Пути

Биномиальный коэффициент

Задача: Двигаясь только вправо или только вверх, найти количество путей из $(0,0)$ в (n,m). Нетрудно убедиться, что таких путей $\binom{n+m}{m}$. Найдем для них производящую функцию:

$$A(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m+n=k}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

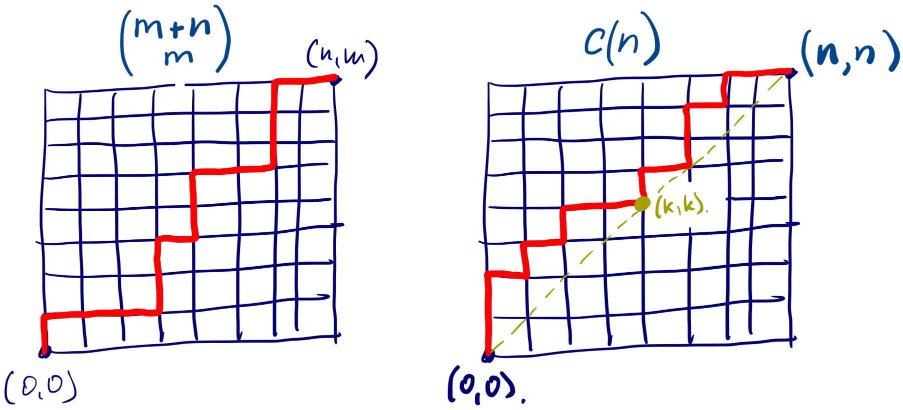

Рис. 1: Слева: пути вверх-вправо из $(0,0)$ в (n,m), Справа: пути вверх-вправо выше диагонали

Числа Каталана

Рассмотрим количество путей из $(0,0)$ в (n,n), пролегающих выше прямой $y = x$.
Пусть $C(n)$ – искомое число путей. Тогда один из возможных способов дойти до (n,n) через точку (k,k), где $k \in [0,n)$ – это все пути (их $C(k)$ штук) из $(0,0)$ в (k,k) умножить на все пути из (k,k) в (n,n), где их $C(n-k-1)$ штук. Тогда по всем имеющимся k получаем реккурентное выражение для чисел Каталана:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1).$$

Найдем для C(n) производящую функцию:

$$K(q) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) q^n = 1 + q + 2q^2 + 5q^3 + 14q^4 + \ldots = ?$$

$$K^2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^n$$

$$qK^2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) \cdot C(n-k-1) \right) q^n$$

$$qK^2(q) = \sum_{n=1}^{\infty} C(n) q^n = K(q) - 1.$$

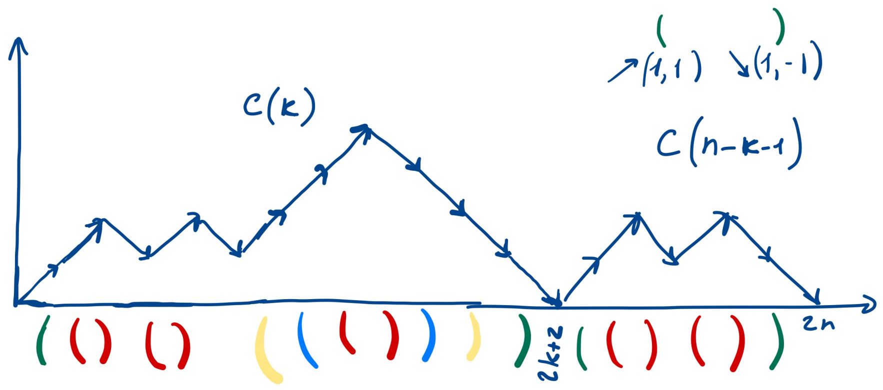

Рис. 2: Путь Дика и правильная скобочная последовательность

Получив уравнение $qK^2(q) = K(q) - 1$, решим его для $K(q)$:

$$K(q) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q}}{2} \text{ – производящая функция для чисел Каталана.}$$