Demonstrations

June 2021

1 Montrez que les probabilités d'inclusion du premier et du second ordre peuvent s'écrire : $\pi_k = 1 - (1 - p_k)^m$ et $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m$

Solution: Montrons que $\pi_k = 1 - (1 - p_k)^m \;\; k \in U$

Par definition, $\pi_k = \mathbb{P}(k \in s)$
Et P(k $\notin s$) = Proba que k ne soit tiré à aucun des tirages
P(k $\notin s) = (1 - p_k) \ldots (1 - p_k)$
P(k $\notin s) = (1 - p_k)^m$
Ainsi $\pi_k = \mathbb{P}(k \in s) = (1 - 1 - p_k)^m$

Montrons que $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m \,, \; k, l \in U, k \neq l$

Par definition, $\pi_{kl} = \mathbb{P}(k \in \text{s et l} \in s)$
$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \bigcup B)$
$\pi_{kl} = (1 - (1 - p_k)^m) + (1 - (1 - pl)^m) - \mathbb{P}(A \bigcup B)$
$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - (1 - \mathbb{P}(\bar{A} \bigcap \bar{B}))$
$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - (1 - (1 - p_k - p_l)^m)$
$\pi_{kl} = (1 - (1 - p_k)^m) + (1 - (1 - pl)^m) - (1 - (1 - p_k - p_l)^m)$
Ainsi, $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m)$

2 Montrez que l'estimateur $\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})$ defini ci-dessous est un estimateur sans biais de la variance de l'estimateur HT d'un total

$$\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}}) = \sum_{k \in s} \sum_{l \in s} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l}.$$

Rappellons que :

$$V(\hat{t}_{y\mathrm{HT}}) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \Delta_{kl} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l}.$$

Solution: Montrons que $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})) = \mathbb{V}(t_{y\mathrm{HT}})$

Reécrivons $\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})$=$\sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} I_k I_l$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \mathbb{E}(I_k I_l)$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \mathbb{E}(\not\Vdash k, ls)$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \pi_k l$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \Delta_{kl} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} = \hat{V}$

3 Montrez que l'estimateur $\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})$ defini ci-dessous est un estimateur sans biais de la variance de l'estimateur HH d'un total

$\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}}) = \frac{1}{m(m-1)}\left(\sum_{k\in U}\left(\frac{y_k}{p_k}\right)^2 R_k - m\hat{t}^2_{y\mathrm{HH}}\right)$

Solution: Montrons que $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}})$

$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \mathbb{E}[\frac{1}{m(m-1)}\left(\sum_{k\in U}\left(\frac{y_k}{p_k}\right)^2 R_k - m\hat{t}^2_{y\mathrm{HH}}\right)]$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)}\left(\sum_{k\in U}\left(\frac{y_k}{p_k}\right)^2 \mathbb{E}(R_k) - m(\mathbb{E}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})^2 + \mathbb{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})\right)$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)}\left(\sum_{k\in U}\left(\frac{y_k}{p_k}\right)^2 mp_k - mt_y^2 - \mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}})\right)$
$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)}\left(m\mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}}) - \mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}})\right)$

Ainsi nous avons $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\mathrm{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)}\left(m-1\right)\mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}}) = \mathbb{V}(t_{y\mathrm{HH}})$