POLYNOMFUNKTIONEN HÖHEREN GRADES

Eine Zusammenfassung

Mathe 1BK2T1 - Bsr

POTENZFUNKTION

$f(x) = a \cdot x^n$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

eindeutige Zuordnung

→zu jedem x-Wert gibt es genau einen y-Wert

$x \longmapsto y$

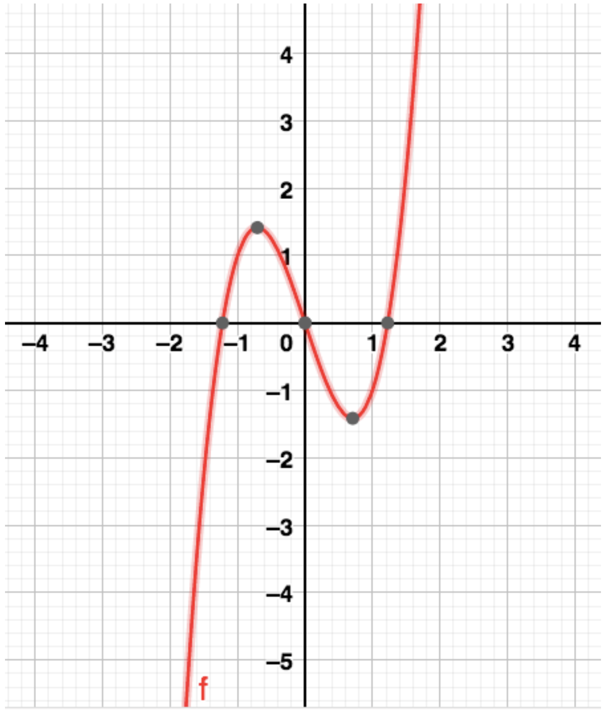
Tipp: Geodreieck entlang der x-Achse führen

Definition: POLYNOMFUNKTION n-ten Grades

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$$

🤔 MERKE:
Grad = Exponent der größten Potenz von x

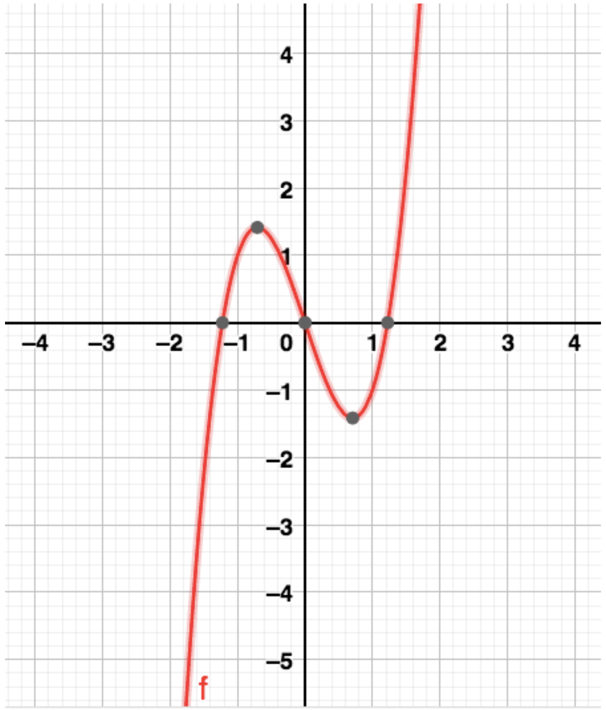
Beispiel: $f\colon y = 2\, x^3 - 3x$



Definition: POLYNOMFUNKTION 3. Grades

$f(x) = a\,x^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$

Beispiel: $f\colon y = 2\,x^3 - 3x$



SCHAUBILDER
VON POLYNOMFUNKTIONEN 3. Grades

$f(x) = a\,x^3 + bx^2 + cx + d$

Globaler Verlauf?

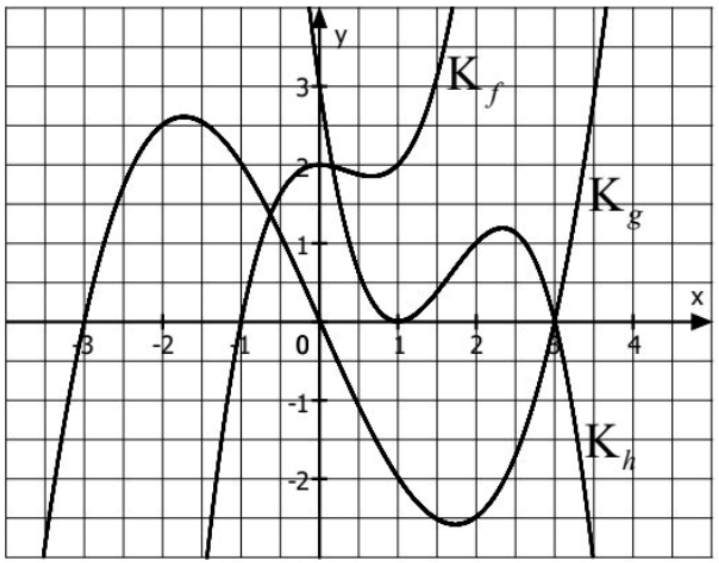
- $a > 0$: Verlauf vom III. in den I. Quadranten
- $a < 0$: Verlauf vom II. in den IV. Quadranten
- Schnittpunkt mit y-Achse: $\mathbf{S_y\ (0\,|\,d)}$

Symmetrie zum Ursprung (0|0)?

- Kommen im Funktionsterm nur ungerade Exponenten von x vor, dann ist das Schaubild symmetrisch zum Ursprung.

➔Bedingung **$f(x) = -f(-x)$** ist erfüllt!

➔$f(x) = a\,x^3 + cx$



$K_f:\ f(x) = x^3 - x^2 + 2$

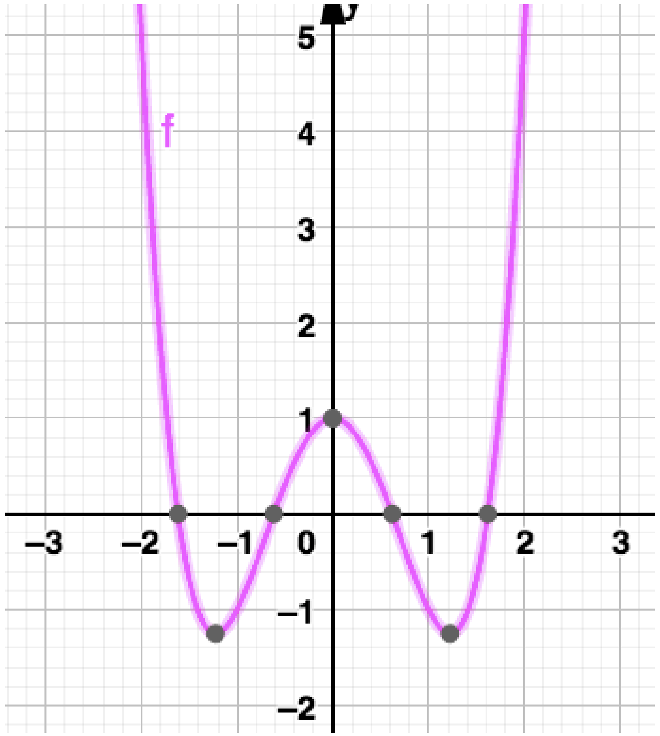
$K_g:\ g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x$

$K_h:\ h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

Definition: POLYNOMFUNKTION 4. Grades

$f(x) = a\,x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$

Beispiel: $f: y = x^4 - 3x^2 + 1$



SCHAUBILDER VON POLYNOMFUNKTIONEN 4. Grades

$f(x) = a\,x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Globaler Verlauf?

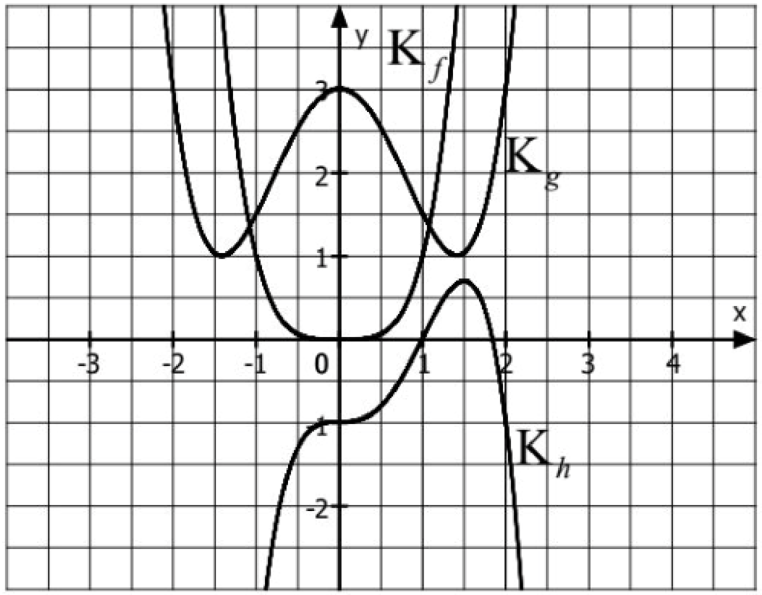
- $a > 0$: Verlauf vom II. in den I. Quadranten
- $a < 0$: Verlauf vom III. in den IV. Quadranten
- Schnittpunkt mit y-Achse: $\mathbf{S_y\ (0\,|\,e)}$

Symmetrie zur y-Achse?

- Kommen im Funktionsterm nur gerade Exponenten von x vor, dann ist das Schaubild symmetrisch zur y-Achse.

➔Bedingung **f(x) = f(–x)** ist erfüllt!

➔$f(x) = a\,x^4 + cx^2 + e$



$K_f:\ f(x) = x^4$

$K_g:\ g(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 3$

$K_h:\ h(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$

POLYNOMGLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES LÖSEN

Form	Lösen durch…	*Beispiel*
$ax^3 + d = 0$ ($a \neq 0$)	**Umformung**: $x^3 = \ldots$ **und Wurzelziehen** →*Gleichung hat immer eine Lösung!*	$\boldsymbol{x^3 - 8 = 0}$ $x = \sqrt[3]{8} = 2$
$ax^4 - e = 0$ ($a \neq 0$)	**Umformung**: $x^4 = \ldots$ **und Wurzelziehen** →*Für* $\frac{e}{a} > 0$*: zwei Lösungen* →*Für* $\frac{e}{a} < 0$*: keine Lösung, für e=0 ist x=0 einzige Lösung*	$\boldsymbol{x^3 - 8 = 0}$ $x = \sqrt[3]{8} = 2$
$ax^3 + bx^2 + cx = 0$ **$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$** ($a \neq 0$)	**Ausklammern der höchsten gemeinsamen Potenz von x** **und Satz vom Nullprodukt:** „Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.“	$\boldsymbol{x^3 - x^2 = 0}$ $x^2 (x - 1) = 0$ $x^2 = 0$ *oder* $x - 1 = 0$ $x_{1,2} = 0$ *und* $x_3 = 1$
$ax^4 + cx^2 + e = 0$ ($a,b,c \neq 0$)	**Substitution**: $x^2 = z$, **Lösung der quadratischen Gleichung in z** (z.B. mittels abc-Formel) **und Rücksubstitution**	$\boldsymbol{x^4 - 9x^2 + 20 = 0}$ *Substitution* $x^2 = z$ $z^2 - 9z + 20 = 0$ $(x - 7) = 0$ $z_1 = 4$ *und* $z_2 = 5$. *Rücksubstitution:* $z_1 = x^2 = 4 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $z_2 = x^2 = 5 \rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$

NULLSTELLEN FINDEN

Eine **Polynomfunktion vom Grad n** hat höchstens n Nullstellen.
Eine Polynomfunktion mit **ungeradem Grad n** hat mindestens eine Nullstelle.
➔*Polynomfunktion **3. Grades:** mindestens eine Nullstelle und höchstens drei Nullstellen*
➔*Polynomfunktion **4. Grades:** höchstens vier Nullstellen*

Nullstelle bedeutet Schnittpunkt S_x mit der x-Achse

1) Falls die **Funktion als Produkt von Linearfaktoren** angegeben ist: Nullstellen mithilfe des Satzes vom Nullprodukt ohne Rechnung ablesen

Beispiel: $f(x) = -0{,}5 \cdot (x-3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)$

➔*Nullstellen sind Lösungen für f(x)=0:* $-0{,}5 \cdot (x-3) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0$

➔*Satz vom Nullprodukt:* $(x-3) = 0$ oder $(x-1)=0$ oder $(x+2)=0$

➔ ***Nullstellen:*** $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$

2) Falls Funktionsterm nur **mit Summanden** dargestellt ist: f(x) = 0 setzen + Gleichung nach x auflösen

Beispiel 1: $f(x) = x^3 - 2x^2$

➔*Nullstellen sind Lösungen für f(x)=0:* $x^3 - 2x^2 = 0$ | *Ausklammern von* x^2

$x^2 (x-2) = 0$

➔*Satz vom Nullprodukt:* $x^2 = 0$ oder $x - 2 = 0$

➔ ***Nullstellen:*** $x_{1,2} = 0$ und $x_2 = 2$

Beispiel 2: $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

➔*Nullstellen sind Lösungen für f(x)=0:* $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ | *Substitution* $z = x^2$

$z^2 - 7z + 12 = 0$ | *pq-Formel oder abc-Formel*

$z_1 = 4$ und $z_2 = 3$ | *Rücksubstitution*

$z_1 = x^2 = 4$ und $z_2 = x^2 = 3$

➔ ***Nullstellen:*** $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ und $x_3 = \sqrt{3}$ und $x_4 = -\sqrt{3}$

VIELFACHHEIT VON NULLSTELLEN

einfache Nullstelle	**doppelte Nullstelle**	**dreifache Nullstelle**

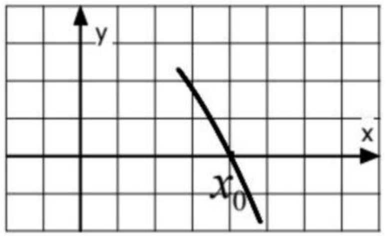
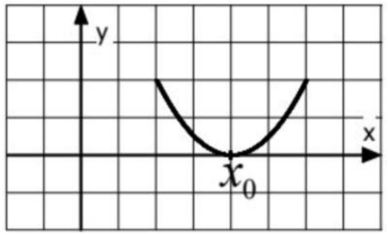
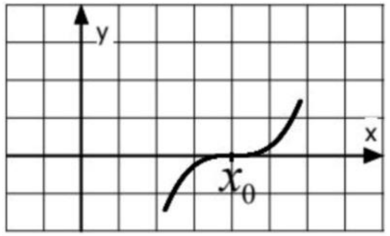
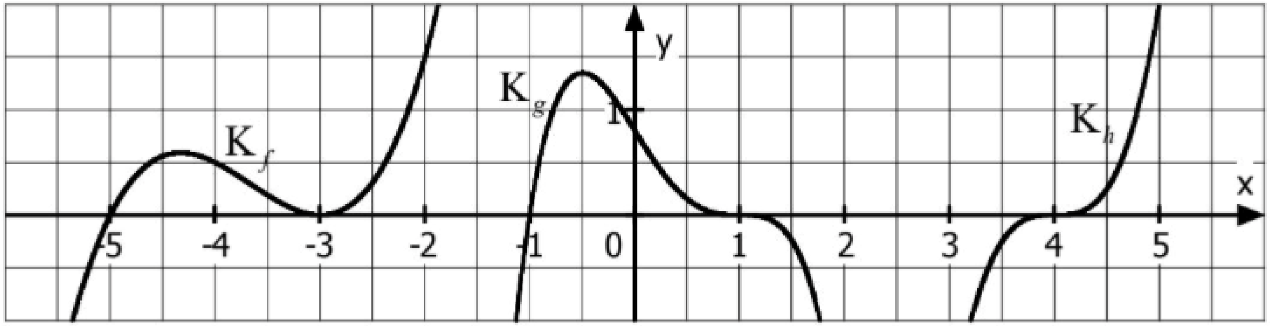

		

Schaubild **schneidet** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel)	Schaubild **berührt** x-Achse (ohne Vorzeichenwechsel)	Schaubild **schneidet** und **berührt** x-Achse (mit Vorzeichenwechsel) ➔Schnittpunkt mit der x-Achse heißt **Sattelpunkt** oder **Terrassenpunkt**

***Beispiele*:**



$K_f: f(x) = 0{,}5 \cdot (x+5) \cdot (x+3)^2$ $K_g: g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$ $K_h: h(x) = 2 \cdot (x-4)^3$

$g(x) = -0{,}8 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^3$

Verlauf vom III. in IV. Quadranten, *denn: Polynomfunktion 4. Grades mit $a = -0{,}8 < 0$*

*$x_1 = -1$ ist **einfache** Nullstelle*

*$x_{2,3,4} = 1$ ist **dreifache** Nullstelle*

SCHNITTPUNKTE ZWEIER FUNKTIONEN - I

1) Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen

2) Lösungen der Gleichung in $f(x)$ oder $g(x)$ einsetzen

Beispiel: $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$

$$x^3 - 3x = x \quad | -x$$

$$x^3 - 4x = 0 \quad | \text{ x ausklammern}$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad | \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x = 0 \text{ oder } x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x_2 = 2 \text{ und } x_3 = -2$$

*(x_1, x_2 und x_3 sind **einfache** Lösungen!)*

x-Werte in f(x) oder g(x) einsetzen, um die y-Werte der Schnittpunkte zu erhalten:

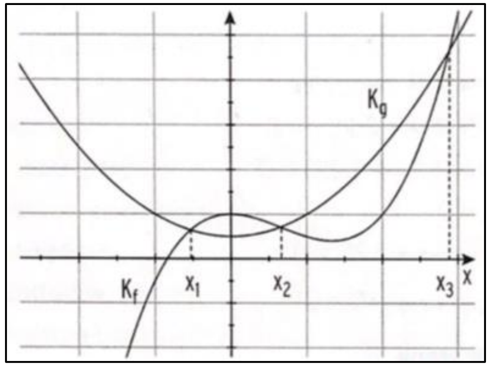
$$g(0) = 0 \text{ und } g(2) = 2 \text{ und } g(-2) = -2$$

➔ ***Antwort:*** *Die Schnittpunkte der Funktionen sind* $\boldsymbol{S_1 (0 \mid 0)}$ *und* $\boldsymbol{S_2 (2 \mid 2)}$ *und* $\boldsymbol{S_3 (-2 \mid -2)}$.

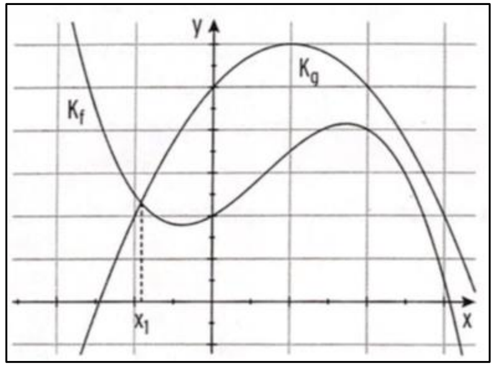
SCHNITTPUNKTE ZWEIER FUNKTIONEN - II

Ähnlich wie bei den Nullstellen, zeigt uns die Lösung der Gleichung f(x) = g(x) auch an, wie die Schnittpunkte im Graph aussehen:

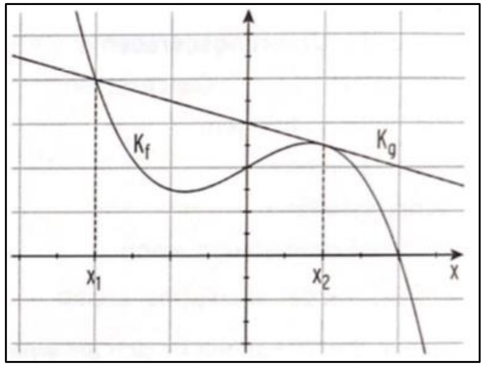
Beispiele:



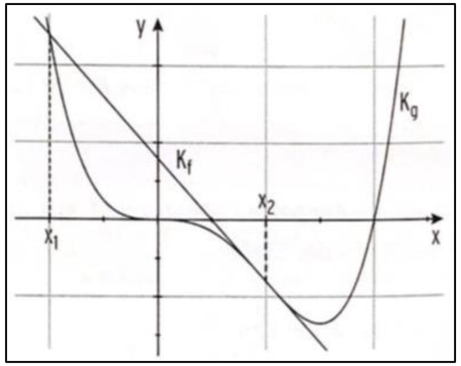
3 einfache Lösungen:
x_1, x_2, x_3
➔K_f und K_g schneiden sich in x_1, x_2, x_3



1 einfache Lösung:
x_1
➔K_f und K_g schneiden sich in x_1



1 einfache Lösung: x_1
und 1 doppelte Lösung: x_2
➔K_f und K_g schneiden sich in x_1 und berühren sich in x_2

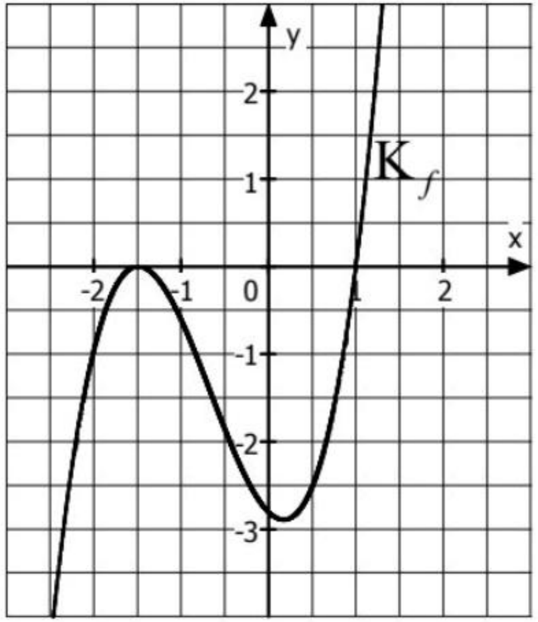


1 einfache Lösung: x_1
und 1 dreifache Lösung: x_2
➔K_f und K_g schneiden sich in x_1, berühren und schneiden sich in x_2

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN – Beispiel I

gegeben: Graph der Funktion

Beispiel:



1) falls möglich, **Nullstellen ablesen** und **als Produkt von Linearfaktoren darstellen:**

$x_{1,2} = -1{,}5;\ x_3 = 1$

$f(x) = a(x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)$

2) Koordinaten eines weiteren Punktes (kein Schnittpunkt mit x-Achse) **einsetzen:**

$P(0{,}5 \mid -2{,}5)$

$-2{,}5 = a(0{,}5+1{,}5)^2 \cdot (0{,}5-1)$

$-2{,}5 = -2a$

$\frac{5}{4} = a$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\boldsymbol{f(x) = \frac{5}{4} \cdot (x+1{,}5)^2 \cdot (x-1)}$.

.

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN – Beispiel II

gegeben: Punkte + Grad + Angaben zur Symmetrie

Beispiel:

Polynomfunktion 3. Grades;
punktsymmetrisch zum Ursprung;
durch A(–2 | –8) und B(1 | 2,5)

1) Symmetrie zeigt Art der Funktionsgleichung: $f(x) = a\,x^3 + cx$ *(Punktsymmetrie → nur ungerade Exponenten)*

2) Punktprobe (Punkte jeweils in Funktionsterm einsetzen):

$-8 = a \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)$

$2{,}5 = a \cdot 1 + c \cdot 1$

Vereinfachung:

$-8 = -8\,a - 2\,c \qquad (I)$

$2{,}5 = a + c \qquad (II)$

Additionsverfahren (I) + (II) · 2 : $-3 = -6a$

$\Leftrightarrow \mathbf{0{,}5 = a}$

Einsetzen von a = 0,5 in (II): $2{,}5 = 0{,}5 + c$

$\Leftrightarrow \mathbf{2 = c}$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\mathbf{f(x) = 0{,}5\,x^3 + 2\,x}$.

FUNKTIONSGLEICHUNG BESTIMMEN – Beispiel III

gegeben: Punkte + Funktionsterm mit Parametern

1) Punktprobe (Punkte jeweils in den allgemeinen Funktionsterm einsetzen):

2) Gleichungen so umformen und gegenseitig einsetzen, dass man a, b und c erhält:

Beispiel:

gegeben: $A(1\,|\,1)$, $B\,(2\,|\,4)$; $f(x) = x^3+bx^2+cx-2$

$1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 - 2 = 1$

$2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 - 2 = 4$

$1 + b + c - 2 = 1$

$8 + b\cdot 4 + c\cdot 2 - 2 = 4$

Vereinfachung:

$b + c = 2$ (I)

$4b + 2c = -2$ (II)

Additionsverfahren (I) · (–2) + (II):

$2b = -6$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b = -3}$

Einsetzen von b = –3 in (I):

$-3 + c = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{c = 5}$

➔ ***Antwort:*** *Die Funktionsgleichung lautet* $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$.