Восьмого ноября в пятницу в 8.20 в ауд. 1419, Кронверкский пр., состоится коллоквиум – устная беседа (максимальная оценка – 20 баллов).

Требуется: 1) раскрыть содержание двух вопросов из списка: сформулировать определения, леммы, теоремы, следствия из теорем, привести доказательства утверждений, примеры;

2) привести решение двух задач;

3) ответить на дополнительные вопросы.

Подготовка к ответу – не более 40 минут.

Программа коллоквиума

1. Логические операции над высказываниями. Доказательство от противного.

Опр. ***Высказывание***

> **[Определение] (понятие высказывания)**
>
> Под **высказыванием** мы понимаем повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не тем и другим одновременно.

Логическая символика

$\forall$ - квантор всеобщности (примеры прочтения: любой, каждый, для любого, для каждого)

$\exists$ - квантор существования (примеры прочтения: существует, найдется, для некоторого)

$\Rightarrow$ - знак импликации (пример прочтения: следует)

$\Leftrightarrow$ - знак равносильности/тождества (примеры прочтения: тогда и только тогда, необходимо и достаточно)

$\vee$ - логическое или

$\wedge$ - логическое и

Ͽ - рассмотрим *(там еще точка должна быть внутри завитка, типо это глазик, но такого символа не нашел)* (∡ - также подходит этот символ, тоже с точкой внутри, далее использую его)

: - такой что/так что (также подходит |)

! - единственный

] - пусть *(вообще палки вбок должны быть подлиннее, но тоже нужного символа не нашел)*

¬ - знак логической операции отрицания/не *(также подходит черта над высказыванием)*

Примеры:

[Пример]

Высказывание

$$\forall b\ \exists a : a + b = 3$$

читается так: «для каждого b найдется a такое, что сумма a и b равна 3».

[Пример]

Высказывание

$$\forall a, b\ \exists! c : c = ab$$

читается так: «для любых чисел a, b найдется единственное число c, равное их произведению».

Логическая операция ⟹ (импликация)

] A, B - высказывания

A ⟹ B

(примеры прочтения: из A следует B; если A то B; B необходимо для A; A достаточно для B)

Пример:

[Пример]

Рассмотрим высказывания

$$A:\ x < 0, \quad B:\ x < 1.$$

Очевидно, из A следует B, то есть $A \Rightarrow B$.

Этот же пример показывает, что обратное утверждение, то есть утверждение B ⟹ A, не следует из утверждения A ⟹ B.

Логическая операция ⇔ (равносильность)

] A, B - высказывания

A ⇔ B (примеры прочтения: A тождественно B; для того чтобы выполнялось A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B; A выполняется тогда и только тогда, когда выполняется B)

> [Замечание]
>
> Легко понять, что равносильность двух высказываний A и B — это то же самое, что одновременное выполнение двух импликаций: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. Это наблюдение часто используется при доказательстве теорем, в условии которых фигурирует понятие равносильности (или, что то же самое, фигурирует фраза «тогда и только тогда»).
>
> В случае высказывания «A необходимо и достаточно для B», то есть высказывания $A \Leftrightarrow B$, импликация $A \Rightarrow B$ часто называется **необходимостью** (B необходимо для A), а импликация $B \Rightarrow A$ — **достаточностью** (B достаточно для A).

Пример:

> [Пример]
>
> Рассмотрим высказывания:
>
> $$A: \text{целое число делится на } 6, \quad B: \text{целое число делится на } 2 \text{ и на } 3.$$
>
> Ясно, что данные высказывания равносильны, то есть $A \Leftrightarrow B$.

Опр. ***Понятие критерия***

> [Определение] (понятие критерия)
>
> Необходимое и достаточное условие часто также называется **критерием**.

Логическая операция ¬ (отрицание)

] A - высказывание, ¬A (не A)

Пример:

> [Пример]
>
> Рассмотрим высказывание $A: \ x < 0$. Тогда $\neg A: \ x \geq 0$.

Свойства:

[Замечание]

Для любого высказывания A справедлив **принцип исключенного третьего**: выполнено либо A, либо $\neg A$.

[Замечание]

Всегда справедливо утверждение $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$.

На свойствах операции отрицания строится метод ***доказательства от противного*** *(суть простым языком: если нам нужно доказать, что “A” - верно, мы вместо этого можем доказать что “не A” - неверно; для этого можем предположить что “не A” верно и прийти к противоречию)*

[Лемма] (доказательство от противного)

Пусть A, B — высказывания, тогда

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Доказательство:

▼ **Необходимость**

Докажем необходимость. Пусть справедливо $A \Rightarrow B$ и при этом справедливо $\neg B$. Тогда, в силу принципа исключенного третьего, выполнено $\neg A$ (иначе, в силу того, что $A \Rightarrow B$, было бы справедливо B, а не $\neg B$). Последнее же противоречит тому, что выполнено A.

▼ **Достаточность**

Докажем достаточность. Пусть выполнено $\neg B \Rightarrow \neg A$. Тогда, по доказанному в предыдущем пункте, выполнено

$$\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B),$$

то есть $A \Rightarrow B$.

Также для доказательства возможно просто расписать таблицу истинности, но на лекции намеренно доказывали не так

Логическая операция $\vee$ ***(или)***

] A, B - высказывания

A $\vee$ B верно, если верно **хотя бы одно** из высказываний A; B

Пример:

> [Пример]
> Рассмотрим высказывания $A: \ 0 < x \leq 1$ и $B: \ 1 \leq x < 2$. Тогда $A \vee B: \ 0 < x < 2$.

Логическая операция ∧ ***(и)***

] A, B - высказывания

A ∧ B верно, если верны **оба** высказывания A; B

Пример:

> [Пример]
> Рассмотрим высказывания $A: \ 0 < x \leq 1$ и $B: \ 1 \leq x < 2$. Тогда $A \wedge B: \ x = 1$.

Построение отрицания

Словами:

Пусть P(x) — некоторое высказывание, зависящее от x, где x — произвольный элемент некоторого множества X (для каждого элемента x из X, известно, выполнено ли для него P(x). Например, если X - натуральные числа, а P(x) - “x - кратно 2”, то P(x) выполнено при четных x и не выполнено при нечетных)

Тогда:

для высказывания “для любого x из X выполнено P(x)” отрицанием является высказывание “существует x из X, для которого не выполнено P(x)”

для высказывания “существует x из X, для которого выполнено P(x)” отрицанием является “для любого x из X не выполнено P(x)”

2. Понятие множества. Способы задания множества. Операции над множествами. Свойства. Декартово произведение множеств.

3. Понятия функции и отображения. Свойства образа и прообраза. Виды отображений. Обратное отображение. Композиция отображений. Свойства композиции отображений.

4. Множество вещественных чисел. Аксиомы множества вещественных чисел. Существование иррациональных чисел. Существование числа, квадрат которого равен 2.

Множество вещественных чисел

Множество R называется множеством вещественных (действительных) чисел, а его элементы вещественными (действительными) числами, если введены операции и аксиомы, приведенные ниже.

Аксиомы множества вещественных чисел:

I) На множестве R определим операцию сложения:

$(\forall\ a, b \in \mathrm{R})\ (\exists\ d \in \mathrm{R}) : d = a + b,$

сопоставляющую каждой паре элементов a и b из R некоторый элемент $a + b$ из того же множества R, называемый суммой a и b. При этом выполняются аксиомы сложения:

1. $\forall\ a, b \in \mathrm{R},\ a + b = b + a$ − **коммутативность** сложения (можно переставлять слагаемые);

2. $\forall\ a, b, c \in \mathrm{R},\ a + (b + c) = (a + b) + c$ − **ассоциативность** сложения (можно переставлять скобки при сложении);

3. $\exists\ 0 \in \mathrm{R} : \forall\ a \in \mathrm{R},\ a + 0 = a$ − существование **нейтрального элемента по сложению** (нуля);

4. $\forall\ a \in \mathrm{R}\ \exists\ (-a) \in \mathrm{R},\ a + (-a) = 0$ − существование **противоположного элемента**.

II) Также на множестве R определим операцию умножения:

$(\forall\ a, b \in \mathrm{R})\ (\exists\ d \in \mathrm{R}) : d = ab,$

сопоставляющую каждой паре элементов a и b из R некоторый элемент ab из того же множества R, называемый произведением a и b. При этом выполняются аксиомы умножения:

5. $\forall\ a, b \in \mathrm{R},\ ab = ba$ − **коммутативность** умножения (можно переставлять множители);

6. $\forall\ a, b, c \in \mathrm{R},\ a(bc) = (ab)c$ − **ассоциативность** сложения (можно переставлять скобки при умножении);

7. $\exists\ 1 \in \mathrm{R} : \forall\ a \in \mathrm{R},\ a \cdot 1 = a$ − существование **нейтрального элемента по умножению** (единицы);

8. $\forall\ a \in \mathrm{R} \setminus \{0\}\ \exists\ a$^(−1) $\in \mathrm{R},\ a \cdot a$^(−1) = 1 − существование обратного элемента a^(−1), обозначаемого также $1/a$.

III) Связь сложения и умножения определяет аксиома дистрибутивности:

9. $\forall\ a, b, c \in \mathrm{R},\ a(b + c) = ab + ac$ (можно раскрывать скобки).

IV) Аксиомы порядка:

Между элементами R введено отношение ≤ (не превосходит). Это значит, что для элементов x, y ∈ R установлено: справедливо высказывание x ≤ y или нет. При этом выполняются следующие свойства:

1) **Рефлексивность** ∀ x R   x ≤ x — каждый элемент не превосходит сам себя.

2) **Антисимметричность:** если x ≤ y и y ≤ x, то x = y — если один элемент не превосходит другого, и наоборот, то элементы совпадают.

3) **Транзитивность:** если x ≤ y и y ≤ z, то x ≤ z

4) **Полная упорядоченность:** для любых двух элементов x, y ∈ R справедливо: либо x ≤ y, либо y ≤ x

V)Аксиомы связи сложения и порядка

Если x, y, z — элементы R , то (x ≤ y) ⇒ (x+z ≤ y+z)

VII)Аксиомы связи умножения и порядка:

Если x, y —элементы R, то (0 ≤ x)(0 ≤ y) ⇒ (0 ≤ x · y)

VIII) Аксиома непрерывности:

$\forall\ A, B \subset$ R, $(A, B \not\models \varnothing) \wedge (\forall\ a \in A\ \forall\ b \in B,\ a \leq b)\ \exists\ c \in$ R : $\forall\ a \in A\ \forall\ b \in B,\ a \leq c \leq b$.

(для любых двух множеств рациональных чисел, таких что любой элемент первого множества не больше каждого элемента второго множества, можно найти такое рациональное число, что оно будет не меньше любого элемента первого множества и не больше любого элемента второго множества)

5. Следствия из аксиоматики вещественных чисел. Следствия из аксиом сложения. Следствия аксиом умножения. Следствия аксиом связи сложения и умножения.

Следствия из аксиом сложения

[Лемма] (о единственности нуля)

В множестве $\mathbb{R}$ ноль (нейтральный элемент по сложению) единственен.

Доказательство.

Будем доказывать от противного. Пусть 0_1 и 0_2 — два различных нейтральных элемента относительно сложения в $\mathbb{R}$. Тогда, используя свойства сложения,

$$0_1 \overset{3}{=} 0_1 + 0_2 \overset{1}{=} 0_2 + 0_1 \overset{3}{=} 0_2,$$

откуда получаем противоречие.

Над знаками равенства указаны номера свойств сложения, благодаря которым эти равенства справедливы, внимательно проследите за использованием свойств.

[Лемма] (о единственности противоположного элемента)

В множестве $\mathbb{R}$ каждый элемент имеет единственный противоположный.

Доказательство.

От противного, пусть x_1 и x_2 — два различных противоположных элемента к элементу $x \in \mathbb{R}$. Тогда, используя свойства сложения,

$$x_1 \overset{3}{=} x_1 + 0 \overset{4}{=} x_1 + (x + x_2) \overset{2}{=} (x_1 + x) + x_2 \overset{4}{=} 0 + x_2 \overset{1}{=} x_2 + 0 \overset{3}{=} x_2,$$

откуда получаем противоречие.

Над знаками равенства указаны номера свойств сложения, благодаря которым эти равенства справедливы, внимательно проследите за использованием свойств.

[Лемма]

В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x + a = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$ при любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

Прибавляя к обеим частям равенства $-a$ (проследите использование свойств сложения самостоятельно), получается

$$(x + a + (-a) = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; (x + 0 = b + (-a)) \;\Leftrightarrow\; x = b + (-a).$$

Единственность решения следует из единственности противоположного элемента.

[Определение] (понятие разности)

Разностью элементов $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ назовем элемент

$$a + (-b) \in \mathbb{R}.$$

Операция по получению разности часто называется **вычитанием**.

Следствия аксиом умножения

[Лемма] (следствия из аксиом умножения)

1. В множестве $\mathbb{R}$ единица (нейтральный элемент по умножению) единственна.
2. В множестве $\mathbb{R} \setminus 0$ каждый элемент имеет единственный обратный.
3. В множестве $\mathbb{R}$ уравнение $a \cdot x = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}$.

▼ **Доказательство.**

Все эти утверждения доказываются аналогично леммам предыдущего пункта, и их доказательство предлагается в качестве упражнения.

[Определение] (понятие частного)

Частным элементов $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ назовем элемент

$$a \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Операция по получению частного часто называется **делением**.

Для краткости мы часто в дальнейшем будем вместо $a \cdot b^{-1}$ писать $\frac{a}{b}$. К этому мы, однако, еще раз вернемся позже при обсуждении рациональных чисел.

Следствия аксиом связи сложения и умножения

Начнем с того, что умножение любого элемента на ноль даст ноль.

[Лемма] (об умножении на ноль)

Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$x \cdot 0 = 0.$$

▼ **Доказательство.**

Приведем некоторые равносильные утверждения, приводящие нас к требуемому результату.

$$(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)) \Leftrightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) \Leftrightarrow 0 = x \cdot 0.$$

Написанные переходы основаны на свойствах сложения, умножения, а также на аксиоме связи этих операций, проследите их использование самостоятельно.

Докажем следствие, которое часто используется при решении уравнений.

[Следствие]

$$(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

▼ **Доказательство.**

Если либо $x = 0$, либо $y = 0$, то утверждение тривиально.

Пусть теперь $x \neq 0$. Тогда, согласно третьему пункту леммы и предыдущей лемме,

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \cdot x^{-1} = 0,$$

откуда $y = 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $y \neq 0$.

Теперь докажем, что противоположный элемент получается из исходного умножением на (-1) — на элемент, противоположный к 1.

[Лемма] (о противоположном элементе)

Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$-x = (-1) \cdot x.$$

Доказательство.

Используя в первом равенстве аксиому связи сложения и умножения, а в последнем — доказанную лемму об умножении на ноль, получим

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0,$$

а значит, в силу единственности противоположного элемента, $-x = (-1) \cdot x$.

Приведем некоторые следствия.

[Следствие]

Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(-1) \cdot (-x) = x.$$

Доказательство.

Докажем данное утверждение, используя свойства умножения и только что доказанную лемму:

$$(-1) \cdot (-x) = (-1) \cdot (-1) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

[Следствие]

Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

Доказательство.

Докажем данное утверждение, используя свойства умножения, лемму и только что доказанное следствие:

$$(-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-x) = x \cdot (-1) \cdot (-x) = x \cdot x.$$

6. Следствия из аксиоматики вещественных чисел. Следствия аксиом порядка. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.

Следствия аксиом порядка

[Следствие]

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место ровно одно из соотношений:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

[Лемма] (о строгой транзитивности)

Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ справедливы следующие высказывания:

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \ \Rightarrow \ (x < z),$$

$$(x \leq y) \wedge (y < z) \ \Rightarrow \ (x < z).$$

▼ **Доказательство.**

Докажем первое утверждение. Из аксиомы транзитивности получаем, что

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \ \Rightarrow \ (x \leq z).$$

Покажем, что $x \neq z$. От противного, если $x = z$, то

$$\begin{gathered}(x < y) \wedge (y \leq z) \ \Leftrightarrow \ (z < y) \wedge (y \leq z) \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ (z \leq y) \wedge (z \neq y) \wedge (y \leq z) \ \Leftrightarrow \ (z = y) \wedge (z \neq y),\end{gathered}$$

откуда приходим к противоречию.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

[Лемма]

Для любых $x, y, z, k \in \mathbb{R}$ справедливы следующие высказывания:

$$\begin{gathered}(x < y) \ \Rightarrow \ (x + z) < (y + z), \\ (0 < x) \ \Rightarrow \ (-x < 0), \\ (x \leq y) \wedge (z \leq k) \ \Rightarrow \ (x + z) \leq (y + k), \\ (x < y) \wedge (z \leq k) \ \Rightarrow \ (x + z) < (y + k), \\ (0 < x) \wedge (0 < y) \ \Rightarrow \ (0 < x \cdot y), \\ (0 > x) \wedge (0 > y) \ \Rightarrow \ (0 < x \cdot y), \\ (0 > x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 > x \cdot y), \\ (x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (x \cdot z < y \cdot z), \\ (x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (x \cdot z > y \cdot z).\end{gathered}$$

▼ **Доказательство.**

Все эти высказывания доказываются аналогично тому, как мы доказывали предыдущие утверждения, доказательства остаются в качестве упражнения.

Докажем теперь важную лемму.

[Лемма] (о нуле и единице)

$$0 < 1.$$

Доказательство.

Согласно аксиомам, $0 \neq 1$. Предположим, что $1 < 0$, тогда, используя предыдущую лемму,

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (1 \cdot 1 > 0) \Rightarrow (1 > 0).$$

Так как одновременно не может выполняться $1 < 0$ и $1 > 0$, приходим к противоречию.

7. Индуктивное множество. Пересечение индуктивных множеств. Множество натуральных чисел. Принцип математической индукции. Утверждение о сумме натуральных чисел. Неравенство Бернулли.

8. Целые, рациональные и иррациональные числа. Правило умножения и сложения рациональных дробей. Существование иррациональных чисел. Расширение множества вещественных чисел. Неопределенности.

9. Модуль вещественного числа. Свойства модуля.

10. Промежутки числовой прямой. Окрестности. Существование непересекающихся окрестностей двух разных точек.

11. Граница множества. Ограниченность множества. Необходимое и достаточное условие ограниченности множества. Максимальный (наибольший), минимальный (наименьший) элемент множества. Супремум и инфимум. Равенство наибольшего (наименьшего) элемента и точной грани. Принцип точной грани.

12. Существование наибольшего элемента в ограниченном подмножестве множества натуральных чисел. Неограниченность множества натуральных и целых чисел. Принцип Архимеда и его следствия. Плотность множества рациональных и иррациональных чисел.

(привел как формулировки из ноушена, так и, местами, свои собственные, можете посмотреть какие понятнее (правда, мои могут быть не вполне грамотными, конечно), мои формулировки и комментарии написаны курсивом)

13. Теорема Кантора – Коши о вложенных отрезках.

[Определение] (понятие системы вложенных отрезков)

Пусть $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что система I_n — **система вложенных отрезков**, если

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots .$$

(немного другими словами: последовательность отрезков, где каждый следующий лежит внутри предыдущего; также тут можно сразу заметить, что любой отрезок с большим номером лежит внутри отрезка с меньшим номером)

Теорема Кантора-Коши (1 пункт)

Формулировка

[Теорема] (теорема Кантора)

Пусть $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, — система вложенных отрезков.

1. Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing.$$

(немного другими словами: пересечение системы вложенных отрезков непусто, то есть существует точка, которая лежит на всех этих отрезках)

Доказательство:

1.

Пусть

$$X = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}, \quad Y = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}.$$

Эти множества не пусты и

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \;\; a_n \leq b_k,$$

то есть левый конец любого отрезка системы не больше, чем правый конец любого отрезка системы. Значит, по аксиоме непрерывности,

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad a_n \leq c \leq b_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

В частности,

$$a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а значит $c \in I_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, то есть

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing.$$

(немного другими словами: так как каждый следующий отрезок лежит внутри предыдущего, то любое начало отрезка из системы (начала отрезков

это множество X) не больше любого конца (концы отрезков - это множество Y) ($a_n \le a_{n+k} \le b_{n+k} \le b_n$); значит, по аксиоме непрерывности, существует точка, которая не меньше всех начал и не больше всех концов, значит она лежит во всех отрезках)

Теорема Кантора-Коши (пункт 2)

2. Кроме того, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется отрезок, длина которого меньше ε, то пересечение будет состоять ровно из одного элемента, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}.$$

(немного другими словами: если среди системы вложенных отрезков найдется сколь угодно короткий, то их пересечение состоит из одной точки)

Доказательство

▼ 2.

Будем доказывать от противного. Пусть

$$c_1, c_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad c_1 < c_2.$$

Тогда

$$a_n \le c_1 < c_2 \le b_n \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$0 < c_2 - c_1 \le b_n - a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

По условию, $\forall \varepsilon > 0$ найдется отрезок, длина которого меньше ε, а значит

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; 0 < c_2 - c_1 \le \varepsilon,$$

что означает, что $c_2 - c_1 = 0$. Данное противоречие завершает доказательство.

(немного другими словами: от противного: пусть есть больше одной точки во всех отрезках, возьмем из них какие-то две разные точки c1 и c2 (c2 > c1), тогда длина отрезка [c1; c2] это некоторая константа c2 - c1 > 0; среди нашей системы отрезков найдется сколь угодно короткий, значит, найдется отрезок короче c2 - c1, значит в нем не могут лежать обе точки c1, c2. Противоречие)

Примечание 1

[NB]

Условие, что в теореме Кантора рассматриваются вложенные отрезки, важно. Например, для вложенных интервалов утверждение теоремы оказывается неверным (впрочем, похожее мы уже обсуждали здесь):

$$U_n = \left(0,\ \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \varnothing.$$

Докажем последнее от противного. Пусть рассматриваемое пересечение не пусто, тогда

$$\left(x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \Rightarrow (x \in U_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}).$$

Согласно лемме,

$$\exists n \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{n} < x,$$

а значит $x \notin U_n$. Противоречие.

(немного другими словами: для интервалов теорема не работает, контрпример - интервалы вида (0, 1 / n), можно показать, что если бы была какая-то общая точка, то она больше 0, а для любой точки, больше 0, найдется натуральное n, такое что 1 / n меньше этой точки (по следствию из принципа Архимеда), а значит во всех интервалах с номером больше n она не лежит; таким образом, никакая точка не может принадлежать пересечению)

Примечание 2

Лемма Коши-Кантора вместе с принципом Архимеда эквивалентна аксиоме непрерывности *(если не ошибаюсь, на лекции этого не доказывали, а только упоминали)*

14. Принцип Бореля – Лебега о конечном покрытии.

(тема в ноушене написана безупречно, мне вообще добавить нечего)

Определение покрытия отрезка интервалами:

[**Определение**] **(понятие покрытия)**

Говорят, что система интервалов U_α, $\alpha \in A$, **покрывает** отрезок $[a, b]$, если

$$\forall x \in [a, b] \ \exists \alpha_0 : \quad x \in U_{\alpha_0}.$$

> Иными словами, система интервалов U_α, $\alpha \in A$, покрывает отрезок $[a, b]$ в том и только том случае, когда **каждая** точка отрезка попадает **хотя бы в один** из интервалов покрытия или, что то же самое, объединение этих интервалов содержит отрезок, то есть
>
> $$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Примечание (обобщение определения покрытия)

[**NB**]

Понятно, что предыдущее определение может быть обобщено в принципе на *любую* систему множеств.

Говорят, что система множеств E_α, $\alpha \in A$, **покрывает** множество X, если

$$\forall x \in X \ \exists \alpha_0 : \quad x \in E_{\alpha_0}.$$

Смысл определения остается, конечно же, таким же.

Пример:

[**Пример**]

Система U_α, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{-1, +\infty\}$, определяемая как

$$U_n = \left(\frac{1}{n},\ 3 - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$
$$U_{-1} = (-1,\ 0.5), \quad U_{+\infty} = (2.5,\ 5),$$

образует *некоторое* покрытие отрезка $[0, 3]$.

Видно, что без множеств U_{-1} и $U_{+\infty}$ система множеств U_α, $\alpha \in \mathbb{N}$, покрытия бы не образовывала, так как 0 и 3 ни в одно из множеств рассматриваемой системы не попадают.

Лемма Бореля-Лебега

Формулировка

[*Лемма*] **(Бореля—Лебега)**

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие.

▶ **Доказательство.**

Доказательство

▼ **Доказательство.**

Будем доказывать данную лемму от противного. Пусть существует покрытие отрезка $I_0 = [a, b]$ интервалами, из которого нельзя выделить конечное покрытие.

Разделим I_0 пополам. Тогда хотя бы один из полученных отрезков не допускает конечного покрытия. Назовем его I_1.

Теперь разделим I_1 пополам. Тогда снова хотя бы один из двух полученных отрезков не допускает конечного покрытия. Назовем его I_2. Продолжая это процесс дальше (по индукции), получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots,$$

где длина $|I_n|$ отрезка I_n равна

$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}.$$

По теореме Кантора,

$$\exists c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

значит $c \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а значит, существует интервал (α, β) из покрытия такой, что $c \in (\alpha, \beta)$.

Покажем, что в построенной системе вложенных отрезков существуют отрезки сколь угодно малой длины. Действительно, используя формулу бинома Ньютона,

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \ldots > n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

а значит, согласно следствию из принципа Архимеда,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \; \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon.$$

Положим $\varphi = \min(c - \alpha, \beta - c)$. Так как в системе существуют отрезки длины меньшей, чем φ, то один интервал (α, β) покрывает их. Это противоречит построению системы вложенных отрезков.

Примечание 1:
Лемма Бореля-Лебега эквивалентна аксиоме непрерывности *(аналогично, на лекции, вроде бы, только упоминали)*

Примечание 2:

[NB]

Как и в замечании к теореме Кантора отметим, что рассмотрение покрытия именно *отрезка* — важно. Например, в предыдущем примере система

$$U_n = \left(\frac{1}{n},\, 3 - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

образует покрытие интервала $(0, 3)$, из которого, однако, нельзя выделить конечное покрытие этого интервала.

Отметим также, что нельзя отказаться и от покрытия именно *интервалами*. Например, система отрезков

$$I_n = \left[\frac{1}{n},\, 3 - \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N},$$
$$I_{-1} = [-1, 0], \quad I_{+\infty} = [3, 4],$$

образует покрытие отрезка $[0, 3]$ из которого, опять-таки, конечного покрытия не выделить. Та же система отрезков покрывает и интервал $(0, 3)$, в общем-то, с такой же *печальной* судьбой.

Можно придумывать и различные другие комбинации тех или иных множеств. Оставляем это заинтересованным читателям.

15. Принцип Больцано – Вейерштрасса о предельной точке.

Понятие предельной точки

[Определение] **(понятие предельной точки)**

Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** множества $E \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, если для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $U(x_0) \cap E$ бесконечно.

Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется **предельной точкой** множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, если для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $U(x_0) \cap E$ бесконечно.

Множество предельных точек множества E будем обозначать E'.

(немного другими словами: предельная точка множества E - это такая точка, что в любой ее окрестности есть бесконечно много точек из этого множества; понятие вводим для E ⊂ ℝ или E ⊂ (ℝ - расширенному) (обозначается ℝ с подчеркиванием сверху))

Примеры

[Пример]

Пусть $E = (0, 1]$. Тогда $E' = [0, 1]$.

Действительно, каждая точка E является предельной для E в силу определения полуинтервала. В то же время, точка $0 \notin E$ — тоже предельная для E, так как если $U(0) = (\alpha, \beta)$ — произвольная окрестность точки 0, то

$$U(0) \cap E = (\alpha, \beta) \cap (0, 1] = (0, \beta),$$

где последнее множество бесконечно.

Заметим, что множество предельных точек E' в данном случае одинаково как в $\mathbb{R}$, так и в $\overline{\mathbb{R}}$.

[Пример]

Пусть

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Тогда $E' = \{0\}$.

Действительно, никакая точка множества E не является предельной для этого множества, ведь вокруг каждой точки этого множества можно построить окрестность, в которой будет содержаться лишь конечное число элементов множества E. Обязательно подумайте над конструктивным способом задания такой окрестности!

С окрестностями точки 0, напротив, все наоборот. Если $U(0) = (\alpha, \beta)$ — произвольная окрестность точки 0, то

$$U(0) \cap E = \left\{\frac{1}{n} : \ \frac{1}{n} < \beta, \ n \in \mathbb{N}\right\},$$

где последнее множество бесконечно.

Заметим, что и в данном случае множество предельных точек E' одинаково как в $\mathbb{R}$, так и в $\overline{\mathbb{R}}$.

[Пример]

Пусть

$$E = [0, +\infty).$$

Здесь ситуация более деликатная, нежели ранее. Если мы рассматриваем предельные точки в $\mathbb{R}$, то как легко понять, $E' = E = [0, +\infty)$.

В то же время, если рассматривать предельные точки в $\overline{\mathbb{R}}$, то $E' = [0, +\infty]$.

Понятие изолированной точки

[**Определение**] **(понятие изолированной точки)**

Точка $x_0 \in E$, не являющаяся предельной для множества E, называется **изолированной** для E.

Или, другими словами, это такая точка, что в некоторой ее окрестности лежит только конечное число точек множества E (возможно 0) (отсюда следует, что есть и такая окрестность, в которой вообще не лежит других точек из E, кроме, возможно, ее самой)

Пример

[**Пример**]

Пусть

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Тогда все точки множества E оказываются изолированными.

Принцип Больцано-Вейерштрасса о предельной точке/лемма о предельной точке

Формулировка

[**Лемма**] **(о предельной точке)**

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если E бесконечно и ограничено, то оно имеет хотя бы одну предельную точку в $\mathbb{R}$.

▸ **Доказательство.**

Доказательство

▼ **Доказательство.**

Будем доказывать от противного.

Пусть множество предельных точек E' множества E пусто. Так как E ограничено, то найдется отрезок $[a,b]$ такой, что $E \subset [a,b]$. Достаточно показать, что хотя бы одна точка отрезка является предельной для E.

Снова будем действовать от противного. Пусть

$$\forall x \in [a,b]\ \exists U(x):\ \ U(x)\cap E\ \text{ конечно.}$$

Построенная система окрестностей $U(x),\ x \in [a,b]$, образует покрытие отрезка $[a,b]$. По лемме Бореля—Лебега из этого покрытия можно выделить конечное покрытие

$$U(x_1),\ \ldots,\ U(x_k).$$

Но тогда

$$E \subset [a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{k} U(x_n),$$

где последнее объединение, с одной стороны, содержит E, а с другой стороны, в силу равенства

$$\left(\bigcup_{n=1}^{k} U(x_n)\right) \cap E = \bigcup_{n=1}^{k} (U(x_n)\cap E),$$

конечно (как конечное объединение конечных множеств). Это противоречит бесконечности множества E.

(немного другими словами: от противного: пусть множество E' предельных точек некоторого бесконечного ограниченного множества E пустое. Так как E - ограниченное, можем рассмотреть отрезок [a, b], такой, что E ⊂ [a, b]. Так как E' пусто, для каждой точки из этого отрезка, найдется окрестность, которая содержит конечное число точек из E (возможно, ни одной). Рассмотрим систему из таких окрестностей. Так как каждая точка отрезка содержится в своей окрестности, то эта система является покрытием. По лемме Бореля-Лебега, из нее можно выделить конечное покрытие. Заметим, что это конечное покрытие будет содержать весь отрезок [a, b], а значит и все множество E. Так как в каждой окрестности содержится конечное точек из E, а всего окрестностей в конечном покрытии конечное число, то покрытие содержит конечное число точек из E. Значит, E - конечное. Противоречие)

Примечания

[NB]

Во-первых, понятно, что у конечного множества множество предельных точек всегда пусто.

У бесконечного и неограниченного множества, однако, предельных точек в $\mathbb{R}$ может не быть вовсе. В качестве примера подойдет множество натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Обобщение леммы о предельной точке

[Лемма] (обобщение леммы о предельной точке)

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Если E бесконечно, то оно имеет хотя бы одну предельную точку в $\overline{\mathbb{R}}$.

▸ **Доказательство.**

Доказательство

▾ **Доказательство.**

Действительно, если E ограничено, то утверждение леммы следует из только что доказанной леммы о предельной точке.

Если, например, E не ограничено сверху, то $+\infty$ — предельная точка для E в $\overline{\mathbb{R}}$. Действительно, пусть $U(+\infty) = (\alpha, +\infty]$ — произвольная окрестность $+\infty$. Так как E не ограничено сверху, то

$$\exists x_1 \in E: \quad x_1 > \alpha.$$

Аналогично,

$$\exists x_2 \in E: \quad x_2 > x_1,$$

и так далее. Данный процесс никогда не оборвется в силу бесконечности множества E. В итоге, мы нашли бесконечное количесвто элементов E в $U(+\infty)$, что, в силу произвольности рассматриваемой окрестности, завершает доказательство.

Случай неограниченности E снизу рассматривается аналогичным образом.

(немного другими словами: если Е не ограничено сверху (снизу), то для произвольной окрестность +(-) бесконечности найдется элемент Е в ней, для этого элемента найдется элемент больше (меньше) его, для следующего аналогично найдется больший (меньший) и так далее. Процесс не оборвется в силу бесконечности Е, а значит в этой окрестности будет бесконечно много элементов)

16. Замкнутые множества. Существование максимального и минимального элемента множества. Бесконечность множества рациональных и иррациональных чисел.

Определение замкнутого множества

[Определение] (понятие замкнутого множества)

Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ **замкнуто в** $\mathbb{R}$, если оно содержит все свои предельные точки в $\mathbb{R}$.

Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ **замкнуто в** $\overline{\mathbb{R}}$, если оно содержит все свои предельные точки в $\overline{\mathbb{R}}$.

Примеры

[Пример]

Пусть $E = [a, b]$. Так как $E' = [a, b]$ как в $\mathbb{R}$, так и в $\overline{\mathbb{R}}$, то E — замкнутое как в $\mathbb{R}$, так и в $\overline{\mathbb{R}}$, множество.

Интервал $E = (a, b)$ и полуинтервал $E = [a, b)$ замкнутыми множествами ни в $\mathbb{R}$, ни в $\overline{\mathbb{R}}$ не являются, так как в обоих случаях и в обоих множествах $E' = [a, b]$.

Луч $E = [a, +\infty)$ является замкнутым множеством в $\mathbb{R}$, но не является замкнутым множеством в $\overline{\mathbb{R}}$, так как в последнем $E' = [a, +\infty]$.

Пустое множество $\varnothing$ и $\mathbb{R}$ замкнуты в $\mathbb{R}$, пустое множество $\varnothing$ и $\overline{\mathbb{R}}$ замкнуты в $\overline{\mathbb{R}}$.

В то же время, и это важно, $\mathbb{R}$ не замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.

Любое конечное множество - замкнутое, потому что у него нет предельных точек

Аналогично любое подмножество множества натуральных чисел замкнутое, потому что у него также нет предельных точек

Лемма о существовании максимума (минимума) ограниченного замкнутого множества

Формулировка

[Лемма] (о существовании максимума (минимума) ограниченного замкнутого множества)

Любое непустое ограниченное сверху (снизу) замкнутое множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет максимальный (минимальный) элемент в $\mathbb{R}$.

▸ **Доказательство.**

Доказательство

▼ **Доказательство.**

По принципу точной грани существует $M = \sup E < +\infty$. Достаточно показать, что $M \in E$. От противного, пусть $M \notin E$ и $U(M) = (\alpha, \beta)$ — окрестность точки M. По свойству супремума, если $\varepsilon_1 = M - \alpha$, то

$$\exists x_1 \in E: \quad M - \varepsilon_1 < x_1 \le M.$$

Так как $M \notin E$, то последнее неравенство переписывается в виде:

$$M - \varepsilon_1 < x_1 < M.$$

Пусть $\varepsilon_2 = M - x_1$, тогда, аналогично проведенным рассуждениям,

$$\exists x_2 \in E: \quad M - \varepsilon_2 < x_2 < M,$$

откуда $x_1 < x_2$. Продолжая процесс, получается, что

$$U(M) \cap E = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

— бесконечное множество. В силу произвольности $U(M)$ это означает, что M — предельная для E. Тогда, в силу замкнутости E, должно выполняться $M \in E$. Противоречие.

Замечания:
Если E ограничено сверху и замкнуто, то supE ∈ E

[NB]

Любое непустое неограниченное сверху (снизу) замкнутое множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ имеет максимальный (минимальный) элемент в $\overline{\mathbb{R}}$, причем понятно какой: $+\infty$ $(-\infty)$.

Следствия:

⇨ **[Следствие] (о наличии максимума и минимума у конечного множества)**

Любое конечное множество имеет максимальный и минимальный элементы. В случае ограниченности сверху (снизу), максимальный элемент принадлежит $\mathbb{R}$, иначе — $\overline{\mathbb{R}}$.

▼ **Доказательство.**

Доказательство следует из того, что конечное множество замкнуто, и предыдущих леммы и замечания.

⇨ **[Следствие] (о бесконечности множества рациональных и иррациональных чисел)**

Во всяком интервале содержится бесконечное число как рациональных, так и иррациональных чисел.

▼ **Доказательство.**

Пусть в интервале (a, b) лишь конечное число рациональных чисел. Пусть x — наименьшее из них, тогда в интервале (a, x) нет рациональных чисел, что противоречит лемме о плотности рациональных чисел.

Аналогичным образом доказывается утверждение об иррациональных числах.

17. Равномощность множеств. Отношение эквивалентности. Мощность множества. Существование счётного подмножества у бесконечного множества. Свойство счётности бесконечного подмножества счётного множества. Свойство счётного объединения счётных множеств. Свойство не более чем счётного объединения не более чем счётных множеств.

Определение (понятие равномощности множеств)

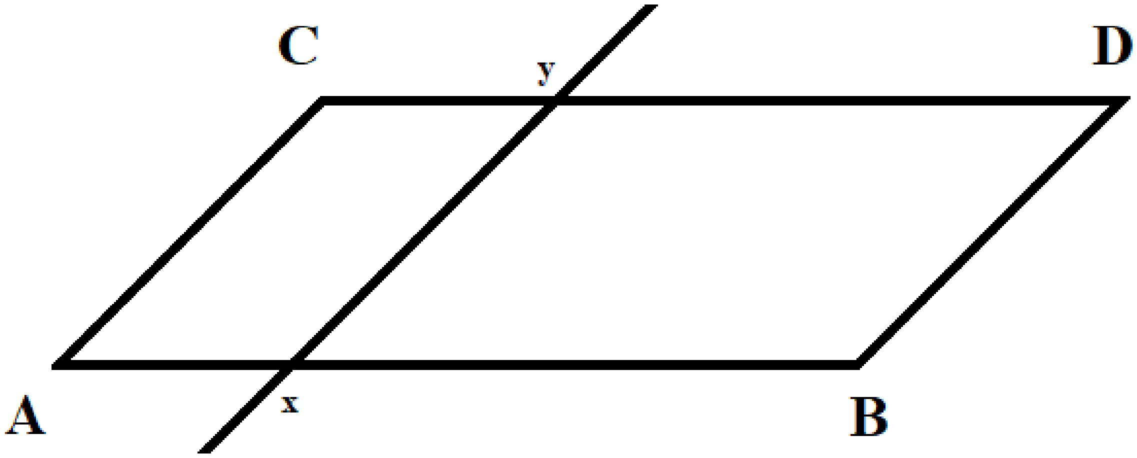
Говорят, что множества A и B **равномощны** (эквивалентны), если существует биекция $\varphi : A \to B$.

> Иными словами, множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

(идея построения биекции заключается в том, чтобы каждому элементу из первого множества подобрать единственную пару из второго, причем каждый элемент из второго должен быть взят в пару ровно один раз)

Примеры

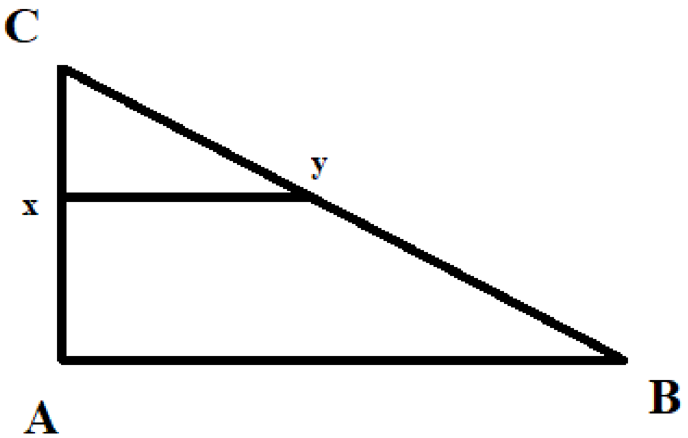
Противоположные стороны параллелограмма равномощны: через каждую точку одной стороны проведем прямую, параллельную соседней стороне, и сопоставим ей в пару точку пересечения с противоположной стороной (φ: $AB \to CD$; $\varphi(x) = y$) (привел этот пример вместо примера с прямоугольником из ноушена, потому что на лекции был этот)



[Пример]

Гипотенуза прямоугольного треугольника равномощна каждому из его катетов (хотя они и имеют разные длины). Взаимно однозначное соответствие можно построить проектированием точек гипотенузы на катет (параллельно другому катету).

φ: AC → BC; φ(x) = y



[Пример]

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество целых чисел $\mathbb{Z}$ равномощны. Биекция может быть установлена, например, следующим образом:

$$1 \to 0,\ 2 \to 1,\ 3 \to -1,\ 4 \to 2,\ 5 \to -2,\ \ldots,\ 2k \to k,\ 2k+1 \to -k, \ldots$$

или

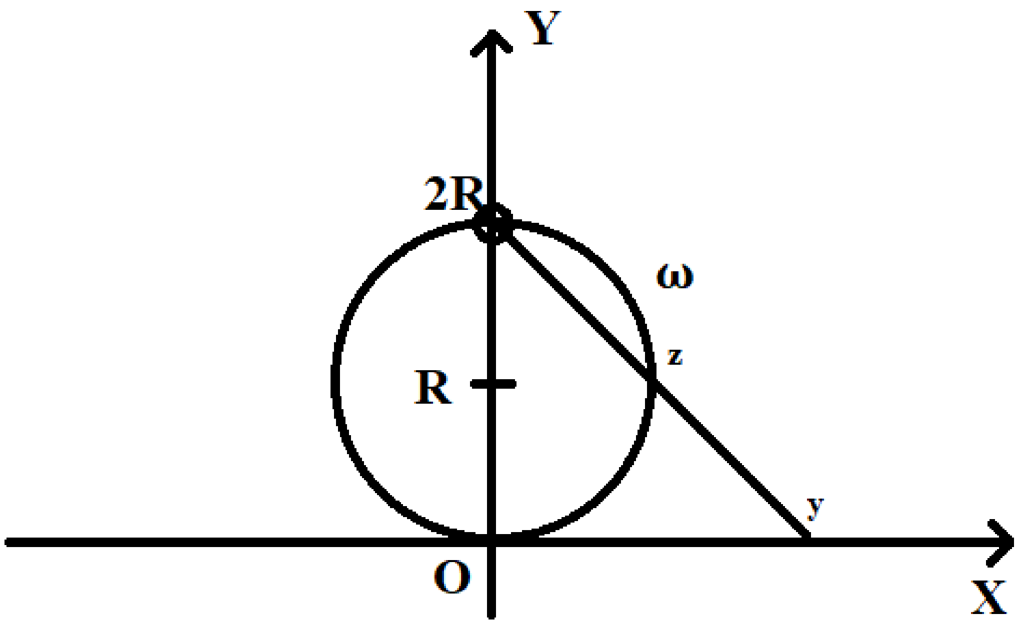
$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ четно} \\ \dfrac{1-n}{2}, & n \text{ нечетно} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

[Пример]

Пусть центр окружности радиуса $R > 0$ имеет координаты $(0, R)$. Тогда часть окружности без точки $N(0, 2R)$ равномощна координатной оси Ox или, что то же самое, множеству вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Для установления взаимно однозначного соответствия, достаточно точке A на оставшейся части окружности сопоставить точку A' оси Ox, получающуюся пересечением луча NA и Ox (стереографическая проекция). Попробуйте написать аналитическое выражение для описанного соответствия самостоятельно.

φ: $\omega \to$ Ox; φ(z) = y



Опр. (отношение эквивалентности)

[Определение] (понятие отношения эквивалентности)

Отношение $\sim$ между элементами некоторого множества называется **отношением эквивалентности**, если оно обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $x \sim x$.
2. Симметричность: если $x \sim y$, то и $y \sim x$.
3. Транзитивность: если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

Элементы, находящиеся в отношении $\sim$, называются **эквивалентными**.

(речь, конечно, идет о бинарном отношении)

Лемма (равномощность - отношение эквивалентности)

[Лемма]

Понятие равномощности множеств является отношением эквивалентности.

▶ **Доказательство.**

Доказательство

1) Рефлексивность (A ~ A): есть биекция элемента в себя
2) Симметричность (A ~ B ⟹ B ~ A): пусть есть биекция φ_1: A → B; φ_1(x) = y, тогда есть и биекция φ_2: B → A; φ_2(y) = x (φ_2 - обратное отображение к φ_1)
3) Транзитивность (A ~ B, B ~ C ⟹ A ~ C): пусть есть биекция φ_{AB}: A → B; и биекция φ_{BC}: B → C, тогда есть и биекция $\varphi_{AC} = \varphi_{BC} \circ \varphi_{AB}$: A → C

Опр. (мощность множества)

[Определение] (понятие мощности)

Класс эквивалентности по отношению равномощности, к которому принадлежит множество A, называется **мощностью** A, **кардиналом** или **кардинальным числом** множества A, и обозначается

$$|A| \text{ или } \operatorname{card} A.$$

Опр. (счетное множество)

Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел *(таким образом, это такое множество, что его элементы можно пронумеровать натуральными числами)*

Теорема (существование счетного подмножества у бесконечного множества)

[**Теорема**] **(о наличии счетного подмножества у бесконечного множества)**

Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

▼ **Доказательство.**

Пусть A — бесконечное множество, тогда в нем есть элемент a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ тоже бесконечно, значит в нем есть элемент a_2. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ бесконечно, а значит в нем есть элемент a_3. Продолжая такой процесс и далее (он не оборвется в силу бесконечности A), получим бесконечное множество

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Понятно, что искомая биекция $\varphi : \mathbb{N} \to B$ может быть построена, например, по правилу $\varphi(n) = a_n$.

Теорема (счетность бесконечного подмножества счетного множества)

[**Теорема**] **(о счетности бесконечного подмножества счетного множества)**

Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

▼ **Доказательство.**

Достаточно проверить, что каждое бесконечное подмножество A множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ счетно.

Так как A — подмножество множества натуральных чисел, то множество A замкнуто и ограничено снизу, а значит в нем существует минимальный элемент. Его мы обозначим a_1 и сопоставим числу 1.

Далее, в множестве $A \setminus \{a_1\}$ аналогичными рассуждениями показывается, что существует минимальный элемент a_2, ему мы сопоставим число 2.

Так как A бесконечно, то, по принципу индукции, мы построим инъекцию $f : \mathbb{N} \to A$ по правилу $f(n) = a_n$. Осталось доказать, что f — сюръекция, то есть $f(\mathbb{N}) = A$.

Пусть $a \in A$. Множество $\{n \in \mathbb{N} : n \leq a\}$ конечно, а значит конечно и его подмножество $\{n \in A : n \leq a\}$. Пусть k — число элементов в последнем множестве. Тогда, по построению, $a_k = a$.

Опр. (не более чем счетное множество)

[**Определение**] **(понятие не более чем счетного множества)**

Множества, мощность которых либо конечна, либо счетна, называются не более чем счетными.

Теорема (о счетности множества, записанного в виде таблицы с счетным числом строк и столбцов/о счетном объединении счетных множеств)

Пусть элементы множества A расположены в виде бесконечной в обоих направлениях матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Тогда A счетно.

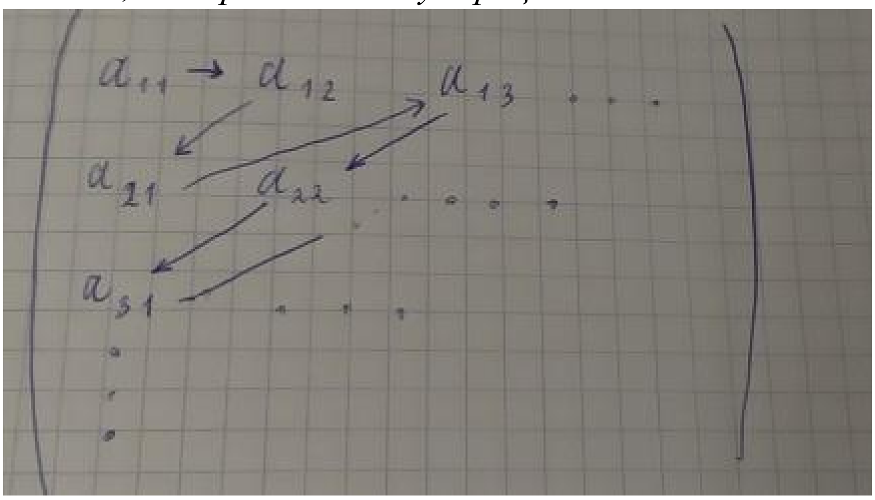
▼ **Доказательство.**

Искомая биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ может быть задана, например, так:

$$f(m, n) = m + \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}.$$

Данная «нумерация» имеет наглядную интерпретацию: мы нумеруем элементы матрицы «по диагоналям». На каждой такой диагонали сумма $(m+n)$ постоянна.

Иллюстрация того, как происходит нумерация



Также стоит отметить, что для доказательства счетности множества А, мы можем и не приводить явную формулу, описывающую отображение, достаточно показать что введенная нумерация является инъекцией (каждое натуральное число нумерует некоторый единственный элемент множества А) и сюръекцией (каждый элемент множества А имеет натуральный номер)

Доказательство таким способом:

Будем проходить по таблице по диагоналям (обход на рисунке), каждый следующий элемент при обходе нумеруем следующим натуральным числом.

Каждое натуральное число нумерует некоторый элемент А, так как А - бесконечное, единственность этого элемента следует из перехода к следующему натуральному числу при каждом следующем шаге. Следовательно, наша нумерация - инъективное отображение.

Каждый элемент А имеет некоторый натуральный номер, так как каждый элемент мы проходим на конечном шаге (потому что элемент находится на диагонали с конечным номером, каждая диагональ содержит конечное число элементов). Следовательно, наша нумерация - сюръекция

Таким образом, наша нумерация - биекция

Следствия

⇨ **[Следствие]**

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно.

▼ **Доказательство.**

Данное утверждение — прямое следствие только что доказанной теоремы, ведь

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\},$$

и в матрице в качестве элемента a_{ij} можно рассматривать пару (i, j).

⇨ **[Следствие]**

Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно.

▼ **Доказательство.**

Пусть рассматривается множество

$$B = \bigcup_{n=1}^{k} A_n \text{ или } B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где все множества A_n не более чем счетны.

Запишем в первую строку матрицы элементы множества A_1, во вторую — элементы множества $A_2 \setminus A_1$, и так далее: если задано множество A_k, то элементы множества $A_k \setminus \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n$ запишем в k-ую строку матрицы. Тогда в матрице будут присутствовать все элементы множества B, но некоторые ячейки в матрице могут оказаться пустыми.

Значит, множество B равномощно некоторому подмножеству счетного множества, а значит оно не более чем счетно.

18. Свойство счетности множества рациональных чисел.

[**Теорема**] **(о счетности множества рациональных чисел)**
Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

▼ **Доказательство.**

Рассмотрим множества

$$Q_+ = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\}, \quad Q_- = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < 0\}.$$

Ясно, что $|Q_+| = |Q_-|$, ведь эти множества состоят из элементов, отличающихся лишь знаком.

Введем в рассмотрение множество

$$Q_q = \left\{\frac{1}{q}, \ \frac{2}{q}, \ \dots, \ \frac{n}{q}, \ \dots\right\}.$$

Понятно, что Q_q не более чем счетно и

$$Q_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_q.$$

Согласно предыдущему следствию, Q_+ не более чем счетно. Тогда, Q_- тоже не более чем счетно. Так как

$$\mathbb{Q} = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\},$$

то по тому же следствию $\mathbb{Q}$ оказывается не более чем счетным. Так как $\mathbb{Q}$ бесконечно, то оно счетно.

19. Теорема Кантора о несчетности отрезка.

[Теорема] (Кантора о несчетности отрезка)

Отрезок $[0,1]$ несчетен.

▼ **Доказательство.**

Будем доказывать от противного. Предположим, что

$$f(n) = a_n$$

— биекция между множество натуральных чисел и $I_0 := [0,1]$.

Выберем отрезок $I_1 \subset I_0$ так, что $a_1 \notin I_1$. Далее, выберем отрезок $I_2 \subset I_1$ так, что $a_2 \notin I_2$. Продолжая описанный процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots,$$

которая, по теореме Кантора, имеет непустое пересечение. Пусть

$$c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

тогда $c \neq a_i \ \ \forall i \in \mathbb{N}$. Действительно, предполагая, что $c = a_{i_0}$ при некотором $i_0 \in \mathbb{N}$, получаем противоречие с построением: $a_{i_0} \notin I_{i_0}$, а значит

$$a_{i_0} \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

В итоге, заявленной биекции не существует.

Существует и другое доказательство этого факта:
От противного: пусть есть некоторая биекция $\varphi: \mathbb{N} \to [0, 1]$
Каждое число из отрезка [0, 1] можем представить в виде бесконечной десятичной дроби, начинающейся с 0
Так как существует биекция $\varphi: \mathbb{N} \to [0, 1]$, *каждому натуральному числу сопоставлено некоторое число из отрезка [0, 1], значит можем записать, что:*

$\varphi(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1m}\ldots$
$\varphi(2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2m}\ldots$
$\varphi(3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3m},\ldots$
.
.
.
$\varphi(n) = 0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nm}\ldots$
.
.
.

Где a_{ij} *- некоторая цифра*

Тогда рассмотрим число из отрезка [0, 1] $x = 0{,}b_1b_2b_3\dots b_m\dots$, такое что b_i - цифра, не равная a_{ii} и не равная 9 (чтобы, например, не получилась дробь вида 0,0(9) = 0,1 так как дробь вида 0,1 могла быть уже пронумерована), тогда x отличается от φ(i) по i-ому разряду после запятой, следовательно x не имеет номера при такой нумерации.
Следовательно, $\varphi: \mathbb{N} \to [0, 1]$ - не биекция. Противоречие.

Примечание:
В обоих случаях мы предположили существование некоторой произвольной биекции и пришли к противоречию, приведение конкретной нумерации, при которой остаются непронумерованные элементы отрезка [0, 1] доказательством не является.

20. Свойства континуальности промежутков в множестве вещественных чисел.

Опр. (мощность континуум)

[Определение] (понятие мощности континуум)

Мощность множеств, равномощных отрезку $[0, 1]$, называется **континуумом**, а сами такие множества — **континуальными**.

Теорема (о континуальности промежутков в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$ - расширенном)

[Теорема] (о континуальности промежутков в $\mathbb{R}$)

Справедливы следующие утверждения:

1. Отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи имеют мощность континуум.
2. Множества $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ имеют мощность континуум.

1.

Доказательство:

▼ 1.

Будем доказывать теорему для случая подмножеств $\mathbb{R}$.

Равномощность любых двух отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$, при $a < b$, $c < d$, устанавливается при помощи биекции

$$\varphi(t) = c + \frac{(t-a)}{b-a}(d-c), \quad t \in [a, b].$$

Эта же биекция устанавливает равномощность интервалов (a, b) и (c, d), при $a < b$, $c < d$.

Докажем, например, что отрезок $[0, 1]$ и полуинтервал $[0, 1)$ равномощны. Биекцию $\varphi :$ $[0, 1] \to [0, 1)$ построим так:

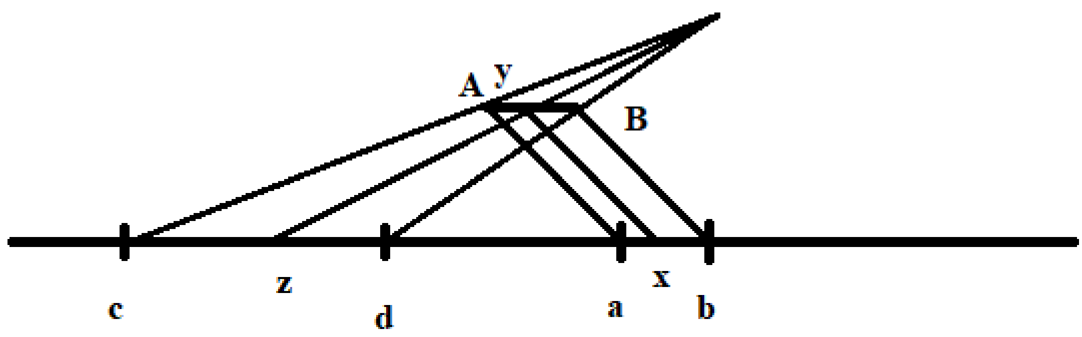
$$\varphi(1) = \frac{1}{2}, \ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2}, \ \ldots, \ \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}, \ \ldots,$$

остальные точки отрезка $[0, 1]$ переводятся в себя. Остальные детали оставляем читателю.

Аналогичным образом можно доказать, что отрезок $[0, 1]$ и интервал $(0, 1)$ равномощны, а значит, ввиду рассуждений в начале доказательства, любой отрезок и любой интервал равномощны.

Доказательство равномощности отрезка и луча, как и доказательства в $\overline{\mathbb{R}}$, остаются в качестве упражнения.

Равномощность двух отрезков (полуинтервалов/интервалов) доказана здесь при помощи формулы деления в одинаковом отношении, можно также построить биекцию двух отрезков (полуинтервалов/интервалов) как композицию параллельного переноса и гомотетии (которые тоже являются биекциями). Пример на рисунке:



(отрезок [a, b] параллельным переносом переходит в отрезок AB, а отрезок AB гомотетией в отрезок [c, d], при этом точка x, при параллельном переносе, сначала переходит в y, а затем при гомотетии в z; два интервала (или два полуинтервала) переводятся один в другой аналогично, просто без соответствующих концов))

Равномощность отрезка и полуинтервала здесь доказана хорошо, доказательство равномошности отрезка [0, 1] и интервала (0, 1) можно провести схожим образом, сдвинув последовательность на 1 шаг:
$0 \to 1/2$; $1 \to 1/4$; $1/2 \to 1/8$ … $1/2^n \to 1/2^{(n + 2)}$, остальные точки отрезка переводим в себя.
Таким образом, мы доказали равномощность любых отрезков, интервалов и полуинтервалов. Равномощность интервала (0, 1) и луча $(k, +\infty)$ докажем введя биекцию $\varphi: (0, 1) \to (k, +\infty)$, $\varphi(x) = 1/x + (k - 1)$, аналогично для интервала (-1, 0) и луча $(-\infty, k)$ существует биекция $\varphi: (0, 1) \to (k, +\infty)$, $\varphi(x) = 1/x + (k + 1)$. Таким образом, для любого луча без начала мы доказали его равномощность некоторому интервалу, так как ранее мы доказали что все интервалы имеют мощность континуум, мощность луча также континуум.
Для луча с началом возьмем полуинтервал (0, 1] или [-1, 0) и проведем аналогичные рассуждения.
Из равномощности отрезка и интервала и отрезка и полуинтервала следует, что добавление одной или двух точек к множеству мощности континуум не меняет его мощность. Соответственно отрезки в расширенном множестве действительных чисел вида $[x, +\infty]$ и $[-\infty, y]$ будут равномощны лучам вида $[x, +\infty)$ и $(-\infty, y]$, а значит будут также иметь мощность континуум.
2. Отображение tg(x) - биекция интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ на $\mathbb{R}$, значит мощность $\mathbb{R}$ также континуум. $\mathbb{R}$ - расширенное получено из $\mathbb{R}$ добавлением двух элементов, значит, как уже доказали ранее, также имеет мощность континуум.

Примечание (континуум-гипотеза)

> Долгое время была актуальна так называемая континуум-гипотеза: любое бесконечное подмножество $\mathbb{R}$ либо континуально, либо счетно. Иными словами, эта гипотеза говорит о том, что нет каких-то промежуточных между счетной и континуальной мощностей.
>
> Ответ на этот вопрос был окончательно получен в 1963 году О. Коэном. Было доказано, что континумм-гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках принятой аксиоматики теории множеств. Ситуация вполне аналогична независимости пятого постулата Евклида от остальных аксиом геометрии.

21. Теорема Кантора о связи мощности множества и мощности множества его подмножеств.

Понятие порядка на мощности

> [**Определение**] **(порядок на множестве мощностей)**
>
> Говорят, что мощность множества A **не больше**, чем мощность множества B, если A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Это отношение обладает свойствами отношения линейного порядка

[NB]

Если мощность множества A не больше, чем мощность множества B, то пишут

$$|A| \leq |B| \ \text{ или } \ \operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B.$$

Введенное отношение обладает стандартными и уже известными нам свойствами:

1. Для любого множества A выполняется $|A| \leq |A|$.
2. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.
3. Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$.
4. Для любых двух множеств A и B либо $|A| \leq |B|$, либо $|B| \leq |A|$.

Не смотря на кажущуюся простоту и очевидность написанных свойств, свойство 2 является, по сути, содержанием нетривиальной теоремы Кантора—Бернштейна, а доказательство свойства 4 требует так называемой трансфинитной индукции. Мы не будем останавливаться на этих вопросах подробно.

Теорема Кантора о связи мощности множества и мощности множества его подмножеств.

[Теорема] (Кантора)

Пусть X — множество, а $\mathcal{P}(X)$ — множество его подмножеств. Тогда

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

▼ **Доказательство.**

Пусть $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ — биекция. Рассмотрим те элементы $x \in X$, которые не принадлежат соответствующему (относительно φ) им (в $\mathcal{P}(X)$) подмножеству. Таким образом, образуем множество

$$Z = \{x : \ x \notin \varphi(x)\}.$$

Докажем, что подмножество Z не соответствует (относительно φ) ни одному $x \in X$. Пусть это не так и $\exists x \in X : \ \varphi(x) = Z$. Тогда

$$(x \in Z) \ \Leftrightarrow \ (x \notin \varphi(x)) \ \Leftrightarrow \ (x \notin Z),$$

где первая равносильность — по построению Z, а вторая — по предположению $\varphi(x) = Z$. Полученное противоречие завершает доказательство.

> Написанное неравенство $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ означает, что $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ и $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.
>
> Множество $\mathcal{P}(X)$ — множество подмножеств множества X, часто называют **булеаном** этого множества. Его еще обозначают и следующим образом: 2^X. Мотивацию этого обозначения мы приведем в следующем замечании.

Пояснение к доказательству: чтобы доказать, что |X| не равна |P(X)| мы предполагаем противное, что существует биекция между X и P(X), и рассматриваем такое подмножество Z, которое состоит из элементов, не принадлежащих своему образу (возможно, Z - пустое). Заметим, что тогда множество Z не может быть образом никакого x из X. Пусть Z - образ какого-то x из X
Если x принадлежит Z, то, по-построению Z, x не должен принадлежать Z
Если x не принадлежит Z, то, по-построению Z, x должен принадлежать Z
Следовательно, Z - не образ x
Следовательно, биекции не существует
Противоречие
То, что $|X| \le |P(X)|$ следует из того, что $|X| = |Y|$, где $Y = \{\{x\} \mid x \in X\}$, $Y \subset P(X)$ (каждому элементу приведем в соответствие множество из него)

Примечание (следствие теоремы Кантора для конечных мощностей)

[NB]

Несложно доказать, что в случае, когда $|X| = n$, имеем $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Из теоремы Кантора, в частности, следует, что

$$n < 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

22. Последовательность. Определение предела последовательности. Эквивалентность определений предела. Понятие сходящейся последовательности. Понятия бесконечных пределов.
23. Свойства последовательностей, имеющих предел.
24. Арифметические свойства пределов последовательностей. Арифметические свойства пределов в расширенном множестве вещественных чисел.
25. Теорема о неравенстве пределов последовательностей и их членов, следствия (предельный переход в неравенствах).
26. Теорема о пределе сжатой переменной.
27. Монотонность последовательности. Теорема Вейерштрасса.
28. Теорема о существовании второго замечательного предела.
29. Сравнение скорости роста факториала, степенных и показательных функций.
30. Сравнение скорости роста степенных, показательных, логарифмических и степенно-показательных функций.
31. Доказать, что предел последовательности, заданной общим членом: корень n-ой степени из n, равен единице.
32. Подпоследовательность. Частичные пределы. Предел подпоследовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Верхний и нижний предел последовательности, примеры, утверждения.
33. Фундаментальная последовательность. Критерий Коши.