Числа Фибоначчи

Разделим прямоугольник длины $1 \times n$ на квадраты и домино.

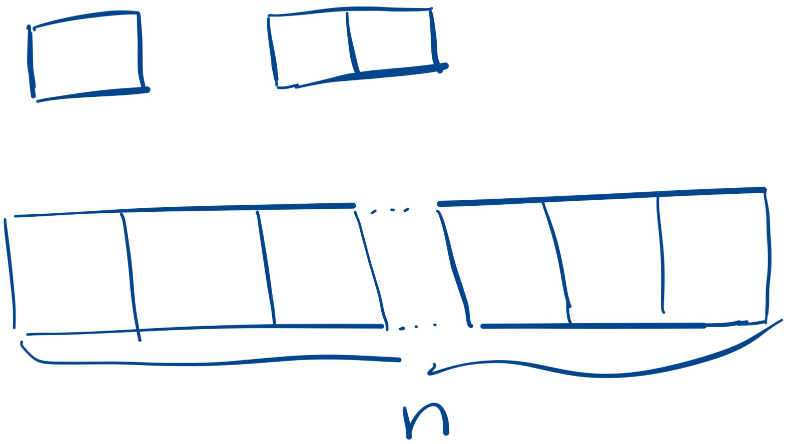

Рис. 1: Полоска длины n

Вопрос: сколькими различных способами это можно сделать. Обозначим количество способов f_n и докажем комбинаторно, что оно будет удовлетворять следующей реккуренте:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

В левой части уравнения находится количество способов разделить прямоугольник $1 \times n$, указанными способами.
Теперь рассмотрим несколько вариантов:

1. Отрежем от нашей полоски доминошку, тогда ее длина станет равна $n-2$. Тогда число способов разделить оставшуюся часть полоски будет равно f_{n-2}.

2. Отрежем квадрат от нашей полоски. По тем же соображение, количество способов поделить оставшуюся полоску будет равно f_{n-1}.

Таким образом мы исчерпаем всевозможные способы разделить полоску на квадраты и доминошки.
Заметим, что при $n = 1$: $f_1 = 1$, $n = 2$: $f_2 = 2$ и условимся, что для $n = 0$: $f_0 = 1$, так как полоску нулевой длины можно разделить лишь одним способом – "никак".
Таким образом, мы доказали представленное выше реккурентное соотношение для известных чисел Фибоначчи.

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots$$

Выведем замкнутую форму производящей функции:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} f_n s^n = 1 + s + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) s^n = \\
&= 1 + s + s\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} s^{n-1}\right) + s^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} s^{n-2}\right) = \\
&= 1 + s + s\left(-1 + f_0 + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} s^{n-1}\right) + s^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} s^{n-2}\right) = \\
&= 1 + s + s\left(-1 + F(s)\right) + s^2 F(s) = \\
&= 1 + sF(s) + s^2 F(s) \\
F(s) &= 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \ldots = \frac{1}{1 - s - s^2}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что производящие функции удовлетворяют операции дифференцирования:

$$
\left(\frac{1}{1 - s - s^2}\right)'_s = (1 + s + 2s^2 + \ldots)'_s = 1 + 4s + 9s^2 + 20s^3 \ldots = \frac{2s + 1}{(1 - s - s^2)^2}.
$$