

# Demonstrations

June 2021

## 1 Monterzr les probabilités d'inclusion du premier et du second ordre peuvent s'écrivent : $\pi_k = 1 - (1 - p_k)^m$ et $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m$

**Solution: Montrons que**  $\pi_k = 1 - (1 - p_k)^m$   $k \in U$

Par definition,  $\pi_k = \mathbb{P}(k \in s)$

Et  $\mathbb{P}(k \notin s) = \text{Proba que } k \text{ ne soit tiré à aucun des tirages}$

$\mathbb{P}(k \notin s) = (1 - p_k) \dots (1 - p_k)$

$\mathbb{P}(k \notin s) = (1 - p_k)^m$

Ainsi  $\pi_k = \mathbb{P}(k \in s) = (1 - (1 - p_k)^m)$

**Montrons que**  $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m$ ,  $k, l \in U, k \neq l$

Par definition,  $\pi_{kl} = \mathbb{P}(k \in s \text{ et } l \in s)$

$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cup B)$

$\pi_{kl} = (1 - (1 - p_k)^m) + (1 - (1 - p_l)^m) - \mathbb{P}(A \cup B)$

$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - (1 - \mathbb{P}(A \cap B))$

$\pi_{kl} = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - (1 - (1 - p_k - p_l)^m)$

$\pi_{kl} = (1 - (1 - p_k)^m) + (1 - (1 - p_l)^m) - (1 - (1 - p_k - p_l)^m)$

Ainsi,  $\pi_{kl} = 1 - (1 - p_k)^m - (1 - p_l)^m + (1 - p_k - p_l)^m$

## 2 Montrez que l'estimateur $\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})$ defini ci-dessous est un estimateur sans biais de la variance de l'estimateur HT d'un total

$$\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}}) = \sum_{k \in s} \sum_{l \in s} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l}.$$

Rappelons que :

$$V(\hat{t}_{y\text{HT}}) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \Delta_{kl} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l}.$$

**Solution: Montrons que**  $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})) = V(\hat{t}_{y\text{HT}})$

Reécrivons  $\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}}) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} I_k I_l$

$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \mathbb{E}(I_k I_l)$

$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \mathbb{E}(I_k I_l)$

$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \frac{\Delta_{kl}}{\pi_{kl}} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} \pi_k \pi_l$

$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HT}})) = \sum_{k \in U} \sum_{l \in U} \Delta_{kl} \frac{y_k}{\pi_k} \frac{y_l}{\pi_l} = V$

**3 Montrez que l'estimateur  $\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})$  defini ci-dessous est un estimateur sans biais de la variance de l'estimateur HH d'un total**

$$\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}}) = \frac{1}{m(m-1)} \left( \sum_{k \in U} \left( \frac{y_k}{p_k} \right)^2 R_k - m \hat{t}_{y\text{HH}}^2 \right)$$

**Solution:** Montrons que  $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \mathbb{V}(t_{y\text{HH}})$

$$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m(m-1)} \left( \sum_{k \in U} \left( \frac{y_k}{p_k} \right)^2 R_k - m \hat{t}_{y\text{HH}}^2 \right) \right]$$

$$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)} \left( \sum_{k \in U} \left( \frac{y_k}{p_k} \right)^2 \mathbb{E}(R_k) - m(\mathbb{E}(\hat{t}_{y\text{HH}})^2 + \mathbb{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) \right)$$

$$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)} \left( \sum_{k \in U} \left( \frac{y_k}{p_k} \right)^2 m p_k - m t_y^2 - \mathbb{V}(t_{y\text{HH}}) \right)$$

$$\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)} (m \mathbb{V}(t_{y\text{HH}}) - \mathbb{V}(t_{y\text{HH}}))$$

Ainsi nous avons  $\mathbb{E}(\hat{V}(\hat{t}_{y\text{HH}})) = \frac{1}{m(m-1)} (m-1) \mathbb{V}(t_{y\text{HH}}) = \mathbb{V}(t_{y\text{HH}})$