QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Eine Zusammenfassung

Mathe 1BK2T1 - Bsr

QUADRATISCHE FUNKTION

Polynomfunktion **zweiten** Grades

→der Graph ist eine **Parabel**

→**achsensymmetrisch:** Symmetrieachse läuft durch Scheitelpunkt und ist parallel zur (oder sogar identisch mit der) y-Achse

eindeutige Zuordnung

→zu jedem x-Wert gibt es <u>genau einen</u> y-Wert

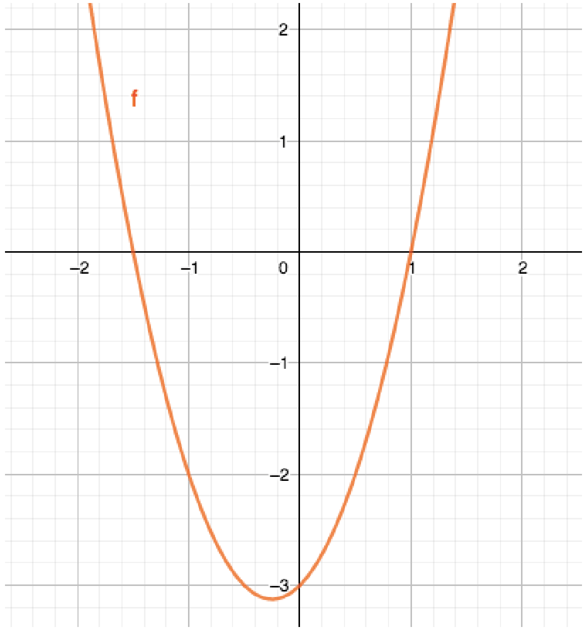
$x \longmapsto y$

Tipp: Geodreieck entlang der x-Achse führen

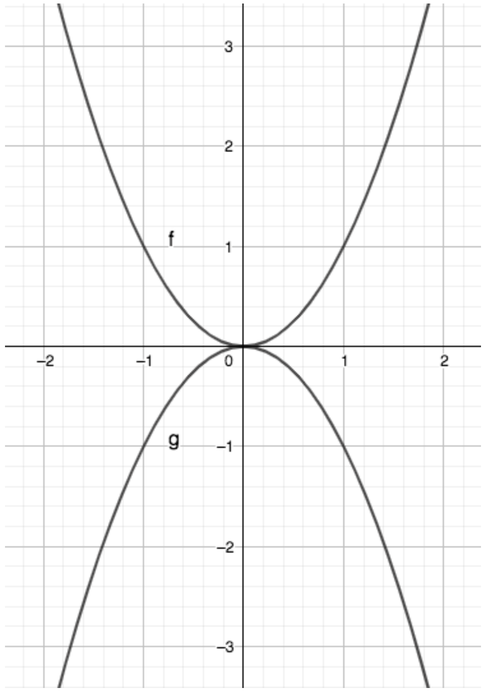
ALLGEMEINE PARABELGLEICHUNG

$y = a\,x^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$

Beispiel: $f\!: y = 2\,x^2 + x - 3$



SONDERFÄLLE



Gleichung der Normalparabel: $y = x^2$

➔**Scheitelpunkt S (0|0)**

Gleichung der an der x-Achse gespiegelten Normalparabel: $y = -x^2$

➔**Scheitelpunkt S (0|0)**

Gleichung einer zur y-Achse symmetrischen Parabel: $y = ax^2 + c$

→*zugehörige Funktion f erfüllt die Bedingung* ***f(x) = f(–x)*** *und wird* ***gerade Funktion*** *genannt.*

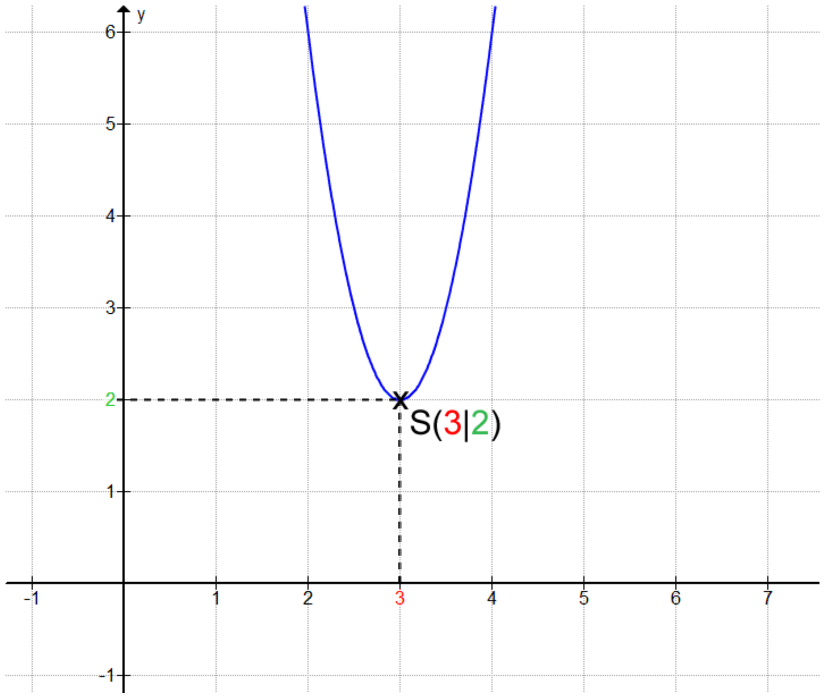
SCHEITELPUNKTFORM

$y = a\,(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a \neq 0$ ➔ Scheitelpunkt $S\,(x_s \mid y_s)$

Hinweis: Der Scheitelpunkt ist der höchste bzw. tiefste Punkt einer Parabel. Er liegt auf der Symmetrieachse der Parabel.

Beispiel:

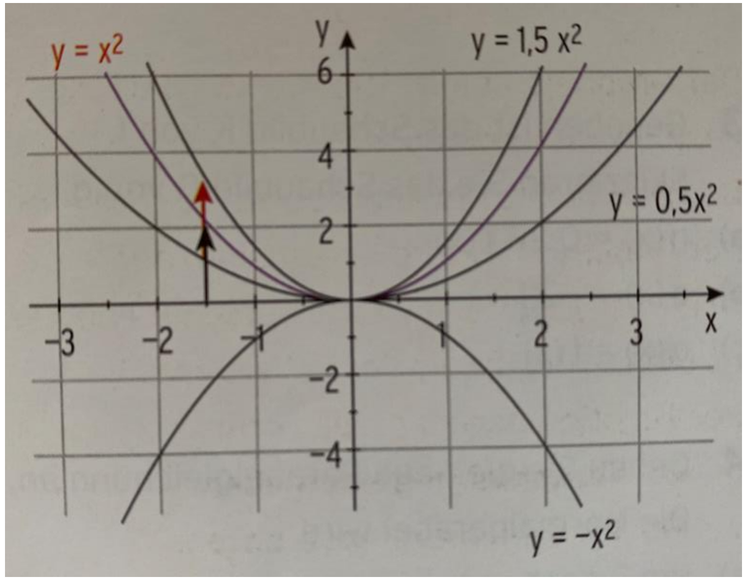
$f(x) = 4 \cdot (x - 3)^2 + 2$



WIE WIRKT SICH a AUF DIE PARABEL AUS?

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ $\quad$ $f(x) = a\,(x - d)^2 + c$

a (Öffnungsfaktor) →*verantwortlich für* ***Öffnungsrichtung*** *und* ***-weite*** *der Normalparabel in* ***y-Richtung***



Es gilt:

1. $a \neq 0$ →sonst ist es keine quadratische Funktion
2. für die Öffnungs**richtung**:

   Für $a<0$: Parabel nach unten geöffnet

   Für $a>0$: Parabel nach oben geöffnet
3. für die Öffnungs**weite**:

   Für $|a|=1$: Normalparabelform

   Für $|a|<1$: Parabel ist weiter geöffnet/breiter als Normalparabel → ***„gestaucht"***

   →*je kleiner der Betrag von a ist, also je näher a der 0 ist, desto breiter ist die Parabel*

   Für $|a|>1$: Parabel ist schmaler/enger als Normalparabel → ***„gestreckt"***

   →*je größer der Betrag von a ist (egal, ob positiv oder negativ), also je weiter a „von der 0 weg ist", desto steiler/"enger" ist die Parabel*

WIE WIRKT SICH c AUF DIE PARABEL AUS?

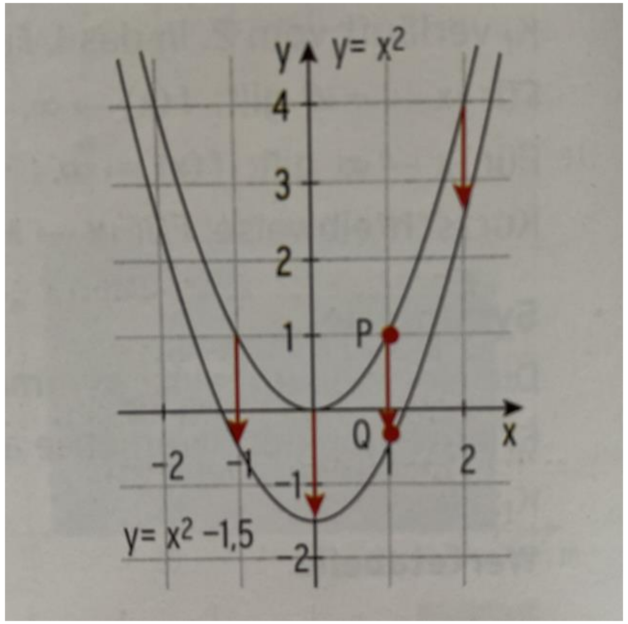
$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$f(x) = a\,(x - d)^2 + c$

c (y-Achsenabschnitt) →*verantwortlich für **Verschiebung** der Normalparabel in **y-Richtung***

Es gilt:

1. Ist c negativ, also $c<0$, dann wird die Normalparabel um c nach unten verschoben
2. Ist b positiv, also $c>0$, dann wird die Normalparabel um c nach oben verschoben



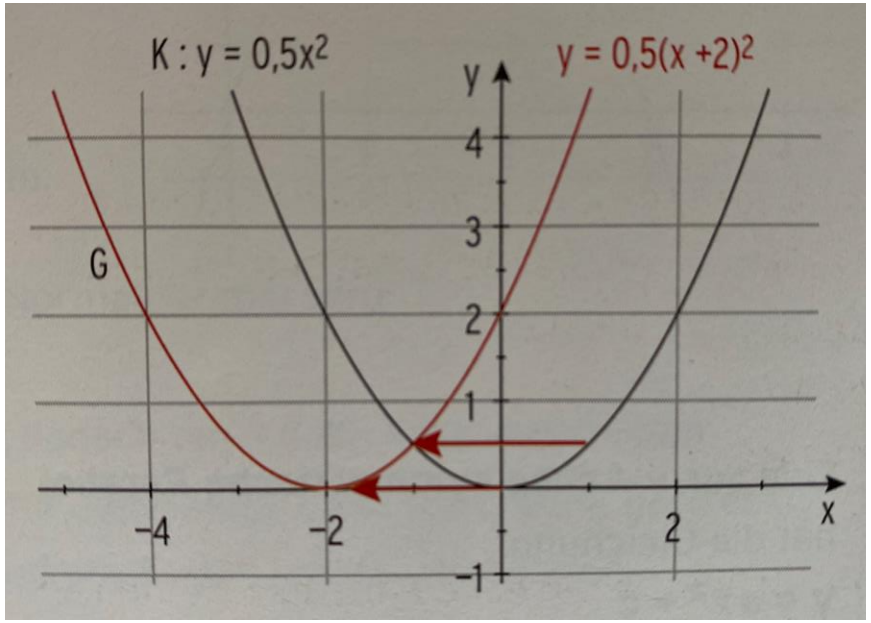
WIE WIRKT SICH d AUF DIE PARABEL AUS?

$$f(x) = a\,(x - d)^2 + c$$

d →*verantwortlich für **Verschiebung** der Normalparabel **in x-Richtung***

Es gilt:

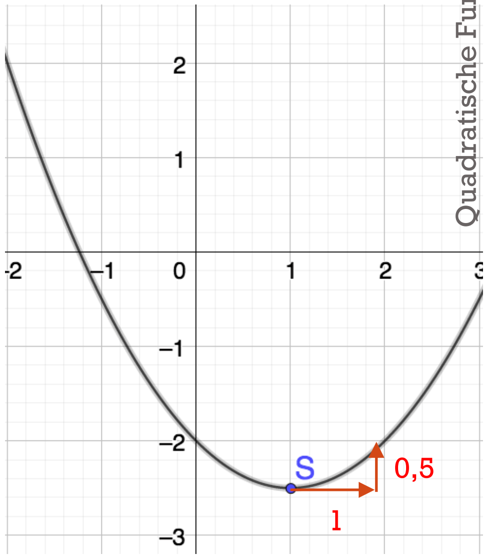
1. Ist d negativ, also $d<0$, dann wird die Normalparabel um d nach links verschoben
2. Ist d positiv, also $d>0$, dann wird die Normalparabel um d nach rechts verschoben



ZEICHNEN QUADRATISCHER FUNKTIONEN I

gegeben: Funktion in Scheitelpunktform $f(x) = a\,(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a \neq 0$

Beispiel: $f(x) = 0{,}5\,(x - 1)^2 - 2{,}5$



1) **Scheitelpunkt** ablesen und einzeichnen: *S (1 | –2,5)*

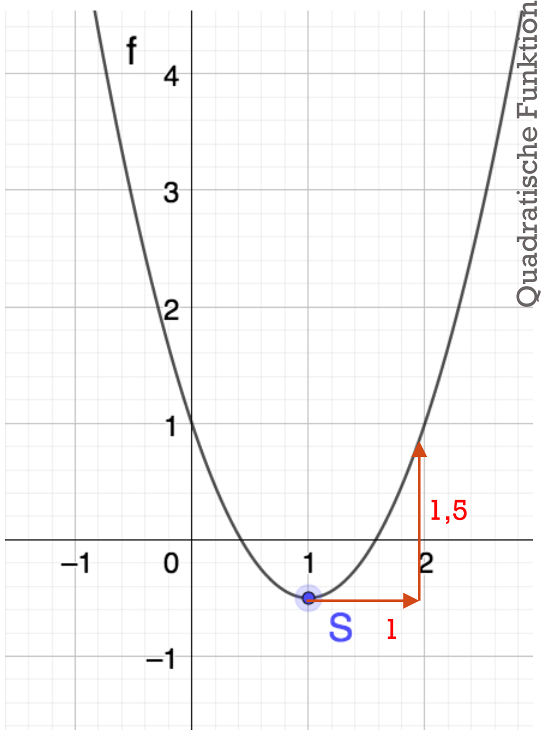
2) **Vorzeichen von a** beachten: *a=0,5, ist also positiv*

➔Parabel nach oben geöffnet

3) von S aus **"1 rüber, 1·a hoch/runter."** und **"2 rüber, 4·a hoch/runter."**: *von S aus 1 Einheit nach rechts+links und 1·0,5 nach oben; dann von S aus zwei Einheiten nach rechts+links und 4·0,5 nach oben*

ZEICHNEN QUADRATISCHER FUNKTIONEN II

gegeben: Funktion in <u>allgemeiner Parabelgleichung</u> $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \neq 0$



Beispiel: $f(x) = 1{,}5\,x^2 - 3\,x + 1$

1) x-Koordinate des Scheitelpunktes S durch die Formel $\mathbf{x_s = -\frac{b}{2a}}$ bestimmen: $x_s = -\frac{-3}{2\cdot 1{,}5} = 1$

2) x_s einsetzen, Scheitelpunkt S bestimmen *und einzeichnen* $f(1) = 1{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -0{,}5$

➔ $S\,(1 \mid -0{,}5)$

3) Vorzeichen von a beachten: *a=1,5, ist also positiv*

➔Parabel nach oben geöffnet

4) von S aus **"1 rüber, 1·a hoch/runter."** und **"2 rüber, 4·a hoch/runter.":** *von S aus 1 Einheit nach rechts+links und 1·1,5 nach oben; dann von S aus zwei Einheiten nach rechts+links und 4·1,5 nach oben*

EXKURS: QUADRATISCHE GLEICHUNGEN LÖSEN

Form	Lösen durch...	*Beispiel*
$ax^2 + c = 0$	**Umformung**: $x^2 = -\frac{c}{a}$ **und Wurzelziehen**	***$x^2 = 9$*** $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
$(x + b)\ (x + c) = 0$	**Satz vom Nullprodukt:** „Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.“ $x + b = 0$ oder $x + c = 0$	***$(x - 3)\ (x + 5) = 0$*** *$x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0$* *$x_1 = 3$ und $x_2 = -5$*
$ax^2 + bx = 0$	**Ausklammern**: $x\ (ax + b) = 0$ **und Satz vom Nullprodukt**	***$x^2 - 7x = 0$*** *$x\ (x - 7) = 0$* *$x = 0$ oder $x - 7 = 0$* *$x_1 = 0$ und $x_2 = 7$*
$ax^2 + bx + c = 0$	**abc-Formel:** $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	***$x^2 - 2x - 8 = 0$*** *$a = 1$ und $b = -2$ und $c = -8$* $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$ $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{2\pm6}{2}$ $x_1 = \frac{2+6}{2} = 4$ und $x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$

NULLSTELLEN FINDEN

Nullstelle bedeutet Schnittpunkt S_x mit der x-Achse

1) Die Funktionsgleichung $y = 0$ setzen
2) Gleichung entsprechend nach x auflösen

Quadratische Funktionen haben…
…entweder **keine Nullstelle**
…oder **eine Nullstelle** (= x-Wert des Scheitelpunktes; d.h. der Graph berührt die x-Achse in der Nullstelle/im Scheitelpunkt)
…oder **zwei Nullstellen** (d.h. der Graph schneidet die x-Achse zweimal, die Nullstellen liegen symmetrisch zum x-Wert des Scheitelpunktes.

Beispiel: $f: y = x^2 + 5x + 4$

→*Setze* $y = 0$ $\quad 0 = x^2 + 5x + 4$ $\quad$ |*pq-Formel anwenden mit* $p = 5$ *und* $q = 4$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

→ $x_1 = -1$ *und* $x_2 = -4$

Alternative: abc-Formel

$$\mathbf{x}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

→***Antwort:*** *Die Nullstellen der Funktion f sind* $N_1(-1\,|\,0)$ *oder* $N_2\,(-4\,|\,0)$.

DISKRIMINANTE UND NULLSTELLEN

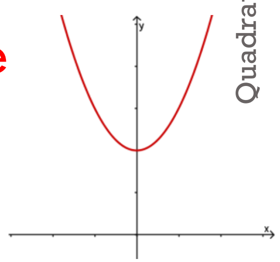
Diskriminante D einer quadratischen Gleichung ist definiert durch:

$$D = b^2 - 4ac$$ *„der Term, der in der abc-Formel unter der Wurzel steht“*

An der Diskriminante kann man ablesen, wie viele Lösungen die quadratische Gleichung besitzt:

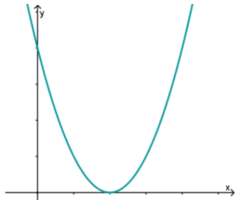
$D < 0$: <u>keine</u> Lösung, da keine negative Zahl unter der Wurzel sein darf ➔keine Nullstelle

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$ ➔ $a=1; b=0; c=2$ ➔ $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 < 0$



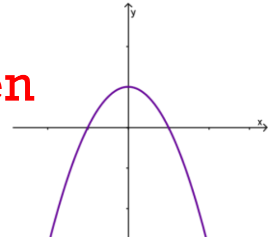
$D = 0$: <u>eine</u> Lösung, da die Wurzel in der abc-Formel 0 wird ➔“doppelte“ Nullstelle = Berührstelle

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ➔ $a=1; b=-4; c=4$ ➔ $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$



$D > 0$: zwei Lösungen wegen Plus und Minus in der abc-Formel ➔ zwei einfache Nullstellen

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 1$ ➔$a=-1; b=0; c=1$ ➔ $D = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 > 0$



SCHNITTPUNKTE ZWEIER FUNKTIONEN

1) Gleichung f(x) = g (x) lösen

2) Lösungen der Gleichung in f(x) oder g(x) einsetzen

Beispiel: $f(x) = x^2 + 5x + 4$ und $g(x) = 0{,}5x + 1$

$x^2 + 5x + 4 = 0{,}5x + 1 \quad | -0{,}5x - 1$

$x^2 + 4{,}5x + 3 = 0 \quad |$ *pq-Formel anwenden mit* $p = 4{,}5$ *und* $q = 3$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 3}$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

➔ $x_1 = -0{,}814$ und $x_2 = -3{,}686$

Alternative: abc-Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x-Werte in f(x) oder g(x) einsetzen, um die y-Werte der Schnittpunkte zu erhalten:

$g(-0{,}814) = 0{,}5 \cdot (-0{,}814) + 1 = 0{,}593$ und $g(-3{,}686) = 0{,}5 \cdot (-3{,}686) + 1 = -0{,}843$

➔ ***Antwort:*** *Die Schnittpunkte der Funktionen sind* ***S_1 (–0,814 | 0,593)*** *und* ***S_2 (–3,686 | –0,843)***.

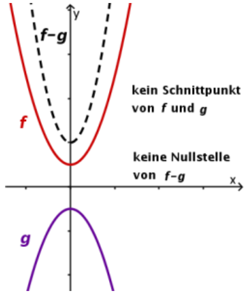
DISKRIMINANTE UND SCHNITTPUNKTE

Zur Berechnung der Schnittpunkte löst du **f(x) = g(x)**, also **f(x) – g(x) = 0**.

Falls dieser Ausdruck f(x) – g(x) eine quadratische Funktion ist, sagt dir die Diskriminante, ob und wie viele Schnittpunkte existieren.

Diskriminante D einer quadratischen Gleichung ist definiert durch:

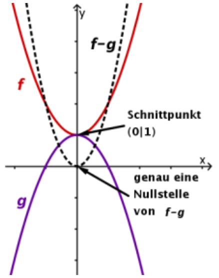
$$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$$ *„der Term, der in der abc-Formel unter der Wurzel steht“*



D < 0: <u>keine</u> Lösung, da keine negative Zahl unter der Wurzel sein darf ➔ kein Schnittpunkt

Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$ *und* $g(x) = -x^2 - 1$ ➔ $f(x) - g(x) = 0$ ➔ $x^2 + 1 - (-x^2 - 1) = 0$ ➔ $2x^2 + 2 = 0$

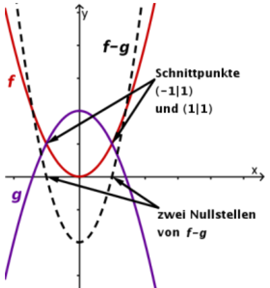
➔ $D = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -8 < 0$ ➔ *kein S*



D = 0: <u>eine</u> Lösung, da die Wurzel in der abc-Formel 0 wird ➔ Berührstelle/ein Schnittpunkt

Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$ *und* $g(x) = -x^2 + 1$ ➔ $f(x) - g(x) = 0$ ➔ $x^2 + 1 - (-x^2 + 1) = 0$ ➔ $2x^2 = 0$

➔ $D = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 0$ ➔ $S\,(0\,|\,1)$

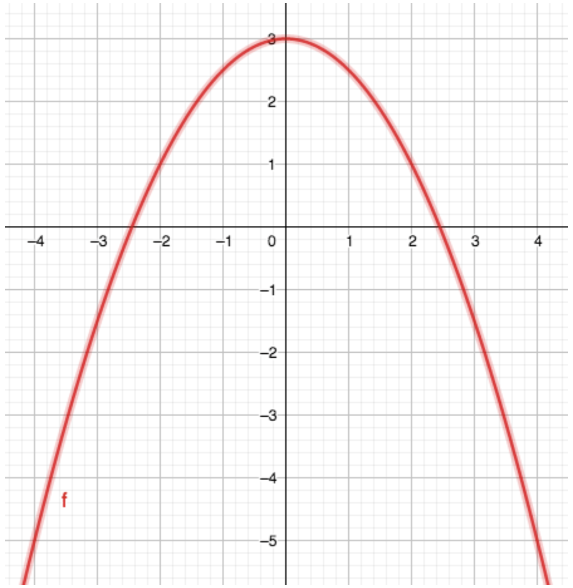


D > 0: zwei Lösungen wegen Plus und Minus in der abc-Formel ➔ zwei Schnittpunkte

Beispiel: $f(x) = x^2$ *und* $g(x) = -x^2 + 2$ ➔ $f(x) - g(x) = 0$ ➔ $x^2 - (-x^2 + 2) = 0$ ➔ $2x^2 - 2 = 0$

➔ $D = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 > 0$ ➔ $S_1\,(-1\,|\,1)$ *und* $S_2\,(1\,|\,1)$

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN I



gegeben: Graph der Funktion

Beispiel:

1) **Scheitelpunkt** im Koordinatensystem **ablesen** und **in Scheitelpunktform einsetzen:**

S(0|3)

$f(x) = a(x-0)^2+3$

2) **a bestimmen**

→aus Koordinatensystem ablesen

von S 1 Einheit rüber & runter, bis du wieder auf die Parabel stößst (die Einheiten, die du nach unten gehst, entsprechen a) ➔ a= -0,5

oder

→mit beliebigem Punkt P der Parabel berechnen

z.B. P (2|1) in Funktionsterm einsetzen, nach a auflösen

$1 = a(2-0)^2 + 3$

$1 = 4a + 3$

$-0{,}5 = a$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\mathbf{f(x) = -0{,}5x^2+3}$.

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN II

gegeben: Scheitelpunkt S + ein anderer Punkt P der Parabel

Beispiel:

S(1 | 2) und P (3 | 0)

1) S in Scheitelpunktform einsetzen: $f(x) = a(x-1)^2+2$

2) P einsetzen und nach a auflösen: $0 = a\,(3-1)^2 + 2$

$0 = 4a + 2$

$-0{,}5 = a$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\boldsymbol{f(x) = -0{,}5\,(x-1)^2 + 2}$.

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN III

gegeben: drei Punkte A, B und C der Parabel

Beispiel: $A(0|3)$, $B(2|-3)$ und $C(-1|9)$

1) Punktprobe (A, B, C jeweils in die allgemeine Parabelgleichung einsetzen):

$$a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 3$$
$$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -3$$
$$a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 9$$

2) Gleichungen so umformen und gegenseitig einsetzen, dass man a, b und c erhält:

$$a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 3. \quad \Rightarrow \boldsymbol{c = 3}$$

$$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -3$$
$$\Leftrightarrow a\cdot 4 + b\cdot 2 + c = -3$$

$$a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 9$$
$$\Leftrightarrow a - b + c = 9$$

c = 3 einsetzen:

$$a\cdot 4 + b\cdot 2 + 3 = -3$$
$$a - b + 3 = 9$$

Additionsverfahren

$$4a + 2b = -6$$
$$a - b = 6 \quad |\cdot 2$$

$$4a + 2b = -6$$
$$2a - 2b = 12 \quad +$$
$$6a = 6 \quad \Rightarrow \boldsymbol{a = 1}$$

a = 1 einsetzen:

$$1 - b = 6 \quad \Rightarrow \boldsymbol{b = -5}$$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 3}$.

VON DER SCHEITELPUNKTFORM IN DIE ALLGEMEINE FUNKTIONSGLEICHUNG

Ganz einfach: Ausrechnen mithilfe der **binomischen Formeln** ☺

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $f(x) = -2\,(x + 5)^2 - 7$ | *1.binomische Formel*

$$= -2\,(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) - 7$$

$$= -2\,(x^2 + 10x + 25) - 7$$

$$= -2x^2 - 20x - 50 - 7$$

$$= -2x^2 - 20x - 57$$

VON DER ALLGEMEINEN FUNKTIONSGLEICHUNG IN DIE SCHEITELPUNKTFORM

Umformen mithilfe der **quadratischen Ergänzung**

1. Faktor vor dem x^2 ausklammern
2. Faktor vor dem x erst halbieren, dann quadrieren und anschließend "ergänzen"

Beispiel:

$f(x) = 4x + 0{,}4x^2 - 8$	|*Faktor 0,4 vor x^2 ausklammern*
$= 0{,}4\,(x^2 + 10x) - 8$	|*mit $(\frac{10}{2})^2$ quadratisch ergänzen*
$= 0{,}4\,(x^2 + 10x + 5^2 - 5^2) - 8$	|*1. binomische Formel*
$= 0{,}4\,((x + 5)^2 - 5^2\,) - 8$	|*äußere Klammer auflösen*
$= 0{,}4\,(x + 5)^2 - 0{,}4 \cdot 5^2 - 8$	
$= 0{,}4\,(x + 5)^2 - 0{,}4 \cdot 25 - 8$	
$= 0{,}4\,(x + 5)^2 - 10 - 8$	
$= 0{,}4\,(x + 5)^2 - 18$	