Производящие функции

Кирилл Тамогашев, Иван Щекотови и Дмитрий Мячков
для курса по Теории вероятности и статистике
Высшая Школа Экономики, Москва

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

Введение

Приветствуем вас, дорогие любители математики! На этом плакате вы встретите определение производящей функции и узнаете о том, как производящие функции применяются в решении некоторых комбинаторных задач. В конце вас ждёт рекомендация отличного учебника по комбинаторике. Начнём же!

Определение

Представим бесконечную последовательность чисел $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Можно записать ее в качестве коэффициентов бесконечного полинома $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$f(t)$ является производящей функцией.
NB: $f(t)$ является формальным степенным рядом, поэтому не обязательно, что представленный ряд будет сходящимся. Нас интересуют коэффициенты, нежели чем переменные.
Самый простой пример производящей функции это геометрическая прогрессия:

$$a_0 = 1, a_n = q a_{n-1}$$
$$1 + qt + q^2 t^2 + q^3 t^3 + \dots = \frac{1}{1 - qt}.$$

Числа Фибоначчи

Задача: Сколькими различными способами можно разделить полоску, состящую из n ячеек, на полоски, состящие из одной или двух ячеек? Давайте разберёмся. Обозначим количество способов f_n и докажем комбинаторно, что оно будет удовлетворять следующей реккуренте:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Отрежем от нашей полоски полоску из двух ячеек. Длина нашей новой полоски $n-2$ ячейки. Тогда число способов разделить оставшуюся часть полоски будет равно f_{n-2}. Теперь отрежем от исходной полоски полоску из одной ячейки. По тем же соображение, количество способов поделить оставшуюся полоску будет равно f_{n-1}. И так далее, мы исчерпаем всевозможные способы разделить полоску на ячейки единичной длины и полоски из двух ячеек.

Заметим, что при $n = 1$: $f_1 = 1$, $n = 2$: $f_2 = 2$ и условимся, что для $n = 0$: $f_0 = 1$, так как полоску нулевой длины можно разделить лишь одним способом – "никак".
Таким образом, мы доказали представленное выше реккурентное соотношение для известных чисел Фибоначчи.

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots$$

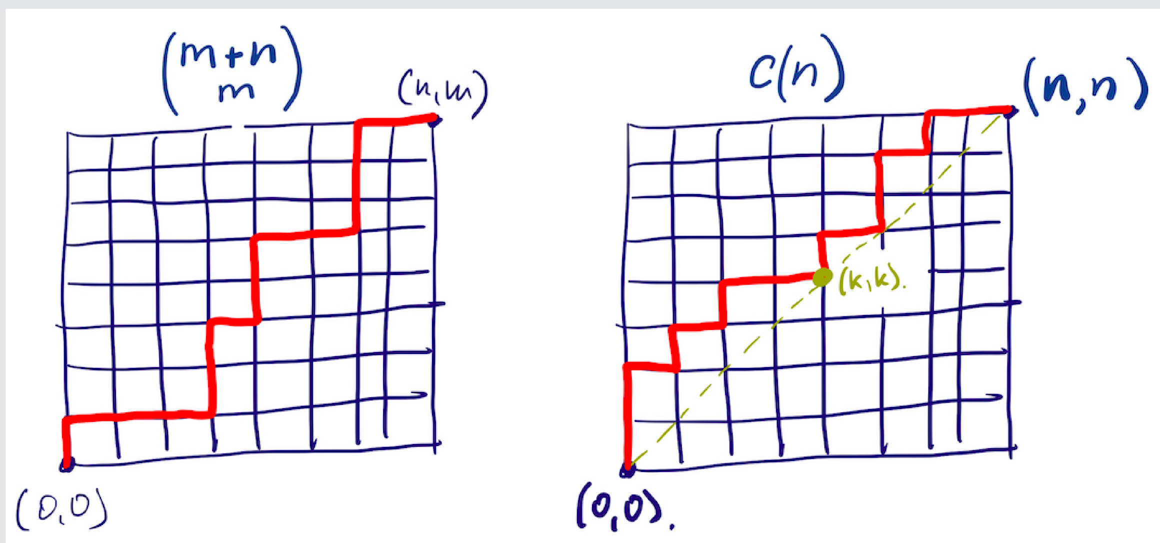
Выведем замкнутую форму производящей функции:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} f_n s^n = \\
&= 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) s^n = \\
&= 1 + s + s\left(-1 + F(s)\right) + s^2 F(s) = \\
&= 1 + sF(s) + s^2 F(s) \\
F(s) &= 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots = \\
&= \frac{1}{1 - s - s^2}. \text{ - производящая функция}
\end{aligned}$$

Пути

Задача: Двигаясь только вправо или только вверх, найти количество путей из $(0,0)$ в (n,m). Нетрудно убедиться, что таких путей $\binom{n+m}{m}$. Найдем для них производящую функцию:

$$A(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m+n=k}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$



Числа Каталана

Рассмотрим количество путей из $(0,0)$ в (n,n), пролегающих выше прямой $y = x$.
Пусть $C(n)$ – искомое число путей. Тогда один из возможных способов дойти до (n,n) через точку (k,k), где $k \in [0,n)$ – это все пути (их $C(k)$ штук) из $(0,0)$ в (k,k) умножить на все пути из (k,k) в (n,n), где их $C(n-k-1)$ штук. Тогда по всем имеющимся k получаем реккурентное выражение для чисел Каталана:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1).$$

Найдем для C(n) производящую функцию:

$$\begin{aligned}
K(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} C(n) q^n = 1 + q + 2q^2 + 5q^3 + 14q^4 + \dots = \ (?) \\
K^2(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^n \\
qK^2(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^n \\
qK^2(q) &= \sum_{n=1}^{\infty} C(n) q^n = K(q) - 1.
\end{aligned}$$

Получив уравнение $qK^2(q) = K(q) - 1$, решим его для $K(q)$:

$$K(q) = \frac{1 - \sqrt{1-4q}}{2} \text{ – производящая функция для чисел Каталана.}$$

Заключение

Мы хотели показать вам, как производящие функции связаны с некоторыми комбинаторными объектами и задачами. Однако, тема производящих функций очень обширна и выходит далеко за границы плаката. Всем заинтересовавшимся настоятельно рекомендуем познакомиться с книгой "Enumerative Combinatorics" под авторством гениального R.Stanley. Будет весело и страшно!