第一届CMC数学类第2题

牛爷爷

2025 年 10 月 8 日

1 题目描述

设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，

$$F=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$

(1) 假设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

若 $AF=FA$，证明：

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E.$$

(2) 求 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间

$$C(F)=\{X\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid FX=XF\}$$

的维数。

2 思路分析

(1.1)记$B=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$, 要证明A=B, 即证明A与B的列向量对应相等，即证明$Ae_i=Be_i,\forall i\in[1,n]$，其中$e_i$表示第$i$个位置为1，其余位置为0的n维列向量

(1.2)将F,A列分块，即$F=[e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta],A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,又$AF=FA$
$AF=A[e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta]=[Ae_2,Ae_3,\cdots,Ae_n,A\beta]$, $FA=F[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[F\alpha_1,F\alpha_2,\cdots,F\alpha_n]$
即$Ae_{i+1}=F\alpha_i,\forall i\in[1,n-1]$
又$\alpha_i=Ae_i$, 故$\alpha_{i+1}=F\alpha_i,\forall i\in[1,n-1]$
注意到 $Fe_i=e_{i+1},\forall i\in[1,n-1],Fe_n=\beta$，则我们有

符号	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
表达	e_1	Fe_1	$\cdots$	$F^{n-1}e_1$

$Be_1=a_{n,1}e_n+a_{n-1,1}e_{n-1}+\cdots+a_{1,1}e_1=\alpha_1=Ae_1$ 又因为$Be_2=BFe_1=FBe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$归纳可得$Ae_i=Be_i,\forall i\in[1,n]$，证毕。

(2)利用线性无关定义及

符号	e_1	e_2	$\cdots$	e_n
表达	e_1	Fe_1	$\cdots$	$F^{n-1}e_1$

即可求解.

3 题目解答

将A，F列分块，记$F=[e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta],A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，于是$AF=A[e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta]=[Ae_2,Ae_3,\cdots,Ae_n,A\beta]$ $=[\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n,A\beta]$, $FA=F[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[F\alpha_1,F\alpha_2,\cdots,F\alpha_n]$，由$AF=FA$得

$$\alpha_i=Ae_{i+1}=\alpha_{i+1},\quad \forall i\in\{1,2,\cdots,n-1\} \tag{1}$$

$$\alpha_n=A\beta \tag{2}$$

又知道$FI=F[e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},e_n]=[e_2,e_3.\cdots,e_n,\beta]$,立得

$$Fe_i=e_{i+1},\forall i\in\{1,\cdots,n-1\} \tag{3}$$

从而递推得到

$$e_i=F^{i-1}e_1,\quad \forall i\in\{1,\cdots,n\} \tag{4}$$

记$B=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$,引入(4)式，有

$$Be_1=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-1,1}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}e_1=a_{n1}e_n+a_{n-1,1}e_{n-1}+\cdots+a_{1,1}e_1=\alpha_1=Ae_1 \tag{5}$$

又$Be_2=BFe_1=FBe_1=F\alpha_1=\alpha_2=Ae_2$(这里自己思考为什么BF=FB),递推可得A=B,第一问得证。
由第（1）问得$X=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-1,1}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$, 现设

$X=a_nF^{n-1}+a_{n-1}F^{n-2}+\cdots+a_2F+a_1=0,$

$Xe_1=X=a_nF^{n-1}e_1+a_{n-1}F^{n-2}e_1+\cdots+a_2Fe_1+a_1e_1=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n=0$ 又$e_1,e_2\cdots,e_n$为标准基，故$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$即n维