第一届CMC数学类第3题

牛爷爷

2025 年 10 月 2 日

1 题目描述

设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间 $(n > 0)$，f, g 是 V 上的线性变换。如果 $fg - gf = f$,
证明：f 的特征值都是 0，且 f, g 有公共特征向量。

2 先导知识

1.迹的性质
2.幂零矩阵的充要条件
3.线性变换存在特征值的条件

2.1 迹的性质

设n阶矩阵A的元素为a_{ij}，定义A的迹$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$,不加证明的,有以下性质成立
1. tr(AB)=tr(BA)
2. tr(A+B)=tr(B+A)=tr(A)+tr(B)
3. tr(cA)=ctr(A)

2.2 幂零矩阵的充要条件

如果存在$k > 0$, 使得$A^k = 0$，称A为幂零矩阵, n阶矩阵A是幂零矩阵
当且仅当A的所有特征值都是0，
当且仅当$tr(A^m) = 0, \forall m \in [1, n]$

详细证明见谢启鸿白皮书303页例6.31

2.3 线性变换存在特征值的条件

选定一组基后，有限维线性变换同构于数域F上的矩阵，线性变换存在特征值当且仅当他对应的矩阵存在特征值，进一步，如果F选为复数域，根据代数学基本定理，我们一定可以找到n个特征值(重根按重数计)，又$\det(A - \lambda I) = 0$, 故对于任意λ ,存在与之对应的特征向量。

3 思路想法

看见$fg-gf = f$，注意到其对称性，立刻联想到幂零矩阵的充要条件之一：A是幂零的当且仅当$tr(A^m) = 0, \forall m \in [1, n]$，后面借助迹的性质即可证明A的特征值全是0。

任取f的特征子空间中的元素α, 有$fg(\alpha) - gf(\alpha) = f(\alpha) = 0$,亦即$fg(\alpha) = 0$,即$g(\alpha) \in$f的特征子空间，即$V_0$为g不变的，联想到线性变换存在特征值的条件，立得答案。