

MUSTERERKENNUNG

Vorlesung im Sommersemester 2017

Prof. E.G. Schukat-Talamazzini

Stand: 6. März 2017

Teil III

Filterung

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

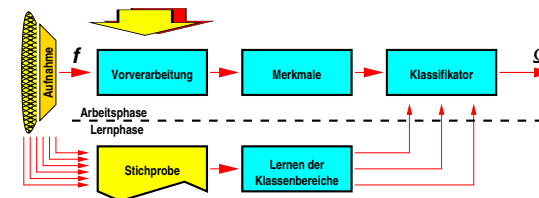
Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

Filterung des Musters

Muster \mapsto „schöneres“ Muster



Transformation

Lineare/nichtlineare Filter
Glättung/Kantenverstärkung
Schnelle Algorithmen

Ziele

- Reduktion störender Anteile
- Hervorhebung informativer & diskriminativer Anteile
- Restauration des idealen Musters

Reproduktion ?

Exakte Reproduktion
Perzeptuelle Äquivalenz
Semantische Äquivalenz

Typische Störquellen

Der gefährvolle Transport eines Musters in den Zielrechner

Produktion

Vokaltrakteigenschaften, Psychomotorik

Umgebung

Fremdstimmen, Fremdkörper, Beleuchtung

Aufnahme

Linsenfehler, Verstärkerrauschen, Aliasing

Übertragung

atmosphärische Störungen, Magnetfelder

Speicherung

Magnetband, Filmmaterial

Rauschunterdrückung & Kanten hervorhebung

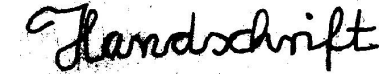
Beispiele zur Filterung zweidimensionaler Muster

Glättung

Störende Artefakte in Objekt und Hintergrund werden entfernt oder wenigstens abgeschwächt.



Druckschrift (Block)



Handschrift (kursiv)

Verstärkung

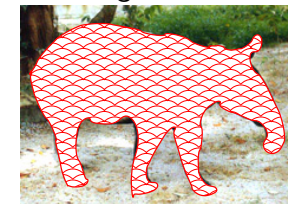
Struktur- und analyserelevante Musterdetails werden hervorgehoben.



Originalbild



Konturlinie



Objektmarkierung

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

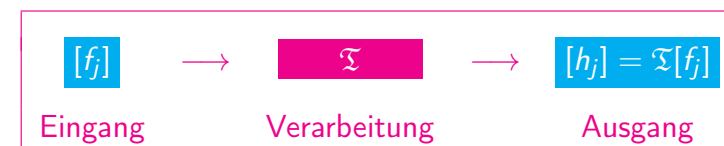
Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

Lineare Systeme

Mathematisch handhabbar · algorithmisch effizient · praktisch ausreichend



Definition

Eine Transformation $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ heißt **lineares System**, wenn für alle Folgen $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{T}\{a \cdot \mathbf{f} + b \cdot \mathbf{g}\} = a \cdot \mathcal{T}\{\mathbf{f}\} + b \cdot \mathcal{T}\{\mathbf{g}\}$$

Definition

Sei $\mu \in \mathbb{Z}$. Die Folge $\delta^{\mu} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\delta^{\mu}(j) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & j = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt (um μ verschobener) **Einheitsimpuls**.

Lineare Systeme

... sind vollständig durch die Familie ihrer Impulsantworten charakterisiert

Definition

Die Folgenfamilie $\{\mathbf{g}^\mu\}$ mit

$$\mathbf{g}^\mu = \mathfrak{T}\{\delta^\mu\} \quad (\forall \mu \in \mathbb{Z})$$

heißt **Impulsantwort** (genauer: Familie der Impulsantworten) des linearen Systems \mathfrak{T} .

Lemma

Ist \mathfrak{T} ein lineares System \mathfrak{T} mit Impulsantwort $\{\mathbf{g}^\mu\}$ und $\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$h_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathbf{g}^\nu(n)$$

Bemerkung

Lineare Systeme sind durch eine *unendliche* Menge *unendlicher* Zahlenfolgen charakterisiert.

Beweis.

Wir können den Filtereingang f als unendliche Linearkombination von Einheitsimpulsen darstellen:

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \delta^\nu$$

Zur Berechnung des Filterausgangs \mathbf{h} verwenden wir die Linearitätseigenschaften:

$$\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{f\} = \mathfrak{T}\left\{\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \delta^\nu\right\} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathfrak{T}\{\delta^\nu\} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathbf{g}^\nu$$

Diese Folge werten wir an der Stelle $n \in \mathbb{Z}$ aus:

$$h_n = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathbf{g}^\nu\right)_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathbf{g}^\nu(n)$$

□

Bemerkung

In verschiebungsinvarianten Systemen vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$h_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu \cdot \mathbf{g}_{n-\nu} = (f \star \mathbf{g})_n.$$

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

... sind vollständig durch die Antwort auf den Einheitsimpuls charakterisiert

Definition

Das lineare System \mathfrak{T} mit Impulsantwort $\{\mathbf{g}^\mu\}$ heißt **verschiebungsinvariant**, wenn für alle $n, \mu \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\mathbf{g}^\mu(n) = \mathbf{g}^0(n - \mu)$$

Die Funktion $\mathbf{g} = \mathbf{g}^0 = \mathfrak{T}\{\delta^0\}$ heißt dann **Impulsantwort** von \mathfrak{T} .

Lemma (Filtern ist Falten)

Für ein LSI-System \mathfrak{T} mit Impulsantwort \mathbf{g} gilt:

$$\mathfrak{T}\{f\} = f \star \mathbf{g} \quad \text{für alle } f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Bemerkung

- LSI-Systeme ('linear shift-invariant') arbeiten unabhängig vom **Absolutzeitpunkt**.
- LSI-Systeme sind durch eine *unendliche* Zahlenfolge charakterisiert.

Kausale LSI-Systeme

Der Filtervorgang kann nicht in die Zukunft schauen

Definition

Das LSI-System \mathfrak{T} heißt **kausal**, wenn für seine Impulsantwort \mathbf{g} gilt:

$$n < 0 \Rightarrow g(n) = 0$$

Bemerkung

Der Faltungsoperator ' \star ' ist kommutativ. Deshalb hängt der Ausgabewert h_n eines kausalen Systems nur noch von Eingabewerten f_ν mit $\nu \leq n$ ab:

$$h_n = (f \star \mathbf{g})_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_\nu g_{n-\nu} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} g_\nu f_{n-\nu} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} g_\nu f_{n-\nu}$$

Stabile LSI-Systeme

Der Filtervorgang mündet niemals in eine Resonanzkatastrophe

Definition

Das LSI-System \mathfrak{T} heißt **stabil**, wenn für beliebige Folgen $\mathbf{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{f} \text{ beschränkt} \Rightarrow \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\} \text{ beschränkt}$$

Lemma

Gilt für die Impulsantwort \mathbf{g} eines LSI-Systems \mathfrak{T} die absolute Summierbarkeitseigenschaft

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |g_\nu| < \infty,$$

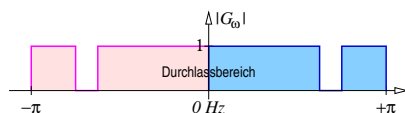
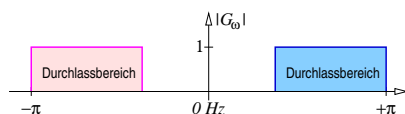
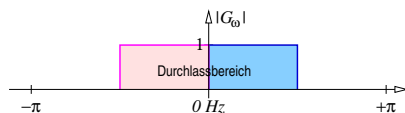
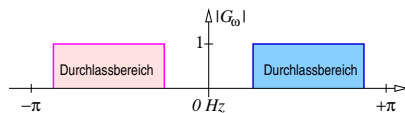
so ist \mathfrak{T} stabil.

Bemerkung

Die absolute Summierbarkeit ist notwendig und hinreichend für Stabilität.

LSI-Filter mit idealem Frequenzgang

Filter mit senkrechten Flanken lassen sich *praktisch* leider nicht realisieren



Bemerkung

Alle Frequenzgangangaben verstehen sich im Bereich $\omega \in [0, \pi]$.

Bandpassfilter

$$|G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tiefpassfilter

$$|G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Hochpassfilter

$$|G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_1 \\ 1 & \omega \geq \omega_1 \end{cases}$$

Kerbfilter

$$|G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = \begin{cases} 0 & \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Filterung im Frequenzbereich

Verstärkung oder Unterdrückung von Spektralkomponenten

Definition

Sei \mathfrak{T} ein LSI-System und $[g_j]$ seine Impulsantwort. Die z-Transformierte $G(z)$ von $[g_j]$ heißt **Frequenzantwort** oder **Übertragungsfunktion** von \mathfrak{T} .

Folgerung

Bezeichnen wir mit $F(z)$ und $H(z)$ die z-Transformierten der Systemeingabe bzw. -ausgabe, so folgt aus dem Faltungssatz:

$$\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\} \Rightarrow H(z) = F(z) \cdot G_{\mathfrak{T}}(z)$$

Bemerkung

- Spektralkoeffizienten aus dem Einheitskreis: $H(e^{i\omega}) = F(e^{i\omega}) \cdot G(e^{i\omega})$
- Betragsspektrum: $|H_{\omega}| = |F_{\omega}| \cdot |G_{\omega}|$

$$\text{Frequenzgang: } \begin{cases} |G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| > 1 & \text{Verstärkung} \\ |G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = 1 & \text{Durchlaß} \\ |G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| < 1 & \text{Abschwächung} \\ |G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})| = 0 & \text{Löschung} \end{cases}$$

Störung = Rauschen + Verzerrung

Klassisches Störungsmodell der DSV & lineare Restaurierung von Mustern

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} \star \mathbf{v} + \mathbf{n} \quad \begin{cases} \mathbf{s} & \text{Original („ideales“ Muster)} \\ \mathbf{v} & \text{Verzerrung (lineares System)} \\ \mathbf{n} & \text{additive Störung („Rauschen“)} \\ \mathbf{f} & \text{das aufgezeichnete Muster} \end{cases}$$

Restaurierung durch (lineare) Filterung

Konstruiere ein LSI-Filter $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\mathbf{g}}$ mit

$$\mathbf{f} \star \mathbf{g} =: \hat{\mathbf{s}} \approx \mathbf{s}$$

Problem

Trifft dieses simple Störungsmodell (s.o.) überhaupt zu?

Sind Verzerrung \mathbf{v} und Rauschen \mathbf{n} näherungsweise bekannt?

Läßt sich die Modellformel nach \mathbf{s} „auflösen“?

Stellt die (korrekte) Restaurierung ein LSI-System dar?

Wie konstruieren wir ein System \mathfrak{T} mit vorgegebenem Frequenzgang $G_{\mathfrak{T}}(e^{i\omega})$?

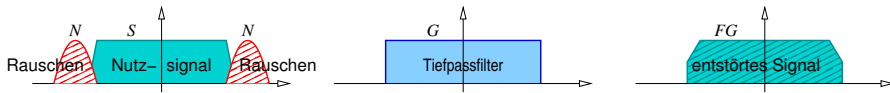
Rauschunterdrückung & Inverse Filtering

Reduktion additiver Störungen

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$



$$\hat{S}(z) = F(z) \cdot G(z) = S(z) \cdot G(z) + N(z) \cdot G(z)$$



Dekonvolution linearer Verzerrungen

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} \star \mathbf{v}$$



$$\hat{S}(z) = F(z) \cdot G(z) = (S(z) \cdot V(z)) \cdot \frac{1}{V(z)}$$

LSI-Systeme und Differenzengleichungen

Satz

Lässt sich die Operation $\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\}$ eines LSI-Systems durch eine Differenzengleichung

$$\sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot h_{j-\nu} = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot f_{j-\mu}$$

beschreiben, so besitzt die Frequenzantwort des Systems die folgende Darstellung ($a_{\nu}, b_{\mu} \in \mathbb{R}$):

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{\sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot z^{-\nu}}$$

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

Beweis.

Ist $\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\}$, so gilt für die Impulsantwort \mathbf{g} des Systems $\mathbf{h} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}$ und für die Frequenzantwort $G(z)$ folglich

$$H(z) = F(z) \cdot G(z) \quad \text{und} \quad G(z) = H(z)/F(z)$$

Aus der vorausgesetzten Differenzengleichung folgt wegen der Linearität der z-Transformation und dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot h_{j-\nu} &= \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot f_{j-\mu} \\ \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot \mathcal{Z}\{h_{j-\nu}\} &= \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot \mathcal{Z}\{f_{j-\mu}\} \\ \underbrace{\sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot z^{-\nu} \cdot H(z)}_{A(z^{-1})} &= \underbrace{\sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot z^{-\mu} \cdot F(z)}_{B(z^{-1})} \end{aligned}$$

Daraus folgt bereits das Resultat

$$G(z) = \frac{H(z)}{F(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

□

Bemerkung

Es folgen selbstverständlich in keiner Weise die Aussagen $H(z) = B(z^{-1})$ oder $F(z) = A(z^{-1})$.

LSI-Systeme und Differenzengleichungen

Endliche Repräsentation & endlicher Berechnungsaufwand

1. Besitzt umgekehrt die Frequenzantwort eines Systems eine Darstellung $B(\frac{1}{z})/A(\frac{1}{z})$ als Quotient zweier Polynome in z^{-1} (mit reellen Koeffizienten), so gilt für Eingangs- und Ausgangssignal auch die entsprechende Differenzengleichung.
2. Das angestrebte Übertragungsverhalten $G_{\mathfrak{T}}$ eines LSI-Systems läßt sich in guter Näherung durch ein gebrochenes Polynom approximieren, im Zeitbereich ist \mathfrak{T} dann durch eine Differenzengleichung repräsentiert.
3. Ist $a_0 \neq 0$, so ist o.B.d.A. $a_0 = 1$, und die DG ist nach h_n auflösbar:

$$h_n = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot f_{n-\mu} - \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} \cdot h_{n-\nu}$$

4. Differenzengleichungssysteme sind offenbar immer kausal.

Resonanzen und Antiresonanzen

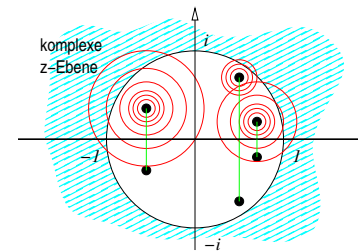
Eine spektrale Bergwanderung um den (halben) Einheitskreis

Definition

Sei \mathfrak{T} ein LSI-System mit gebrochen polynomialer Frequenzantwort

$$G_{\mathfrak{T}}(z) = \frac{B(\frac{1}{z})}{A(\frac{1}{z})}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms heißen **Resonanzen**, die des Zählerpolynoms **Antiresonanzen** von \mathfrak{T} .



Resonanzfrequenzen

$N/2$ Paare konjugiert komplexer Polstellen von $G(z)$

Stabilität

Ein kausales System \mathfrak{T}_G ist stabil genau dann, wenn alle Polstellen von $G(z)$ **innerhalb** des Einheitskreises liegen.

Systeme mit endlicher Impulsantwort

FIR-Systeme — 'finite impulse response'

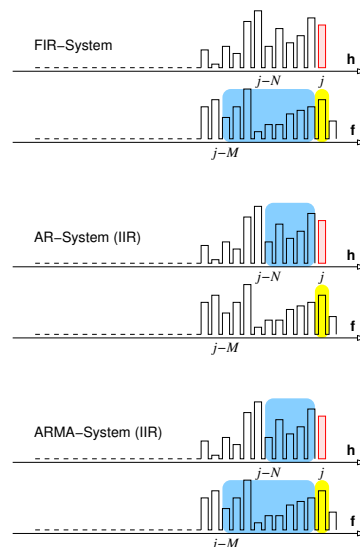
Definition

Das LSI-System \mathfrak{T} heißt **FIR-System**, wenn seine Impulsantwort g außerhalb eines kompakten Intervalls $[m_0, m_1]$ verschwindet; andernfalls heißt \mathfrak{T} **IIR-System**.

FIR-Filter

$$G(z) = B(z^{-1}) = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot z^{-\mu}$$

$$h_j = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot f_{j-\mu}$$



Systeme mit unendlicher Impulsantwort

IIR-Systeme — 'infinite impulse response'

AR-Filter ('autoregressive')

$$G(z) = \frac{\sigma}{A(z^{-1})} = \sigma / \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot z^{-\nu}$$

$$h_j = \sigma \cdot f_j - \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} \cdot h_{j-\nu}$$

ARMA-Filter ('autoregressive moving-average')

$$G(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot z^{-\mu} / \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} \cdot z^{-\nu}$$

$$h_j = \sum_{\mu=0}^M b_{\mu} \cdot f_{j-\mu} - \sum_{\nu=1}^N a_{\nu} \cdot h_{j-\nu}$$

FIR-Mittelwertfilter der Länge 3

Beispiel

Ein kausales FIR-System zur Glättung:

$$h_j = \frac{1}{3}f_j + \frac{1}{3}f_{j-1} + \frac{1}{3}f_{j-2} \quad G(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{3z^2}$$

Die Nullstellen (Antiresonanzen) liegen bei

$$\zeta = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{3}$$

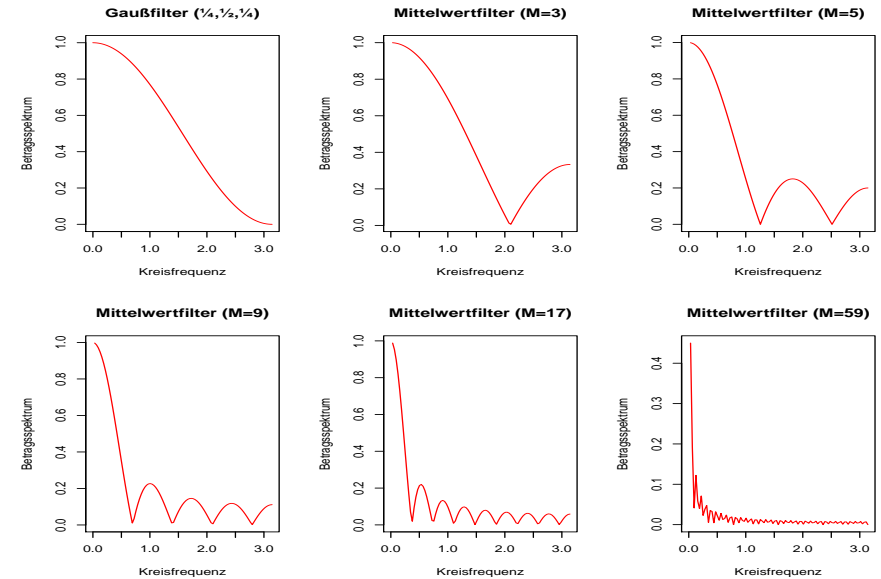
Insbesondere gilt $\|\zeta\| = 1$.

Folglich werden mittlere und hohe Frequenzen „verschluckt“.

Bemerkung

Die Gewichte $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ hingegen führen auf die zweifache reelle Nullstelle $\zeta = -1$.

FIR-Mittelwertfilter unterschiedlichen Grades



FIR-Mittelwertfilter der Länge M

Beispiel

Ein einfaches, aber u.U. langes Glättungsfilter ($M \in \mathbb{N}$) ist das Mittelwertfilter

$$h_j = \frac{1}{M} \sum_{\nu=0}^{M-1} f_{j-\nu} \quad G(z) = \frac{1}{M} \sum_{\nu=0}^{M-1} z^{-\nu}$$

Nach Anwendung der Formel für die geometrische Reihe

$$G(z) = \frac{1}{M} \sum_{\nu=0}^{M-1} z^{-\nu} = \frac{1}{M} \cdot \frac{z^{-M} - 1}{z^{-1} - 1} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$$

können wir das Mittelwertfilter in die effiziente autoregressive Form bringen:

$$h_j = \frac{f_j}{M} - \frac{f_{j-M}}{M} + h_{j-1}$$

IIR-Exponentialfilter (Länge ∞)

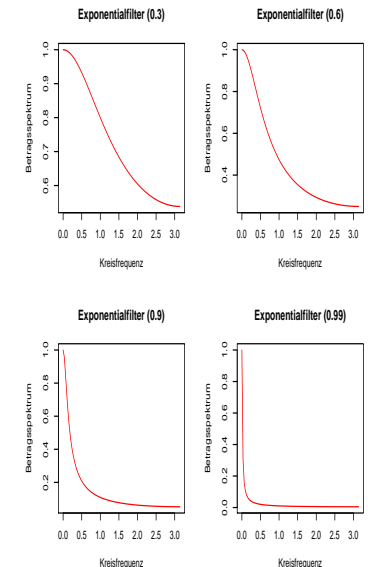
Beispiel

Eine Glättung mit sehr langen Gedächtnis, aber geringem Rechenaufwand bewirkt das Exponentialfilter

$$h_j = (1 - \lambda) \cdot f_j + \lambda \cdot h_{j-1} \quad G(z) = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda/z}$$

mit der Abklingkonstanten $0 < \lambda < 1$ und der reellen Polstelle $z = \lambda$.

Für $\lambda \approx 1$ verhält sich das Exponentialfilter fast wie ein sehr langes Mittelwertfilter. Die Polstelle nahe $z = 1$ bewirkt eine extreme Tiefpaßfilterung.



FIR-Kantenverstärker (1./2. Ableitung)

Beispiel

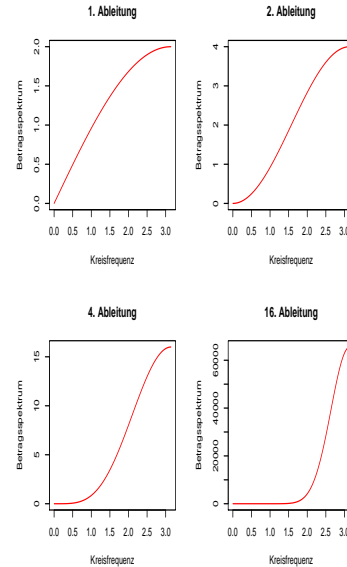
Filter für die erste Ableitung

$$\begin{aligned} h_j &= f_j - f_{j-1} \\ G(z) &= 1 - z^{-1} \\ &= z^{-1}(z - 1) \end{aligned}$$

Filter für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} h_j &= f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2} \\ G(z) &= 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \\ &= z^{-2}(z - 1)^2 \end{aligned}$$

Beide bewirken wegen der Antiresonanz bei $z = 1$ eine Hochpaßfilterung.



Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Endliche Spektraldarstellung für periodische bandbegrenzte Funktionen

Zeitbereich		Frequenzbereich	
allgem. Funktion	$\int_{-\infty}^{+\infty}$	allgem. Funktion	$\int_{-\infty}^{+\infty}$
T -periodisch	\int_0^T	diskretes Spektrum	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$
$2B$ Abtastfrequenz	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$	Auflösung $1/T$ Hz	$\int_{-\pi}^{+\pi}$
$2B$ Abtastfrequenz	$\sum_{n=0}^{N-1}$	Frequenzbereich $[0, 2B)$	
$\frac{N}{2B}$ -periodisch		diskretes Spektrum	$\sum_{\nu=0}^{N-1}$
		Frequenzbereich $[0, 2B)$	
		Auflösung $2B/N$ Hz	

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

Diskrete Fouriertransformation

Die bijektive Abbildung $DFT : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ und ihre Umkehrung

Definition (DFT)

Sei $[f_n]$ eine N -periodische Abtastfolge. Die Folge $[F_\nu]$ mit

$$F_\nu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-2\pi i \frac{\nu n}{N}}$$

heißt **diskrete Fouriertransformierte** von $[f_n]$ der Ordnung N (kurz: $[F_\nu] = DFT \{[f_n]\}$).

Satz (Inverse DFT)

Ist die Abtastfolge $[f_n]$ N -periodisch und ist $[F_\nu]$ ihre DFT der Ordnung N , so ist auch $[F_\nu]$ N -periodisch und es gelten die Rekonstruktionsgleichungen

$$f_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} F_\nu \cdot e^{2\pi i \frac{n\nu}{N}}$$

Beweis.

F_ν ist N -periodisch:

$$F_{\nu+N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-2\pi i(\nu+N)n/N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot e^{-2\pi i\nu n/N} \cdot \underbrace{e^{-2\pi i n}}_1$$

Zum Beweis der Umkehrtransformation verwenden wir die Abkürzung $W = W_N = e^{-2\pi i/N}$ für die sogenannte N -te Einheitswurzel. Diese verdankt ihre Bezeichnung offensichtlich der Eigenschaft $W_N^N = 1$. Alle ganzzahligen Potenzen von W_N liegen auf dem Einheitskreis. Anschaulicher: W_{12} markiert ein Ziffernblatt mit Stunden, W_{60} markiert ein Ziffernblatt mit Minuten.

Wir setzen die DFT-Koeffizienten in die DFT $^{-1}$ ein:

Für $n \neq j$ finden wir

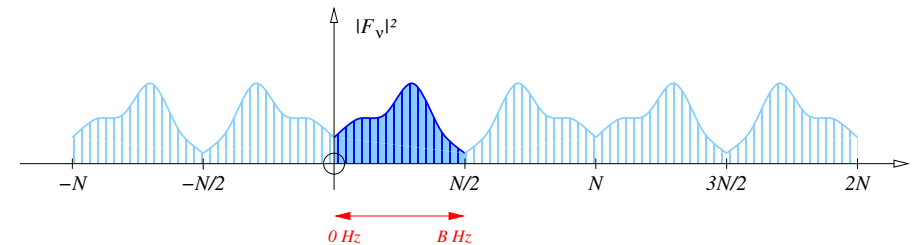
$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= \sum_{\nu=0}^{N-1} F_\nu \cdot W^{-j\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{\nu n} \right) \cdot W^{-j\nu} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} W^{\nu(n-j)}}_{S_n} \end{aligned} \quad \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} (W^{n-j})^\nu \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - W^{(n-j)N}}{1 - W^{n-j}} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - 1}{1 - W^{n-j}} = 0 \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $S_j = 1$ für $j = n$. Und sonst?

□

Eigenschaften der DFT

- Die F_ν sind N -periodisch.
- $[f_n]$ reell $\Rightarrow F_{-\nu} = F_\nu^*$
 $[f_n]$ reell \Rightarrow **Betragsspektrum** $|F_\nu|$ gerade
- Die $|F_0|^2, \dots, |F_{N/2}|^2$ beschreiben die Spektralenergien im Band $[0, B]$ mit einer **Frequenzauflösung** von $2B/N$ Hz.
- Aliasing** = Überlagerung von Spektralenergien $F(e^{i\omega})$
Kammereffekt = keine Periode, kein Linienspektrum



Problem

Welche Funktion ist schon gleichzeitig bandbegrenzt (**Aliasing!**) und periodisch (**Linienspektrum!**) ?!

Zyklische Faltung

Definition

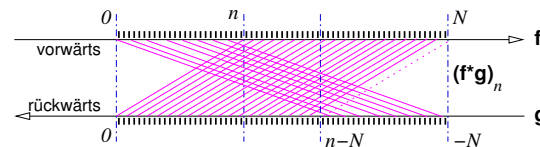
Es seien $[f_n]$ und $[g_n]$ zwei N -periodische Abtastwertfolgen. Die Folge

$$h_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} f_\nu \cdot g_{n-\nu}$$

heißt **zyklische Faltung** von $[f_n]$ und $[g_n]$ (kurz: $\mathbf{h} = \mathbf{f} \tilde{\star} \mathbf{g}$).

Bemerkung

Mit \mathbf{f} und \mathbf{g} ist auch die Folge $\mathbf{f} \tilde{\star} \mathbf{g}$ wieder N -periodisch.



Lemma (Faltungssatz)

Es seien \mathbf{f} und \mathbf{g} zwei N -periodische Abtastwertfolgen und $\mathbf{h} = \mathbf{f} \tilde{\star} \mathbf{g}$. Dann gilt für ihre diskreten Fouriertransformaten:

$$H_\nu = F_\nu \cdot G_\nu \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{Z}$$

FIR-Filterung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{h}} &= \tilde{\mathbf{f}} \tilde{\star} \tilde{\mathbf{g}} \\ \text{DFT} \{ \tilde{\mathbf{h}} \} &= \text{DFT} \{ \tilde{\mathbf{f}} \} \cdot \text{DFT} \{ \tilde{\mathbf{g}} \} \\ \tilde{\mathbf{h}} &= \text{DFT}^{-1} \{ \text{DFT} \{ \tilde{\mathbf{f}} \} \cdot \text{DFT} \{ \tilde{\mathbf{g}} \} \} \end{aligned}$$

(Algorithmus)

- 0 Setze das endliche Eingangssignal $[f_n]$ (in Gedanken) periodisch fort.
- 1 Berechne die Transformaten $[F_\nu] = \text{DFT} \{ [f_n] \}$.
- 2 Führe die Filterung im Frequenzbereich durch:

$$[H_\nu] = [F_\nu] \cdot [G_\nu]$$

Verwende dazu die vorgehaltene Frequenzantwort $[G_\nu]$.

- 3 Gewinne $[h_j]$ aus der Rücktransformation $\text{DFT}^{-1} \{ [H_\nu] \}$.

(zumF3h0glA)

FIR-Filterung im Frequenzbereich

Vorteil

Intuitiv befriedigender Filterentwurf direkt im Frequenzbereich
(z.B. ideales Bandpassfilter)

Nachteil

Jede (inverse) DFT verschlingt N^2 Multiplikationen!
Rechenaufwand: $O(N^2 + N + N^2) = O(N^2)$

Lösung

Die „schnelle DFT“ (FFT) benötigt nur $N \log_2 N$ Multiplikationen.
Einschränkung: $N = \text{Zweierpotenz}$

Beweis.

Für gerade Indizes gilt:

$$\begin{aligned} F_{2\nu} &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot W_N^{2\nu n} \\ &= \sum_{n=0}^{N'-1} (f_n + f_{n+N'}) \cdot W_N^{2\nu n} \\ &= \sum_{n=0}^{N'-1} g_n \cdot W_{N'}^{\nu n} \end{aligned}$$

Für ungerade Indizes gilt:

$$\begin{aligned} F_{2\nu+1} &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot W_N^{(2\nu+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N'-1} ((f_n - f_{n+N'}) \cdot W_N^n) \cdot W_N^{2\nu n} \\ &= \sum_{n=0}^{N'-1} g_{n+N'} \cdot W_{N'}^{\nu n} \end{aligned}$$

□

FFT — die schnelle Fouriertransformation

Divide-and-Conquer Algorithmus zur DFT-Berechnung

Satz (Cooley & Tukey 1965)

Eine DFT $[F_\nu] = \text{DFT} \{[f_n]\}$ von N -ter Ordnung lässt sich auf zwei DFTs der Ordnung $N' = N/2$ zurückführen:

$$\begin{aligned} F_{2\nu} &= \sum_{n=0}^{N'-1} g_n \cdot W_{N'}^{\nu n} \\ F_{2\nu+1} &= \sum_{n=0}^{N'-1} g_{n+N'} \cdot W_{N'}^{\nu n} \end{aligned}$$

Dabei entsteht $[g_n]$ durch die Umrechnung

$$\begin{cases} g_n & (f_n + f_{n+N'}) \\ g_{n+N'} & (f_n - f_{n+N'}) \cdot W_N^n \end{cases} \quad \text{für alle } \nu \text{ mit } 0 \leq \nu < N'.$$

Schnelle Fouriertransformation

Mit rekursiven Funktionsaufrufen nicht ganz so schnell wie ihr Name ...

(Algorithmus)

- 1 Erzeuge die erste Hälfte der Koeffizientenfolge $[g_n]$ mittels

$$g_n = (f_n + f_{n+N/2}) \quad (0 \leq n < N/2)$$

und berechne

$$\text{FFT}(\langle g_0, \dots, g_{N/2-1} \rangle, N/2, \langle G_0, \dots, G_{N/2-1} \rangle)$$

- 2 Erzeuge die zweite Hälfte der Koeffizientenfolge $[g_n]$ mittels

$$g_{n+N/2} = (f_n - f_{n+N/2}) \cdot W_N^n \quad (0 \leq n < N/2)$$

und berechne

$$\text{FFT}(\langle g_{N/2}, \dots, g_{N-1} \rangle, N/2, \langle G_{N/2}, \dots, G_{N-1} \rangle)$$

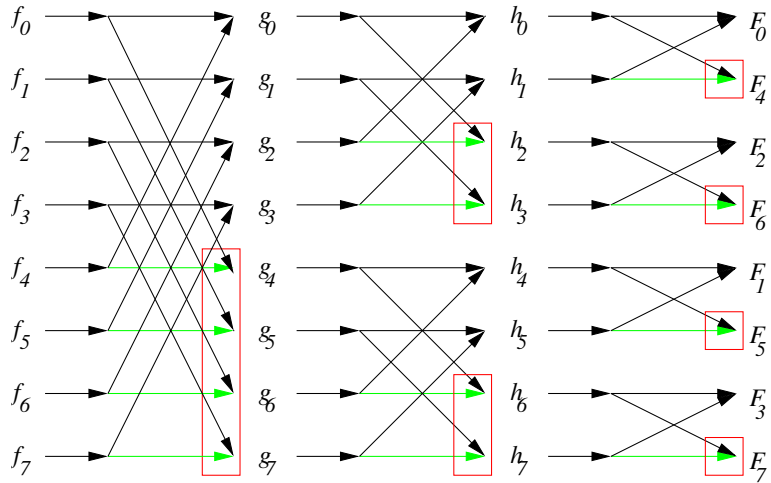
- 3 Für alle $0 \leq \nu < N/2$ setze

$$F_{2\nu} = G_\nu \quad \text{und} \quad F_{2\nu+1} = G_{\nu+N/2}$$

(zumf3hog1A)

Datenflußdiagramm

Warum die FFT auch Butterfly-Algorithmus heißt



Bemerkung

Umordnung der Zielkoeffizienten durch 'bit-reversal':

$(0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7)$ \Rightarrow $(000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111)$

Zweidimensionale (zyklische) Faltung

Grauwertbilder $\hat{=}$ elementare Mosaiksteine des $\mathbb{R}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

Definition

Es seien $[f_{nm}]$, $[g_{nm}]$ zweidimensionale Abtastwertfelder. Dann bezeichne $\mathbf{h} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}$ mit

$$h_{nm} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_{\nu\mu} \cdot g_{n-\nu, m-\mu}$$

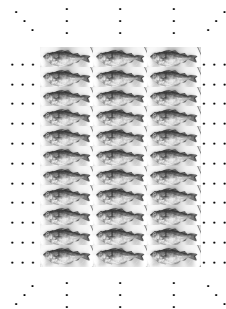
die **zweidimensionale Faltung**.

Definition

Sind \mathbf{f} , \mathbf{g} beide (N, M) -periodisch, so bezeichne $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{f} \tilde{\star} \mathbf{g}$ mit

$$\tilde{h}_{nm} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{M-1} f_{\nu\mu} \cdot g_{n-\nu, m-\mu}$$

die **zyklische 2D-Faltung**.



Definition

Ein zweidimensionales Abtastwertfeld $[f_{nm}]$ heißt (N, M) -**periodisch**, falls für alle Gitterpunkte $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_{i,j} = f_{i+N, j+M}$$

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

Separierbare Impulsantworten

Definition

Die Impulsantwort $[g_{nm}]$ eines zweidimensionalen LSI-Systems heißt **separierbar**, wenn für zwei geeignete Abtastfolgen $[g_n^X]$, $[g_n^Y]$ gilt:

$$g_{nm} = g_n^X \cdot g_m^Y$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist nicht separierbar, aber: } \begin{pmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Lemma

Ist die Impulsantwort $[g_{nm}]$ eines 2D LSI-Systems \mathfrak{T} separierbar, so gilt für die Systemausgabe $\mathbf{h} = \mathfrak{T}\{\mathbf{f}\}$ die Darstellung

$$h_{nm} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_{\nu\mu} \cdot g_{m-\mu}^Y \right\} \cdot g_{n-\nu}^X$$

\Rightarrow 2D-Filterung $\hat{=}$ zeilenweise 1D-Filterungen & spaltenweise 1D-Filterungen

Zweidimensionale DFT

Definition

Es sei $[f_{nm}]$ ein (N, M) -periodisches Abtastwertfeld. Die Transformation

$$F_{\nu\mu} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \cdot e^{-2\pi i \cdot (n\nu/N + m\mu/M)}$$

bzw.

$$f_{nm} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{M-1} F_{\nu\mu} \cdot e^{2\pi i \cdot (n\nu/N + m\mu/M)}$$

heißt **zweidimensionale (inverse) DFT**.

Lemma

Die zweidimensionale DFT ist mittels

$$F_{\nu\mu} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \cdot e^{-2\pi i \cdot (m\mu/M)} \right\} \cdot e^{-2\pi i \cdot (n\nu/N)}$$

auf die eindimensionale DFT rückführbar.

Rechenaufwand einer 2D-Filterung

$(N \times N)$ -Muster \cdot $(n \times n)$ -FIR-Impulsantwort \cdot # Multiplikationen (C)

Zweidimensionale Faltung

$$N^2 \cdot n^2$$

Filterung mit zweidimensionaler DFT

$$2N^3 + N^2 + 2N^3 = 4N^3 + N^2$$

Filterung mit zweidimensionaler FFT

$$\dots + N^2 + \dots = N^2 \cdot (6 \log N + 1)$$

Separierbare Faltung

$$2 \cdot N \cdot Nn = 2 \cdot N^2 n$$

Bei der Faltung mittels DFT und FFT führt die Separierbarkeit zu keiner Vereinfachung.

1D - DFT

$$N^2$$

1D - FFT

$$\frac{3}{2} \cdot N \log N$$

2D - DFT

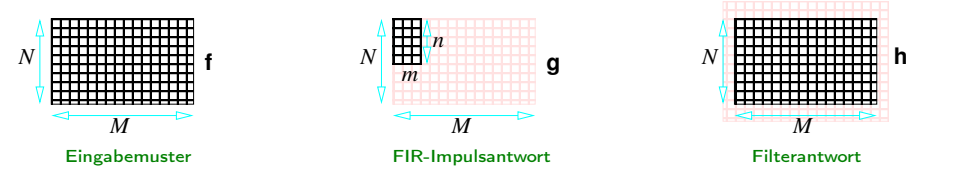
$$2 \cdot N \cdot N^2 = 2 \cdot N^3$$

2D - FFT

$$3 \cdot N^2 \log N$$

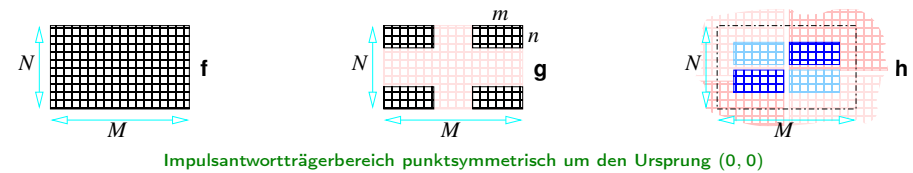
Endliche Impulsantwort und Filtermaske

FIR-Filterung $\hat{=}$ Gleitende Maskenoperation



$$h_{ij} = (f \star g)_{ij} = (g \star f)_{ij} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=0}^{M-1} f_{i-\nu, j-\mu} \cdot g_{\nu\mu}$$

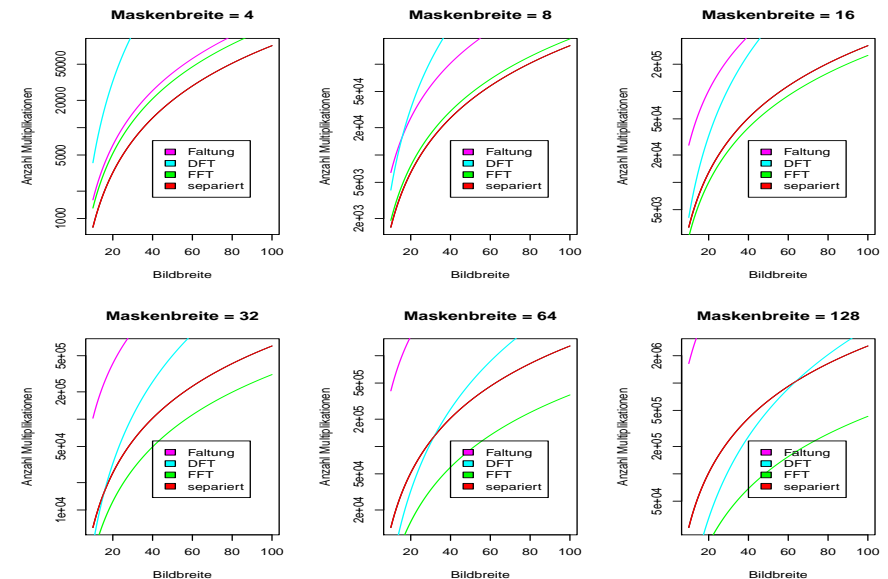
$$= \sum_{\nu=-n}^{+n} \sum_{\mu=-m}^{+m} f_{i-\nu, j-\mu} \cdot g_{\nu\mu} = \sum_{\nu=-n}^{+n} \sum_{\mu=-m}^{+m} f_{i+\nu, j+\mu} \cdot \tilde{g}_{\nu\mu}$$



Impulsantwortträgerbereich punktsymmetrisch um den Ursprung (0,0)

Rechenaufwand einer 2D-Filterung

Multiplikationen in Abhängigkeit von Muster- und Maskengröße



Lineare Glättungsfilter

Mittelwertfilter

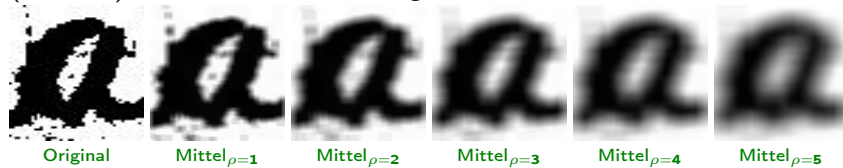
Rechteckige Filtermaske

$$\mu_{3 \times 3} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_{5 \times 5} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⊕ separierbar ⊕ ARMA-realisierbar ⊖ isotrop ⊖ abklingend

Beispiel

(48 × 65)-Grauwertbild mit handgeschriebenem 'a'.



Lineare Glättungsfilter

Gaußfilter $\hat{=}$ Kaskade von Mittelwertfiltern

Satz (Wells 1986)

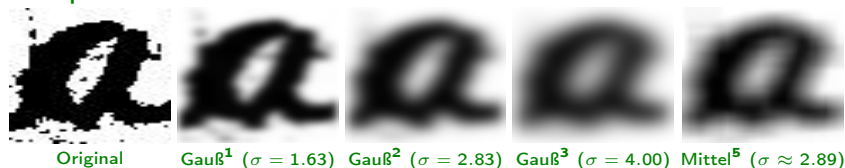
Die vierfache Wiederholung eines $(2r + 1) \times (2r + 1)$ -Mittelwertfilters approximiert ein 2D-Gaußfilter mit

$$\sigma^2 = \frac{4}{3} \cdot (r^2 + r)$$

Bemerkung

1. Die Hintereinanderausführung zweier FIR-Filter bleibt ein FIR-Filter.
2. Die Maskenbreiten addieren sich.
3. Die Separierbarkeit bleibt erhalten.
4. Das Mittelwertfilter besitzt die Standardabweichung $\sigma = r/\sqrt{3}$.

Beispiel



Lineare Glättungsfilter

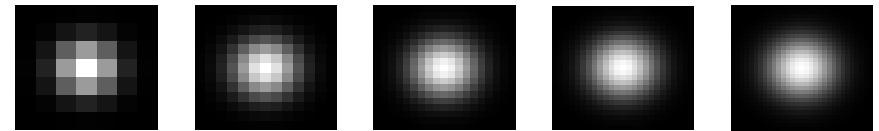
Gaußfilter

Quadratische Filtermaske

Für Gitterpunkte mit $n, m = -3\sigma, \dots, +3\sigma$:

$$g_{nm} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2+m^2}{\sigma^2}} \approx \frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 22 & 13 & 3 & 0 \\ 1 & 13 & 59 & 97 & 59 & 13 & 1 \\ 2 & 22 & 97 & 159 & 97 & 22 & 2 \\ 1 & 13 & 59 & 97 & 59 & 13 & 1 \\ 0 & 3 & 13 & 22 & 13 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hier: } \sigma^2 = 1$$

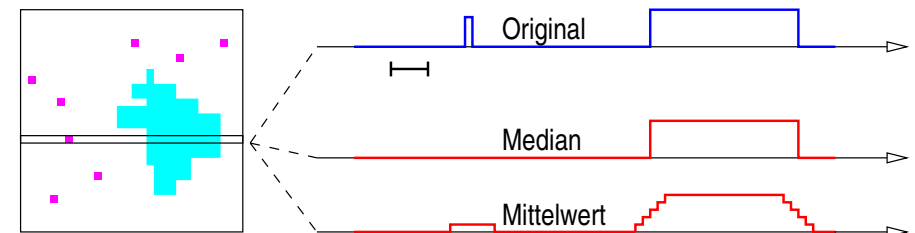
⊕ separierbar ⊕ isotrop ⊕ abklingend



Gaußsche Masken mit $\sigma = 1, \dots, 5$ (entsprechend $\varnothing = 7, 13, 19, 25$ und 31)

Das Bias-Variance-Problem linearer Filter

Lineare Glättung versus nichtlineare Glättung



kleiner Maskenradius

Störungen und Artefakte des Musters werden nicht vollständig eliminiert.

großer Maskenradius

Kanten und andere relevante Strukturen werden bis zur Unkenntlichkeit verschmiert.

Nichtlineare Glättungsfilter

Medianfilter

Definition

Der Maskenoperator mit der Berechnungsvorschrift

$$h_{nm} = \text{median} \{ f_{n+\nu, m+\mu} \mid \nu, \mu = -\rho, \dots, +\rho \}$$

heißt **Medianfilter** mit Radius $\rho \in \mathbb{N}$.

Beispiel

145	55	45
140	62	47
143	60	49

145 143 140 62 60 55 49 47 45

Inkrementelle Berechnung mit gleitendem Grauwert histogramm

➤ Aufwand $O(\rho^2)$ je Rasterpunkt (Median schneller als Sortieren!)



Original Median $_{\rho=1}$ Median $_{\rho=2}$ Median $_{\rho=3}$ Median $_{\rho=4}$ Median $_{\rho=5}$

Nichtlineare Glättungsfilter

Grauwertstatistiken zweiter Ordnung

Lee's Filter

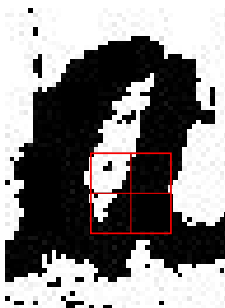
Bei bekannter Rauschenergie σ^2 , dem Grauwertmittel μ_{nm} und der Grauwertvarianz σ_{nm}^2 im f_{nm} -Fenster:

$$h_{nm} = \left(1 - \frac{\sigma_{nm}^2 - \sigma^2}{\sigma_{nm}^2} \right) \cdot \mu_{nm} + \left(\frac{\sigma_{nm}^2 - \sigma^2}{\sigma_{nm}^2} \right) \cdot f_{nm}$$

Minimum-Varianz-Filter

Berechne Grauwertmittel μ_i und Varianzen σ_i^2 einiger (4) Teilfenster und wähle

$$h_{nm} = \mu_j \quad \text{mit} \quad \sigma_j^2 = \min_i \sigma_i^2$$



Nichtlineare Glättungsfilter

Getrimmte Mittelwerte

k-zentriertes Mittel

Durchschnitt der k mittleren Grauwerte des Fensters

k-nächste-Nachbarn-Filter

Median der k f_{nm} -nächsten Grauwerte im Fenster

δ -Nachbarschafts-Filter

Mittelwert aller $f_{\nu\mu}$ mit $|f_{nm} - f_{\nu\mu}| \leq \delta$

Beispiel

145	55	45
140	62	47
143	60	49

145 143 140 62 60 55 49 47 45

$\left\{ \begin{array}{l} 83 \\ 60 \\ 55 \\ 73 \end{array} \right.$
 Durchschnitt
 Median
 5-NN-Mittel
 5-zentral

- Empfindlichkeit gegenüber Ausreißern liegt zwischen Durchschnitt und Median
- Rechenaufwand (bei geschickter Implementierung) deutlich unterhalb Median

Lineare Filter zur Kanten hervorhebung

Grauwertkanten $\hat{=}$ betragsmäßig große Ableitung

Prewitt-Filter (1. Ableitung)

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

- richtungsabhängige Kanten hervorhebung
- unerwünschte Rauschverstärkung

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

(1 × 3)- oder (3 × 1)-Filter nach Vorabglättung mit Gaußfilter



Original



vertikal $_{\delta=3}$



horizontal $_{\delta=3}$

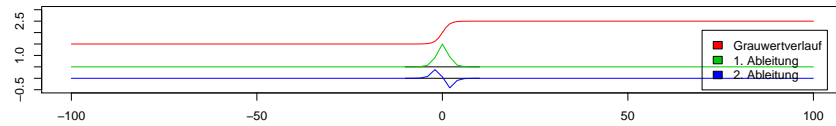


vertikal $_{\delta=1}$



horizontal $_{\delta=1}$

Lineare Filter zur Kanten hervorhebung

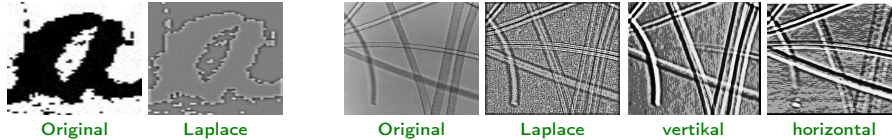
Grauwertkanten $\hat{=}$ Nullstellen bzw. Nulldurchgänge

Laplace-Filter (2. Ableitung)

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (\mu_{3 \times 3} - \text{id}_{3 \times 3}) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

☛ richtungsunabhängig

Beispiel

Schriftzeichen & Kaschmirziegelfeld (vorher $\mu_{7 \times 7}$; nachher Grauwert-Egalisierung)

Original

Laplace

Original

Laplace

vertikal

horizontal

Lineare Filter zur Kanten hervorhebung

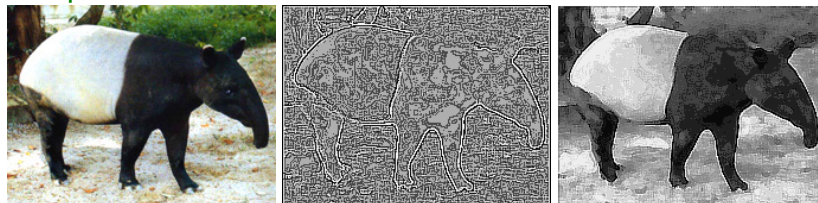
Überlagerte Glättung / Kantenverstärkung

Unschärfe Maskierung

$$\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 17 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{id}_{3 \times 3} - \frac{1}{3} \text{Laplace} = 2 \cdot \text{id}_{3 \times 3} - \mu_{3 \times 3}$$

Verstärkung der Bildkanten, sonst 'konservativ' („Filzstiftoperator“)

Beispiel



Der Schönling im Original

Laplace-Operator

Unschärfe Maskierung

Lineare Filter zur Kanten hervorhebung

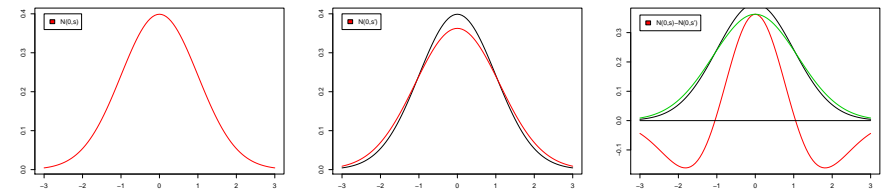
Kombinierte Glättung / Kantenverstärkung

Satz (Marr & Hildreth 1980)

Die Hintereinanderausführung eines σ^2 -Gaußfilters und des Laplacefilters entspricht der (ersten) Varianzableitung

$$2 \cdot \frac{\partial \mathcal{N}(0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2}$$

der zweidimensionalen Gaußdichte.

Diskrete Näherung: Differenz zweier Gaußfilter unterschiedlicher Varianzen σ^2, σ'^2

Nichtlineare Filter zur Kanten hervorhebung

Varianzfilter

$$h_{nm} = \sigma_{nm}^2 = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{\nu, \mu=-M}^{+M} (f_{n+\nu, m+\mu} - \overline{f_{nm}})^2$$

Gleitende Varianz mit dem gleitenden Grauwertmittel $\overline{f_{nm}}$.

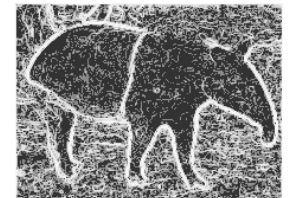
Extremalspannenfilter

$$h_{nm} = \max_{\nu, \mu} f_{n+\nu, m+\mu} - \min_{\nu, \mu} f_{n+\nu, m+\mu}$$

2D-Minimum und 2D-Maximum sind für Rechteckfenster separierbar.

Roberts-Kreuz

$$h_{nm} = |f_{n,m} - f_{n+1, m+1}| + |f_{n+1, m} - f_{n, m+1}|$$



Nichtlineare Filter zur Kantenhervorhebung

8 Kantenrichtungen — 8 angepasste Filtermasken

Kirsch-Filter

$$h_{nm} = \max_{z=1,\dots,8} \sum_{\nu=-1}^{+1} \sum_{\mu=-1}^{+1} g_{\nu\mu}^{(z)} \cdot f_{n+\nu, m+\mu}$$

mit Richtungsschablonen für alle 45°-Rotationen:

$$\begin{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} +5 & +5 & -3 \\ +5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{g^{(2)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} +5 & +5 & +5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{g^{(1)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & +5 & +5 \\ -3 & 0 & +5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{g^{(8)}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} +5 & -3 & -3 \\ +5 & 0 & -3 \\ +5 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{g^{(3)}} & & \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 & +5 \\ -3 & 0 & +5 \\ -3 & -3 & +5 \end{pmatrix}}_{g^{(7)}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ +5 & 0 & -3 \\ +5 & +5 & -3 \end{pmatrix}}_{g^{(4)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ +5 & +5 & +5 \end{pmatrix}}_{g^{(5)}} & \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & +5 \\ -3 & +5 & +5 \end{pmatrix}}_{g^{(6)}} \end{matrix}$$

Kantenrichtungsbilder

Nichtlineare Filter zur lokalen Kantenwinkelbestimmung

Winkel des steilsten Anstiegs

$$\phi_{nm} = \arctan \left(\frac{\partial f_{nm}}{\partial y} \middle/ \frac{\partial f_{nm}}{\partial x} \right)$$

Canny-Filter

$$\cos^2(\phi_{nm}) \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial x^2} + \sin^2(\phi_{nm}) \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial y^2} + 2 \sin(\phi_{nm}) \cos(\phi_{nm}) \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial x \partial y}$$

Zweite Ableitung in Richtung des steilsten Gradienten.

Canny-Operator

$$\mathbf{g} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi & -\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi \\ \cos^2 \phi & -2 & \cos^2 \phi \\ -\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi & +\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

Wegen der Kantenverschmierung verwendet man nur die Nulldurchgänge.

Gradientenfilter

Nichtlineare Filter zur Kantenhervorhebung

Gradientensteigung von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in (ξ, η)

$$|\nabla_f(\xi, \eta)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \right)^2}$$

Betrag von $\nabla_f(\xi, \eta)$ liefert die maximale Steigung im Bildpunkt (ξ, η)
Berechnung von h_{nm} durch Diskretisierung der partiellen Ableitungen

Prewitt-Filter

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f_{nm}}{\partial x}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f_{nm}}{\partial y}$$

Sobel-Filter

$$\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f_{nm}}{\partial x}$$

$$\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +2 & +1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{\partial f_{nm}}{\partial y}$$

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

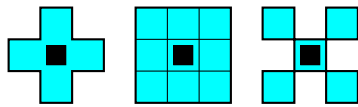
Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

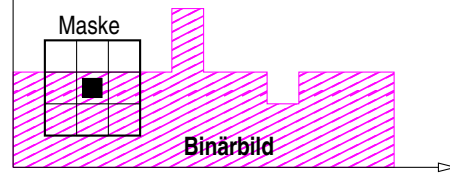
Mathematische Hilfsmittel

Was sind morphologische Operatoren?

Mengenalgebraische Maskenoperatoren auf Binärbildern



verschiedene Strukturelemente



Grundbegriffe

- **Binärbild f** (Rasterpunktmenge)

$$f \triangleq \{(n, m) \in \mathcal{D} \mid f_{nm} = 1\}$$

('0'=Hintergrund / '1'=Objekt oder umgekehrt)

- **Strukturelement s** (Rasterpunktmenge)

Wir setzen alle Strukturelemente s als punktsymmetrisch und zentrumstreu ($(0, 0) \in s$) voraus.

- **Mengenoperationen** zwischen f und s ($\mathbb{R}, +, \cdot$) vs. (\mathbb{B}, \cup, \cap)

Erosion und Dilatation

Schnittbildung und Vereinigungsbildung mit dem Strukturelement

Definition

Sei f ein Binärbild und s ein Strukturelement. Wir definieren die **Erosion** (Operator ' \ominus ') durch:

$$h = f \ominus s$$

$$h_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \forall (\nu, \mu) \in s : f_{n+\nu, m+\mu} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition

Sei f ein Binärbild und s ein Strukturelement. Wir definieren die **Dilatation** (Operator ' \oplus ') durch:

$$h = f \oplus s$$

$$h_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \exists (\nu, \mu) \in s : f_{n+\nu, m+\mu} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

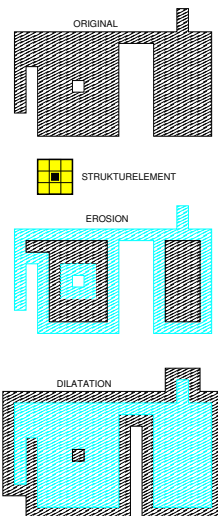
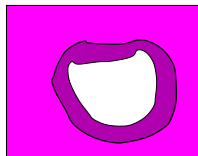
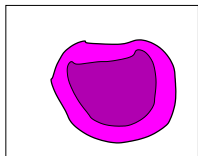
Erosion und Dilatation

Ihre Monotonieigenschaften und ihre Dualität

Lemma

Für die morphologischen Operatoren ' \ominus ' und ' \oplus ' gelten die folgenden Aussagen:

1. $f \ominus s \subseteq f$
2. $f \subseteq f \oplus s$
3. $f \ominus s = (f^c \oplus s)^c$
4. $f \oplus s = (f^c \ominus s)^c$



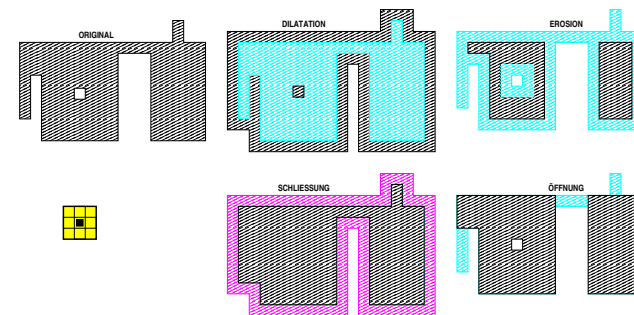
Öffnung und Schließung

Definition

Wir definieren die morphologischen Operatoren ' \oslash ' (**Öffnung**) und ' \otimes ' (**Schließung**) durch:

$$f \oslash s \stackrel{\text{def}}{=} (f \ominus s) \oplus s$$

$$f \otimes s \stackrel{\text{def}}{=} (f \oplus s) \ominus s$$



Öffnung und Schließung

Ihre Dualität und ihre Hülleneigenschaft

Lemma

Für die morphologischen Operatoren ' \ominus ' und ' \otimes ' gelten die folgenden Aussagen:

1. $f^c \ominus s = (f \otimes s)^c$ (de Morgan Dualität)
2. $f \ominus s \subseteq f$ (\ominus verkleinert)
3. $f \subseteq f \otimes s$ (\otimes vergrößert)
4. $(f \ominus s) \ominus s = f \ominus s$ (\ominus involutorisch)
5. $(f \otimes s) \otimes s = f \otimes s$ (\otimes involutorisch)

Morphologische Glättungsoperatoren

Das Baukastenprinzip der morphologischen Methode

- Schnelle Hardware für wenige elementare Operatoren
- Morphologische Verknüpfung erzeugt „arithmetische Hülle“

Lemma

Es bezeichne s_r^Q das quadratische Strukturelement mit Radius r . Dann gilt für jedes Binärbild f :

$$\begin{aligned} (f \ominus s_r^Q) \ominus s_p^Q &= f \ominus s_{r+p}^Q \\ (f \oplus s_r^Q) \oplus s_p^Q &= f \oplus s_{r+p}^Q \\ (f \ominus s_r^Q) \otimes s_p^Q &= f \otimes s_{\max(r,p)}^Q \\ (f \otimes s_r^Q) \ominus s_p^Q &= f \otimes s_{\max(r,p)}^Q \end{aligned}$$

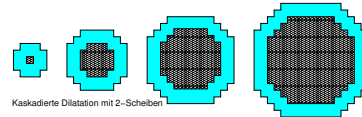
Für sphärische (scheibenförmige) Strukturelemente s_r^S gelten die Aussagen nur näherungsweise.

Morphologische Glättungsoperatoren

Schleifvorgang mit Sandpapier zunehmender Körnung

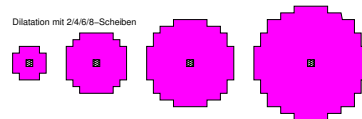
Kaskadierte Rechteckerosion

$$f \ominus s_r^Q = f \ominus \underbrace{s_1^Q \ominus s_1^Q \ominus \dots \ominus s_1^Q}_{r \text{ mal}}$$



Kaskadierte Scheibenerosion

$$f \ominus s_r^S \approx f \ominus \underbrace{s_2^S \ominus s_2^S \ominus \dots \ominus s_2^S}_{r/2 \text{ mal}}$$



Inkrementelle Glättung

$$\Gamma_k(f) = f \otimes s_1^X \otimes s_1^X \otimes s_2^X \otimes s_2^X \otimes \dots \otimes s_k^X \otimes s_k^X$$

von Objekt+Hintergrund; Strukturelemente mit wachsendem Radius

$$\Gamma_l(\Gamma_k(f)) = \Gamma_{\max(k,l)}(f)$$

Aufgabenstellung

Lineare verschiebungsinvariante Systeme

Filter mit (un)endlicher Impulsantwort

Diskrete und schnelle Fouriertransformation

Filter für Grauwertbilder

Morphologische Operatoren

Mathematische Hilfsmittel

z-Transformierte

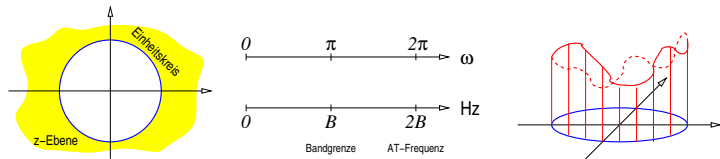
Verallgemeinerung der FT diskreter Funktionen auf \mathbb{C}

Definition

Ist $\mathbf{f} = [f_k]$ eine Abtastwertfolge, so heißt die Potenzreihe $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (in der Variablen z^{-1}) mit

$$F(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{\nu} \cdot z^{-\nu}$$

die **z-Transformierte** von \mathbf{f} .



Bemerkung

Auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ ergibt sich:

$$F(z)|_{z=e^{i\omega}} = F(e^{i\omega}) = \sum_{\nu} f_{\nu} \cdot e^{-i\omega\nu} = F_{\omega} \text{ (Fourierkoeffizient von } \mathbf{f} \text{ bei } \omega)$$

z-Transformierte

Wichtige Rechenregeln für Zeitbereich und z-Ebene

	f_n	$F(z)$
Einheitsimpuls	δ_n	1
Einheitsstufe	$\chi(n \geq 0)$	$\frac{1}{1-1/z}$
Linearität	$af_n + bg_n$	$aF(z) + bG(z)$
Faltungssatz	$[f_n] \star [g_n]$	$F(z) \cdot G(z)$
Verschiebung I	$f_{n-\nu}$	$z^{-\nu} \cdot F(z)$
Verschiebung II	$f_{n+\nu}$	$z^{\nu} \cdot \left\{ F(z) - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} f_{\mu} z^{-\mu} \right\}$
Differentiation	$f_n \cdot n$	$-z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$
Integration	f_n/n	$\int_z^{\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$
Partialsumme	$\sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu}$	$\frac{1}{z-1} \cdot F(z)$
Dämpfung	$\lambda^n f_n$	$F(z/\lambda)$

Diskrete Faltung

Faltung und Faltungssatz für unendliche Abtastfolgen

Definition

Sind $\mathbf{f} = [f_k]$ und $\mathbf{g} = [g_k]$ Abtastwertfolgen, so heißt $\mathbf{h} = [h_k]$ mit

$$h_k = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{\nu} \cdot g_{k-\nu}$$

die **diskrete Faltung** von \mathbf{f} und \mathbf{g} (kürzer: $\mathbf{h} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}$).

Bemerkung

Der **Einheitsimpuls** ist das *neutrale Element* der Faltungsoperation.

Die Faltung mit $[\dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots]$ berechnet gleitende Teilsummen des Verknüpfungspartners.

Satz (Faltungssatz)

Für die Faltung $\mathbf{h} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}$ zweier Abtastwertfolgen und ihre Fouriertransformierten gilt:

$$H(e^{i\omega}) = F(e^{i\omega}) \cdot G(e^{i\omega})$$

Rechenregeln für die z-Transformation

• Einheitsimpuls

$$F_{\text{unit}}(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_{\nu} \cdot z^{-\nu} = f_0 \cdot z^0 = 1$$

• Einheitsstufe

$$F_{\text{step}}(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} 1 \cdot z^{-\nu} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (1/z)^{\nu} = \frac{1}{1-1/z}$$

• Translation

Substitution $\tilde{\nu} = \nu - n$

$$F^{(n)}(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_{\nu-n} \cdot z^{-\nu} = \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} f_{\nu-n} \cdot z^{-(\nu-n)} \right) \cdot z^{-n} = F(z) \cdot z^{-n}$$

• Faltungssatz

Substitution $m = \nu - k$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} h_{\nu} \cdot z^{-\nu} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k g_{\nu-k} \right) \cdot z^{-\nu} = \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} f_k g_m \cdot z^{-k-m} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \cdot z^{-k} \right) \cdot \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \cdot z^{-m} \right) = F(z) \cdot G(z) \end{aligned}$$

Zusammenfassung (3)

1. Das **Filtern** eines Musters dient der Reduktion seiner störenden und der Hervorhebung seiner nützlichen Anteile.
2. Lineares Filtern geschieht durch **Falten** mit der **Impulsantwort** $[g_j]$ eines **LSI-Systems**.
3. Ein System mit geeignetem **Frequenzgang** $G(z)$ ist in der Lage, **Rauschanteile** und/oder **Verzerrungen** zu vermindern.
4. Tiefpassfilter dienen der **Glättung**, Hochpassfilter dienen der **Kanten hervorhebung**.
5. Durch **autoregressive** Filter (AR, ARMA) können auch Systeme mit sehr langer oder unendlicher Impulsantwort **effizient** realisiert werden.
6. Lineares **Filtern im Frequenzbereich** (Faltungssatz!) läßt sich durch die **FFT** (schnelle DFT) beschleunigen.
7. **2D-Filter** lassen sich als gleitende Maskenoperationen beschreiben.
8. Lineare zweidimensionale Filter sind dann effizient realisierbar, wenn die Impulsantwort $[g_{ij}]$ **separierbar** ist.
9. Mit **nichtlinearen Filtern** lassen sich bessere Resultate erzielen, allerdings bei teilweise drastisch (Medianfilter) erhöhtem Rechenaufwand.
10. Die Theorie **morphologischer Operatoren** beschreibt mengenalgebraische Filtervorgänge für Binärbilder.