Alternating permutations and volumes in $\mathbb{R}^n$

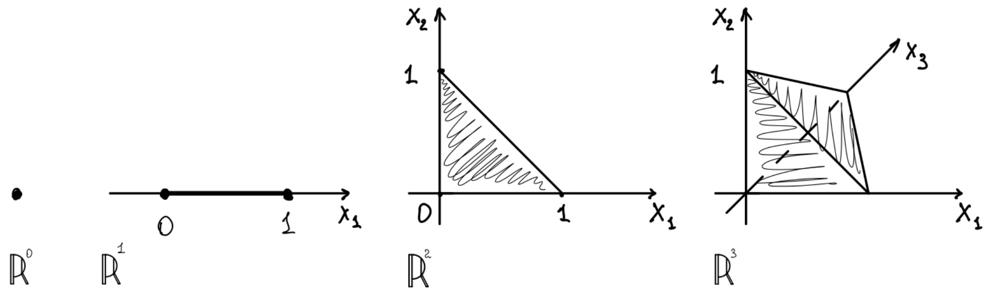
26 мая 2020 г.

Теперь рассмотрим задачу об объемах многоугольников в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданных следующими условиями:

1. $x_i > 0, \ \forall i = \overline{1...n}$
2. $0 \leq x_i + x_{i+1} \leq 1, \ \forall i = \overline{1...n}$

И мы считаем, что данная задача рассматривается для каждого $n \in \mathbb{N}$

В качестве иллюстрации рассмотрим примеры для $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^4$ соответстренно:



Найдем обем этих фигур. Для простоты обозначим такую фигуру в $\mathbb{R}^n$ как C_n .Из анализа нам известно, что объем заданной условиями фигуры можно выразить следующим образом:

$$Vol(C_n) = \int_{x_1=0}^{1} ... \int_{x_n=0}^{1-x_{n-1}} dx_1 ... dx_n$$

Теперь рассмотрим предыдущее выражение как функцию от t:

$$f(t) = \int_{x_1=0}^{t} ... \int_{x_n=0}^{1-x_{n-1}} dx_1 ... dx_n$$

Заметим, что $f(1) = Vol(C_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Для дальнейшего решения получим дифференциальное уравнение. Продифференцируем $f(t)$) и получим следующене равенстро:

$$f_n^{'}(t) = f_{n-1}(1-t),\ f_0(t) = 1,\ f_n(0) = 0 \text{ в качестве начальных условий}$$

В целях экономии времени и места мы не будем демонстрировать решение данного уравнения. Для ознокомления с ним арторы рекомендуют изучить соответствующую литературу по дифференциальным уравнения. Сейчас де мы просто запишем решение в следующей необходимой нам форме - форме производящей функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)x^n = sec(x)(cos(t-1)x + sin(tx))$$

Подставляя теперь $t = 1$, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)x^n = sec(x)(1 + sin(x)) = \sec(x) + \mathrm{tg}(x)$$

Обратим внимание на последнее выражение и заметим, что слева находится производящая функция для объемов C_n, так как
$Vol(C_n) = f_n(1), \forall n \in \mathbb{N}$, а справа - функция от x.

Теперь разложим функции $tg(x)$ и $sec(x)$ в ряд и заметим, что члены ряда для $tg(x)$ существуют только при нечетных значениях n то есть они равны нулю, если $n = 0$, тогда как члены ряда $sec(x)$ напротив существуют при четных значениях n. Таки образом, можно переписть последнюю формулу в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k+1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Где T_n - коэффициенты ряда разложения тангенса (n - нечетные), а S_n - коэффициенты ряда разложения секанса (n - четные).

Таким образом, можно установить соответствие между объемами определеных нами фигур и числами из разложения тангенса и секанса в ряд:

$$Vol(C_n) = \begin{cases} \dfrac{T_n}{n!} \text{ если n нечетный} \\ \dfrac{S_n}{n!} \text{ если n четный} \end{cases}$$

P.S.: Стоит отметить, что коэффициенты тангенса и котангенса в ряд сами имеют очень интересные комбинаторные интерпертации. Приведем несколько перых чисел T_n и S_n:

$$T : 1, 2, 16, 272, ...$$

$$S : 1, 1, 5, 61, ...$$