MUSTERERKENNUNG

Vorlesung im Sommersemester 2017

Prof. E.G. Schukat-Talamazzini

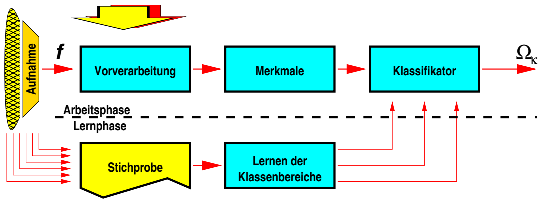
Stand: 6. März 2017

Teil IV

Normierung

Normierung des Musters

Muster/Objekte ⇝ vergleichbare Maßeinheiten



Transformation

Setze „unproduktive“ Musterparameter auf einen **Standardwert**.

Ziele

- Abstrahieren von **irrelevanten** Eigenschaften
- Reduktion von **Mustervariabilität**
- **Ähnlichkeit** von Objekten gleicher Klasse (symb. Beschreibung)

Annahme

Das Muster stellt ein **Objekt** der physikalischen Welt mit — prinzipiell abgrenzbaren — raum-zeitlichen Umrissen dar.

Was wird normiert?

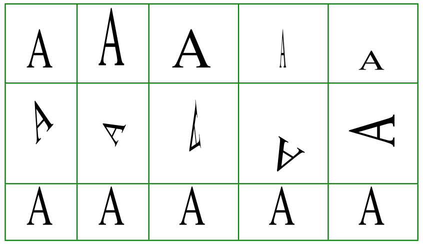
Wertebereichsnormierung — Definitionsbereichsnormierung

Intensität
Lautstärke, Helligkeit, Kontrast

Größe
Dauer, Ausdehnung, Fläche, Volumen

Lage
Translation, Drehung, Neigung

sonstige ...
Strichstärke, Stimmhöhe, Beleuchtung, ...



Vorsicht:

- Drehlage von '6' und '9'
- Größe von 's' und 'S'
- Größe von $\left\{ \begin{matrix} \textit{Apostroph} \\ \textit{Schrägstrich} \end{matrix} \right\}$

Wie wird normiert?

Verarbeitungssequenz zur Normierung eines Parameters

1. Extrahiere das zu normierende Objekt aus dem Muster.
2. Berechne den originalen Objektparameter.
3. Transformiere das Muster (das Objekt), so daß der resultierende Objektparameter den Standardwert annimmt.

Problem

- *Verfahren zur Objektsegmentierung?*
- *Geeignete Standardisierungstransformation?*
- *Muster besteht aus mehreren Objekten (Wort, Zeile).*
- *Normierung unterschiedlicher Parameter kollidiert!*

Wertebereichsnormierung (1./2. Momente)

Gemeinsame Transformation aller Werte $[f_n]$

Mittelwertfreiheit

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} - \overline{\boldsymbol{f}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{h}} = 0$$

Energie / Intensität

$$s_f^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} / s_f \quad \Rightarrow \quad s_h^2 = 1$$

Standardnormalverteilung

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n - \overline{\boldsymbol{f}})^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{f} - \overline{\boldsymbol{f}}}{\sigma_f} \quad \Rightarrow \quad [h_n] \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$\mathcal{N}(0,1)$-normierte f_n sind invariant gegen lineare Transformationen

Wertebereichsnormierung (Summe, Extrema)

Gemeinsame Transformation aller Werte $[f_n]$

Einheitssumme ($f_n \geq 0$)

$$S_f \;=\; \sum_{n=1}^{N} f_n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h} \;=\; \boldsymbol{f}/S_f \quad \Rightarrow \quad S_h = 1$$

entspricht einer Energienormierung der $[g_n]$ mit $g_n = \sqrt{f_n}$

Umschließendes Einheitsintervall $[0,1]$

$$h_n \;=\; \frac{f_n - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$$

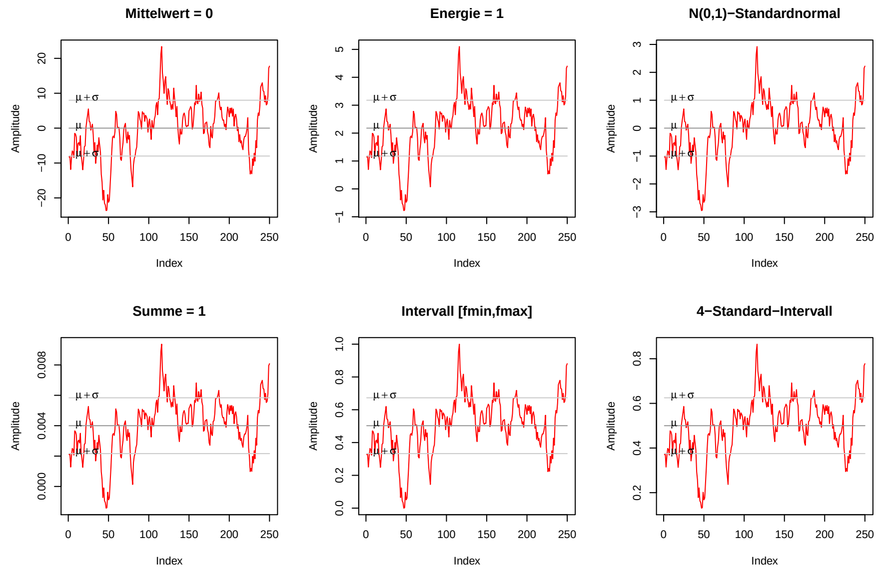
Statistisches Einheitsintervall $[0,1]$

$$h_n \;=\; \frac{1}{2} + \left.\frac{f_n - \overline{\boldsymbol{f}}}{2 \cdot C\sigma_f}\right|_{h_n \in [0,1]}$$

$C = 2$ oder $C = 3$ oder $C = 4$

Wertebereichsnormierung

250 Beispieldatenpunkte ($\mathcal{N}(0,3)$-Irrfahrt)



Aufgabenstellung

Wertebereich: Amplitudennormierung

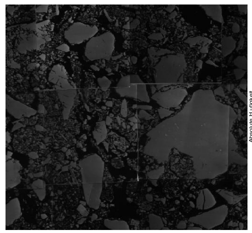
Wertebereich: Nichtparametrische Verfahren

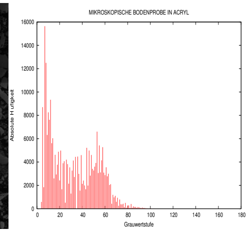
Definitionsbereich: Geometrische Normierung

Definitionsbereich: Nichtparametrische Verfahren

Mathematische Hilfsmittel

Egalisierung des Grauwerthistogramms





Die gescannte Bodenprobe ist **unterbelichtet**; nur ein kleiner Teil des Grauwertintervalls $[0,255]$ ist mit Bildrasterpunkten besetzt.

Problem

Gesucht ist eine monotone und surjektive Grauwerttransformation

$$\tau : \{0,\ldots,L-1\} \xrightarrow{\text{sur}} \{0,\ldots,L-1\}$$

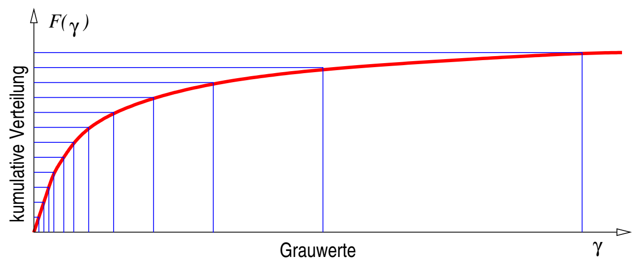
die das Histogramm des transformierten Bildes

$$[h_{nm}] \quad \mathit{mit} \quad h_{nm} \;=\; \tau(f_{nm}) \quad (\forall n,m)$$

möglichst gleichförmig macht.

Egalisierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Gleichförmige Dichte $\hat{=}$ lineare kumulative Verteilung



Satz (Kanonische Gleichverteilung)

Sei $F(\xi) = \mathrm{P}_{\mathbb{X}}(\xi) \;=\; \mathrm{P}(\mathbb{X} \leq \xi)$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen $\mathbb{X}$.

Ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ stetig und streng monoton, so ist die Zufallsvariable $\mathbb{Y} := F(\mathbb{X})$ gleichverteilt im Intervall $[0,1]$.

Beweis.

Wir haben zu zeigen, daß $\mathbb{Y}$ eine gleichförmige, also konstante, Verteilungsdichte besitzt.

Wir zeigen dafür, daß die kumulative Verteilungsfunktion eine Gerade (*genauer:* die Identität) ist.

Als Ableitung der kumulativen Verteilung muß die Dichtefunktion dann konstant sein.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathbb{Y} \leq \eta) &= \mathrm{P}(F(\mathbb{X}) \leq \eta) && (1)\\
&= \mathrm{P}(F(\mathbb{X}) \leq F(\xi_\eta)) && (2)\\
&= \mathrm{P}(\mathbb{X} \leq \xi_\eta) && (3)\\
&= F(\xi_\eta) && (4)\\
&= \eta && (5)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Schritte gelten aus folgenden Gründen:

1. Definition von $\mathbb{Y}$.
2. Ein ξ mit $F(\xi) = \eta$ existiert, da F stetig ist.
3. Gleiche Ereignismenge, da F streng monoton ist.
4. Definition von F.
5. Definition von ξ_η (siehe (2)).

□

Verfahren zur Grauwertegalisierung

⟨Algorithmus⟩

1. Berechne für $[f_{nm}]$ das *relative* Grauwerthistogramm $[q_\ell]$.
2. Bestimme daraus das *kumulative* Grauwerthistogramm

$$q^{\Sigma}(\gamma) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sum_{\ell=0}^{\gamma} q_\ell$$

3. Transformiere alle Bildpunkte:

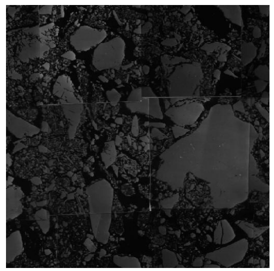
$$h_{nm} \;=\; \lfloor (L-1) \cdot q^{\Sigma}(f_{nm}) \rfloor$$

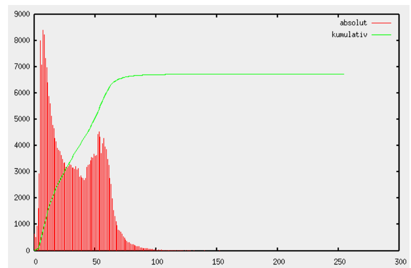
Dabei sei $[0, L-1]$, $L = 2^b$, der quantisierungsbedingte Grauindexbereich.

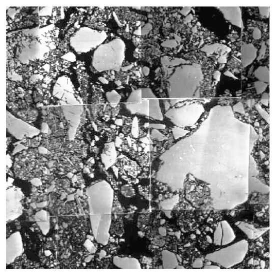
⟨Algorithmus⟩

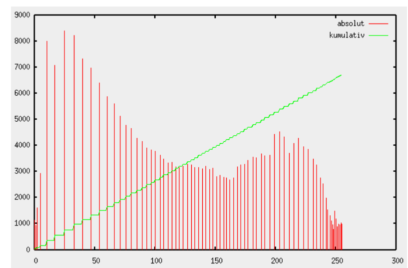
Grauwertegalisierung

Beispiel Bodenprobe in Acryl — Bilder und Grauwerthistogramme



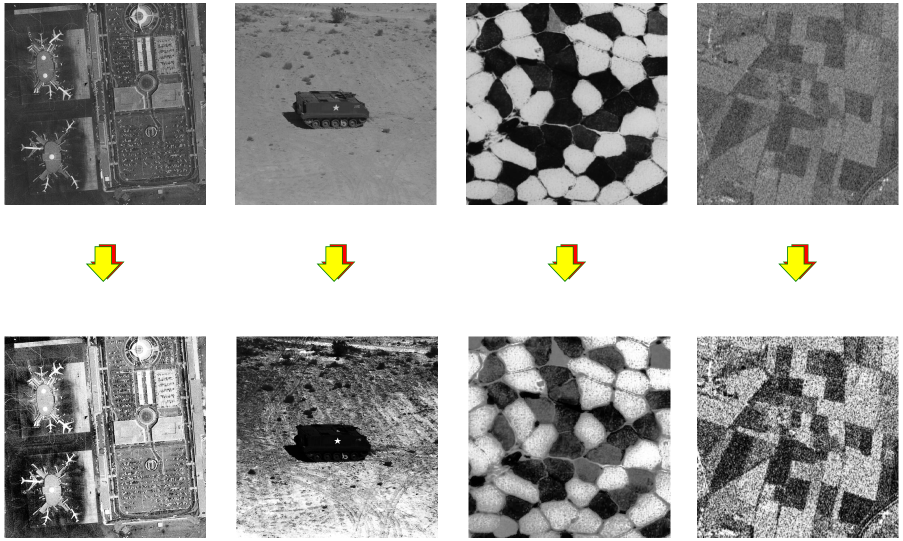






Grauwertegalisierung

Informationsgehalt $\neq$ Naturtreue



Flughafen Tripolis — AFC-Militärfahrzeug — Rattenmuskelfaser — SAR-Satellit

Aufgabenstellung

Wertebereich: Amplitudennormierung

Wertebereich: Nichtparametrische Verfahren

Definitionsbereich: Geometrische Normierung

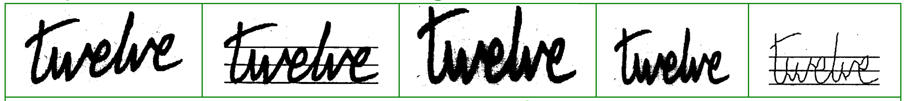
Definitionsbereich: Nichtparametrische Verfahren

Mathematische Hilfsmittel

Geometrische Normierung

Transformation der Musterkoordinaten

Beispiel Handschriftnormierung



Drehung — Neigung — Größe — Liniendicke

1. Parameterbestimmung

Abmessung (H/B/L), Dauer, Winkel, Flächeninhalt berechnen.

2. Koordinatentransformation

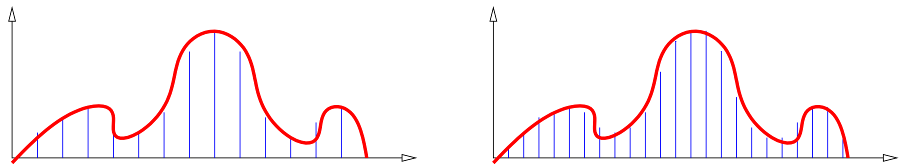
Abbildungsvorschrift in Abhängigkeit vom Normierungsparameter:

$$h(x', y') \;=\; f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{t}_{\mathrm{geo}} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

➪ „alte“ versus „neue“ Abtastwerte *(Umrastern)*

Neuabtastung eines Musters

„Umrastern“ · 1D: von N auf N' Abtastwerte



Rekonstruktionsformel des Abtastsatzes

$$f(x) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j \cdot \frac{\sin(2\pi B(x - j\Delta x))}{2\pi B(x - j\Delta x)}$$

Näherungsformel: lineare Interpolation

$$f(x) \;=\; f_n + (f_{n+1} - f_n) \cdot \frac{x - n\Delta x}{\Delta x}\,, \qquad x \in [n\Delta x, (n+1)\Delta x]$$

Momente

von Funktionen bzw. Abtastfolgen und Rasterbildern

Definition

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bzw. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_q(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^q \cdot f(x)\,dx \\ \mathfrak{m}_{pq}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q \cdot f(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

das q-te **eindimensionale Moment** ($q \in \mathbb{N}$) bzw. das (p,q)-te **zweidimensionale Moment** ($p,q \in \mathbb{N}$).

Definition

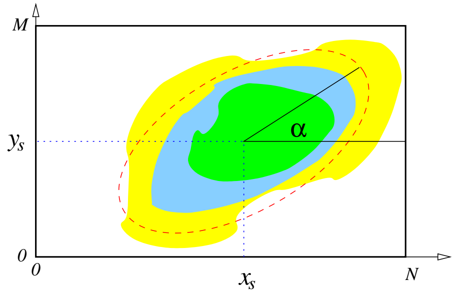
Für eine Abtastfolge $[f_n]$ bzw. ein Grauwertbild $[f_{nm}]$ bezeichnen

$$\mathfrak{m}_q(\boldsymbol{f}) = \sum_{n=1}^{N} n^q \cdot f_n \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{m}_{pq}(\boldsymbol{f}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} n^p m^q \cdot f_{nm}$$

das q-te **eindimensionale Moment** ($q \in \mathbb{N}$) bzw. das (p,q)-te **zweidimensionale Moment** ($p,q \in \mathbb{N}$).

Schwerpunkt und zentrale Momente

(Rasterbilder $[f_{nm}]$ der Ausdehnung $N \times M$)



Schwerpunkt eines Musters

$(x_s, y_s) \in \mathbb{N}^2$ mit

$$\begin{aligned} x_s &= \mathfrak{m}_{10}/\mathfrak{m}_{00} \text{ und} \\ y_s &= \mathfrak{m}_{01}/\mathfrak{m}_{00} \end{aligned}$$

Definition

Die Momente

$$\mu_{pq}(f) = \mathfrak{m}_{pq}(h)\,, \qquad (p,q) \in \mathbb{N}^2$$

des in seinen Schwerpunkt verschobenen Musters $[h_{nm}]$ mit

$$h(x - x_s, y - y_s) \stackrel{\text{def}}{=} f(x,y)$$

heißen die (p,q)-ten **zentralen 2D-Momente** von $[f_{nm}]$.

Zentrale Momente zweiter Ordnung

Statistische Meßgrößen für Ausdehnung und Orientierung

Ausdehnung in x-Richtung

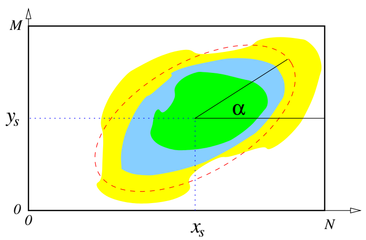
$$\sigma_x = \sqrt{\mu_{20}}$$

Ausdehnung in y-Richtung

$$\sigma_y = \sqrt{\mu_{02}}$$

Neigung der Hauptträgheitsachse

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\cdot\mu_{11}}{\mu_{20}-\mu_{02}}\right)$$

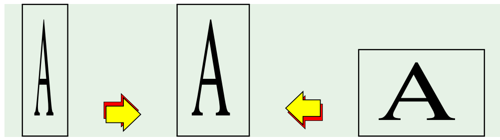


Bemerkung

Wenn f Wahrscheinlichkeitsdichte, so $\mathfrak{m}_{pq} = \mathcal{E}[\mathbb{X}^p\mathbb{Y}^q]$ (Erwartungswert).

Objektumfassung

Umschreibendes Rechteck $\langle x_u, y_u, x_o, y_o \rangle$



Binarisierung: $[f_{nm}] \mapsto \mathcal{M}_f$

$$\begin{aligned} x_u/x_o &= \min/\max\{n \mid \exists m : (n,m) \in \mathcal{M}_f\} \\ y_u/y_o &= \min/\max\{m \mid \exists n : (n,m) \in \mathcal{M}_f\} \end{aligned}$$

Geometrische Momente: 3σ-Umfassung

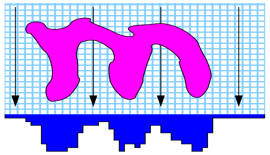
$$x_u/x_o = x_s \mp 3\sigma_x \qquad\qquad y_u/y_o = y_s \mp 3\sigma_y$$

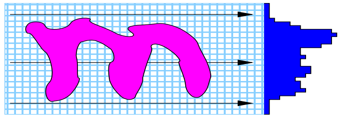
Bemerkung

- Was wenn das binarisierte Bild Störungen des Hintergrundes enthält?
- Was wenn die Bildzeilen/spalten asymmetrische Grauverläufe aufweisen?
- Was wenn die Grauwertzeilen/spalten „unglockenförmig“ aussehen?

Ordinatenprojektionen

Relative zeilenweise & spaltenweise Grauwertkonzentration





Vertikalprojektion

$$f_m^Y = \sum_n f_{nm}$$

Horizontalprojektion

$$f_n^X = \sum_m f_{nm}$$

Schwellwertentscheidung

$$x_u = \min\{n \mid f_n^X \geq \theta\} \qquad x_o = \max\{n \mid f_n^X \geq \theta\}$$
$$y_u = \min\{n \mid f_n^Y \geq \theta\} \qquad y_o = \max\{n \mid f_n^Y \geq \theta\}$$

Für den (optimalen) Schwellwert θ gibt es leider keine „Naturkonstante"!

Quantilkriterium

Das Objekt ist da, wo $1 - \delta = 95\%$ der Tinte verbraten wird ...

Quantil-Entscheidung $(\delta > 0)$

$$x_u = \mathrm{Q}_\delta([f_n^X]) \qquad x_o = \mathrm{Q}_{1-\delta}([f_n^X])$$
$$y_u = \mathrm{Q}_\delta([f_n^Y]) \qquad y_o = \mathrm{Q}_{1-\delta}([f_n^Y])$$

Definition

Der q-**Quantil** einer kumulativen **Verteilungsdichte** $F(\xi) = \mathrm{P}(\mathbb{X} \leq \xi)$ ist definiert als

$$\mathrm{Q}_q(F) = F^{-1}(q) = \min\{\xi \mid F(\xi) \geq q\}$$

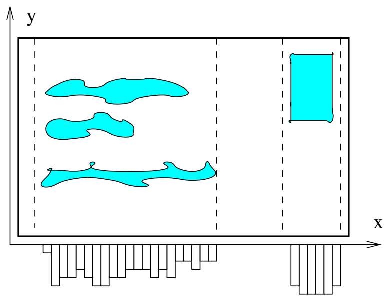
Der q-**Quantil** einer **diskreten Verteilung** $[p_k]$ ist definiert als

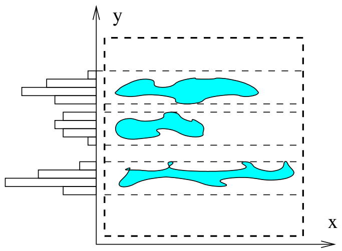
$$\mathrm{Q}_q([p_k]) = \min\{j_0 \mid \sum_{j=1}^{j_0} p_j \geq q\}$$

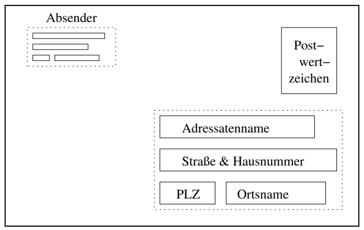
Der q-**Quantil** einer diskreten positiven **Zahlenfolge** $[r_k]$ ist definiert als der q-Quantil der normierten Folge $[r_k']$ mit $r_k' = {}^{r_k}/_{\sum_j r_j}$.

Iterierte Ordinatenprojektion

Layouterkennung bei der optischen Dokumentenanalyse (ODA)





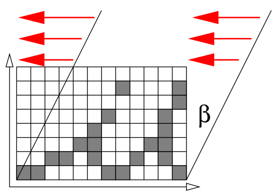


Iteriertes Auswerten vertikaler & horizontaler Bildprojektionen

Spalten · Textblöcke · Zeilen · Wörter

Koordinatentransformation

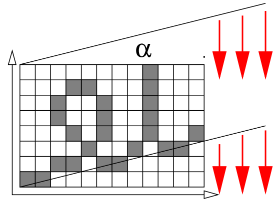
1. Bestimmung der Normierungsfaktoren α, β, r_x, r_y
2. Transformation der Bildebenenkoordinaten $\mathfrak{T} : (x, y) \mapsto (x', y')$



Neigung

Horizontale Scherungsoperation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \cdot \cot\beta \\ y \end{pmatrix}$$



Schiefe

Vertikale Scherungsoperation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \cdot \tan\alpha \end{pmatrix}$$

Größe

Anisotrope Skalierungsoperation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r_x \\ y/r_y \end{pmatrix}$$

Drehung

Rotationsmatrix mit Winkel α

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{pmatrix}$$

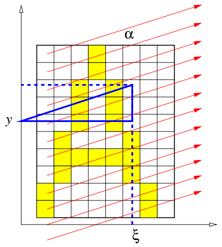
Schiefewinkelbestimmung

Winkelprojektionsverfahren $(\alpha \;=\; 0^\circ \pm \delta)$

Winkelprojektionen f^α

Für alle $|\alpha| \leq \delta_{\max}$ berechne:

$$f^\alpha(y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, y + \xi \tan\alpha)\, d\xi$$

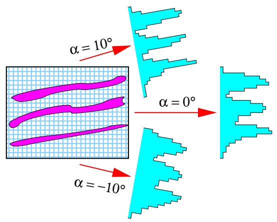


Kontrastkriterium

Wähle α^* mit maximalem Kontrast:

$$\mathrm{Kontrast}([f_m^\alpha]) \;=\; \|f^\alpha\|_p^p \;=\; \sum_{m=1}^{M} |f_m^\alpha|^p$$

$$\mathrm{Kontrast}([f_m^\alpha]) \;=\; -\mathcal{H}([f_m^\alpha]) \;=\; \sum_{m=1}^{M} f_m^\alpha \cdot \log_2 f_m^\alpha$$



Neigungswinkelbestimmung

Modifizierte Winkelprojektion $(\beta = \alpha - 90^\circ = 0^\circ \pm \delta)$

Originalbild mit geneigter Schrift (binarisiert)

Akkumulatorebene mit den Punktdichten (x, β)

nach horizontaler Scherung aufgerichtetes Schriftbild

(Algorithmus)

1. Binarisiere das Grauwertbild.
2. Invertiere das Binärbild.
3. Projektion der weißen Tinte (kleine Winkel vertikaler Ausrichtung)
4. Wähle β mit maximaler Anzahl „weißer" $f^\alpha(x)$-Werte.

Aufgabenstellung

Wertebereich: Amplitudennormierung

Wertebereich: Nichtparametrische Verfahren

Definitionsbereich: Geometrische Normierung

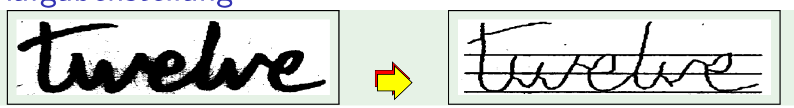
Definitionsbereich: Nichtparametrische Verfahren

Mathematische Hilfsmittel

Skelettierung

Normierung der Liniendicke auf die Breite *eines* Pixels

Aufgabenstellung

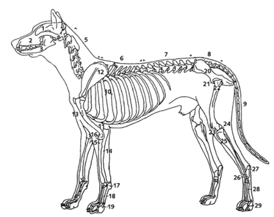


Definition

Eine Teilmenge $\boldsymbol{s} \subset \boldsymbol{f}^o$ einer *zusammenhängenden* Rasterpunktmenge $\boldsymbol{f}^o$ mit den Eigenschaften

1. Die **Dicke** von $\boldsymbol{s}$ beträgt 1 Pixel.
2. $\boldsymbol{s}$ verläuft durch die **Objektmitte**.
3. $\boldsymbol{s}$ erhält die **Objekttopologie** von $\boldsymbol{f}^o$. (Zusammenhang, Löcher, Adjazenzgraph)

heißt **Skelett** von $\boldsymbol{f}^o$.

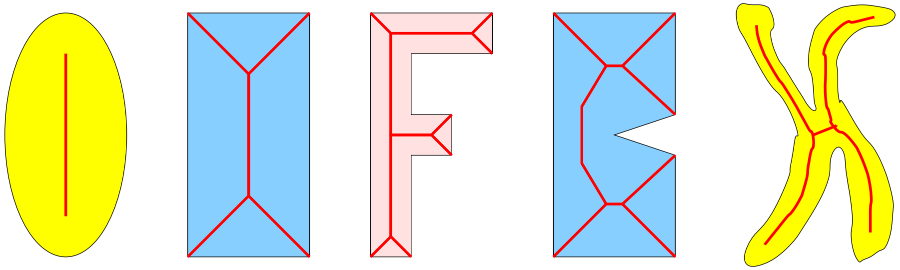


·	4	·
4	×	4
·	4	·

8	8	8
8	×	8
8	8	8

Mittelachsentransformation

Eine „mathematische Realisierung“ des Skelettbegriffs



Definition

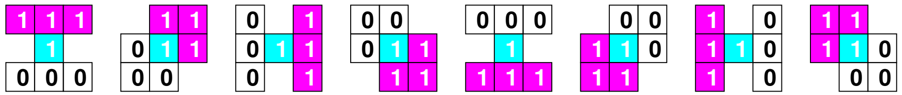
Die **Mittelachsentransformierte** $\boldsymbol{h}$ eines Binärbildes $\boldsymbol{f}$ enthält genau diejenigen Rasterpunkte in $\boldsymbol{f}$, die *mindestens zwei nächste Nachbarn* in der **Randpunktemenge** $\partial \boldsymbol{f}$ von $\boldsymbol{f}$ besitzen.

Bemerkung

Die Mittelachsentransformierte einer Punktmenge erfüllt die definitorischen Voraussetzungen eines Skeletts.

Morphologische Skelettierung

Iterativer Verdünnungsalgorithmus zur Berechnung der MAT



Morphologischer Verdünnungsoperator

Folge *zweiseitiger* Strukturelemente

$$\boldsymbol{h} \;=\; \boldsymbol{f} \ominus \boldsymbol{s} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{f} \cap (\boldsymbol{f} \ominus \boldsymbol{s}^{(1)}) \cap (\boldsymbol{f}^{c} \ominus \boldsymbol{s}^{(0)})$$

Setze f_{nm} gleich Null, wenn $\boldsymbol{s} = \langle \boldsymbol{s}^{(0)}, \boldsymbol{s}^{(1)} \rangle$ nicht in allen Positionen erfüllt ist.

Bemerkung

Die acht Operatoren werden zyklisch wiederholt auf das Objekt $\boldsymbol{f}$ angewendet, bis keine Objektpunkte mehr „abgeraspelt“ werden.

Zusammenfassung (4)

1. Die **Normierung** dient der Reduktion der **Mustervariabilität**.
2. Bestimmte **Kennzeichnungsparameter** des Musters werden auf einen **Standardwert** gesetzt, z.B. 0 oder 1.
3. Die **Amplitudenwerte** des Musters werden hinsichtlich Mittelwert, Summe, Streuung, Min/Max o.ä. normiert.
4. Die **Egalisierung** ist eine nichtlineare Transformation und erzwingt die **Gleichverteilung** der Amplitudenwerte.
5. Eine **geometrische Normierung** erfordert das (rechnerische) **Umrastern** des Originalmusters.
6. Zur **Größen-**, **Lage-** oder **Dauernormierung** sind die Objektgrenzen zu bestimmen, z.B. durch geeignete **Momente** oder **Ordinatenprojektionen**.
7. Zum Normieren der **Orientierung** (Drehung, Schiefe, Neigung) ist ein **Rotationswinkel** zu schätzen, z.B. durch **Kontrastmaximierung** ausgewählter **Winkelprojektionen**.
8. Zur Normierung der **Liniendicke** werden **Skelette** der Bildobjekte berechnet, z.B. die **Mittelachsentransformierten**.