14届CMC数学A类补赛第3题

牛爷爷

2025 年 9 月 18 日

1 题目描述

设 $n \geqslant 2, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的方阵，它们的极小多项式两两互素。证明：给定数域 $\mathbb{K}$ 上的任意多项式$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in \mathbb{K}[x]$ ，存在多项式$f(x) \in \mathbb{K}[x]$，使得对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$有$f(A_i) = f_i(A_i)$。

2 直接思路

看到$f(A_i) = f_i(A_i)$，在不考虑$f(x)$为多项式这个限制的情况下，立刻联系到数值分析中的lagrange插值公式，根据这个想法，很快构造出下面的$f(A_i)$

$$f(x) = \frac{m_2(x)m_3(x)\cdots m_n(x)}{m_2(A_1)m_3(A_1)\cdots m_n(A_1)}f_1(x) + \frac{m_1(x)m_3(x)\cdots m_n(x)}{m_1(A_2)m_3(A_2)\cdots m_n(A_2)}f_2(x) + \cdots + \frac{m_1(x)m_2(x)\cdots m_{n-1}(x)}{m_1(A_n)m_2(A_n)\cdots m_{n-1}(A_n)}f_n(x)$$

其中$m_i(x)$为A_i的极小多项式，显然它满足$f(A_i) = f_i(A_i)$，对比题目，可以发现我们构造的$f(x)$与题目要求差了两个条件：

- $\forall i, j \in [1, n]$,且$i \neq j$, 有 $m_i(A_j)$ 恒可逆。
- $m_i(A_j)$ 的逆可以表示为 $m_i(A_j)$的多项式。

进一步，当我们证明到下面两个命题，也就完成了题目解答。特别指出，这就是我们要证明的两个引理：

- 引理1：若A, B的极小多项式互素,且$m(x)$为A的极小多项式, 有 $m(B)$ 恒可逆。

- 引理2：若A可逆，则A^{-1}可以表示为 A的多项式。

3 我的解答

3.1 引理1证明

设A,B对应的极小多项式分别为$m(x), l(x)$.由题设，我们有$(m(x), l(x)) = 1$,于是存在$u(x), v(x)$ 使得$m(x)u(x) + l(x)v(x) = 1$，带入B 得 $m(B)u(B) + l(B)v(B) = E$，因为$l(B) = 0$ 故 $m(B)u(B) = E$ ，即$m(B)$ 可逆.E A

3.2 引理2证明

令$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ ，显然有 $a_n = f(0) = \det(-A) \neq 0$ 由Hamilton-Cayley 定理，得$f(A) = 0$,于是$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE = 0$，变形得

$$A\left(\frac{A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \cdots + a_{n-1}E}{-a_n}\right) = E$$

记$g(A) = \left(\frac{A^{n-1} + a_1A^{n-2} + a_2A^{n-3} + \cdots + a_{n-1}E}{-a_n}\right)$, 我们有$A^{-1} = g(A)$

3.3 后续

对于每个$m_i(A_j)$, 存在多项式$l_{ij}(x)$使得$m_i(A_j)l_{ij}(A_j)=E$ ，于是构造

$f(x)=[m_2(x)m_3(x)\cdots m_n(x)l_{12}(x)l_{13}(x)\cdots l_{1n}(x)f_1(x)]+[m_1(x)m_3(x)\cdots m_n(x)l_{21}(x)l_{23}(x)\cdots l_{2n}(x)f_2(x)]+\cdots+[m_1(x)m_2(x)\cdots m_{n-1}(x)l_{n1}(x)l_{n2}(x)\cdots l_{n,n-1}(x)f_n(x)]$

满足题目条件，证毕。

4 组委会给的解答

解答. 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 记矩阵 A_i 的极小多项式为 $p_i(x)$. 下面对 n 做归纳.

当 $n=2$ 时, 由于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 互素, 存在多项式 $u(x),v(x)\in K[x]$ 使得

$$u(x)p_1(x)+v(x)p_2(x)=1,$$

从而

$$u(x)(f_1(x)-f_2(x))p_1(x)+v(x)(f_1(x)-f_2(x))p_2(x)=f_1(x)-f_2(x),$$

即

$$u(x)(f_2(x)-f_1(x))p_1(x)+f_1(x)=v(x)(f_1(x)-f_2(x))p_2(x)+f_2(x).$$

令

$$f(x)=u(x)(f_2(x)-f_1(x))p_1(x)+f_1(x)=v(x)(f_1(x)-f_2(x))p_2(x)+f_2(x),$$

由于 $p_1(A_1)=0$ 且 $p_2(A_2)=0$, 故有 $f(A_1)=f_1(A_1),f(A_2)=f_2(A_2)$.

………………………………………………………… (7 分)

设结论对 $n=k$ 成立, 即存在多项式 $g(x)\in K[x]$ 使得 $g(A_j)=f_j(A_j),1\le j\le k$. 当 $n=k+1$ 时, 令

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

显然矩阵 B 的极小多项式整除 $p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)$, 由于矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k,A_{k+1}$ 的极小多项式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_k(x),p_{k+1}(x)$ 两两互素, 所以矩阵 B 的极小多项式与矩阵 A_{k+1} 的极小多项式互素, 对矩阵 B 和 A_{k+1} 利用前面证明的 $n=2$ 时的结论, 存在多项式 $f(x)\in K[x]$ 使得 $f(B)=g(B)$ 且 $f(A_{k+1})=f_{k+1}(A_{k+1})$.

从而对于 $1\le j\le k$ 有 $f(A_j)=g(A_j)=f_j(A_j)$ 且 $f(A_{k+1})=f_{k+1}(A_{k+1})$, 故结论对 $n=k+1$ 成立.

………………………………………………………… (14 分)

根据数学归纳法, 结论对任意正整数 $n\ge 2$ 成立.

………………………………………………………… (15 分)