Z!сосать Америка!Z

ИТМО. 1 семестр. Контрольная работа 2. 18.11.2023

\+ 1 Найдите наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление: $f(x) = x^8 + x^4 + 1$ и $g(x) = x^3 + 1$.

\+ 2 Построить полином f наименьшей степени такой, что: $f(-5) = -1$, $f(0) = 27$, $f(7) = -1$, $f(1) = -1$, $f(2) = -1$.

\+ 3 Вычислите: $\frac{1}{3-\alpha_1} + \frac{1}{3-\alpha_2} + \frac{1}{3-\alpha_3}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

\+ 4 Докажите, что многочлен $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

− 5 Разложите дробно-рациональную функцию $\frac{x}{(x^2-4)^2}$ на простейшие над $\mathbb{R}$.

− 6 Многочлен $f(x) \in K[x]$ делится на свою производную $f'(x)$. Докажите, что $f(x) = (x - \alpha)^n$, где $\alpha \in K$ и $n \in \mathbb{N}$ а) при $K = \mathbb{C}$; б) для произвольного поля K.

1) $f(x) = x^8 + x^4 + 1 \quad g(x) = x^3 + 1 \quad (f(x); g(x))$

$$x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 1 \;\Big|\; x^3 + 1$$

$$x^8 + 0 + 0 + x^5 \qquad\qquad x^5 - x^2 + x$$

$$0 \qquad -x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 1$$

$$-x^5 + 0 + 0 - x^2$$

$$0 + x^4 + x^2 + 1$$

$$x^4 + 0 + x$$

$$x^2 - x + 1$$

$x^8+x^4+1=(x^3+1)(x^5-x^2+x)+(x^2-x+1)$

$x^3+1=(x^2-x+1)(x+1)+0 \Rightarrow (f(x);g(x))=x^2-x+1$

$x^2-x-1=x^8+x^4+1-(x^3+1)(x^5-x^2+x) \Leftrightarrow 1\cdot f(x)-g(x)(x^5-x^2+x)=x^2-x+1$

Ответ: $f(x)-g(x)v(x)$, где $v(x)=x^5-x^2+x$

---

3) $\frac{1}{3-\alpha_1}+\frac{1}{3-\alpha_2}+\frac{1}{3-\alpha_3}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - корни x^3+3x+1

$$\frac{(3-\alpha_2)(3-\alpha_3)+(3-\alpha_1)(3-\alpha_3)+(3-\alpha_1)(3-\alpha_2)}{(3-\alpha_1)(3-\alpha_2)(3-\alpha_3)}=\frac{9-3\alpha_3-3\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+9-3\alpha_3-3\alpha_1+\alpha_1\alpha_3}{(3-\alpha_1)(3-\alpha_2)(3-\alpha_3)}$$

$$\frac{+9-3\alpha_2-3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2}{}\quad \frac{27-6\alpha_3-6\alpha_2-6\alpha_1+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)}{}=$$

$$=\frac{27-6(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)}{(9-3\alpha_2-3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2)(3-\alpha_3)}=\frac{27-6\cdot 0+(-3)}{17}=\frac{24}{27}=$$

(4) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = f(x)$

Пусть a — корень степени 2 $f(x)$; тогда $f(a)=0$; то есть $\frac{a^n}{n!}=0$; Рассмотрим $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, то есть $f'(x) = f(x)$, тогда $f(x) - f'(x) = 0$; то есть $\frac{x^n}{n!} - \frac{x^n}{n!} = 0$, только если $x=0$, однако $f(x) \neq f'(x)$ — значит корень a — не может быть кратности 2

---

(2) $f(\overset{1}{-5}) = -1;\ f(\overset{2}{0}) = 27;\ f(\overset{3}{7}) = -1;\ f(\overset{4}{1}) = -1;\ f(\overset{5}{2}) = -1$ $n=5$;

$$\varphi(t) = (t+5)(t-0)(t-7)(t-1)(t-2)$$

$$g(t) = -1 + \left(\frac{-1}{-5-0} + \frac{27}{0+5}\right)(t+5) + \left(\frac{-1}{(-5-0)(-5-7)} + \frac{27}{(0+5)(0-7)} + \frac{-1}{(7+5)(7-0)}\right)(t+5)(t-0) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{(-5-0)(-5-7)(-5-1)} + \frac{27}{(0+5)(0-7)(0-1)} + \frac{-1}{(7+5)(7-0)(7-1)} + \frac{-1}{(1+5)(1-0)(1-7)}\right)(t+5)(t-0)(t-7) +$$

$$+ \left(\frac{-1}{(-5-0)(-5-7)(-5-1)(-5-2)} + \frac{27}{(0+5)(0-7)(0-1)(0-2)} + \frac{-1}{(7+5)(7-0)(7-1)(7-2)} + \frac{-1}{(1+5)(1-0)(1-7)(1-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{-1}{(2+5)(2-0)(2-7)(2-1)}\right)(t+5)(t-0)(t-7)(t-1)$$

$$= \frac{28}{5}(t+5) + \left(\frac{-1}{175} + \frac{-27}{35} + \frac{-1}{245}\right)(t+5)(t-0) + \left(\frac{1}{1050} + \frac{27}{35} + \frac{-1}{1470} + \frac{-1}{36}\right)(t+5)(t-0)(t-7)$$

$$+ \left(\frac{-1}{7350} + \frac{-27}{70} + \frac{-1}{7350} + \frac{1}{36} + \frac{-1}{70}\right)(t+5)(t-0)(t-7)(t-1) =$$

$$= \left(\frac{-1}{175} + \frac{-190}{245}\right)(t+5)(t-0) + \left(\frac{1111}{1050} + \frac{-1506}{52920}\right)(t+5)(t-0)(t-7) + \left(\frac{-1}{3675} + \frac{71}{36}\right)(t+5)(t-0)(t-7)(t-1)$$

$$+ \frac{28}{5}(t+5) = -\frac{2}{5}x^4 + 2x^3 + \frac{54}{5}x^2 - \frac{202}{5}x + 27.$$

---

5 $\frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \frac{x}{(x-2)^2(x+2)^2}$ Разложить на простейшие:

$$\frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} =$$

Ax^2

$$\frac{x}{(x^2-4)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2},$$

$$x = A(x+2)^2 + B(x-2)^2 = A(x^2+4x+4) + B(x^2-4x+4) = \quad A = \frac{1}{8} \quad B = -\frac{1}{8}$$

$$x = \underline{A}\,\underline{x}^2 + 4\underline{A}x + 4A + \underline{B}x^2 - 4\underline{B}x + B4 =$$

$$x = x^2(\underset{\overset{!!}{0}}{A+B}) + x(4A-4B) + 4(\underset{\overset{!!}{0}}{A+B})$$

$$\begin{cases} A = -B \\ 4A - 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$