

Числовые последовательности

Числовая Последовательность

Тип: последовательность / конечный Уровень: наивный

Мотивировка

1. Ряды
2. Сходимость числовых последовательностей
3. Предел

Конец мотивировки

Основная часть

Понятие: Числовая последовательность [уровень = наивный]

Пусть у нас имеется набор чисел $a_i \in \mathbb{R}$ и $i = 1, 2, \dots$ - не обязательно конечный: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$

Тогда говорят, что a_1 - первый член последовательности, a_2 - второй член последовательности, и в общем a_n - n -ый член последовательности.

Можно также обозначить последовательность $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ как $\{a_n\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример

Пусть последовательность задается формулой $a_n = \frac{n-1}{n}$. Тогда $a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$, $a_2 = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$ и так далее. В итоге имеем числовую последовательность:

$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Конец примера

Пример

Дана последовательность $\left\{ \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \right\}$. Найти её первые 4 члена.

Решение

Поскольку на n никаких ограничений нет, то мы считаем, что $n = 1, 2, \dots$. В таком случае просто подставим в формулу для $a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ значения $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(-1)^1(1+1)}{3^1} = -\frac{2}{3} \\ a_2 &= \frac{(-1)^2(2+1)}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ a_3 &= \frac{(-1)^3(3+1)}{3^3} = -\frac{4}{27} \\ a_4 &= \frac{(-1)^4(4+1)}{3^4} = \frac{5}{81} \end{aligned}$$

Конец примера

Пример

Даны первые 5 членов некоторой последовательности:

$$a_1 = \frac{3}{5} \quad a_2 = -\frac{4}{25} \quad a_3 = \frac{5}{125} \quad a_4 = -\frac{6}{625} \quad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Требуется найти формулу для a_n

Решение

Заметим, что числитель первой дроби равен 3 и каждый раз он увеличивается на 1. У второй дроби числитель 4, у третьей 5 и так далее. Таким образом n -ая дробь должна иметь числитель $n + 2$.

Знаменатель у каждой дроби - это степень 5-ки. То есть, знаменатель n -ой дроби равен 5^n .

Знак каждой дроби чередуется, причем первая дробь положительна. Значит каждую дробь надо домножить на $(-1)^{n+1}$.

В итоге получим, что искомая формула:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+2}{5^n}$$

Конец примера

ToDo

1. Добавить рекуррентное задание последовательности. Последовательность Фибоначчи
2. Добавить последовательность, которая сходится к числу периодически (например, $a_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$).
3. Добавить предел последовательности (если, это конечно надо и если это не отдельная тема).
4. Картинки для сделанных примеров.