第二届CMC数学类第2题

牛爷爷

2025 年 10 月 3 日

1　题目描述

设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.证明 $X^2 = B$ 无解，这里 X 为三阶未知复方阵。

2　前置知识

2.1　Jordan标准型

定义 1 (约当标准型) 设 A 是 $n \times n$ 复矩阵。A 的**约当标准型**是指一个与 A 相似的块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

其中每个 J_i 是一个**约当块**，形如

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

这里 λ_i 是 A 的特征值。约当标准型在相似变换下是唯一的（除了约当块的排列次序）。

关键性质

- 每个复方阵都相似于一个约当标准型
- 特征值 λ_i 的代数重数等于所有以 λ_i 为特征值的约当块的阶数之和
- 特征值 λ_i 的几何重数（特征子空间的维数）等于以 λ_i 为特征值的约当块的个数
- 幂零矩阵的约当标准型的所有特征值都为 0

3　思路解答

容易看出B的特征值全是0，假设存在X，使得 $X^2 = B$, 因为r(B)=2, 若r(X)=3, 即X满秩，则X^2也满秩，即$r(B) = 3$矛盾；若r(X)=1, 则$r(X^2) <= 1$,矛盾；若r(X)=0, 则$X^2 = 0$，矛盾；故r(X)=2即X相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.记为Y, 那么$X^2$相似于$Y^2$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 秩为1矛盾，故原方程无解