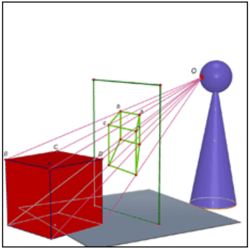
Transformaciones en imágenes

Cátedra Visión por Computadoras

Geometría proyectiva

Geometría proyectiva

Modela la distorsión geométrica introducida por una transformación proyectiva. Intuitivamente puede entenderse como la descripción de lo que se obtiene cuando miramos el mundo con un solo ojo.

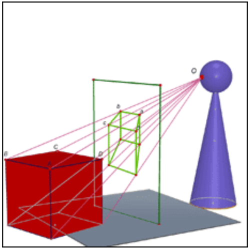


El espacio donde se define se llama *espacio proyectivo* $\mathbb{P}$.

Geometría proyectiva

Coordenadas homogéneas

Un espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ esta formado por elementos (vectores) de dimensión n que representan elementos de un espacio vectorial $n-1$. Se usan coordenadas ampliadas, llamadas *coordenadas homogéneas*.
Por ej $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, w)$.

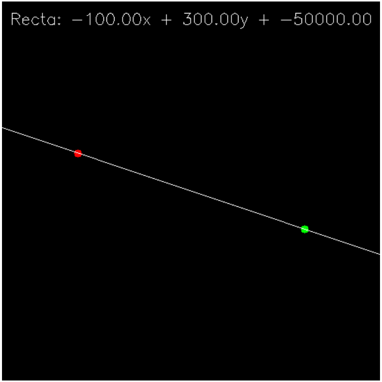


Las coordenadas homogéneas fueron introducidas por el matemático alemán August Ferdinand Möbius en el año 1837.

Wikipedia.

Porqué coordenas homogeneas?

- Unifican puntos finitos y en el infinito
- Simplifican transformaciones geométricas (rotaciones, traslaciones, proyecciones).
- La recta que pasa por dos puntos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ se calcula con un **producto cruz**: $\mathbf{l} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$.

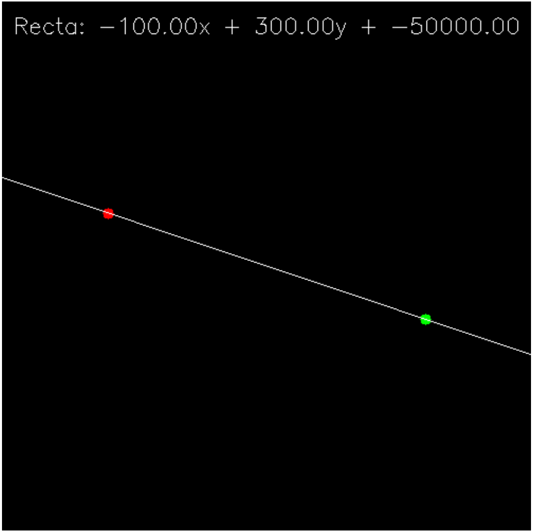


Visualización de una recta calculada con coordenadas homogéneas.

Implementación en Python (OpenCV)

```python
import numpy as np
import cv2

# Crear imagen negra
height, width = 500, 500
image = np.zeros((height, width, 3), dtype=np.uint8)

# Definir puntos (x, y)
p1 = (100, 200)
p2 = (400, 300)

# Convertir a homogéneas
p1_hom = np.array([p1[0], p1[1], 1])
p2_hom = np.array([p2[0], p2[1], 1])

# Recta: producto cruz
line_hom = np.cross(p1_hom, p2_hom)  # [a, b, c]
a, b, c = line_hom

# Dibujar puntos y recta
cv2.circle(image, p1, 5, (0, 0, 255), -1)
cv2.circle(image, p2, 5, (0, 255, 0), -1)
cv2.line(image, (0, int((-c)/b)),
         (width, int((-c - a*width)/b)), (255, 255, 255),
             1)
```

Resultados



Ecuación de la recta:

$ax + by + c = 0$ (Calculada automáticamente)

Conclusión

Aplicaciones

Las coordenadas homogéneas son esenciales en:

- Visión por computadora (e.g., estimación de movimiento).
- Gráficos 3D (proyecciones perspectivas).
- Geometría proyectiva (e.g., cálculo de homografías).

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Coordenadas homogéneas (2D)

Puntos y rectas - Representación algebraica

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano $ax + by + c = 0$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{l}$ formado por los coeficientes que la definen

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

Coordenadas homogéneas (2D)

Puntos y rectas - Representación algebraica

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano $ax + by + c = 0$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{l}$ formado por los coeficientes que la definen

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

Pero el vector $\hat{\boldsymbol{l}} = [ka, kb, kc]^T$, con $k \neq 0$, representa la misma recta...

- Una recta tienen 2 DOF, dado por los cocientes de sus componentes $\{a : b : c\}, \forall c \neq 0$.
- Estos vectores equivalentes se conocen como *vectores homogeneos*.
- El conjunto de vectores homogeneos en $\mathbb{R}^3$, menos el vector $[0, 0, 0]^T$, forman el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$.

Coordenadas homogéneas (2D)

Puntos y rectas - Representación algebraica

Si seguimos… un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si satisface $ax_1 + by_1 + c = 0$.

Coordenadas homogéneas (2D)

Puntos y rectas - Representación algebraica

Si seguimos... un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si satisface $ax_1 + by_1 + c = 0$.
En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Si seguimos... un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si satisface
$ax_1 + by_1 + c = 0$.
En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Pero para el mismo punto se tiene que $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores $[kx_1, ky_1, k]^T$ y $[x_1, y_1, 1]^T$ representan el mismo punto.

Si seguimos... un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si satisface $ax_1 + by_1 + c = 0$.
En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Pero para el mismo punto se tiene que $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores $[kx_1, ky_1, k]^T$ y $[x_1, y_1, 1]^T$ representan el mismo punto.

Por lo que ...

Vectores homogéneos

Los vectores $[x_1, y_1, 1]^T$ y $[kx_1, ky_1, k]^T$ son vectores homogéneos, y son la representación del punto (x_1, y_1) en *coordenadas homogéneas*.

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$
Por lo anterior ...

Punto en una recta

Sean el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$ y la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^3$, entonces $\boldsymbol{x}$ está en $\boldsymbol{l}$ si

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = ax + by + c = 0$$

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$
Por lo anterior …

Punto en una recta

Sean el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$ y la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^3$, entonces $\boldsymbol{x}$ está en $\boldsymbol{l}$ si

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = ax + by + c = 0$$

Notar que … El producto escalar entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{l}$ también es nulo, ya que

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{l} = xl\cos\theta = ax + by + c = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$$

por lo que los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{l}$ son perpendiculares.

Intersección de dos rectas

Sean $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$ dos rectas en $\mathbb{P}^3$. Definiendo el vector $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$, que es un vector perpendicular a ambas rectas, se tiene que los productos escalares

$$\boldsymbol{l}_1.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = \boldsymbol{l}_2.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = 0$$

es decir

$$\boldsymbol{l}_1^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_2^T \boldsymbol{x} = 0$$

luego, si $\boldsymbol{x}$ representa a un punto, este es el punto de intersección de $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$.

Recta por dos puntos

Sean $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos puntos en $\mathbb{P}^3$. Definiendo $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ se tiene

$$\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

luego, el vector $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ representa a la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.

Recta por dos puntos

Sean $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos puntos en $\mathbb{P}^3$. Definiendo $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ se tiene

$$\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

luego, el vector $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ representa a la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.

Dualidad

Debido a la representación dual de rectas y puntos, los enunciados tiene siempre su forma dual.

En este caso la recta que pasa por dos puntos es dual al anterior, que puede leerse como “el punto que pasa por dos rectas”.

Que pasa con las paralelas?

Intersección de rectas paralelas

Sean $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$ y $\boldsymbol{l}' = [a, b, c']^T$ dos rectas paralelas en $\mathbb{P}^3$, la intersección de las rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto ideal o punto en el infinito.

Que pasa con las paralelas?

Intersección de rectas paralelas

Sean $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$ y $\boldsymbol{l}' = [a, b, c']^T$ dos rectas paralelas en $\mathbb{P}^3$, la intersección de las rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto ideal o punto en el infinito.

Punto en el infinito

Un punto en $\mathbb{P}^3$ de coordenadas

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$$

no representa ningún punto finito en el plano, se le llama punto ideal o punto en el infinito.

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Intersección con l_∞

La intersección de las rectas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ con $\boldsymbol{l}_\infty$ es en el punto ideal $\boldsymbol{x} = [b, -a, 0]^T$ (recordar que $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$)

$$[b, -a, 0]^T \boldsymbol{l} = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Intersección con l_∞

La intersección de las rectas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ con $\boldsymbol{l}_\infty$ es en el punto ideal $\boldsymbol{x} = [b, -a, 0]^T$ (recordar que $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$)

$$[b, -a, 0]^T \boldsymbol{l} = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

- Notar que el vector $[b, -a]^T \in \mathbb{R}^2$ representa la dirección de la recta $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$. Por lo tanto

$$\boldsymbol{l}_\infty : \{\text{Conjunto de direcciones de rectas de } \mathbb{R}^2\}$$

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^3$ en $\mathbb{P}^3$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^3$ en $\mathbb{P}^3$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^3$ en $\mathbb{P}^3$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^3$ en $\mathbb{P}^3$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

- Proyectividad, transformación proyectiva, homografía, colinealidad, son sinónimos.
- Las homografías forman un grupo, ya que su inversa también es una homografía, como también la composición de homografías es otra homografía.

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica...

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica. . .

Prueba 2: Si H 3×3 es una matriz invertible entonces es una homografía.

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica...

Prueba 2: Si H 3×3 es una matriz invertible entonces es una homografía.

Sean $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots, n$ puntos en $\boldsymbol{l}$ tal que $\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x}_i = 0$. Sea H una matriz 3×3 invertible, entonces

$$\boldsymbol{l}^T H^{-1} H\boldsymbol{x}_i = (H^{-T}\boldsymbol{l})^T H\boldsymbol{x}_i = 0$$

todos los puntos $H\boldsymbol{x}_i$ pertenecen a la recta $\boldsymbol{l}' = H^{-T}\boldsymbol{l}$.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.
- H es una matriz homogenea.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.
- H es una matriz homogenea.

Transformación de rectas

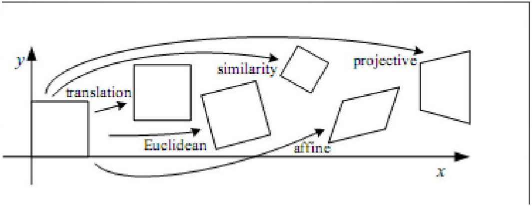
De la prueba 2 dada en la definición de homografía

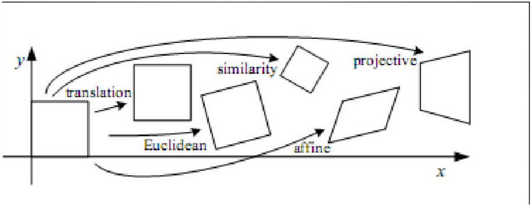
$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}^T H^{-1} H\boldsymbol{x} = (H^{-T}\boldsymbol{l})^T H\boldsymbol{x} &= 0 \\ (\boldsymbol{l}')^T \boldsymbol{x}' &= 0 \end{aligned}$$

y la recta $\boldsymbol{l}$ es mapeada a $\boldsymbol{l}' = H^{-T}\boldsymbol{l}$.

Jerarquía de transformaciones

Isometría



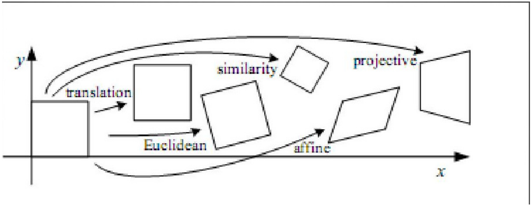


Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.



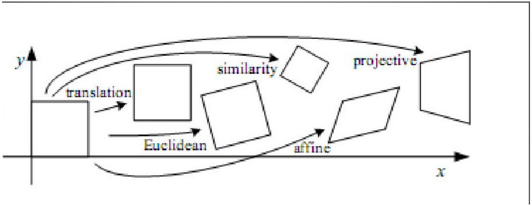
Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$, se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.



Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$, se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.

Es lo que conocemos como transformación del cuerpo rígido.

Transformación Euclidea (Transformación del cuerpo rígido)

$$\boldsymbol{x}' = H_E \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con R una matriz de rotación de 2×2 ($RR^T = R^T R = I$), $\boldsymbol{0}^T = (0, 0)$ y $\boldsymbol{t}$ un vector de traslación.

- H_E tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}$, £se puede determinar H_E?

Transformación Euclidea (Transformación del cuerpo rígido)

$$\boldsymbol{x}' = H_E \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con R una matriz de rotación de 2×2 ($RR^T = R^T R = I$), $\boldsymbol{0}^T = (0, 0)$ y $\boldsymbol{t}$ un vector de traslación.

- H_E tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}$, £se puede determinar H_E?
- Los puntos $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}$ que se corresponden según una transformación se llaman *puntos correspondientes*, y se indican $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$.

Transformación Euclidea (Transformación del cuerpo rígido)

$$\boldsymbol{x}' = H_E \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con R una matriz de rotación de 2×2 ($RR^T = R^T R = I$), $\boldsymbol{0}^T = (0, 0)$ y $\boldsymbol{t}$ un vector de traslación.

- H_E tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}$, £se puede determinar H_E?
- Los puntos $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}$ que se corresponden según una transformación se llaman *puntos correspondientes*, y se indican $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$.

Invariantes (cantidades que se preservan en una transformación)

Longitudes, ángulos, orientación y áreas son invariantes de H_E.

Similaridad

Una similaridad es una isometría con escalado isotrópico.

$$\mathbf{x}' = H_S \mathbf{x} = \begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- H_S tiene 4 DOF, uno de la rotación, dos de la traslación y el escalado s.
- Esta transformación queda definida mediante un par de puntos correspondientes $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$.

Invariantes

Ángulos entre rectas, paralelismo, relación entre áreas son invariantes de H_S.

Transformación afín

Es una transformación no singular (invertible) seguida de una traslación. Se puede escribir

$$\boldsymbol{x}' = H_A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

con A una matriz no singular.

- H_A tiene 6 DOF y puede ser recuperada con 3 puntos correspondientes $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$.

Que hace A?

Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de A a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

λ_1 y λ_2 son los valores singulares de A.

Que hace A?

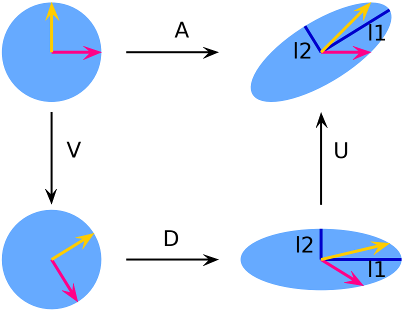
Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de A a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

λ_1 y λ_2 son los valores singulares de A.



- El escalado es no isotrópico pero actúa en direcciones otrogonales.
- Si $\det A > 0$, la transformación preserva dirección.

Invariantes

Paralelismo:
Dos rectas paralelas intersectan a $\boldsymbol{l}_\infty$ en el punto $[x_1, x_2, 0]^T$, luego de la transformación

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = [x_1', x_2', 0]$$

Razón entre longitudes de segmentos paralelos:
El escalado es común a rectas de igual dirección.
Razón entre áreas:
Las áreas son todas escaladas una cantidad $\lambda_1 \lambda_2$.

Transformación proyectiva

Es una transformación general invertible de forma

$$\boldsymbol{x}' = H_P\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

con $\boldsymbol{v}^T = [v_1, v_2]$ llamado vector de perspectiva.

- H_P tiene 8 DOF (los 9 elementos menos la escala) y puede computarse con 4 puntos correspondientes (3 deben ser no colineales).
- Mapea puntos ideales en puntos finitos

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1x_1 + v_2x_2 \end{bmatrix}$$

Invariantes

Relación cruzada (Cross ratio)
Ejemplo entre plano de la escena y plano de la imagen

Invariantes

Relación cruzada (Cross ratio)

Ejemplo entre plano de la escena y plano de la imagen

Descomposición

Cualquier H puede obtenerse componiendo las transformaciones anteriores

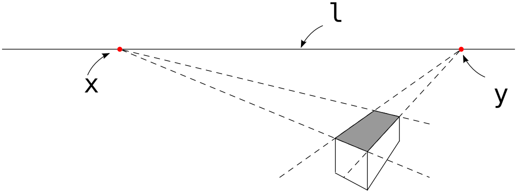
$$H = H_P H_A H_S$$

donde H_S tiene 4 DOF, H_A tiene 2 DOF mas y H_P 2 DOF mas, para hacer un total de 8 DOF.

Conociendo donde fue mapeado algún invariante de un espacio, pueden recuperarse las propiedades correspondientes.

Ejemplo: conociendo donde fue mapeada $\boldsymbol{l}_\infty$ (dos DOF) luego de una transformación proyectiva, se pueden recuperar las propiedades afín.

Sea $\boldsymbol{l}'_\infty = [l_1, l_2, l_3]^T$ la imágen de $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$.



Luego si $l_3 \neq 0$ se puede elegir H_{PA} tal que $H_{PA}^{-T}\boldsymbol{l}'_\infty = \boldsymbol{l}_\infty$

$$H_{PA}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l_1}{l_3} \\ 0 & 1 & -\frac{l_2}{l_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad H_{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando H_{PA} a todos los puntos se realiza una “rectificación afín”

Ejemplo: si se conocen 4 pares de puntos correspondientes, la rectificación puede ser completa (8 DOF).

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y'_1 = \frac{y_1}{y_3} = \frac{h_{11}x_1+h_{12}x_2+h_{13}x_3}{h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33}x_3} \\ \\ y'_2 = \frac{y_2}{y_3} = \frac{h_{21}x_1+h_{22}x_2+h_{23}x_3}{h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33}x_3} \end{array}$$

y cada punto genera dos ecuaciones

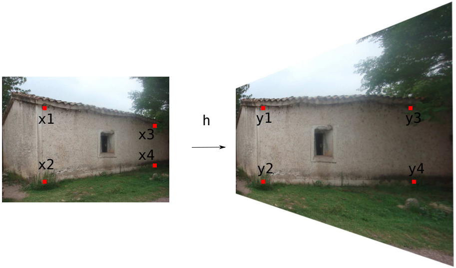
$$y'_1(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3$$
$$y'_2(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3$$

Usando notación matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1y'_1 & -x_2y'_1 & -x_3y'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_1y'_2 & -x_2y'_2 & -x_3y'_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{h}] = 0$$

Estimación de H

Rectificación Completa



$$H \text{ mapea } \begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_2 &= [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_3 &= [131, 65, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_4 &= [131, 30, 1]^T \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_2 &= [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_3 &= [153, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_4 &= [153, 16, 1]^T \end{aligned} \quad \text{es decir } \boldsymbol{y}_i = H\boldsymbol{x}_i$$

Aplicando H a todos los puntos se realiza una “rectificación completa”