MUSTERERKENNUNG

Vorlesung im Sommersemester 2017

Prof. E.G. Schukat-Talamazzini

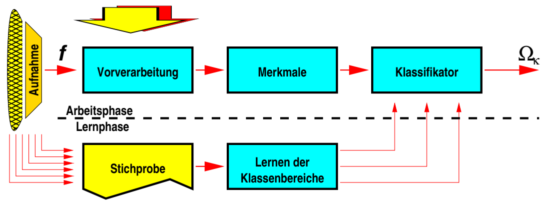
Stand: 6. März 2017

Teil II

Diskretisierung

Vorverarbeitung des Musters

Muster $\mapsto$ Digitalrechner $\mapsto$ „schöneres“ Muster



Ziele

A/D-Wandlung
Datenreduktion
Störunterdrückung
Informationsfilterung

1. Diskretisierung

Sensordaten $\rightsquigarrow$ maschinenlesbare (endliche!) Form
Diskretisierung des

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Definitionsbereichs (Abtastung)} \\ \text{Wertebereichs (Quantisierung)} \end{array} \right\}$$

2. Transformation

Diskretisiertes Muster $\rightsquigarrow$ diskretisiertes Muster
Vorverarbeitung $\Rightarrow$ Informationsverlust
Reproduzierbarkeit des Originals aus dem Resultat ?

Gütekriterien

Exakte Reproduktion
Perzeptuelle Äquivalenz
Semantische Äquivalenz

Schallwellen

Geräusch, Klang, Sprache

Physikalische Substanz

Zeitlicher Verlauf des Schalldrucks
Schallquelle und -sensor

Spektralzerlegung

Stationäres Signal = Wellensalat reiner (Sinus-)Töne
Frequenz, Amplitude, Phasenverschiebung

Physikalischer Reiz ⇔ physiologische Wahrnehmung

Schallintensität (Signaleigenschaft)
Lautstärkeempfindung (tonhöhenabhängig)

Mustererkennung als Funktionsmodell ?

„Ein Flugzeug schlägt nicht mit den Flügeln ...“

Schallwelle als Zeitsignal

Schalldruck, Amplitude $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Schallwelle und $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Dann heißt

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f^2(t)\,dt$$

die **Schallenergie** und

$$I_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} f^2(t)\,dt$$

der **Schallpegel** (oder Intensität, in N/m^2 bzw. Pascal) des Schalls f im Intervall $[t_0, t_1]$. Die Größen

$$I = \frac{I_s}{I_0} \quad \text{bzw.} \quad \ell = 10 \log_{10} \frac{I_s}{I_0}$$

bezeichnen wir als (logarithmierte, in Dezibel $[dB]$) **Lautstärke**.

- $0dB$: Standardpegel I_0 etwas unterhalb der Hörschwelle
- $3dB$: diese Zunahme entspricht einer Pegelverdopplung

mehr Information

Reine Sinustöne

Wiederholrate · maximale Auslenkung · Zeitverschiebung

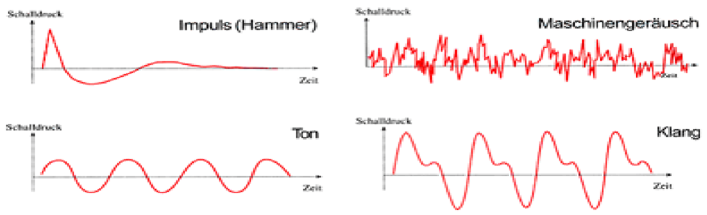
Definition

Die Schallwelle

$$f(t) = A \cdot \sin(2\pi\omega t + \phi)$$

heißt **reiner Ton** mit der **Amplitude** A, der **Schwingungsfrequenz** ω und dem **Phasenwinkel** ϕ.

- Amplitude in Pascal oder Dezibel (N/m^2, dB)
- Frequenz in Hertz ($1/s$)
- Phase in Radian ($\phi \in [0, 2\pi]$)



Spektralzerlegung

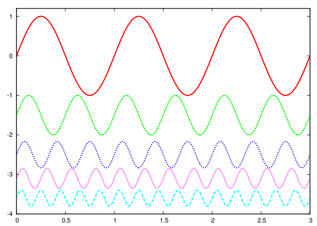
Überlagerung von Sinuskomponenten unterschiedlicher Frequenz

Definition

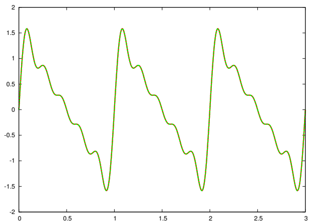
Die Darstellung

$$f(t) \;=\; \int_0^\infty A_\omega \cdot \sin(2\pi\omega t + \phi_\omega)\, d\omega$$

heißt **Spektralzerlegung** des reellwertigen Signals f. Die frequenzabhängigen Funktionen $\{A_\omega\}$ und $\{\phi_\omega\}$ heißen **Amplitudenspektrum** bzw. **Phasenspektrum** von f.



$\omega^{-1} \cdot \sin(2\pi\omega t),\ \omega = 1, ..., 5$



$\sum_1^5 \omega^{-1} \cdot \sin(2\pi\omega t)$

Lautstärkeempfindung & Hörebene

Subjektiver Eindruck des Menschen ist *frequenzabhängig!*

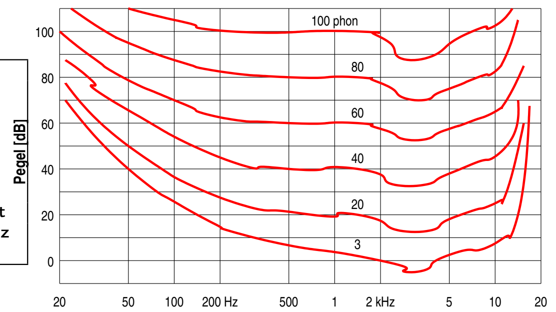
Definition der Phonzahl

$\tilde{f}$ sei ein $1kHz$-Schall gleicher subjektiver Lautstärke wie f.

$$\ell(f)\ [phon] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Pegel}(f) & \omega = 1000\ Hz \\ \text{Pegel}(\tilde{f}) & \omega \neq 1000\ Hz \end{cases}$$

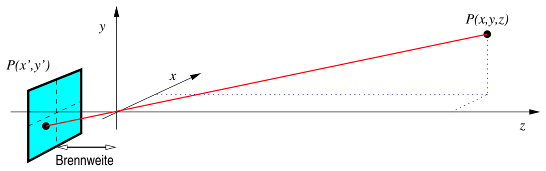
Beispielschallpegel

$140\ dB$	Gewehrschuß nahebei
$120\ dB$	lautstarke Rockgruppe
$100\ dB$	Geschrei nahebei
$80\ dB$	belebte Straße
$70\ dB$	normale Unterhaltung
$50\ dB$	leise Unterhaltung
$30\ dB$	sanftes Flüstern
$20\ dB$	ländliche Gegend/Nacht
$6\ dB$	Hörschwelle bei 1000 Hz
$0\ dB$	Referenzpegel



Kameraaufnahme

Vom Objekt zum Lichtermeer

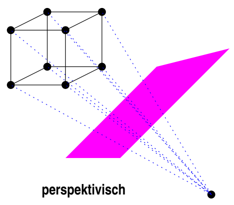


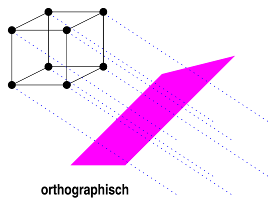
Lochkameramodell

Aufnahme: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Informationsverlust

(Verdeckung)





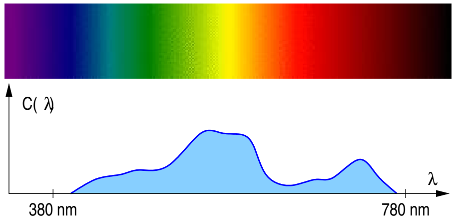
Projektion

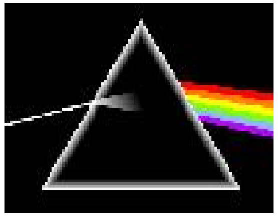
Lineare Abbildung

Homogene Abbildung

Was ist Farbe ?

Farbe ist ein (elektromagnetischer) Wellensalat





Definition

Einen Strahlungsenergieverlauf $C : [\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}}] \to \mathbb{R}$ im Frequenzbereich des sichtbaren Lichts bezeichnen wir als **Farbe**. Farben der speziellen Gestalt

$$C(\lambda) \;=\; C_\mu^{\text{mono}}(\lambda) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \delta(\lambda - \mu)$$

heißen **monochromatisch**.

- Genauer: es ist $C(\lambda) = F'(\lambda)$, und es ist $F'(\lambda)\,d\lambda$ die **Strahlungsenergie** im Wellenlängebereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ in Watt.

Subjektive Helligkeit eines Lichtpunkts

Menschliche Helligkeitsempfindung ist *wellenlängenabhängig*

Definition

Sei $C(\lambda) = F'(\lambda)$ der Strahlungsenergieverlauf einer Lichtquelle. Der **Lichtstrom** (in **Lumen**) ist definiert durch

$$F \;\stackrel{\text{def}}{=}\; = K^* \cdot \int_0^\infty K_\lambda \cdot C(\lambda)\,d\lambda$$

Er gibt die von einem Standardbeobachter wahrgenommene Helligkeit einer Lichtquelle an.

Photometrische Standards

1. Die Gewichtsfunktion $(K_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ist ein CIE-Standard.
   (CIE = *Commission Internationale de l'Eclairage*)
2. Die Konstante lautet $K^* = \left(\int K_\lambda\,d\lambda\right)^{-1} = 683\ [lm/W]$.
3. Der sichtbare Bereich farbigen Lichts liegt zwischen $\lambda = 380nm$ und $\lambda = 780nm$.

Colorimetrie

Darstellung in Farbräumen endlicher Dimension

Empirische Wahrn.-Psychologie: Tristimulusdarstellung

- Die meisten Farben lassen sich (wahrnehmungsäquivalent) als Linearkombination geeigneter *Primärfarben* erzeugen, z.B. C_r^{prim}, C_g^{prim}, C_b^{prim}
- Die erzeugenden Koeffizienten werden durch Wahrnehmungstest bestimmt.
- Beispiel **Standardweiß**: $C_W \;\stackrel{\text{pz}}{=}\; w_r C_r^{\text{prim}} + w_g C_g^{\text{prim}} + w_b C_b^{\text{prim}}$
- Betrachte **weißnormierte** Primärfarben, d.h. es gilt $C_W \;\stackrel{\text{pz}}{=}\; C_r^{\text{prim}} + C_g^{\text{prim}} + C_b^{\text{prim}}$ (und damit $w_r = w_g = w_b = 1$).

Definition

Bezogen auf ein weißnormales Primärfarbensystem $\left\{C_r^{\text{prim}}, C_g^{\text{prim}}, C_b^{\text{prim}}\right\}$ heißen die Koeffizienten in

$$C(\lambda) \;\stackrel{\text{pz}}{=}\; a_r C_r^{\text{prim}}(\lambda) + a_g C_g^{\text{prim}}(\lambda) + a_b C_b^{\text{prim}}(\lambda)$$

die **Tristimuluswerte** der Farbe C.

Farbvergleichskurven

Kurve der Tristimuluswerte über alle monochromatischen Farben

Definition

Die Gewichtfunktionen $\alpha_r()$, $\alpha_g()$, $\alpha_b()$ mit

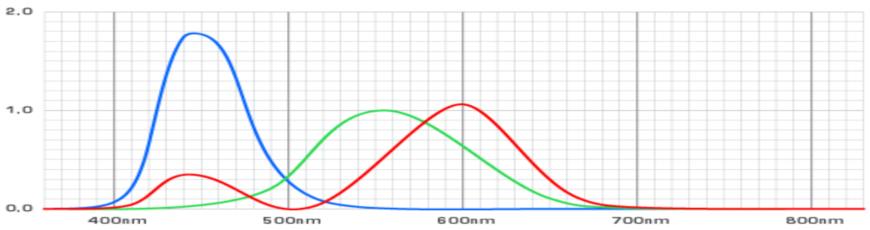
$$C_\mu^{\text{mono}}(\lambda) \;\stackrel{\text{pz}}{=}\; \sum_{r,g,b} \alpha_x(\mu) \cdot C_x^{\text{prim}}(\lambda)$$

für jede monochromatische Farbe C_μ^{mono} heißen **Farbvergleichskurven** (bezüglich $\left\{C_r^{\text{prim}}, C_g^{\text{prim}}, C_b^{\text{prim}}\right\}$).

- CIE-Standard von 1931 $\rightsquigarrow$ drei monochromatische Primärfarben ROT ($\lambda = 700nm$), GRÜN ($\lambda = 546.1nm$), BLAU ($\lambda = 435.8nm$)

Farbvergleichskurven

Wahrnehmungstreue Reproduzierbarkeit



Lemma

In einem weißnormalen Primärfarbensystem gilt für jede Farbe $C(\lambda)$ die Tristimulusdarstellung

$$C(\lambda) \overset{pz}{=} \sum_{r,g,b} \beta_x \cdot C_x^{prim}(\lambda)$$

mit den (drei) Koeffizienten $\beta_x = \int_0^\infty \alpha_x(\mu) \cdot C(\mu)\, d\mu$ für $x = r, g, b$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \sum_x \beta_x \cdot C_x^{\text{prim}}(\lambda) && \text{das sollte } = C(\lambda) \text{ sein!} \\
= \; & \sum_x \left\{ \int_0^\infty \alpha_x(\mu) C(\mu)\, d\mu \right\} \cdot C_x^{\text{prim}}(\lambda) && \text{einsetzen für } \beta_x \\
= \; & \int_0^\infty C(\mu) \cdot \left\{ \sum_x \alpha_x(\mu) \cdot C_x^{\text{prim}}(\lambda) \right\} d\mu && \textstyle\sum \int = \int \sum \\
\overset{\text{pz}}{=} \; & \int_0^\infty C(\mu) \cdot C_\mu^{\text{mono}}(\lambda)\, d\mu && \text{Def. der Farbvergleichkurven } \alpha_x(\cdot) \\
= \; & \int_0^\infty C(\mu) \cdot \delta_{\lambda-\mu}\, d\mu && \text{monochromatische Farben} \\
= \; & C(\lambda) && \text{der tödliche Diracstoß}
\end{aligned}$$

□

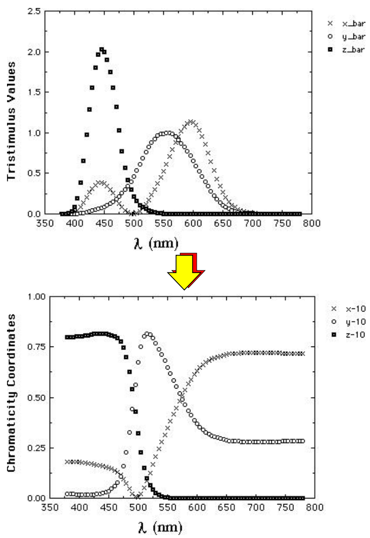
Bemerkung

Die Wahrnehmungsgleichheit $\overset{\text{pz}}{=}$ ist im Gegensatz zu $=$ *keine* Äquivalenzrelation; es gilt nämlich i.a. **nicht** die Transitivität $a \overset{\text{pz}}{=} b \wedge b \overset{\text{pz}}{=} c \Rightarrow a \overset{\text{pz}}{=} c$.

In oben angegebener Herleitung tritt aber glücklicherweise nur **eine** perzeptionelle Gleichheit auf.

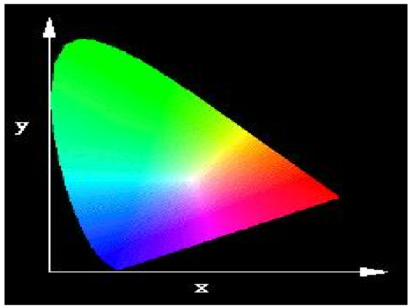
Chromatizitätskoordinaten

Bezüglich Helligkeit normierte Tristimuluswerte



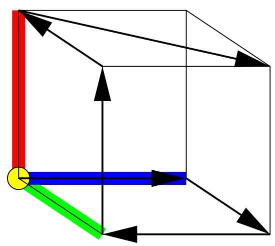
$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{R+G+B} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

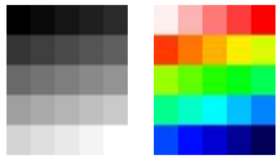


Falsch-, besser: Pseudofarbendarstellung

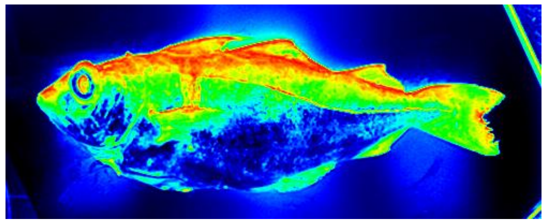
Grauwert-Farbwert-Transformation $\phi : [0,1] \to [0,1]^3$



Zuordnungspfad



Originalaufnahme (grauwertig)



Pseudofarbendarstellung (rückwärts)

Diskretisierung

Endliche rechnerinterne Repräsentation eines Musters

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Problem

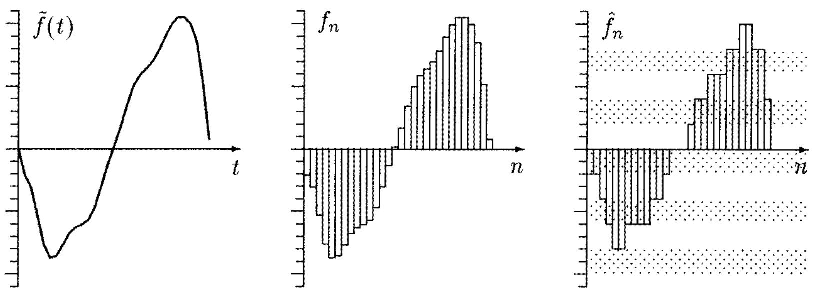
kontinuierlicher Definitionsbereich *(Orte/Zeiten $x_j \in \mathbb{R}$)*
kontinuierlicher Wertebereich *(Amplituden $f_i \in \mathbb{R}$)*

Lösung

Amplitudenmessung nur an endlich vielen ***Stützstellen***
Amplitudenwerte nur als ***Festkommagrößen*** *darstellen*

Diskretisierung = Abtastung & Quantisierung

Analog-Digital-Wandlung (A/D)[?]



Abtastung

- Abtastperiode T [s]
- Abtastfrequenz $f_A = 1/T$ [Hz]
- Stützstellen $\{nT \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- Abtastwerte $f_n = \tilde{f}(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$

⇨ Speicherbedarf $= f_A \cdot b$ [bit/s]

Quantisierung

- Wertebereich $[-f_{\max}, +f_{\max}] \subset \mathbb{R}$
- Kodierung mit b bit
- 2^b Intervalle $\mathcal{I}_\nu = [a_{\nu-1}, a_\nu]$
- Intervallbreite $\Delta_Q = 2f_{\max}/2^b$

CODEC — Kodierer / Dekodierer

Paradigma der Digitalen Signalverarbeitung (DSV/DSP)

Diskretisierung und Rekonstruktion

Aufnahme	⇨	Vorfilter	⇨	Abtasten	⇨	Quantisieren
						⇩
Wiedergabe	⇦	Nachfilter	⇦	Dekodieren	⇦	*(Verarbeiten)*

Fragestellungen

Wieviele Abtastwerte?
Welche Schrittweite?
Wieviele Quantisierungsstufen?
Welche Quantisierungskennlinie?

Abtastung bandbegrenzter Zeitsignale

Obergrenze B für die Frequenzen auftretender Spektralkomponenten

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Zeitfunktion und

$$F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \quad , \ \xi \in \mathbb{R}$$

ihre Fouriertransformierte. Die Funktion f heißt **bandbegrenzt im Frequenzbereich** $(-B, B)$, wenn für alle $|\xi| > 2\pi B$ die Aussage $F(\xi) \ = \ 0$ gilt.

Satz (Abtasttheorem von Shannon)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bandbegrenzt im Frequenzbereich $(-B, B)$ und $0 < \Delta_x \leq {}^1\!/_{(2B)}$. Dann ist f vollständig durch seine Abtastwerte $f_j := f(j \cdot \Delta_x)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ bestimmt und die Rekonstruktionsgleichung lautet

$$f(x) \ = \ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j \cdot \operatorname{sinc}\left(\pi \cdot \frac{x - j\Delta_x}{\Delta_x}\right)$$

wobei $\operatorname{sinc}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x)/x$ *vereinbart sei.*

Beweis (1)

Fouriertransformationen vor und zurück:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \end{aligned}$$

Fourierreihe einer Funktion, die in $(-\xi_0, +\xi_0)$ periodisch ist:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{2\pi i \cdot \frac{j\xi}{2\xi_0}} \\ a_j &= \frac{1}{2\xi_0} \cdot \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} F(\xi) e^{-2\pi i \cdot \frac{j\xi}{2\xi_0}}\, d\xi \end{aligned}$$

Beweis (2)

Wir berechnen $f(x)$ aus dem Umkehrintegral der Fouriertransformierten. Dabei betrachten wir $F(\xi)$ als *eine Periode* einer (gedanklich) periodisch fortgesetzten Funktion und entwickeln $F(\xi)$ in eine Fourierreihe mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2\xi_0} \cdot \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} F(\xi) e^{-2\pi i \cdot \frac{j\xi}{2\xi_0}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\xi_0} \cdot \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} F(\xi) e^{i\xi \cdot \frac{-j\pi}{\xi_0}}\, d\xi \\ &= f\left(\frac{-j\pi}{\xi_0}\right) \cdot \frac{\pi}{\xi_0} \\ &= f(-j\Delta_x) \cdot \Delta_x \qquad \text{mit } \Delta_x = \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{\xi_0} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $F(\xi)$ die Darstellung als Fourierreihe:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{2\pi i \cdot \frac{j\xi}{2\xi_0}} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(-j\Delta_x) e^{ij\xi\Delta_x} \Delta_x \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\Delta_x) e^{-ij\xi\Delta_x} \Delta_x \end{aligned}$$

Beweis (3)

Wir setzen $F(\xi)$ in das Umkehrintegral für $f(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \underbrace{\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\Delta_x) e^{-ij\xi\Delta_x} \Delta_x\right)}_{F(\xi)} e^{i\xi x}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\Delta_x) \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} e^{i\xi(x - j\Delta_x)} \Delta_x\, d\xi \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\Delta_x) \cdot \frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{i(x - j\Delta_x)} e^{i\xi(x - j\Delta_x)}\right]_{-\xi_0}^{+\xi_0} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\Delta_x) \cdot \frac{\Delta_x}{2\pi} \cdot \frac{2\sin(\xi_0(x - j\Delta_x))}{x - j\Delta_x} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j \cdot \frac{\sin(2\pi B(x - j\Delta_x))}{2\pi B(x - j\Delta_x)} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt wegen $\xi_0 = 2\pi B$, $\Delta_x = {}^1\!/_{(2B)}$ und $f(j\Delta_x) = f_j$, und die vorletzte Zeile wegen der Eulergleichung $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Ist B die Bandbegrenzung in der Voraussetzung des Abtasttheorems, so gilt obige Darstellung für jedes $\Delta_x < {}^1\!/_{(2B)}$, weil dann $\Delta_x = {}^1\!/_{(2B')}$ für ein $B' > B$ gilt und $f(x)$ natürlich auch B'-bandbegrenzt ist.

Abtasten mit doppelter Nyquist-Grenzfrequenz

Erfolgreich in der Theorie und in der Praxis ?

Theorie

Claude E. Shannon garantiert uns eine völlig verlustfreie Abtastwertrepräsentation bandbegrenzter Signale.

Praxis

Die Signale (Zeitreihen, Bilder) der realen Welt sind nicht bandbegrenzt!

Definition

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **zeitbegrenzt** im Intervall $(-b, b)$ wenn gilt:

$$f(x) \;=\; 0 \quad \text{für alle } |x| > b$$

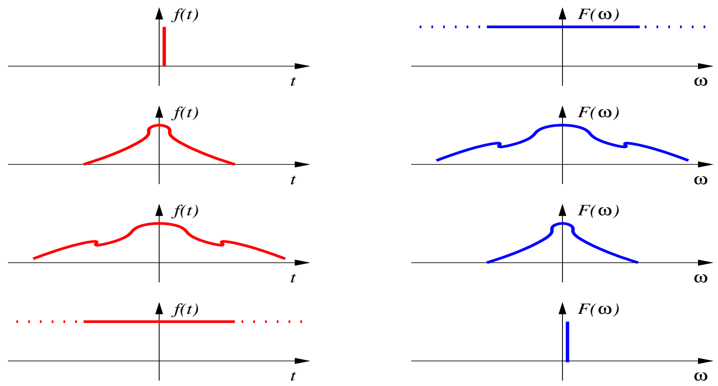
Fakt

Alle von Menschen und Maschinen gemessenen Sensorsignale sind zeit- bzw. ortsbegrenzt!

Fakt

Das (unendlich) periodische Fortsetzen eines Signalintervalls erzeugt Unstetigkeiten an den Nahtstellen, zerstört also Frequenzbandbegrenzung!

Unschärfeprinzip der Wellenlehre



Satz (Paley & Wiener 1934)

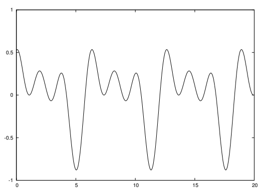
Es gibt (im Funktionenraum $\mathcal{L}_2$) keine Funktion außer der identisch verschwindenden Funktion, die sowohl bandbegrenzt wie auch zeitbegrenzt ist.

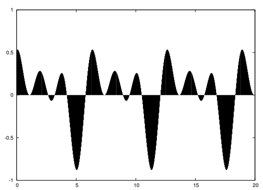
Schallabtastung

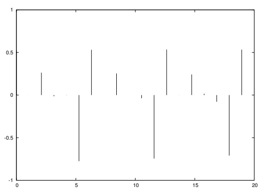
Existenz und Lage der Bandbegrenzung ist anwendungsabhängig

Beispielszenarien

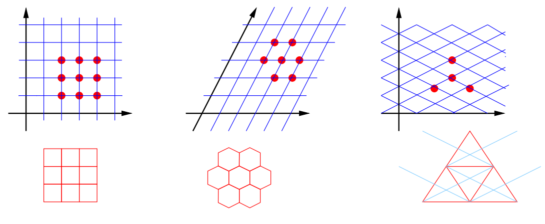
- Analogtelefon (300 Hz – 3.4 kHz) ATR = 8 kHz
- Sprache & HQ-Mikrofon ATR = 16 kHz
- Musik ATR = 44.1 kHz
- (analog vorgefiltert) ATR = ... kHz


Analogsignal


suffiziente Abtastung


Unterabtastung

Bildrasterung



Quadratisches Gitter ⇝ 4/8-Nachbarschaft.

Hexagonale und tridiagonale Gitter besitzen „schönere“ Nachbarschaftsstruktur, aber kompliziertere Rasterpunktformeln.

Eindimensionale Muster (äquidistante Stützstellen)

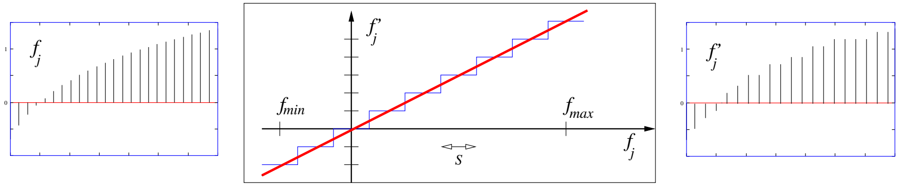
$$\text{Abtastung}_{\Delta_x} : \begin{cases} \mathbb{R}^{[x_0,x_1]} & \to \quad \mathbb{R}^J \\ \{f(x)\} & \mapsto \quad \{f_j = f(x_0 + j\Delta_x)\} \end{cases} , \quad J = \frac{x_1 - x_0}{\Delta_x}$$

Zweidimensionale Muster (quadratisches Gitter)

$$\text{Rasterung}_{\Delta_x,\Delta_y} : \begin{cases} \mathbb{R}^{[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]} & \to \quad \mathbb{R}^{J_x \cdot J_y} \\ \{f(x,y)\} & \mapsto \quad \{f_{j,k} = f(x_0 + j\Delta_x, y_0 + k\Delta_y)\} \end{cases}$$

Skalare Quantisierung

- Das Intervall $[f_{\min}, f_{\max}]$ wird mit 2^B Stufen quantisiert
- Reelle Werte werden mit ihrem Intervallindex kodiert (B bit/ATW)



lineare Quantisierung

Zerlegung in Teilintervalle gleicher Länge (s. Abb.)

nichtlineare Quantisierung

· Intervalle unterschiedlicher Länge
· Kompandierungsfunktion & lineare Quantisierung

Vektorquantisierung

Quantisierungsfehler

Definition

Sei $\{f_j\}$ eine Abtastfolge und $\{f'_j\}$ das Ergebnis ihrer Quantisierung. Die Differenzfolge

$$n_j \stackrel{\text{def}}{=} f_j - f'_j$$

heißt **Quantisierungsrauschen**, das Erwartungswertverhältnis

$$r' = \frac{\mathcal{E}[f_j^2]}{\mathcal{E}[n_j^2]} \quad \text{bzw.} \quad r = 10 \cdot \log_{10} r'$$

wird als (logarithmiertes, in dB) **Signal-Rausch-Verhältnis** oder **Störabstand** bezeichnet (SNR = *„signal-to-noise ratio“*).

Bemerkung

Die Schreibweise der Energie als zweites Moment setzt **Mittelwertfreiheit** der beteiligten Signale voraus.

0 dB: Rauschenergie = Nutzsignalenergie
6 dB: relative Steigerung/Senkung des Nutzpegels/Rauschpegels um den Faktor 2
20 dB: Nutzpegel zehnmal höher als Rauschpegel

Lineare Quantisierer

„Jedes Bit verbessert die SNR eines Quantisierers um etwa 6 dB“

Satz

Für einen linearen Quantisierer mit 2^B Quantisierungsstufen beträgt das Signal-Rausch-Verhältnis unter den im Beweis genannten Voraussetzungen

$$r = 6B - 7.2 \qquad [dB]$$

Idealisierte Voraussetzungen

1. kein Übersteuern: $f_j \in [f_{\min}, f_{\max}]$ für alle j
2. Amplitudenkonzentration wie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ oder besser: 4σ-Regel
3. näherungsweise uniformes Rauschen: Intervallzahl 2^B hinreichend groß

Folgerung

Mit $f_{\max} = -f_{\min} = C\sigma_f$ beträgt der SRA $r = 6B + 4.8 - 20\log_{10} C$.

Beweis.

Es bezeichne $\Delta := (f_{\max} - f_{\min}) / 2^B$ die Schrittweite des Quantisierers.

Ist die Zahl 2^B der Quantisierungsstufen hinreichend groß und wird der Quantisierer niemals *übersteuert*, so dürfen wir den Quantisierungsfehler (das Rauschen) als näherungsweise gleichverteilt annehmen:

$$\mathrm{P}(n_j) = \begin{cases} 1/\Delta & -\Delta/2 \le n_j \le \Delta/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen $\mathcal{E}[n_j] = 0$ (Mittelwertfreiheit) besitzt der Quantisierungsfehler die Varianz

$$\mathcal{E}[n_j^2] = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \frac{1}{\Delta} \cdot n_j^2 \, dn_j = \frac{\Delta^2}{12}$$

Sei nun o.B.d.A. unser Signal mittelwertfrei, d.h. $\mathcal{E}[f_j] = 0$. Die Intervallgrenzen

$$f_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} -4\sigma_f \;, \quad f_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} +4\sigma_f \;, \quad \sigma_f \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathcal{E}[f_j^2]}$$

vermeiden fast sicher eine Übersteuerung des Quantisierers und implizieren die konkrete Schrittweite

$$\Delta = \frac{(+4\sigma_f) - (-4\sigma_f)}{2^B} = \frac{8\sigma_f}{2^B}$$

und den Störabstand (s.u.); die Logarithmierung von r' ergibt dann das erwünschte Resultat.

$$r' = \frac{\mathcal{E}[f_j^2]}{\mathcal{E}[n_j^2]} = \frac{\sigma_f^2}{\Delta^2/12} = \frac{12\sigma_f^2}{64\sigma_f^2/(2^B)^2} = \frac{12}{64} \cdot 2^{2B} = 12 \cdot 2^{2B-6}$$

$\square$

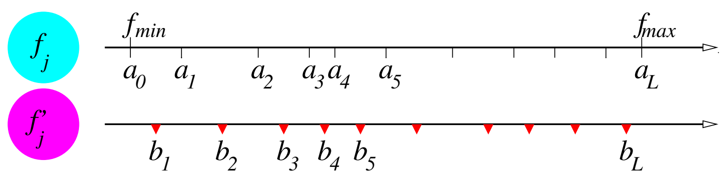
Beispielszenarien

Quantisierung audiovisueller Daten

- **Bilder** — 1 Byte = 8 bit (ggf. je Farbkanal)
- **Sprache** — 8 bit für Telefonqualität
- **Audio** (CD/DAT) — 2×16 bit (1.41 Mb/s)
- **DAB** (Digital Audio Broadcasting) — 256 kb/s

TYP	*SPEZIFIKATION*	*DATENRATE*
Audio verständlich	8 kHz 1×8 bit	64 kbit/s
Audio MPEG-Codierung	44.1 kHz 2×16 bit	384 kbit/s
Audio CD/DAT	44.1 kHz 2×16 bit	1.41 Mbit/s (635 MB/h)
Video MPEG–2	24 bit/pel 640×480	0.42 MB/s
Video NTSC	24 bit/pel 640×480	27 MB/s
Video HDTV	24 bit/pel 1280×720	81 MB/s

Nichtlineare Quantisierer



Satz

Die optimale Quantisierungskennlinie, die den Verzerrungfehler

$$\varepsilon_P = \sum_{\nu=1}^{L} \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} (f - b_\nu)^2 \cdot P(f) \, df$$

minimiert, ist durch die Gleichungen

$$a_\nu = \frac{b_\nu + b_{\nu+1}}{2} \quad \text{und} \quad b_\nu = \frac{\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f \cdot P(f) \, df}{\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} P(f) \, df}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, L-1$ bzw. $\nu = 1, 2, \ldots, L$ gegeben.

Beweis.

Wir bilden die partiellen Ableitungen von ε_P nach b_ν und setzen sie gleich Null:

$$\frac{\partial \varepsilon_P}{\partial b_\nu} = \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} -2 \cdot (f - b_\nu) \cdot P(f) \, df \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt auch schon die Bestimmungsgleichung für die b_ν.

Analog erhalten wir für die Intervallgrenzen a_ν:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_P}{\partial a_\nu} &= \frac{\partial}{\partial a_\nu} \left[\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} (f - b_\nu)^2 \cdot P(f) \, df + \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} (f - b_{\nu+1})^2 \cdot P(f) \, df \right] \\ &= (a_\nu - b_\nu)^2 P(a_\nu) - (a_\nu - b_{\nu+1})^2 P(a_\nu) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

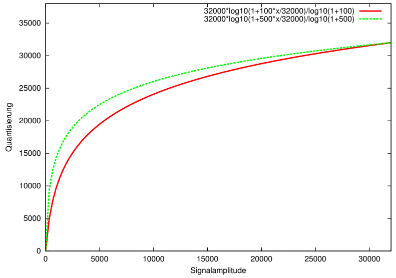
Auflösen nach a_ν ergibt das obere System von Bestimmungsgleichungen.

Im Beweis ist zu fordern, daß $P(a_\nu) \neq 0$ $(\forall \nu)$ gilt. $\square$

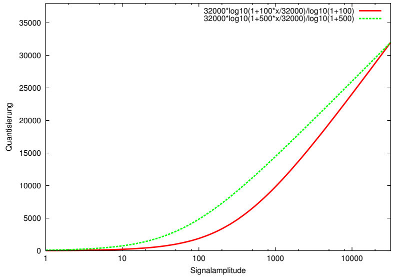
Die Bestimmungsgleichungen des Satzes sind gekoppelt und daher nur für eine *iterative* Berechnung der Kennlinie zu verwenden.

Nichtlineare Quantisierung

Näherungsweise gleichverteilende Transformation + lineare Quantisierung



Bereiche großer Amplituden komprimiert
Bereiche kleiner Amplituden expandiert



(einfach logarithmische Darstellung)

Das logarithmische Kompandierungsgesetz (μ-Law)

$$f_j' \stackrel{\text{def}}{=} f_{\max} \cdot \operatorname{sign}(f_j) \cdot \frac{\log(1 + \mu \frac{|f_j|}{f_{\max}})}{\log(1+\mu)} , \qquad \mu \in 100 \dots 500$$

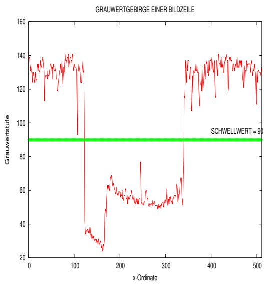
überführt betragsmäßig exponentiell verteilte Amplitudenwerte in eine Gleichverteilung.

Binarisierung von Grauwertbildern

Graustufen $\{0, 1, \dots, L-1\}$ ⟹ Schwarz-Weiß-Codes $\{0, 1\}$

Originalbild
(512×512, 8 bit)

Binärbild
Objekt$^{(S)}$ · Hintergrund$^{(W)}$



Horizontaler Grauverlauf
(Zeile 250)

Binarisierung

- dient der Objekt-Hintergrund-Segmentierung
- gelingt wenn alle O-Punkte dunkler als alle H-Punkte
- gelingt wenn alle O-Punkte heller als alle H-Punkte
- erfordert i.a. Korrektur durch $\left\{\begin{array}{c}\text{Nachbearbeitung}\\ \text{Vorverarbeitung}\end{array}\right\}$ des Binärbildes

Binarisierung von Grauwertbildern

Objekt-Hintergrund-Entscheidung durch Schwellwertvergleich

Originalbild
(512×512, 8 bit)

Binärbild
(Objekt: $f_{jk} \leq 130$)

Binärbild
(Objekt: $f_{jk} \leq 80$)

Definition

Sei $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \{0, \dots, L-1\}$ ein Grauwertbild und θ ein Grauwert. Das Binärbild $\boldsymbol{f}^\theta : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$ mit

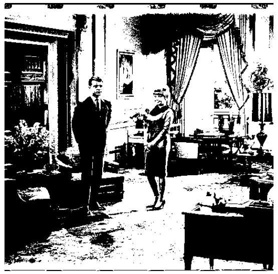
$$f_{jk}^\theta = \begin{cases} 1 & f_{jk} > \theta \\ 0 & f_{jk} \leq \theta \end{cases} , \qquad (j,k) \in \mathcal{D}$$

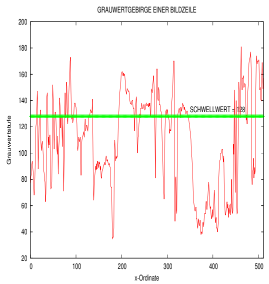
heißt **Binarisierung** von $\boldsymbol{f}$ zum **Schwellwert** θ.

Binarisierung von Grauwertbildern

Funktioniert nicht immer & ist manchmal richtig schwierig


Originalbild
(512 × 512, 8 bit)


Binärbild
(Objekt: $f_{jk} \leq 128$)



Horizontaler Grauverlauf
(Zeile 250)

Einfache Objektansichten

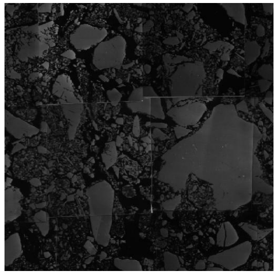
· Finden eines optimalen Schwellwertes
· Vermeidung u/o Korrektur von Fehlzuordnungen
· *Trick 17:* Einfärben des Hintergrundes o.ä.

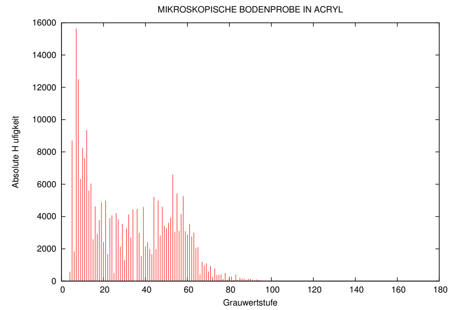
Komplexe Szenen

viele Objekte, Verdeckungen, problematische Beleuchtung, ...

Grauwerthistogramm

Häufigkeitsstatistik der im Bild auftretenden Grauwerte


Bodenprobe in Acryl



Definition

Sei $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \{0, \ldots, L-1\}$ ein Grauwertbild. Das Zahlenfeld $\{Q_\ell\}$ mit

$$Q_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \text{Anzahl der } (j,k) \in \mathcal{D} \text{ mit } f_{jk} = \ell \quad , \qquad (0 \leq \ell < L)$$

heißt **absolutes Grauwerthistogramm** von $\boldsymbol{f}$, das Zahlenfeld $\{q_\ell\}$ mit $q_\ell = Q_\ell / \sum_m Q_m$ heißt **normiertes Grauwerthistogramm** von $\boldsymbol{f}$.

Binarisierungsschwellwert

Kriterien zur Bestimmung aus dem Grauwerthistogramm

Mittiger Grauwert

$$\theta = L/2$$

Grauwertdurchschnitt

$$\theta = \mathcal{E}[\ell | \{q_\ell\}] = \sum_{\ell=0}^{L-1} q_\ell \cdot \ell$$

Grauwertmedian

Ein Wert θ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\ell=0}^{\theta-1} q_\ell \leq 1/2 \text{ und } \sum_{\ell=\theta+1}^{L-1} q_\ell \leq 1/2$$

Histogramm-Minimum

$$\theta = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\, q_\ell = \underset{\ell}{\operatorname{argmin}}\, Q_\ell$$

Histogramm-Hauptsenken

· das *zentralste* relative Minimum
· das absolute Minimum in $[\ell_1^{\max}, \ell_2^{\max}]$

Maximale Entropie

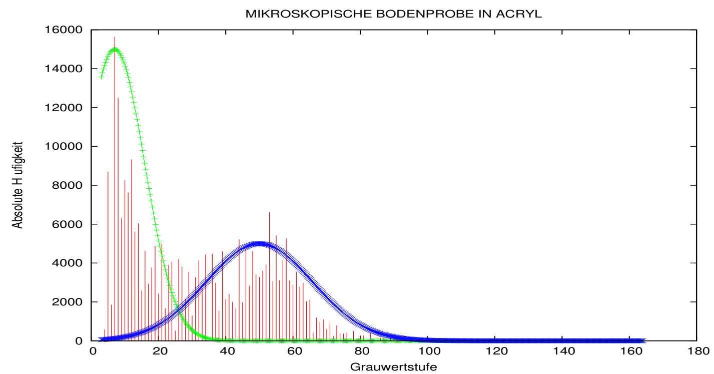
$\mathcal{H}_\theta(\{q_\ell\})$ ist definiert als

$$(1-\lambda_\theta) \cdot \mathcal{H}(\{q_\ell^{<\theta}\}) + \lambda_\theta \cdot \mathcal{H}(\{q_\ell^{>\theta}\})$$

mit den unteren/oberen Teilhistogrammen $\{q_\ell^{<\theta}\}$ und $\{q_\ell^{>\theta}\}$

Gaußsches Mischverteilungsmodell

Grauwerte von Objekt/Hintergrund folgen je einer Normalverteilung



$$\begin{aligned} q(\ell) &= \lambda_u \cdot q_u(\ell) + \lambda_o \cdot q_o(\ell) \\ &= \lambda_u \cdot \mathcal{N}(\ell \mid \mu_u, \sigma_u^2) + \lambda_o \cdot \mathcal{N}(\ell \mid \mu_o, \sigma_o^2) \\ &= \lambda_u \cdot \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell-\mu_u}{\sigma_u}\right)^2} + \lambda_o \cdot \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ell-\mu_o}{\sigma_o}\right)^2} \end{aligned}$$

Intermeans-Algorithmus

Iterative Berechnung des optimalen GMV-Schwellwertes für $\lambda_u = \lambda_o$, $\sigma_u^2 = \sigma_o^2$

⟨Algorithmus⟩

0. Wähle θ_0 beliebig (z.B. Mittelwert); setze $r = 0$
1. Berechne unteren und oberen Grauwertdurchschnitt:

$$\mu_r^< = \sum_{\ell=0}^{\theta_r-1} q_\ell \cdot \ell \Big/ \sum_{\ell=0}^{\theta_r-1} q_\ell \quad \text{und} \quad \mu_r^> = \sum_{\ell=\theta_r}^{L-1} q_\ell \cdot \ell \Big/ \sum_{\ell=\theta_r}^{L-1} q_\ell$$

2. Berechne neue Grauwertschwelle

$$\theta_{r+1} = \frac{\mu_r^<}{2} + \frac{\mu_r^>}{2}$$

3. Abbruch oder Schritt (1)

Bemerkung

Der Intermeans-Algorithmus ist ein sehr einfacher Spezialfall der Mischverteilungsidentifikation mittels EM-Prinzip (*'expectation-maximization'*).

Sonstige Mustercodierverfahren

Lauflängencodierung

Es werden Paare der Art $\langle \text{Grauwert}, \text{Dauer} \rangle$ angegeben. (Binärbilder!)

Differentielle Codierung

Statt der f_j werden die Differenzen $f_j^\Delta = f_j - f_{j-1}$ quantisiert.
(hohe Abtastfrequenz ⇨ kleine f_j^Δ)

Transformationscodierung

Die Abtastfolge $\boldsymbol{f}$ wird durch das Ergebnis einer Reihenentwicklung $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(M \times N)}$, repräsentiert.

Vektorquantisierung

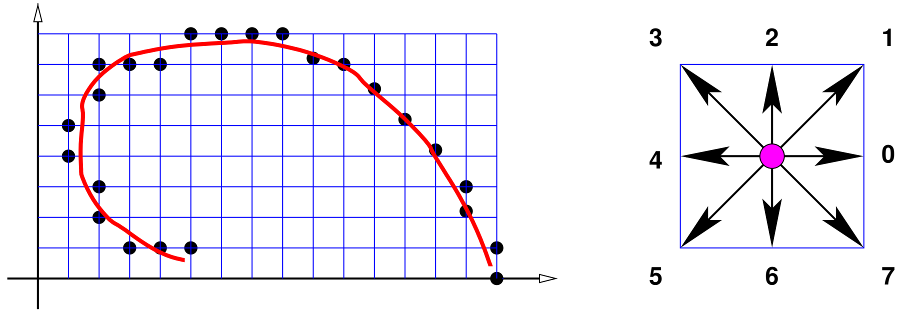
Statt skalarer Abtastwerte f_j werden komplette Vektoren $(f_j, \ldots, f_{j+s})$ auf Quantisierercodewörter abgebildet.

Fraktale Codierung

Eine (affine) Selbstähnlichkeit der Abtastfolgen wird ausgenutzt:
$\boldsymbol{f} \mapsto (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ mit $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{b}$ und dem *Fixpunktdecoder* $\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{n-1} + \boldsymbol{b}$

Kettencode (*'Freeman code'*)

Codierung von Linienmustern oder Konturen (Objektumrissen)



(Kontur-)Linienrasterpunkte

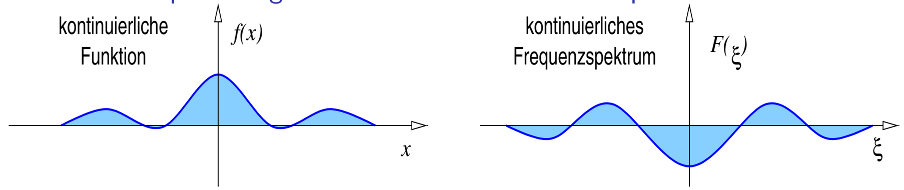
werden durch die Folge ihrer *Richtungselemente* codiert.

Beispiel

Obiges Linienmuster wird durch den Kettencode
4 4 3 2 3 2 1 2 0 0 1 0 0 0 7 0 7 7 7 7 6 7 6
verschlüsselt.

Kontinuierliche Fouriertransformation

Komplexwertige Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich[?]



Satz (Fourierintegrale)

Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Dirichletbedingungen erfüllt und das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ konvergiert, dann gilt für f die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot e^{i\xi x}\, d\xi \\ F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\xi x}\, dx \end{aligned}$$

Bemerkung

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **Fouriertransformierte** von f, die zweite Gleichung des Satzes ist die **Hintransformation**, die erste Gleichung die **Rücktransformation**.

Kontinuierliche Fouriertransformation

Spezialfall: reellwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Aussage $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt **ungerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Aussage $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Bemerkung

$\cos(x)$ ist gerade, $\sin(x)$ ist ungerade, die Gerade $f(x) = a \cdot x$ ist ungerade.

Lemma

Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ läßt sich eindeutig in eine Summe aus geradem und ungeradem Anteil zerlegen; wähle

$$f_g(x) \overset{def}{=} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \textit{und} \quad f_u(x) \overset{def}{=} \frac{f(x) - f(-x)}{2} .$$

Folgerung

Für reellwertige Funktionen lauten die speziellen Gleichungen der Fouriertransformation:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_\xi \cos(\xi x) + B_\xi \sin(\xi x)\right) d\xi \quad \textit{und} \quad \begin{cases} A_\xi = \int f(x) \cos(\xi x)\, dx \\ B_\xi = \int f(x) \sin(\xi x)\, dx \end{cases}$$

Rechenregeln für Fouriertransformierte

Zeitbereich — Frequenzbereich

	$f(x)$	$F(\xi)$
Skalierung	$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F(\xi/a)$
Verschiebung	$f(x - x_0)$	$e^{-i\xi x_0} F(\xi)$
Symmetrie	$-\frac{1}{2\pi} F(x)$	$f(-\xi)$
Ableitung	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(i\xi)^n F(\xi)$
Faltungssatz	$f \star g$	$F(\xi) \cdot G(\xi)$

Definition (kontinuierliche Faltung)

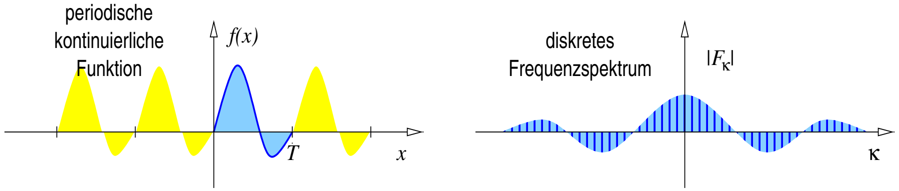
Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot g(x - \xi)\, d\xi$$

das **Faltungsintegral**; wir schreiben auch kürzer $h = f \star g$.

Fourierreihen periodischer Funktionen

Komplexwertige Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich



Definition (komplexe Fourierreihe)

Besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Periode T und ist $\omega = 2\pi/T$, so heißt

$$\tilde{f}(x) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \cdot e^{ik\omega x}$$

mit den **komplexen Fourierkoeffizienten**

$$F_k \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cdot e^{-ik\omega x}\,dx$$

die **komplexe Fourierreihe** von f.

Fourierreihen periodischer Funktionen

Reellwertige Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich

Definition (reelle Fourierreihe)

Besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Periode T, so heißt

$$\tilde{f}(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\}$$

mit den **Fourierkoeffizienten**

$$a_k \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \quad \text{und} \quad b_k \;=\; \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx$$

die **Fourierreihe** von f. Dabei bezeichnet $\omega = 2\pi/T$ die zu T gehörende **Kreisfrequenz**.

Umrechnen der Fourierkoeffizienten

Komplexe und reelle Koeffizienten

$$F_k \;=\; \begin{cases} a_0/2 & k = 0 \\ (a_k - ib_k)/2 & k > 0 \\ (a_{-k} + ib_{-k})/2 & k < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} a_k \;=\; F_k + F_{-k} \\ b_k \;=\; i\cdot(F_k - F_{-k}) \end{cases}$$

Polare und reelle Koeffizienten

Summe von cos- und sin-Anteilen ist auch durch **Phasenverschiebung** darstellbar:

$$a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x) \;=\; A_k\cdot\cos(k\omega x + \phi_k)$$

mit den Koeffizienten

$$A_k \;=\; \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \text{und} \qquad \tan\phi_k \;=\; -\frac{b_k}{a_k}$$

bzw. $a_k = A\cdot\cos\phi_k$ und $b_k = -A\cdot\sin\phi_k$.

Konvergenz & Parsevalsche Gleichung

Satz

Ist die periodische Funktion f beschränkt und erfüllt die Dirichlet-Bedingungen, so konvergiert ihre Fourierreihe im Mittel gegen f.

Satz

Für konvergierende reelle (komplexe) Fourierreihen periodischer Funktionen gelten die Gleichungen

$$\frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx \;=\; \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F_k|^2$$

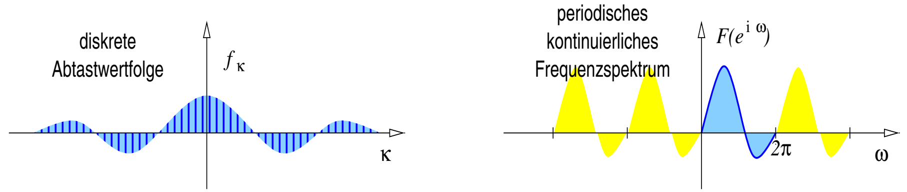
Bemerkung

Periodische Funktionen können also im Konvergenzfall durch ein **diskretes Spektrum** repräsentiert werden.

Die Signalenergie einer Periode kann im **Zeitbereich integriert** werden oder aber im **Spektralbereich summiert**.

Fouriertransformation diskreter Abtastfolgen

f ist diskret genau dann, wenn F periodisch ist



Definition

Ist $\boldsymbol{f} = [f_k]$ eine Abtastwertfolge, so heißt

$$F(e^{i\omega}) \;=\; F_\omega \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \cdot e^{-i\omega k}$$

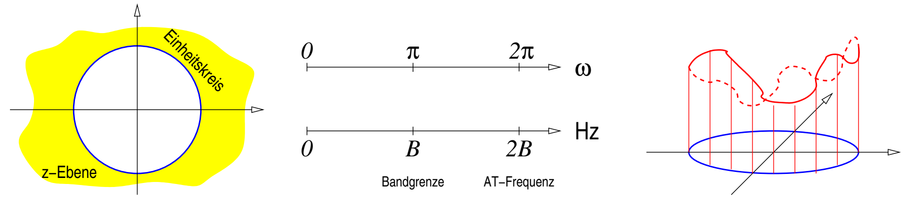
die **Fouriertransformierte** von $\boldsymbol{f}$ und

$$\tilde{f}_k \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(e^{i\omega}) \cdot e^{i\omega k}\, d\omega$$

die **Rücktransformierte**; die Summe heißt **Spektralzerlegung** der Folge.

Frequenzband & Einheitskreis

Was bedeuten die komplexen Spektralkoeffizienten F_ω?



1. Das Spektrum F_ω ist 2π-periodisch
2. Nach Abtastung mit $2B$ Hertz repräsentiert F_ω die Spektralinformation für $\omega \cdot B/\pi$ Hertz
3. Für reellwertige $[f_k]$ sind F_ω, $F_{-\omega}$ konjugiert komplex
4. Die Fourierkoeffizienten sind komplexe Zahlen

$$F_\omega \;=\; A_\omega \cdot e^{i\phi_\omega} \;=\; |F_\omega| \cdot e^{i\,\mathrm{arg}\,F_\omega}$$

5. Reelle Funktionen besitzen bei ω die Schwingungskomponente

$$F_\omega \cdot e^{2i\omega Bx} + F_{-\omega} \cdot e^{-2i\omega Bx} \;=\; 2A_\omega \cdot \cos(2B\omega x + \phi_\omega)$$

Zusammenfassung (2)

1. Die **Vorverarbeitung** eines Musters besteht aus **Diskretisierung** und **Transformation**.
2. **Schall** ist ein Gemisch aus reinen Sinustönen mit frequenzabhängigem Lautstärkeeindruck.
3. **Farbiges Licht** ist ein Gemisch aus monochromen Anteilen mit frequenzabhängigem Helligkeitseindruck.
4. Trotzdem läßt sich jede Farbe **wahrnehmungstreu** durch nur drei **Primärfarbkoordinaten** repräsentieren.
5. Die **Abtastung** eines Musters ist informationsverlustfrei, wenn mindestens mit der doppelten **Nyquistfrequenz** gearbeitet wird.
6. Beim **linearen Quantisierer** verbessert sich der **Signal-Rausch-Abstand** um 6 dB je aufgewendetem Darstellungsbit.
7. Die **Binarisierung** eines Grauwertbildes dient der Trennung von **Objekt** und **Hintergrund**.
8. Die optimale **Grauwertschwelle** wird automatisch auf Grundlage des **Grauwerthistogramms** bestimmt.
9. Der **Freeman-Code** wird zur Repräsentation von **Linienmustern** oder Objektkonturen genutzt.