$

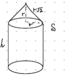
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = 0$$

Т.е. функц. не имеет накл. ассимпт.



№6

11. На верхнее основание прямого кругового цилиндра поставлен прямой конус с таким же основанием. Высота конуса равна радиусу основания. Сумма площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса равна S. При каких размерах объем тела, составленного цилиндром и конусом, будет максимальным?



$$S = \pi r^2\sqrt{2} + 2\pi r \cdot h$$

$$h = \frac{S - \pi r^2\sqrt{2}}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$V_0 = \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r =$$

$$= \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{S - \pi r^2\sqrt{2}}{2\cancel{\pi}\cancel{r}} + \frac{1}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{S}{2} \cdot r^2 - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} r^3 + \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_0' = \frac{S}{2} \cdot 2r - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cdot 3r^2 + \frac{\pi}{3} \cdot 3r^2 = Sr - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \cdot 3r^2 + \pi r^2 = r\left(S - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi r + \pi r\right) =$$

$$= r\left(S + r\left(\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\right)\right)$$

$V_0' = 0$: $\quad r\left(S + r\left(\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\right)\right) = 0$

$r = 0$ или $S + r\left(\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\right) = 0$

$\varnothing$ $r = \dfrac{S}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi - \pi} = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{S}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1}$

Т.е. $h = \dfrac{S}{2\pi r} - \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cancel{S} \cdot \cancel{\pi}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)}{2\cancel{\pi} \cdot \cancel{S}} - \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{S}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{S \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 2} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{4} - \frac{S\sqrt{2}}{\pi \cdot 3\sqrt{2} - 2\pi}$$

№7 Вычислить с помощью ф. Тейлора.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16+x^2}-2e^{x^2}}{1+\ln(1+x^2)-\cos x}$

1) $(16+x^2)^{\frac14} = \sqrt[4]{16}\,(1+x^2/16)^{\frac14} \approx$

$(1+x^2/16)^{1/4} \approx 1+\frac14\cdot\frac{x^2}{16}-\frac{3}{32}\cdot\left(\frac{x^2}{16}\right)^2+\ldots$

$\approx 2\left(1+\frac{x^2}{64}-\frac{3x^4}{4096}\right) = 2+\frac{x^2}{32}-\frac{3x^4}{2048}$.

2) $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+\ldots$

$2e^{x^2} = 2\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}\right) = 2+2x^2+x^4$

3) $\sqrt[4]{16+x^2}-2e^{x^2} \approx \left(2+\frac{x^2}{32}-\frac{3x^4}{2048}\right)-(2+2x^2+x^4) = -\frac{63x^2}{32}-\frac{2051x^4}{2048}$

4) $\ln(1+x^2) \approx x^2-\frac{x^4}{2}+\ldots$

5) $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots$

6) $1+\ln(1+x^2)-\cos x \approx 1+\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right) = x^2-\frac{x^4}{2}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} =$

$= \frac{3x^2}{2}-\frac{13x^4}{24}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16+x^2}-2e^{x^2}}{1+\ln(1+x^2)-\cos x} \approx \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{63x^2}{32}-\frac{2051x^4}{2048}}{\frac{3x^2}{2}-\frac{13x^4}{24}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{63x^2}{32}}{\frac{3x^2}{2}} = \frac{-63}{32}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{21}{16}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^4 x}}$

1) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x-\frac{(\operatorname{sh} x)^3}{3}+\ldots = \left(x+\frac{x^3}{6}\right)-\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^3}{3}+\ldots$

$\left(x+\frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3+3x^2\cdot\frac{x^3}{6}+\left(\frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3+\frac{x^5}{2}$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \approx x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3+x^5/2}{3} = x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6} = x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{6}$

2) $\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

$\dfrac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(x))}{\sin(x)} = \dfrac{x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{6}}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}} = \dfrac{1-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{6}}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}} = 1+\left(-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right) = 1-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{120} = 1-\frac{21x^4}{120}$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots$$

$$\sin^4 x = \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)^2 = x^4 - \frac{2x^6}{3} + \dots$$

$$\frac{1}{\sin^4 x} \approx \frac{1}{x^4}\left(1 + \frac{2x^6}{3x^4}\right) = \frac{1}{x^4}\left(1 + \frac{2x^2}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}{\sin x}\right)^{1/\sin^4 x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{21x^4}{120}\right)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\left(-\frac{21x^4}{120}\cdot\frac{1}{x^4}\right)} = e^{-21/120} = e^{-7/40}$$

№ 8 Исследовать функцию $f(x)$ на равномерн. непрерывн. на мн-ве X:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

а) $X = [3; +\infty)$

б) $X = (1, 3)$

Функция наз-ся равномерно непрерывной на промеж., если, взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, можно найти такое число $\delta > 0$, что для $\forall$ значений аргумента x', x'', взятых на данном промежутке, из нер-ва

$|x' - x''| < \delta$ следует нер-во $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Поэтому, чтобы д-ть, что определение равн. непр. выполняется, мы должны найти число $\delta = \delta(\varepsilon)$: выполн. следование $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для произв. знач. x' и x'', взятых на данном промежутке.

а) $$|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{(x')^2+1}{x'-1} - \frac{(x'')^2+1}{x''-1}\right| = \left|\frac{(x''-x')(x'x''-1+(x''+x'))}{(x'-1)(x''-1)}\right| =$$

$$= \frac{|x'-x''|\cdot|x'x''-1+x'+x''|}{|x'-1|\cdot|x''-1|}$$

На $X = [3; +\infty)$ $x'-1 \geq 2$ и $x''-1 \geq 2$, поэтому $|(x'-1)(x''-1)| \geq 4$ и $x'x''-1+x'+x'' \geq 14$, следовательно,

$$\frac{|x'-x''|\,|x'x''-1+x'+x''|}{|x'-1|\,|x''-1|} \leq \frac{14\,|x'-x''|}{4} = \frac{7\,|x'-x''|}{2}, \text{ т.о.}$$

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leq \frac{7}{2}\,|x' - x''|.$$

Сл-но, если взять $\delta = \varepsilon \cdot \frac{2}{7}$, то из усл. $|x' - x''| < \delta$ будет следовать нер-во $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Равномерн. непрерывн. функц. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ на промежутке $[3; +\infty)$ доказана.

б) Д-м, что на промежутке $(1;3)$ данная функц. не будет равномерно непрерывной.

Сначала сформулируем отрицание определения равномерной непрерывности: функция $f(x)$ не явл. равномерно непрерывн. на данном промежутке, если можно найти число $\varepsilon > 0$ такое, что какое бы число $\delta > 0$ мы ни взяли, всегда можно найти значение аргумента x' и x'', лежащие на этом промежутке, которые будут удовлетворять нер-ву $|x'' - x'| < \delta$ и для которых будет выполняться нер-во $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon = 1$:

$\exists\ x' = 1 + \frac{\delta}{2},\ x'' = 1 + \frac{\delta}{4},\ \forall \delta > 0$:

$$|x' - x''| = |(1 + \delta/2) - (1 + \delta/4)| = \frac{\delta}{4} < \delta$$

$$\left|f(x') - f(x'')\right| = \left|\frac{(1+\delta/2)^2 + 1}{\delta/2} - \frac{(1+\delta/4)^2+1}{\delta/4}\right|.$$ Заметим, что числит. растет немного быстрее знаменателя. Т.е. разность $|f(x') - f(x'')| \geq 1 = \varepsilon$.

Т.е. $f(x)$ не явл. равномерно непрерывной на $(1;3)$.