Hagverkfræði - IÐN502G

Glósur
og
Heimaverkefni

Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
2012

Efnisyfirlit

Myndaskrá

Töfluskrá

1 Ýmsar leiðir við að flokka kostnað

1.1 FC - VC - Incremental cost

Fastur kostnaður - FC - Fixed cost

→ Breytist ekki þó umsvif taki breytingum

- Dæmi
  - Launakostnaður stjórnenda
  - Stjórnunarkostnaður
  - Tryggingar á fasteignum
  - Leyfisgjöld
  - Langtímavextir á lánsfé

Breytilegur kostnaður - VC - Variable cost

→ Er háður eða hægt að tengja beint við umfang ákveðinnar framleiðslu (operation, þjónusta)

- Dæmi
  - Hráefniskostnaður
  - Launakostnaður sem hægt er að tengja beint við tiltekna framleiðslu

Viðbótarkostnaður - Incrimental costs

→ Viðbótarkostnaður sem hlýst af því að auka framleiðslu um eina eða fleiri einingar. Er oft tengdur ákvörðunum um hvort eigi að gera flutfallslega litar breytingar í framleiðslu(operation). Eða ekki -go-no-go- ákvarðanir

- Dæmi
  - Aukinn eldsneytistkostnaður bílvélar við hlutfallslega litla hraðabreytingu
    + Kostnaður tengdur þáttum ein og aldri bíls, ekinni vegalengd,....
  - Kostnaður ríkisins af því að mennta einn viðbótar nema
  - Kostnaður við að bæta við gámi í skip, bretti í flutningabíl

→ Oft erfitt að leggja mat á þennan kostnað

1.2 Direct costs, Indirect costs, Standard costs.

Beinn kostnaður - Direct costs

→ Beinn kostnaður sem hægt er að mæla og tengja beint við ákveðna afurð eða aðgerð

- Dæmi
  - Hráefni í vöru eða uppskrift

Óbeinn kostnaður - Indirect costs

→ Kostnaður sem getur verið erfitt að tengja beint við ákveðna afurð eða aðgerð. Oft tengdur við afurð með hlutfallsreikningum.

- Dæmi
  - Verkfæri sem eru notuð almennt í framleiðslu margra vara
  - Stjórnunarkostnaður
  - Rafmagn
  - Tryggingar

Áætlaður einingakostnaður - Standard costs

→ Útreiknaður kostnaður við að áætla einingaverð ákveðinnar vöru eða þjónustu áður en framleiðsla hefst

- Dæmi um notagildi:
  - Áætlun um framtíðarframleiðslukostnað
  - Við samanburð og eftirlit á raunverulegum framleiðslukostnaði
  - Við undirbúning tilboða
  - Meta virði vara í vinnslu og eins á fullbúnum vörum

1.3 Cash cost & Book cost

Fjármagnskostnaður - Cash cost

→ Kostnaður sem hlýst af flæði fjármuna

- Dæmi
  - Vextir

Bókhaldskostnaður - Book cost

→ Kostnaður sem ekki er tengdur flæði á raunvörulegum fjármunum.

- Notað t.d.:
  - Í bókhaldslegum skilningi við að endurspegla kostnað við fyrri fjármálagjörninga
- Algengasta dæmið eru afskriftir

- Dæmi:
  - Kaupum vél á 100 fyrir 4 árum
  - Afskrifum á 5 árum
  - Bókhaldslegar afskriftir 20 á ári
  - Getur haft áhrif á flæði fjármuna. t.d. ef tekið var lán(vextir)

1.4 Sokkinn kostnaður

→ Kostnaður sem féll til í fortíðinni og hefur engin áhrif á um ákvarðanir um framtíðina

→ Kostnaður sem hægt er að líta framhjá við verkfræðilegar greiningar

- Dæmi
  - Óafturkræft staðfestingargjald í flugi
  - Vél sem á að endurnýja og hefur ekki verið afskrifuð að fullu
    + Upphaflegt kaupverð 50 ein
    + Bókfært virði 20 ein
    + Hrakvirði 5 ein
    + Sokkinn kostnaður 15 ein
    + Viðbótar afskrift geur haft skattaleg áhrif.

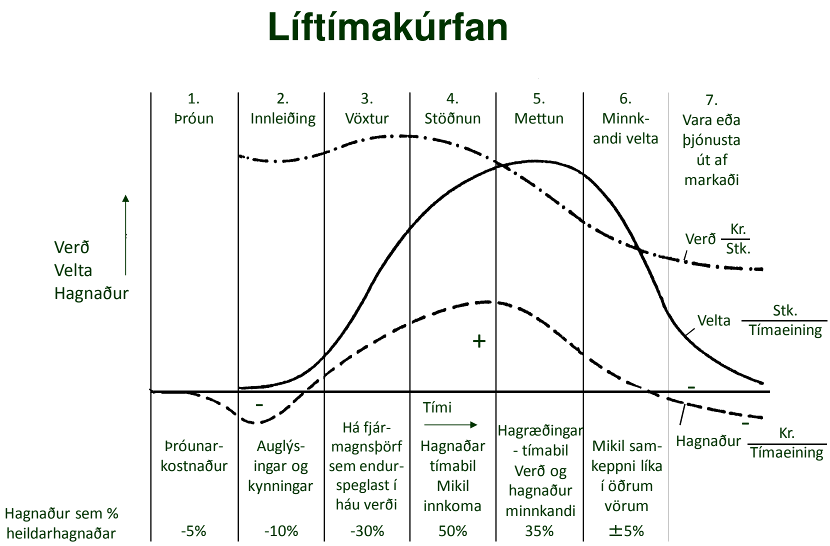
1.5 Fórnarkostnaður - Opertunity costs

→ Mat á kostnaði við að velta eina leið en hafna annara. þ.e. kostnaður við að sleppa bestu lausn af þeim sem er hafnað

- Dæmi
  + Námsmaður hættir vinnu og fer í skóla
    - Fórnuð laun 4 milj. króna
    - Útgjöld við að fara í skóla 1 milj. króna
    - Fórnarkostnaður 5 milj. kr. = 4+1

Column1	Velta	Umfang
A	80	20
B	15	30
C	5	50

Tafla 1: ABC greining



Mynd 1: Líftímakúrfan

1.6 Heildarkostnaður yfir líftímann

→ Heildarkostnaður yfir líftímann er oft reiknað út í verkfræðilegum tilgangi.

→ Allur kostnaður dreginn saman fyrir allan líftímann

→ Í viðskiptalegum tilgangi er líftímanum skiptu upp í 2 stig

1. Undirbúningsfasa
2. Framleiðslu(operation) fasa

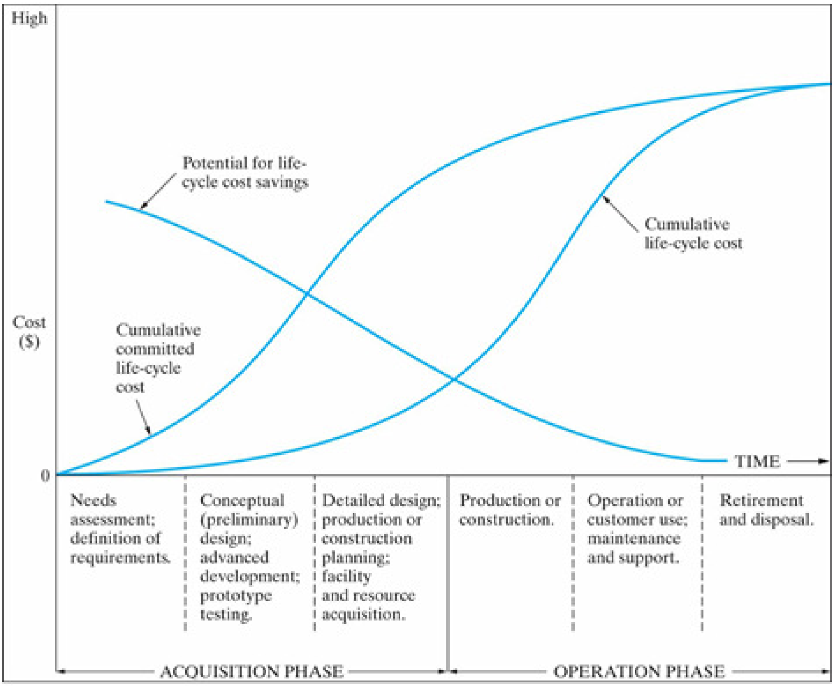
→ Á undirbúningsfasa eru teknar ákvarðanir sem snerta um 80% af líftímakostnaði. En raunverulegur kostn sem fullur til í undirbúningi er ekki nema um 20%

→ Meðal kostnaðarliða sem huga verður að við líftímagreiningu eru.

- Fjárfestingarkostnað - Hversu stór vél?
- Fjármagnskostnað
- Rekstrarkostnað

– Rekstarar- og viðhaldskostnað

– Kostnað við rusl og t.d. förgun(í lok líftíma)



Mynd 2: Phases of the Life Cycle and Their Relative Cost

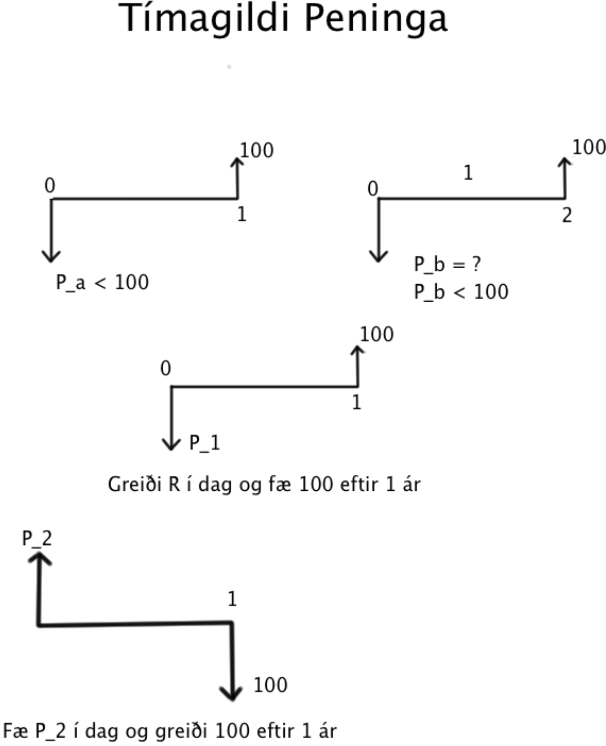
→ Mat á fjárfestingum

+ Er verkefni arðbært?

- Virkjun

- Gagnaver

– Íbúðarkaup vs. leiga



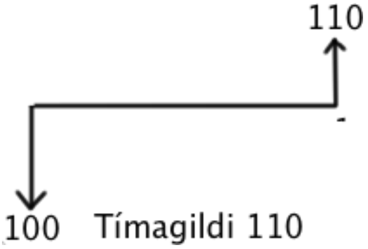
2 Vextir og ávöxtun

2.1 Vaxtaútreikningar

<u>**A**</u> Flatir vextir: $V = A(1 + r \cdot t)$

- V = virði
- t = tímí í árum
- r = vaxtaprósenta(venja að r séu ársvextir)
- A = Höfuðstóll

- Dæmi
  - r = 10 %
  - $V = 100 \cdot 1 + 10\% \cdot 1) = 110$

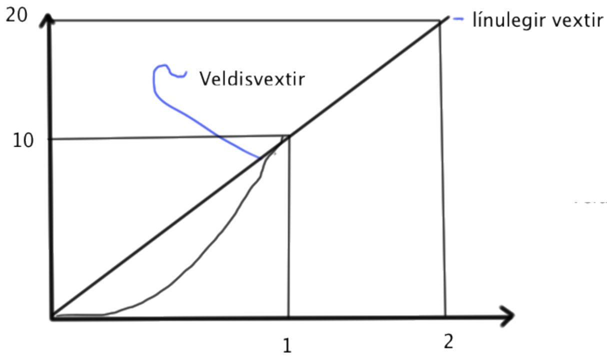


  - Vextir safnast línulega:
    - $>$ Eftir 1 ár á ég 110
    - $>$ Eftir 2 ár á ég 120
  - Engir vextir af vöxtum

- Ef ég á 110 eftir ár og set inná nýja bók (en byrja með hærri höfuðstól, 110)
- $V = 110 \cdot (1 + 10\% \cdot 1) = 121$

B Veldisvextir: $V = A(1+r)^2$

- Dæmi
  - t = 2; A=100; r = 10 % $V = 100 \cdot (1+10\%)^2 = [100 \cdot (1+10\%)](1ar) \cdot [(1+10\%)](vaxtavextir) = 121$

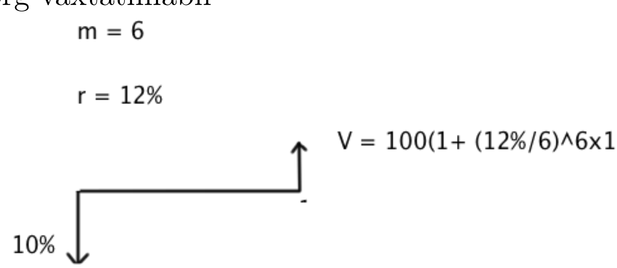


C Vaxtatímabil

+ Getum skipt árinu upp í mörg vaxtatímabil
  - $V = A \cdot (1 + \frac{r}{m})^{t \cdot m}$ m: # vaxtatímabila
- Dæmi: Yfirdráttarvextir 12.6%
  - $V = 100 \cdot \left(1 + \frac{12.6 \cdot \%}{12}\right)^{1 \cdot 12} = 114.5$
  - Til samanburðar gefa flatir vextir að
  + $V = 100 \cdot (1 + 12.6\%) = 112.6$
    $\rightarrow$ Mismunur $1.73\% \equiv 1.94kr$

C1 Samfelldir vextir

+ Látum m $\rightarrow \infty$ (# vaxtatímabila)
- þ.a. $\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot t} = e^{r \cdot t}$
- $V = A \cdot e^{r \cdot t}$þegar $m \to \infty$
  - Dæmi um mörg vaxtatímabil



2.1.1 Erum með 4 leiðir til að meta vexti

A Flatir vextir $V_a = A \cdot (1 + r_a \cdot t)$

B Veldisvextir $V_b = A \cdot (1 + r_b)^t$

C Vaxtatímabil $V_c = a \cdot \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{m \cdot t}$

D = C1 Samfelldir vextir $m \to \infty$ $\quad V_d = A \cdot e^{r_d} \cdot t$

Ef r_c er þekkt hvað þarf r_d a vera til að:

- $V_c = V_d \longrightarrow A \cdot \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{m \cdot t} = A \cdot e^{r_d \cdot t}$

$$\longrightarrow \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{m} = e^{r_d}$$

$$r_d = ln\left[\left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{m}\right]$$

Ef r_a er þekt hvað þarf r_d að vera til að:

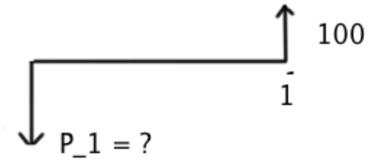
- $V_a = V_d$

$$\longrightarrow A \cdot (1 + r_a \cdot t) = A \cdot e^{r_d \cdot t}$$

$$\to (1 + r_a \cdot t) = e^{r_d \cdot t}$$

$$\to r_d = \frac{1}{2} \cdot ln(1 + r_a \cdot t)$$

2.2 Tímagildi Peninga (Present Value)

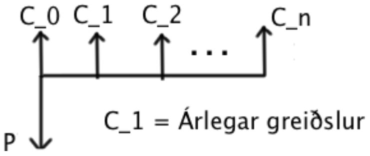


Hvers virði er 100 í dag sem við fáum eftir 1 ár

+ Nývirði greiðslu $P_1 = \frac{100}{1 + r}$

- EFtir 2 ár $P_2 = \frac{100}{(1 + r)^2}$

+ Almenna reglan fyrir núvirði:

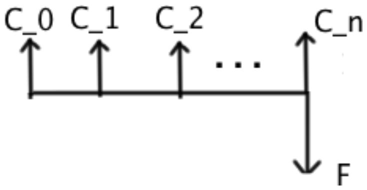


- $P = C_0 + \frac{C_1}{1 + r} + \frac{C_2}{(1 + r)^2} + \frac{C_3}{(1 + r)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1 + r)^n}$

- Þ.s. P er núvirði greiðsluflæðis.

Framtíðarvirði - Future Value

Hvers virði er greiðsluflæði í framtíðinni?



$$F = C_0 \cdot (1+r)^n + C_1 \cdot (1+r)^{n-1} + \cdots + C_n \cdot (1+r)^0$$

Samband milli núvirðis og framtíðarvirði því einfaldlega:

$$P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

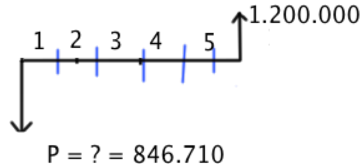
Og höfum einnig að:

$$P = \frac{C_0 \cdot (1+r)^n + C_1 \cdot (1+r)^{n-1} + \cdots + C_n}{(1+r)^n}$$

$$P = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

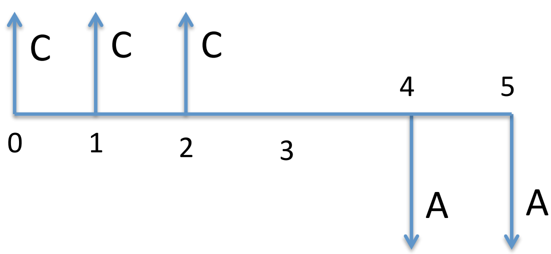
- Dæmi:
  + Þurfum 1.200.000 kr til að yfirfara vél eftir 5 ár
  - Getum fengið 6% Fjármögnun á fé sem við leggjum fyrir núna

$$P = \frac{F}{(1+r)^n} = \frac{1.200.000}{(1+6\%)^5} = 896.710-$$



Dæmi: Sparnaður & eyðsla

Við viljum leggja fyrir 3 greiðslur, geyma peninginn í 2 ár og taka hann síðan út í 2 greiðslum.



C og r eru þekkt en okkur vantar A

Notum 3 sem viðmiðunarár:

- Sparnaðurinn:

$$C \cdot (1+r)^3 + C \cdot (1+r)^2 + C \cdot (1+r) = \text{Framtíðarvirði á ári 3}$$

- Eyðslan:

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} = \text{Núvirði á ári 3}$$

Við viljum SPARNAÐUR = EYÐSLA

$$\Rightarrow C \cdot (1+r)^3 + C \cdot (1+r)^2 + C \cdot (1+r) = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2}$$

Skoðum fyrir:

Ef $r = 0\% \Rightarrow 3C = A \to 1.5C$

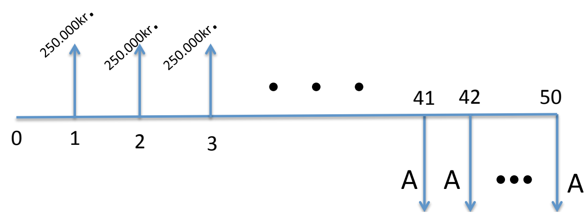
Ef $r = 1\% \Rightarrow A = C \cdot \left(\frac{(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)}{\left(\frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} \right)} \right)$

Ef $r = 2\% \Rightarrow A = 1.608 \cdot C$

Ef $r = 3\% \Rightarrow A = 2.098 \cdot C$

Dæmi: Lífeyrissparnaður

Þú leggur fram 250.000 kr á ári við vinnum frá 25 ára til 65 ára. Tökum lífeyrir út frá 66 ára til 75 ára.
Hver verður lífeyririrnn
(ath. 4% séregnasparnaður af ca. 520.000kr/mán er um 250.000 kr/ári)



Veljum ár 40 sem viðmiðunarpunkt.

Framtíðarvirðum allar greiðslur í þann punkt.

Núvirðum lífeyrisgreiðslur líka í þann punkt.

SPARNAÐUR = LÍFEYRIR (á ári 40)

$$250.000\cdot((1+r)^{39}+(1+r)^{38}+\cdots+(1+r)^{0}) = A\cdot\left(\frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^{10}}\right)$$

Ef $r = 0\% \rightarrow A = 1M.kr$

Ef $r = 5\% \rightarrow A = 3.9M.kr$

Ef $r = 7\% \rightarrow A = 7.1M.kr$

2.3 Ávöxtun

$\rightarrow$ Ávöxtun er breyting á virði mælt í % hækkun eða lækkun á tímabili:

$$\frac{P_t - P_0}{P_0}$$

Þar sem:

- P_0: virði á tíma 0
- P_t: virði á tíma t

Ávöxtunin:

→ Finna y sem leysir $P_t = P_0 \cdot (1+y)^t$, y: ávöxtun

- Dæmi
  + Um miðjan águst var alverð 1.830 \$/tonn, viku síðar var álverðið 1850 \$/tonn
    - Hækkunin var $\dfrac{1.850 - 1.830}{1.830} = 1.1\%$ hækkun
    - Ávöxtun á ársgrunni $= 1.850 = 1.830 \cdot (1+y)^{1/52} \Rightarrow y = 76\%$ ávöxtun
    - Þetta þýðir að ef við fengjum þessa ávöxtun í heilt ár yrði álverðið: 1.830\$/tonn $\cdot(1+76\%) = 3.220$
    -
    -

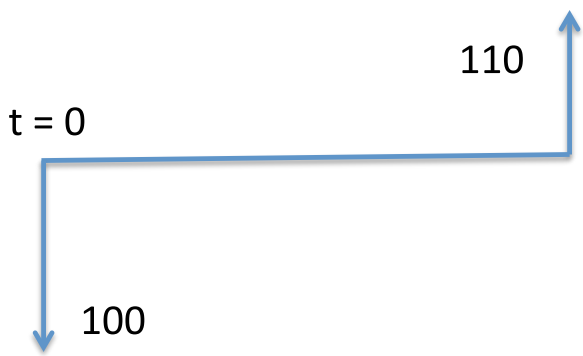
2.3.1 Raunávöxtun/verðbólga

Verðbólga: Hækkun fyrir tímabil.

Verðhjöðnun: Lækkun yfir tímabil.

Vísitala neysluverðs sett í 100 í maí 1988, í ágúst 2012 var hún 396,60

→ • Dæmi
  + Ef bankabok ber 10% vexti



    - Ef verðbólga væri 10 % þá er R̈aunávöxtun$\doteq$ 0
      > Nafnávöxtun: Ávöxtun fjármuna
      > Raunávöxtun: +Avöxtun leiðrétt fyrir verðbólgu

2.3.2 Verðbætur

Hvað eru verðbætur?

→ Verð eftir 1 ár er jafnt (1+V)   V: Verðbætur

Formúla fyrir raunvexti er:

$$(1 + Y_r) = \frac{(1 + y)}{(1 + V)}$$

Þar sem

$$Y_r = \text{Raunávöxtun: vextir og verðbætur}$$
$$y = \text{Nafnávöxtun: vextir á ákverðnu tímabili}$$

Dæmi - Fréttablaðið 11.sept 2012

A = 400.000,-

r = 12.5%

Formúlan:

$$V = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot c} = 400.000 \cdot \left(1 + \frac{12.5\%}{12}\right)^{12 \cdot 1} = 452.966$$

þ.a. vextir á einu eru eru 52.966

Finnum r þegar P,F og N er gefið: $r = \sqrt[n]{\frac{F}{P}} - 1$

Dæmi:

Árið 2008 kostaði bensínlíter 138 kr/l, í ágúst 2012 var verðið 138 kr/l. Hver hefur árleg hækkun verið að meðaltali á þessum árum?

Notum formúluna sem er leyst fyrir r:

$$r = \sqrt[4]{\frac{252}{138}} - 1 = 0.162 = 16.2\% \text{ á ári}$$

Finnum n þegar P, F og r eru gefin:

$$F = P \cdot (1 + r)^n$$

$$(1 + r)^n = \frac{F}{P} \Rightarrow n \cdot \log(1 + r) = \log\left(\frac{F}{P}\right)$$

$$\Longrightarrow n = \frac{\log\left(\frac{F}{P}\right)}{\log(1 + r)}$$

Dæmi:

16.2% árleg hækkun bensíns 2008-2012. Hvenar munum við með sama áframhaldi borga 400 kr fyrir 1l af bensíni?

Notum formúluna sem er leyst fyrir n:

$$N = \frac{\log\left(\frac{400}{252}\right)}{\log(1 + 16.2\%)} = 3.08\text{ár} \Rightarrow \text{Haustið } 2015$$

2.3.3 Verðbætur

→ Verð eftir 1 ár er jafnt (1+v) þ.s. v = verðbólga í %. Hegðar sér líkt og veldisvextir. EFtir n ár verður virði vörunnar (með fastri verðbólgu) $(1+v)^n$
Önnur leið til að horfa á verðbólgu er að skoða kaupkraft peninga. Þú færð minna fyrir 1000 kr í dag heldur en fyrir 10 árum síðan.
EF v er verðbólga þá er kaupraftur(máttur) krónu $\frac{1}{(1+v)}$ eftir 1 ár.

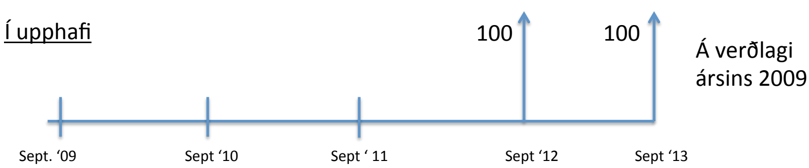
$$(1+y) = (1+y_r)\cdot(1+v) \begin{cases} y_r: & \text{Raunvextir} \\ y: & \text{Nafnvextir} \\ v: & \text{Verðbólga} \end{cases}$$

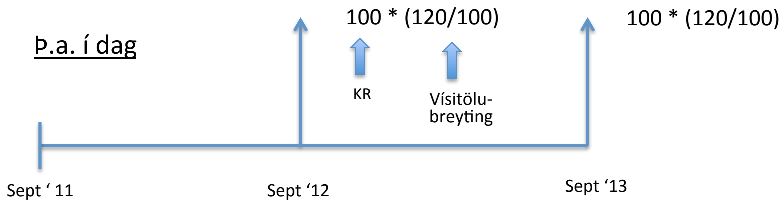
- Dæmi
  - Reikningur ber 13% nafnvexti. Verðbólga á sama tíma mælist 8% á ári.
  - Reiknum Raunávöxtun:

$$(1+y_r) = \frac{(1+13\%)}{(1+8\%)}$$

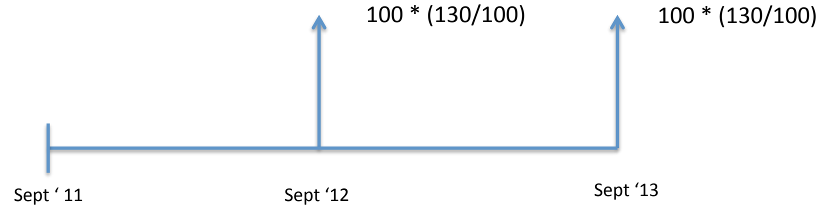
$$\Rightarrow y_r = 4.63\% enekki 5\%$$

- Dæmi
  - Verðtryggt greiðsluflæði með grunnvísitölu 100 sem ákveðið var fyrir 2 árum síðan í dag er vísitalan 120





Ári síðar er vísitalan 130



2.3.4 Mismunandi tegundir af greiðsluflæði

Jafnar afborganir

Höfuðstóll P til n ára:

t	afborgun	vextir	greiðsla	Eftirstöðvar
0				P
1	P/n	$P \cdot r$	$P/n + P \cdot r$	$P - P/n$
2	P/n	$(P - P/n) \cdot r$	$P/n + (P - P/n) \cdot r$	$P - 2 \cdot P/n$
.				
.				
.				
3	P/n	$(P - (t-1) \cdot P/n) \cdot r$	$P/n + (P - (t-1) \cdot P/n) \cdot r$	0

Þ.a. afborgun hvers tímabils er $\dfrac{P}{n}$

og vextir hvers tímabils er $\left(P - (t-1) \cdot \dfrac{P}{n}\right) \cdot r$

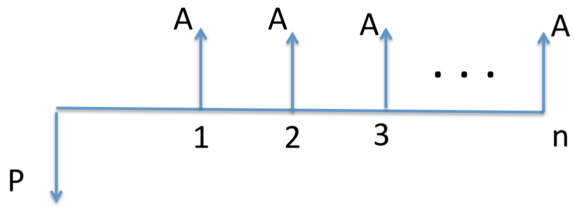
Dæmi:

Lán 9.000.000 til þriggja ára og 10% vextir

t	afborgun	vextir	greiðsla	Eftirstöðvar
0		$(P \cdot r)$		9.000.000
1	3.000.000	900.000	3.900.000	6.000.000
2	3.000.000	600.000	3.600.000	3.000.000
3	3.000.000	300.000	3.300.000	0
Σ	9.000.000	1.800.000	10.800.000	

2.3.5 Jafngreiðsulán

$\rightarrow$ Viljum finna A þegar P er gefið



n: # Vaxtatímabila

r: Vextir

P: Höfuðstóll

A: Greiðsla þ.e. afborgun af P + vextir

$$A = P \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \right]$$

Til að leiða formúluna út þurfum við að skoða summu greiðsluflæðis fyrir:

$$P = A \cdot \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} \right)$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} \qquad 0 \leq a < 1$$

$$S' = \sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a \cdot (1 + a^n}{1-a} \qquad 0 \leq a < 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \qquad \underline{1}$$

$$a \cdot s = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1} \qquad \underline{2}$$

$$\underline{1} - \underline{2} \rightarrow S - a \cdot S = 1 - a^{n+1}$$

$$S \cdot (1-a) = 1 - a^{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} a^k$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - 1 = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - 1$$

$$= \frac{1 + a^{n+1} - 1 + a}{1-a} = \frac{a(1-a^n)}{1-a} = S'$$

þegar : $n \longrightarrow \infty$

– Dæmi

- Greiðsluflæði sem gefur árlega 1
- Setjum $a = \dfrac{1}{1+r}$

$$P = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots$$

- Þar sem allar greiðslur eru jafnar getum við notað:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} a^k = a + a^2 + a^3 + \cdots \quad \text{fyrir } 0 \leq a < 1$$

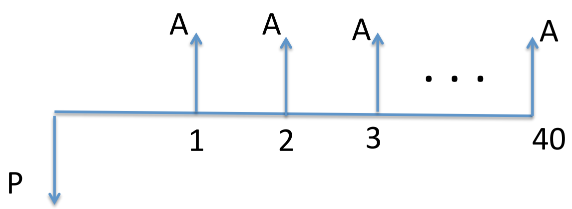
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{(1+r)}{r} = \frac{1}{r}$$

- Því r eru vextir hvers tímabils.

- Þ.a. núvirði óendanlegs greiðslustraums af 1.000 kr/ár er: [m.v. r = 10%]

$$P = \frac{1000}{0.1} = 10.000, -$$

- Dæmi um jafngreiðslulán (annuity)



A: Greiðsla
r: Vextir
P: Höfuðstóll

Núvirðum:

$$P = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^40}$$

$$\Rightarrow = A\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^4}\right)$$

- Þ.s. P er núvirði greiðsluflæðis með r vaxtaprósentu = Höfuðstóll lánsins.
- Við höfum:

$$P = A \cdot \sum_{k=1}^{n} a^k \qquad \text{þ.s. } a = \frac{1}{1+r}$$

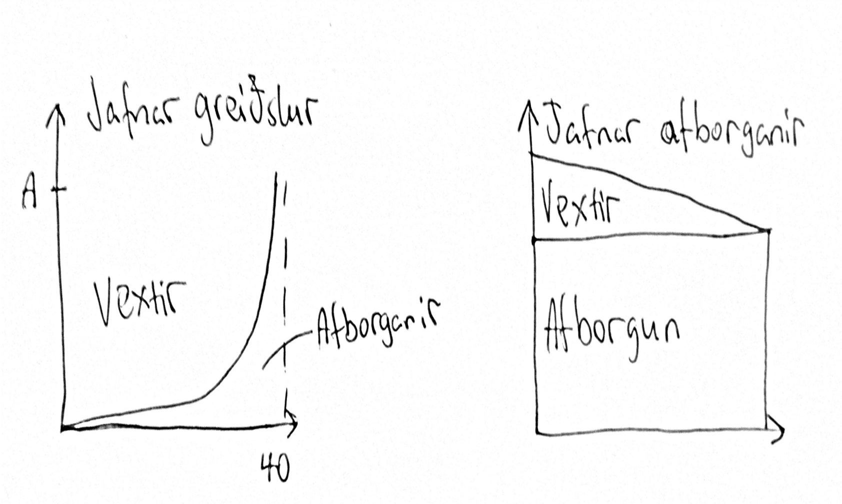
$$\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a \cdot (1 + a^n)}{1 - a} = \frac{\frac{1}{1+r} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}{1 - \frac{1}{(1+r)}}$$

Þá er.

$$P = A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Leysum fyrir A:

$$A = P \cdot \left(\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right)$$



Greiðsla A = AFBORGUN + VEXTIR

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				$P = P_0$
1	A	$r \cdot P_0$	$A - r \cdot P_0$	$P_1 = P_0 - (A - r \cdot P_0)$
2	A	$r \cdot P_1$	$A - r \cdot P_1$	$P_2 = P_1 - (A - r \cdot P_1)$
3	A			
. . .				
n	A	$r \cdot P_{n-1}$	$A - r \cdot P_{n-1}$	$P_t = P_{n-1} - (A - r \cdot P_{n-1})$

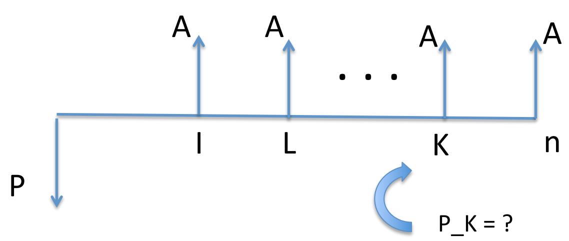
- Dæmi: Lán 9.000.000 í 3 ár á 10% vöxtum:

$$A = 9.000.000 \cdot \left[\frac{10\% \cdot (1 + 10\%)^3}{(1 + 10\%)^3 - 1}\right] = 3.619.033,3$$

t	Vextir	Afborgun	Greiðsla	Eftirstöðvar
0				9.000.000
1	900.000	3.619.033-900.000 = 2.719.033,3	3.619.033,3	9.000.000 - 2.719.033,3 = 6.280.967
2	628.097	2.9990.936	3.619.033,3	3.290.030
3	329.030	3.290.030	3.619.033,3	0
Σ	1.847.100	9.000.000	10.857.100	

Sama lán með föstum afborgunum á höfuðstól var 10.8000.000 í heildargreiðslum.

Til að reikna eftirstöðvar af jafngreiðsluláni á tíma k þurfum við ekki að reikna í gegnum töfluna að tíma k.



P_0 Núvirði láns

P_k Eftistöðvar láns á tíma K

$$A = \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \cdot P_0$$

$$P_k = (1+r)^k \cdot P_0 - \sum_{i=1}^{k} A \cdot (1+r)^{k-i}$$

$\longrightarrow P_k =$ framtíðarvirði í tíma k - summa af því sem búið er að borga

$$= (1+r)^k \cdot \frac{A}{r} \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+r)^n}\right] - A \cdot (1+r)^k \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (1+r)^{-i}}_{= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^k}\right)}$$

$$= \frac{A}{r}\left((1+r)^k - (1+r)^k \cdot (1+r)^{-n} - \left[(1+r)^k - \frac{(1+r)^k}{(1+r)^k}\right]\right)$$

$$= \frac{A}{r} \cdot \left(1+r)^k - (1+r)^{k-n} - (1+r)^k + 1\right)$$

$$P_k = \frac{A}{r} \cdot (1 - (1+r)^{k-n})$$

2.3.6 Verðtryggt Jafngreiðslulán

+ Íbúðalán til 40 ára(n = 40)
    - r = 4.2% Nafnvextir
    - Mánaðarlegar greiðslur
+ Jafngreiðslulán, verðtryggt, höfuðstóll 10mkr(=P)
+ Reiknum Mánaðarlega greiðslubirði:

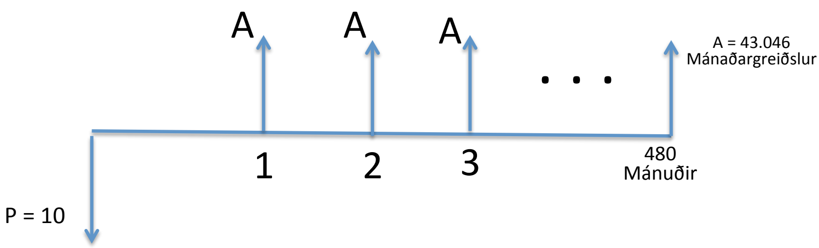
$P = 10mkr$

$n = 40 \cdot 12 = 480$

$r = \dfrac{4.2\%}{12}$ þ.s. við erum með 12 vaxtatímabil yfir árið.

$$A = P \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$\Rightarrow A = 10mkr \cdot \frac{\frac{4.2\%}{12} \cdot \left(1 + \frac{4.2\%}{12}\right)^{480}}{\left(1 + \frac{4.2\%}{12}\right)^{480} - 1} = 43.046$$



Gefum ráð fyrir að 1 mánuður líði og verðbólga sé 1% á milli mánaða. Hvað gerist þá?

$\Longrightarrow$ Allar framtíðargreiðslur hækka með verðbólgunni.

$\Longrightarrow$ 1% verðbólga þýðir að allar framtíðargreiðslur hækka úr 43.046 í $43.046 \cdot (1 + 1\%) = 43.477$

Það að borga 43.477 kr/mán þýðir:

$$A = P \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow 43.477 = P \cdot \frac{\frac{4.2\%}{12} \cdot \left(1 + \frac{4.2\%}{12}\right)^{480}}{\left(1 + \frac{4.2\%}{12}\right)^{480} - 1} \Rightarrow P = \underline{10.100.000,-}$$

Lánið hækkar um 100.000 milli mánaða. Greiðslan er 43.477 sem skiptist í:

$$\text{Vextir } \frac{4.2\%}{12} \cdot 10.000.000,- = 35.350$$

og afborgun: 43.477-35.350 = 8.127,-

$\longrightarrow$ Skuld eftir greiðslu = 10.100.000 - 8.127 = 10.091.873

Við greiðum ekki niður alla verðbólgu sem bætist við lánið, bara verðbólgu sem bætist við fyrstu greiðslu.

þ.e. 43.477 - 43.046 = 431

En eru ógreiddar verðbætur af 478 greiðslum sem eftir eru af láninu.

Við geriðslunar sem eftir eru bætast vextir þar til þær eru greiddar.

2.3.7 Vaxtagreiðslulán

$\rightarrow$ Höfuðstóll láns er greiddur í einu lagi í lok tímabils

t	Afborgun	Vextir	Greiðsla	Eftirstöðvar
0				P
1	0	$r \cdot P$	$r \cdot P$	P
2	0	$r \cdot P$	$r \cdot P$	P
3	0	$r \cdot P$	$r \cdot P$	P
. . .				
n	P	$r \cdot P$	$P + r \cdot P$	0

Mismunur í krónum á milli þessa tegunda lána miðað við lán með

n: Fjöldi ára n = 3

r: Vextir r = 10%

P: Höfuðstóll P = 900.000

Tegund Láns	Heildargreiðsla
Jafnar afborganir:	10.800.000
Jafnar greiðslur:	10.857.000
Vaxtagreiðslur:	11.700.000
Allt (vextir + höfuðstóll) í lokin	11.790.000

Skoðum nú áhrif verðbólgu og fjölda ára miðað við sömu vexti og sömu gerð láns (jafnar greiðslur)

Lán	10.000.000	10.000.000	10.000.000	10.000.000
Vextir	4,2%	4,2%	4,2%	4,2%
n	40 ár	40 ár	40 ár	20 ár
Verðbólga	0%	12,3%	4%	4%
Heildargreiðslur	20.698.210	459.000.000	50.179.085	22.524.857
Meðalgreiðslur	43.121	956.118	104.540	93.853

2.4 Ávöxtunarkrafa

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} \cdots$$

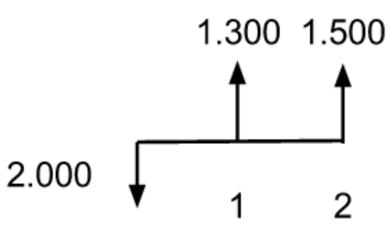
Við leitum að r þegar P og C_i er gefin. Það er hægt að reikna r á tvo vegu:

1. Ef P og F eru þekkt $P = F \cdot \frac{1}{(1+r)^n}$
2. Verkefni sem nær 2 ár fram í tímann

Dæmi:

$$3.000 = \frac{1}{(1+r)^4} \cdot 4.000 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{4.500}{3.000}} - 1 = 0,1067 \approx 10,67\%$$

Dæmi:



$$P = \frac{1300}{1+r} + \frac{1500}{(1+r)^2}$$

Setjum $x = \dfrac{1}{1+r}$

$2000 = 1300x + 1500x^2$

$\Rightarrow 1500x^2 + 1300x - 200 = 0$

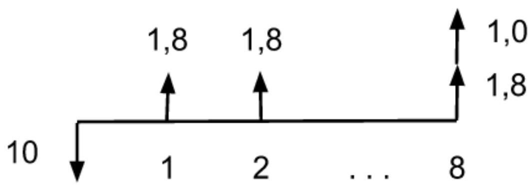
$$\Rightarrow x = \frac{-1300 \pm \sqrt{(-1300)^2 - 4 \cdot (1500) \cdot (-2000)}}{2 \cdot 1500}$$

$\Rightarrow x = 0,8 \vee x = -1,667$

$\Rightarrow 0,8 = \dfrac{1}{1+r} \Rightarrow r = 25\%$

Til að finna innri vexti í greiðsluröð þurfum við að prófa okkur áfram með mismunandi gildi á r.

<u>Dæmi:</u>



Fjárfesting upp á 10m á ári 0 skilar 1,8m á ári í 8 ár. Hrakvirði vélar í lok tímabils er 1,0m.

$$10 = \frac{1,8}{1+r} + \frac{1,8}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{2,8}{(1+r)^8}$$

$$\Rightarrow P = -10 + \frac{1,8}{1+r} + \frac{1,8}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{2,8}{(1+r)^8}$$

Hvaða r gefur $P(r) = 0$? Prófum $r = 8\%$

$$r = 8\% \Rightarrow P(8\%) = 0,88$$

$$r = 12\% \Rightarrow P(12\%) = -0,65$$

$$r = 10,88\% \Rightarrow P(10,88\%) = 0,0007$$

Athugið IRR fallið í Excel.

2.4.1 Verðtrygging & verðbóla á ári

Vísitala neysluverðs í ágúst 1972, 174,8

Vísitala neysluverðs í ágúst 2012, 125.175 - 40 árum síðar

$\rightarrow$ það sem kostaði 100 kr. 1972 kostaði $\dfrac{124.175}{174.8} = 716,1$ meira en árið 2012

Meðalverðbóla á ári er þá:

$$716.1 = (1+v)^{40} \Rightarrow V = 17.86\%$$

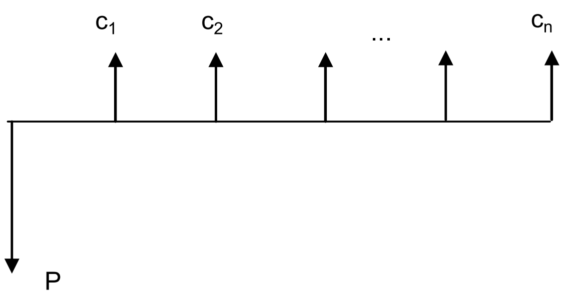
2.4.2 Skuldabréf

Skuldabréf eru sú tegund fjármálagjörninga með föstum tekjum sem eru lang algengust í viðskiptum. Sem flokkur eru þau sú fjármálaafurð sem auðveldast er að kaupa og selja.

Skulabréf (BOND) er skuldbynding útgefanda um að greiða eiganda/handhafa bréfsins fjármuni samkvæmt þeim skilmálum sem tilgreindar eru á bréfinu.

2.5 Meðaltími

við viljum skoða hversu næmt núvirði greiðsluflæðis, P, er fyrir breytingu á ávöxtunarkröfunni.



Það gerum við með því að diffra P með tilliti til ávöxtunarkröfunnar r og við fáum fyrir greiðsluflæðið

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(1+r)^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dr}\left(\frac{c_k}{(1+r)^k}\right) \cdots$$

$$\cdots - \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot c_k}{(1+r)^{k+1}} = -\frac{1}{1+r} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot c_k}{(1+r)^k}$$

Jafnan að ofan segir okkur hversu mikið núvirði P breytist með lítilli breytingu í ávöxtunarkröfunni r. Með góðir samvisku getum við alagað til jöfnuna þannig

$$dP = -\frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot c_k}{(1+r)^k}\cdot dr$$

$$\Delta P = -\frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot c_k}{(1+r)^k}\cdot \Delta r$$

Neðsta jafnan gefur okkur aðferð til að meta breytingu í P þegar ávöxtunarkrafan breytist um Δr.

við höfum því tvær aðferðir til að meta breytingu í Ð þegar ávöxtunarkrafan breytist úr r_1 í r_2

1) $\Delta P = -\frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot c_k}{(1+r)^k}\cdot (r_2 - r_1)$

2) Einfaldlega að reikna núvirði aftur m.v. ávöxtunarkröfuna r_2

Í 'Praxís' er oft fljótlegra að nota 1) heldur en að þurfa að núvirða allt greiðsluflæði aftur.

Hugtakið **meðaltími**, <u>modified duration</u>, er skilgreint sem

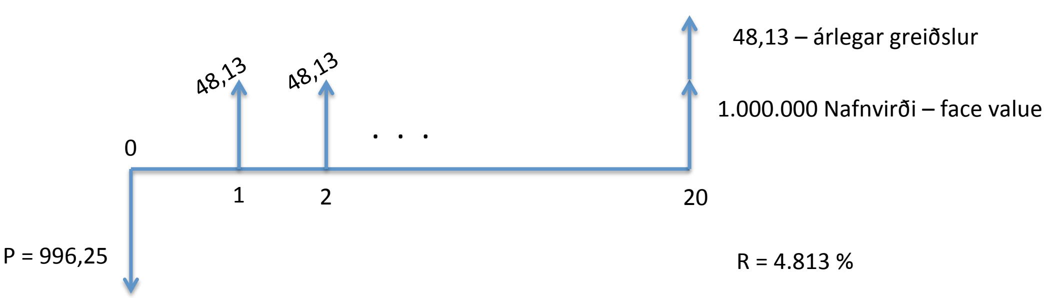
$$\frac{dP}{dr} = \breve{}D_m \cdot P$$

Og þá er D_m

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{1+r}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot c_k}{(1+r)^k} = -d_m P \Rightarrow \frac{1}{1+r}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot c_k}{(1+r)^k}}{P}$$

Meðaltími, D_m, er handhægur mælikvarði á næmni núvirðis gagnvart ávöxtunarkröfu. Núvirði geriðsluflæðis með meðaltíma 10 breytist t.d. meira við smá breytingar í ávöxtunarkröfu en núvirði greiðsluflæðis með meðaltímann 3.

Dæmi um innri vexti



Þurfum að finna r’ m.v. kaupvarð skuldabréfsins:

$$996.25 = \left(\sum_{k=1}^{20} \frac{48,13}{(1+r')^k} \right) + 1000 \cdot \frac{1}{(1+r')^{20}}$$

Notum ítrun til að finna r’, eða einfaldara að nota EXCEL IRR fallið er jafnt er á milli tímabila. Fáum í Excel r’ = 4.843 %

	Coupon	Mat. date	Bid $	Yld%
Corporate				
AGT Lt	8.800	Sep 22/25	100.46	8.75
Air Ca	6.750	Feb 02/04	94.00	9.09
AssCap	5.400	Sep 04/01	100.01	5.38
Avco	5.750	Jun 02/03	100.25	5.63
Bell	6.250	Dec 01/03	101.59	5.63
Bell	6.500	May 09/05	102.01	5.95
BMO	7.000	Jan 28/10	106.55	6.04
BNS	5.400	Apr 01/03	100.31	5.24
BNS	6.250	Jul 16/07	101.56	5.95
CardTr	5.510	Jun 21/03	100.52	5.27
Cdn Pa	5.850	Mar 30/09	93.93	6.83
Clearn	0.000	May 15/08	88.50	8.61
CnCrTr	5.625	Mar 24/05	99.78	5.68
Coke	5.650	Mar 17/04	99.59	5.80
Column 1	Column 2	Column 3	Column 4	Column 5

Mynd 3: Dæmi um framsetningu á verðmati skuldabréfa

Útskýringar:

Column 1: Issuer - This is the company, state (or province) or country that is issuing the bond.

Column 2: Coupon - The coupon refers to the fixed interest rate that the issuer pays to the lender.

Column 3: Maturity Date - This is the date on which the borrower will repay the investors their principal. Typically, only the last two digits of the year are quoted: 25 means 2025, 04 is 2004, etc.

Column 4: Bid Price - This is the price someone is willing to pay for the bond. It is quoted in relation to 100, no matter what the par value is. Think of the bid price as a percentage: a bond with a bid of 93 is trading at 93% of its par value.

Column 5:Yield - The yield indicates annual return until the bond matures. Usually, this is the yield to maturity, not current yield. If the bond is callable it will have a ’c–’ where the -"is the year the bond can be called. For example, c10 means the bond can be called as early as 2010.

Rating Classifications

	Moody's	Standard & Poor's
High grade	Aaa	AAA
	Aa	AA
Medium grade	A	A
	Baa	BBB
Speculative grade	Ba	BB
	B	B
Default danger	Caa	CCC
	Ca	CC
	C	C
		D

Ratings reflect a judgment of the likelihood that bond payments will be made as scheduled. Bonds with low ratings usually sell at lower prices than comparable bonds with high ratings.

Mynd 4: Einkunn matsfyrirtækjanna á skuldurum

Skulabré eiga sér nefnvirði(Face Value)

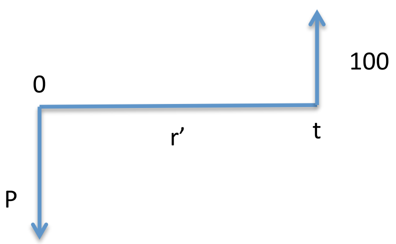
→ þ.e. fyrir hvaða upphæð þau eru gfein út

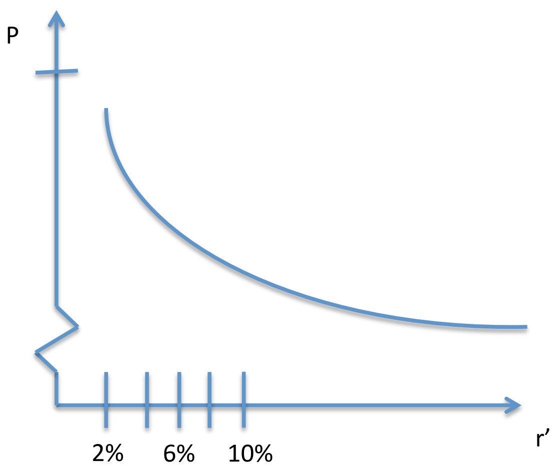
Útgáfudag

Lokadag - Eindag!

síðan er það markaðarins að ákveða hvað greitt er fyrir bréfin út frá þeirri ávöxtunarkröfu sem er á hverjum tíma.

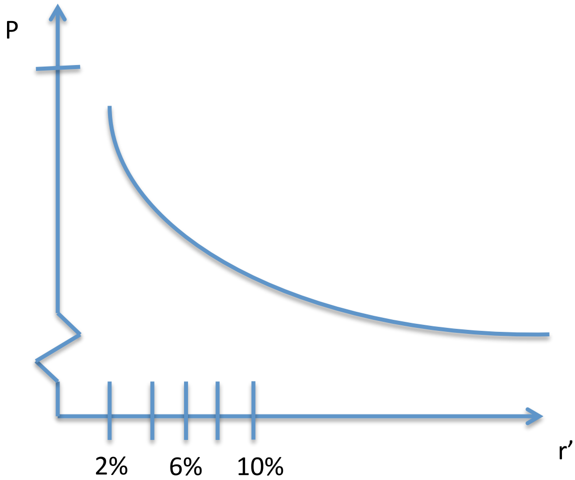
Dæmi um ávöxtunarkröfu:





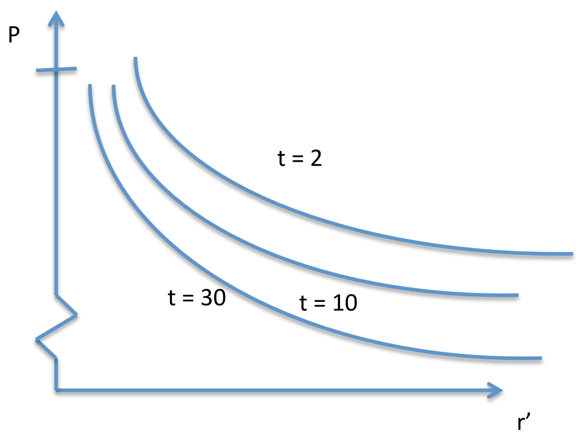
þar sem r' er ávötunarkrafa (Yeld - to - maturity) vaxtaprósentan sem við notum til að

$$P(r') = \frac{100}{(1+r')^t}$$



r'	P (t = 2)
0%	100
5%	90,7
10%	82,6
15%	75,0
20%	69,4

Eftir því sem ávöxtunarkrafan lækkar þá hækkar núviðið:



P(t)

r'	t = 2	t = 10	t = 30
0 %	100	100	100
5 %	90,7	61,4	23,1
10%	82,6	38,5	5,73
…			
…			

* Breytingar á núvirði P er hraðari fyrir lága ávöxtun $\Rightarrow$ vaxtanæmni er meiri.
* Breyting á núvirði er hraðari (meiri) fyrir lengra greiðsluflæði $\Rightarrow$ Áhættan er mismunandi eftir því hvar í ferlinu við erum.
  $\longrightarrow$ Hallatala P(r') er hærri eftir því sem r' er lægra.

+ **Dæmi:**

- Verkefni til 5 ára = n
- Gefur árlega 25 = A
- Stofnkostnaður er 100
- Ávöxtunarkrafa á fjármagn er 7% = r

  Þýðing þess að ávöxtunarkrafa sé 7% $\Rightarrow$ sá/sú sem leggu út fé fyrir stofnkostnaðinum k

Núvirðum með r = 7%:

$$P = \frac{25}{(1+r)} + \frac{25}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{25}{(1+r)^5} = 102,5 \quad \text{m.v. r} = 7\%$$

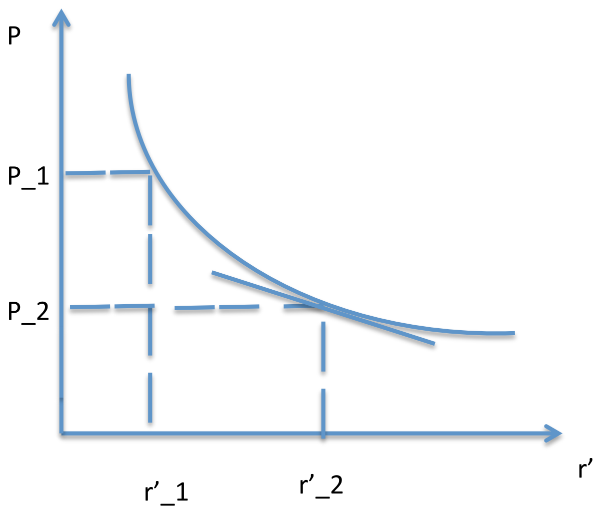
Þ.a. verkefnið er aðbært og það mætti hækka stofnkostnaðinn í 102,5 m.v. 7%

- Hvað er ávöxtunarkrafan væri 8%?

$$\Rightarrow 8 = 99,8 \longrightarrow \text{Verkefnið er óaðrbært!}$$

Ef þetta væru skuldabréf værum við tilbúin að greiða annars vegar 102,5 fyfir bræfið til að tryggja okkur 7% ávöxtun og hins vegar 99,8 til að tryggja 8% ávöxtun.

Ávöxtunarkrafa $\approx 7,9$ þá er P = 100



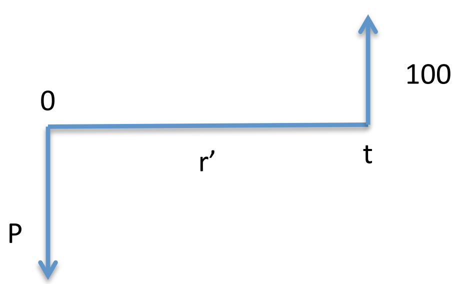
Hversu næst er greiðsluflæði fyrir breytingu á r'?

þ.e. hver er hallatalan?

$\Rightarrow$ Diffum núvirðisfallið:

+ **Dæmi:**

- $P = \dfrac{100}{(1+r)^t}$



$$\frac{dP}{dr} = \frac{d}{dr} \cdot \left(\frac{100}{(1+r)^t} \right) = -t \cdot \frac{100}{(1+r)^{t+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{-t}{1+r'}}_{-D_m} \cdot \underbrace{\frac{100}{/1+r')^t}}_{P}$$

þ.s. D_m : Meðaltími (Modified Duration)

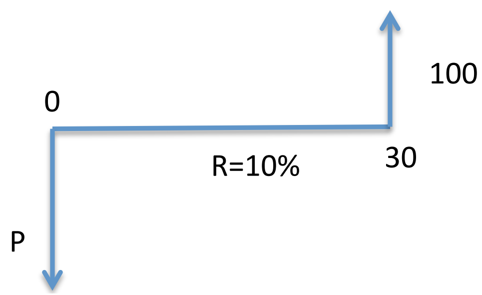
Notum $\dfrac{dP}{dr} = -D_m \cdot P$

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{\Delta P}{\Delta r} \Longrightarrow \frac{\Delta P}{\Delta r} \cong -D_m \cdot P$$

$$\Delta P \cong -D_m \cdot P \cdot \Delta r$$

Því hærri sem D_m er því hærri er hallatalan.

Dæmi:



Núvirðið $P = \dfrac{100}{(1+r)^{30}} = 5,731$

Hversu mikið breytist P fyrir aðra arðsemiskröfu?

$$\frac{dP}{dr} = \frac{t}{1+r} = \frac{30}{1+10\%} = 27$$

Þ.s. P^* *er núviriði fyrir* $\mp 1\% 4$ *breytingu á* r

$\Longrightarrow$ Mjög næmt fyrir breytingu á r: magnari uppá 27

1% breyting á r mun hafa 27% á árhif á P^*

Svo:

$$\Delta P \cong -D_m \cdot P \cdot \Delta r$$

$$= -27 \cdot 5,713 \cdot 1\% = \underline{-1,547}$$

$$\Delta P = P^* - P = -1,547$$

$$P^* = P - 1,547 = \underline{4,184}$$

Hefðum getað reiknað $P^* = \dfrac{100}{(1+11\%)^{30}} = 4,368$ sem er nákvæmt svar.

útreikingar P^* með meðaltíma er línuleg nálgun en upprunalega fallið nákvæmt svar.

$\Longrightarrow$ Þessi nálgun gildir bara nálgæt upprunalegu r og eykst skekkjan eftir því sem við förum lengra frá r. Skekkjumörkin eru háð D_m

<u>Almennt:</u>

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot C_k}{(1+r)^{k+1}}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{1+r} \cdot \frac{C_k}{(1+r)^k}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+r} \cdot P_k \quad \text{þ.s.} \quad P_k = \frac{C_k}{(1+r)^k} \quad \& \quad P = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Skilgr:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-1}{1+r} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k \equiv -D_m \cdot P$$

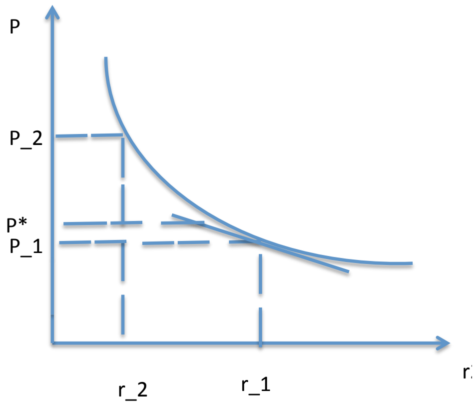
$$D_m = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot P}{P}$$

Meðaltími (Modified duration) Fyrir fleiri en einnar greiðslu flæði.

Notum meðaltímann til að nálga greiðsluflæðið

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{\Delta P}{\Delta r} = -D_m \cdot P$$

$$\Delta P = -D_m \cdot P \cdot \Delta r$$



P_1: Núvirði m.c. r_1
P_2: Núvirði m.c. r_2
P_2^* : Nálgað gildi á núvirði m.v. r_2

Notum breytingu á núvirði ΔP þeas.

$$r_1 \longrightarrow r_2$$

Ef við notum meðaltímann til að meta ΔP þá er:

$$\Delta P = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r$$

$$P_2^* - P_1 = -D_m \cdot P_1 \cdot (r_2 - r_1)$$

Kúpni

(convextivity) Líka þýtt sem íhvolfun

Modified duration - Meðaltími: Segir til um halla á núvirðisvaxtakúrfunni í gegnum punkt, þ.e. við notum hallatölu beinnar línu í snertipunktinum til að meta áhrif breytinga á ávöxtun, sem er leið við að meta og hafa eftirlit með áhættu.

íhvolfun(convextivity) gefur aðra og stundum betri nálgun við mat á áhættu. Hún er fundin með 2.stigs diffrun núvirðiskúrfunnar:

Íhvolfun er skilgreind sem:

$$G = \frac{1}{P} \cdot \frac{d^2 P}{dr^2}$$

$$G = \frac{1}{P} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} \right)$$

$$= \frac{-1}{P} \cdot \frac{d}{dr} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot C_k}{(1+r)^{k+1}} \right)) \frac{1}{P} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k \cdot k \cdot (k-1)}{(1+r)^{k+2}}$$

Við núvirðið P pg veiðeigandi r má nota meðaltíma D_m og íhvolfun G við að meða áhættu í ávöxtun.

$$\Delta P \approx -D_m \cdot P \cdot r + \frac{P \cdot G}{2} \cdot \Delta r^2$$

2.5.1 Árleg hlutfallstala kostnaðar

- Mælir heildarkostnað við lántöku án tillits til þess hvar lán er tekið. Hlutfallstalan mælir ekki bara vaxtakostnað heldur tekur hún einnig til annars kostnaðar við lántökuna, s.s. lántökugjalds, seðil- og innheimtukostnaðar.
- Árleg hlutfallstala kostnaðar er fundin samkvæmt reikniformúlu sem er að finna í reglugerð nr. 377/1993
- Árleg hlutfallstala kostnaðar er tala sem svarar til núvirðis allra skuldbindinga (lána, endurgreiðslna og kostnaðar) er til kann að koma eða þegar eru fyrir hendi og lánveitandi og neytandi hafa samið um. Hlutfallstalan skal reiknuð út í samræmi við eftirfarandi stærðfræðilíkingu:

<u>Formúla fyrir árlega hlutfallstölu</u>

$$\sum_{K=1}^{K=m} \frac{A_K}{(1+i)^{t_K}} = \sum_{K'=1}^{K'=m'} \frac{A'_{K'}}{(1+i)^{t_{K'}}}$$

Merking stafa og tákna:

K	er númer láns
K'	er númer endurgreiðslu eða kostnaðargreiðslna
A_K	er fjárhæð láns númer K
$A'_{K'}$	er fjárhæð endurgreiðslu númer K'
$\sum$	stendur fyrir summuna
m	er númer síðasta láns
m'	er númer síðustu endurgreiðslu eða kostnaðargreiðslna
t_K	er tímabilið í árum eða hluta úr ári milli dagsetningar láns nr. 1 og síðari lána nr. 2 til m
$t_{K'}$	er tímabilið í árum eða hluta úr ári milli dagsetningar láns nr. 1 og síðari lána nr. 2 til m'
i	er kostnaður í hundraðshlutum sem hægt er að reikna út (með algebru, þrepunarnálgunum eða með tölvuforriti) þar sem aðrir hlutar jöfnunnar eru þekktir úr samningnum eða á annan hátt.

<u>Árleg hlutfallstala kostnaðar:</u>

Skv. lögum um neytendaverð, sett fram í reglugerð nr. 377/1993

$$\text{Lánsfjárhæð - lántökukostn} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} \begin{cases} C_k: & \text{Árleg greiðsla} \\ r: & \text{vextir} \\ n: & \text{\# ára} \end{cases}$$

+ **<u>Dæmi:</u>**

- 100.000 kr. lán, 10% vextir, greitt í einni greiðslu eftir 1ár.
- lántökugjald 2%
- Stimpilgjald 1,5%
- Þinglýsingargjald 1350
- Greiðslugjald 350

Greiðsluflðið er þá:

t=0	t=1
10.000	110.000
-2.000	+350
-1.500	
-1.350	
$\sum$ 95.250	$\sum$ 110.350

Vextirnir eru í ran og veru $95.150 \cdot (1 + r) = 110.350$

$$\Longrightarrow r = 16\%\text{en ekki } 10\ \%$$

Dæmi: BÍlalán

Kaupverð	5.000.000
Innborgun	1.250.000
Lánsþörf	3.750.000

\+ Lán til 4 ára

- Lántökugjald 2%
- Stimpilgjald 1,5%
- Þinglýsingargjald 1.350

Hvað þarf lánsfjárhæðin að vera til að við fáum lán fyrir allri upphæðinni?

$$X = 3.750.000 + 2\% \cdot x + 1,5\% \cdot x + 1.350$$

$$X = 3.750.000 + 0,02x + 0,015x + 1.350$$

$$X = \frac{3.751.350}{0,965} = 3.887.409$$

Jafnar afborganir

t(mánuðir)	afb.	vextir	kostnaður	Greiðslur	Eftirstöðvar
0					3.887.409
1	80.988	30.451	350	111.789	3.806.423
2	80.988	29.817	250	111.155	3.725.434
...					
48	80.988	6,34	350	81.972	0

Árleg hlutfallstala

$$3.750.000 = \frac{111.789}{(1+r)^{1/12}} + \frac{111.155}{(1+r)^{2/12}} + \cdots + \frac{81.972}{(1+r)^{48/12}}$$
$$r' = 12.26\%$$

2.5.2 Lánsfjárhæð - Lántökukostnaður:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}$

C_k: árleg greiðsla

r: vextir

n: fjöldi ára

Dæmi:

Hvort er betra að hækka yfirdráttinn eða taka skammtímalán?

A. Skammtímalán

2% lántökukostnaður
1,5 % stimpilgjald
Annar kostnaður 1350 kr

$t=0$		$t=1$	
lán:	1.000.000	Greiðsla	1.000.000
lánt.k:	-20.000	Vextir	82.500
skrán. gj.	-15.000		
kostn.	-1.350		
Σ	973.650	Σ	1.082.500

Árleg hlutfallstala: $973.650 = \frac{1.082.500}{(1+r')^1} \Rightarrow r' = 11,2\%$

B. Yfirdráttur: 12,5 % vextir
Reiknaður mánaðarlega. Skuld í lok ársins.

$$1.000.000 \left(1 + \frac{12,5\%}{12}\right)^1 2 = 1.132.416$$

Árleg hlutfallstala:

$$1.000.000 = \frac{1.132.416^1}{(1+r''} \Rightarrow r'' = 13,2\%$$

2.5.3 Nokkur orð um mat á fjárfestingum

1. Meta:

   - Upphafleg fjárfesting
   - Væntar tekjur og gjöld
   - Hrakvirði í lok tímabils
   - Mannlegi þátturinn

   ⇒ Búa til greiðsluflæði

2. Vega og meta ávöxtunarkröfu

$$NPV = \text{ Fjárfesting } + \sum_{k=1}^{n} \frac{\text{Tekjur}}{(1+r)^k} \; {>}0? \; {<}0?$$

⇒ Val á r út frá samanburði við önnur verkefni

3. Meta hvort fjárfestingin er arðbær

$$\text{Ef } NPV > 0 \Rightarrow \text{Arðbær fjárfesting}$$

4. Næmnigreining

   Allar forsendur eru matskenndar.

   Framlegd = sala - breytilegur kostnaður

   EBITDA = **E**arnings **B**efore **I**nterests **T**ax **D**epreciation **A**mortization. EBITDA er mikið notuð sem mælikvarði á framlegð fyrirtækja og segir til um hversu miklu reksturinn er að skila, óháð fjármögnun hans og skattaumhverfi.

3 Ársreikningar

Á að gefa glögga mynd af:

+ Afkomu:
  - Tekjur og kostnaður brotinn upp á liði
  - Hagnaður/tap af rekstri
+ Efnahag
  - Eignir og skuldir
+ Fjárstreymi
  - Breytingar á handbæru fé

3.1 Uppbygging ársreiknings

+ Í ársreikningi er:
    - Efnahagsreikningur
    - Rekstrarreikningur
    - Sjóðstreymi
    - Skýringar
    - Skýrsla stjórnar

  Stjórn og framkvæmdastjóri bera **ábyrgð á að semja og undirrita ársreikning**

3.2 Efnahagsreikningur

Mynd 5: Efnahagsreikningur

$$\textbf{Eignir} = \textbf{skuldir} + \textbf{eigið fé}$$

3.2.1 Efnahagsreikningur - hugtök

+ Fastafjármunir
    - Eignir sem fyrirtæki kaupir til notkunar í rekstri
+ Veltufjármunir
    - Eignir sem hægt er að breyta í lausafé og borga skuldir eða borga út

$$\text{Þumalputtaregla:} \begin{cases} \text{Eignir bundnar} > 1 \text{ ár eru fastafjármunir} \\ \text{Eignir bundnar} < 1 \text{ ár eru veltufjármunir} \end{cases}$$

+ Mat á fastafjármunum

  – Almenna reglan er að birta eignir á kostnaðarverði
  - Ef mikill munur er talinn á kostnaðarverði og markaðsverði er hægt/ber að endurmeta eignir

+ Afskriftir fastafjármuna
  - Skoða síðar

+ Skammtímaskuldir
  - Skuldir á gjalddaga innan árs
  - Tilgreindar eftir uppruna

+ Langtímaskuldir
  - Skuldir á gjalddaga eftir meira en eitt ár
  - Líka tilgreindar eftir uppruna

Eigið fé

Hlutafé:	Úgerið hlutafé á nafnverði
Óraðstafað eigið fé:	Uppsafnaður hagnaður að frátöldum arðgreiðslum
Yfirverðsreikningur:	Mismunur nafnverðs hlutafjár og söluvirðis

Hlutafjáreigendur eiga fyrirtækið

Markaðsvermæti fyrirtækis = Hlutafé $\cdot$ gengi

Nokkur hugtök til viðbótar

Óefnislegar eignir: Vöruþróun, viðskiptavild

Viðskiptavild:

Eignir eru metnar á kostnaðar- eða markaðsvirði. Verðmæti geta falsit í ímynd eða vörumerkjum fyrirtækis sem ekki birtist í mati á eignum þess => Viðskiptavild

Dæmi:

Félag yfirtekur annað félag á hærra verði en bókfærðu virði. Mismunur er viðskiptavild. Viðskiptavild er færð til eignar (jákvæð) og endurmetin með tíma.

Afskirftir: Fastafjármuni þarf að aðskrifa í reikningi til að lýsa rýrnun í verðmati.

3.3 Rekstrarreikningur

	Rekstrartekjur
-	Kostnaðarverð
=	**Framlegð**
-	**-Rekstrargjöld (FK)**
=	Hagnaður fyrir skatta, fjármagnsliði og afskrifta => EBITDA
-	Afskriftir
=	**Hagnaður fyrir skatta og fjármagnsliði => EBIT**
-	Fjármagnsgjöld
=	**Hagnaður fyrir skatta =>**
-	Skattur
=	**Hagnaður eftir skatta**

Dæmi:

Um rekstrarreikning:

Rekstrartekjur	150.000	
-Kostn.verð	**-55.000**	(Breytilegur kostn. cost of goods sold)
=Framlegð	95.000.	
-Rekstrargjöld (FK)	**-82.000**	
=EBITDA	13.000	
-Afskriftir	**-4.000**	
=EBIT	9.000	
-Fjármagnsgjöld	**-3.000**	
=EBT	6.000	
-skattur	**900**	
Hagnaður e. skatta	5.100	

3.4 Sjóðstreymi

Rekstrarreikningur á að sýna heildartekjur og heildargjödl á rekstrartíma og hvernig hagnaður eða tap myndast.
Sjóðstreymi á að sýna hvernig handbært fé, t.d. bankareikningur, breytist á rekstrartíma.

+ Hversu miklu handværu fé skilaði rekstu og hvað varð um hann?

+ Hagnaður þýðir ekki alltaf hækkun á sjóðum eða handbæru fé. Sama gildir um tap.

  Dæmi um liði sem hafa ekki áhrif á sjóðsstöðu

  - Afskriftir, þróunarkostnaður,...

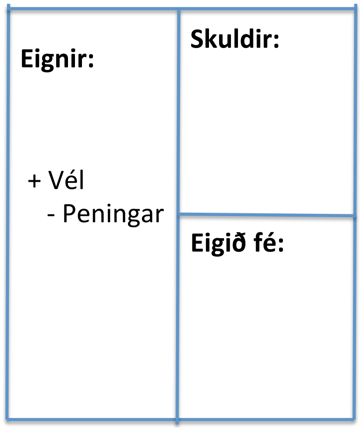
$$\text{Hagnaður} \neq \text{Peningur á bankabók}$$

- Sjóðstreymi getur verið gagnlegt við að meta virði fyrirtækja og greiðslugetu
- Getur skýrt hvers vegna fyrirtæki getur átt í geriðsluerfiðleikum, þó að hagnaður sé mikill
- Gefur vísbendingu um hversu vel fyrirtæki getur staðið undir nýjum fjárfestingum og arðgreiðslum

Sjóðstreymi

- Hver eru áhrifin í reikningshaldinu?

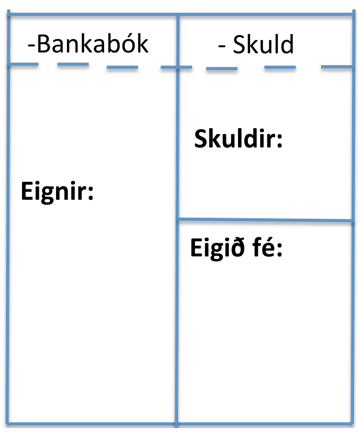
  Fyrirtæki kaupir vél á árinu



1. Vélin er færð á efnahagsreikning sem eign og bankareikningur lækkar um sömu upphæð
2. Samtala skulda og eigin fjár er óbreyttur
3. Sjóðstreymi sýnir að fjárfest hafi verið í vél

- Hver eru áhrifin í reikningshaldinu?

  Fyrirtæki greiðir niður skuld



1. Skuld á efnahagsreikningi lækkar sem og bankareikningur. Eigið fé er óbreytt
2. Rekstrarreikningur er óbreyttur
3. Sjóðstreymi sýnir að skuld hafi verið greidd og þar með hefur handbært fé lækkað.

3.4.1 Sjóðstreymi - Skipting

1. Rekstrarhreyfingar

   Veltufé frá rekstri: Afkoma leiðrétt fyrir liðum sem ekki hafa áhrif á sjóðsstöðu

   Handbært fé frá rekstri: Veltufé frá rekstri leiðrétt fyrir rekstrartengdum liðum

2. Fjárfestingahreyfingar

   - Breytingar á varanlegum liðum í efnahagsreikningi

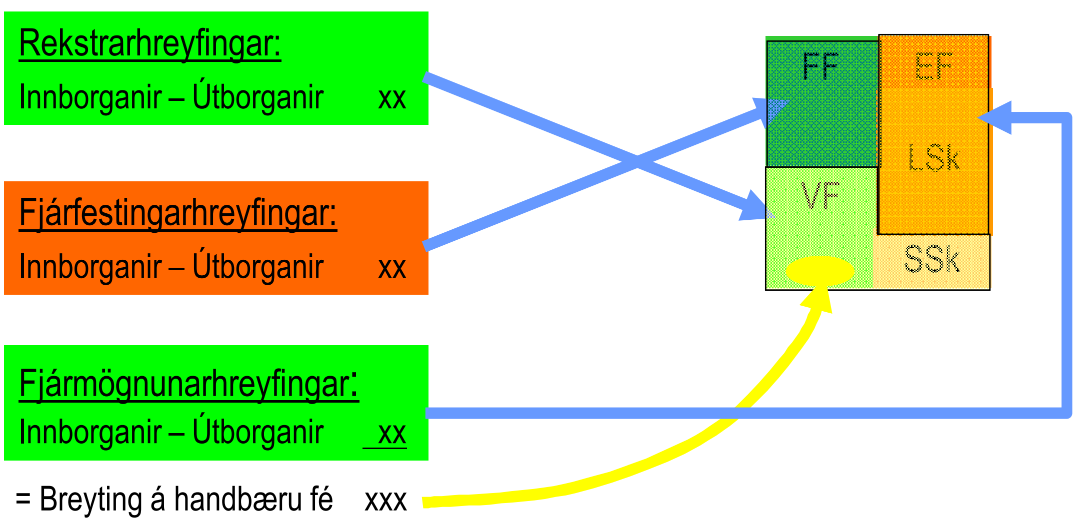
3. Fjármögnunarhreyfingar

   - Ný lán og afborganir

3.4.2 Mikilvægi sjóðstreymis

- Af sumum talinn vanmetinn kafli í ársreikningum
- Rekstrarreikningurinn stundum líka talinn oft ”ofmetinn”
  + Einblínt á ”hagnaðinn” sem getur verið teygjanlegur:
    - þar eru t.d. ótal matskenndar stærðir
- Sjóðstreymið er mjög erfitt að ”fegra”
  + Innborganir og útborganir verða nær alltaf mældar með 100% vissu

3.4.3 Sjóðstreymi (myndrænt)



Mynd 6: Sjóðstreymi: Uppruni og ráðstöfun handbærs fjár (Where got? - Where gone?)

FF:	Fastafjármunir
VF:	Veltufjármunir
EF:	Eigið fé
LSK:	Langtímaskuldir
SSK:	Skammtímaskuld

3.4.4 Sjóðstreymi - Uppsetning

	Hagnaður
-	**Frádráttur allra liða í rekstrarreikningi sem ekki hafa áhrif á fjárstreymi**
=	Veltufé frá rekstri
+/**-**	**Breyting á rekstrartengum eignum og skuldum**
=	Handbært fé frá rekstri
+/**-**	**Kaup eða sala á eignum**
+/**-**	**Ný lán eða afborganir**
+/**-**	**Nýtt hlutafé eða arðgreiðsla**
=	Breyingar á handbæru fé

Greining á sjóðstreymi

Rekstrarhreyfingar		
Hagnaður skv. RR	a	
Rekstrarliðir sem ekki hreyfa handbært fé	b	
Hreint veltufé frá rekstri	a+b	
Breyting skammtímaliða í EH	c	
Handbært fé frá rekstri	**d**	=(a+b+c)
Fjárfestingahreyfingar		
Inngreiðslur	x.xxx	
Útgreiðslur	(x.xxx)	
Samtals	**e**	
Fjármögnunahreyfingar		
Inngreiðslur	x.xxx	
Útgreiðslur	(x.xxx)	
Samtals	**f**	
Hækkun (lækkun) handbærs fjár	**d+e+f**	
Handbært fé í ársbyrjun	x.xxx	
Handbært fé í árslok	x.xxx	

Mynd 7: Greining á sjóðstreymi

Sjóðstreymi - einfalt dæmi

Sjóðstreymi		
Rekstrarhreifingar		
Hagnaður ársins	10.000	Hagnaður úr rekstrarreikningi að viðbættum afskriftum
Afskriftir	2.000	
Veltufé frá rekstri:	12.000	
Viðskiptakröfur	1.000	Breyting á veltufjármunum og skammtímaskuldum
Birgðir	-2.000	
Skammtímaskuldir	-2.000	
Handbært fé frá rekstri:	-3.000	
Fjárfestingahreyfingar		
Kaupverð varanlegra rekstrarfjármuna	-25.000	Fjárfestingar
Fjármögnunarhreyfingar		
Tekin lán	20.000	Fjármögnun – ný lán og afborganir
Afborganir	-20.000	
Breyting á handbæru fé	-16.000	

Mynd 8: Einfalt dæmi úr glærum kennara

3.5 Marel 2010 - 2011

3.5.1 Rekstrarreikningur Marel

	2011	2010
Rekstrartekjur		
Samtals rekstrartekjur	668.357	600.421
	668.357	600.421
Rekstrargjöld		
Kostnaðarverð seldra vara	-421.068	-373.347
Annar rekstrarkostnaður	-11.292	-8.073
Sölu og markaðskostnaður	-79.815	-70.647
Rannsóknar og þróunarkostnaður	-40.323	-36.474
Stjórnunarkostnaður	-28.853	-29.677
Afskriftir	-24.840	-24.842
	-606.191	-543.060
Rkstrarhagnaður	62.166	57.361
Fjármunatekjur og (fjármunagjöld)		
Fjármunagjöld	-19.854	-43.012
Fjármunatekjur	1.744	916
	-18.110	-42.096
Hagnaður fyrir skatta	44.056	15.265
Skattar		
Tekjuskattur	-9.595	-1.612
Hagnaður ársins	34.461	13.653

Mynd 9: Rekstrarreikningur Marel

3.5.2 Efnahagsreikningur Marel

Eignir

	2011	2010
Eignir		
Fastafjármunir		
Fasteignir og lóðir	108.088	109.418
Viðskiptavild	380.419	379.897
Aðrar óáþreifanlegar eignir	100.073	92.884
Eignahlutir í öðrum félögum	109	109
Viðskiptakröfur	3.115	3.669
Tekjuskattsinneign	11.567	12.619
Fastafjármunir samtals	603.371	598.596
Veltufjármunir		
Birgðir	99.364	80.590
Sölusamningar	38.046	18.354
Viðskiptakröfur	77.497	87.780
Eignir til sölu	555	598
Aðrar skammtímakröfur og fyrirframgreiddur kostnaður	28.051	27.815
"Restricted" cash	752	12.509
Handbært fé	30.182	51.399
	274.447	279.045
Eignir samtals	877.818	877.641

Mynd 10: Efnahagsreikningur Marel

Skuldir og eigið fé

	2011	2010
Eigið fé		
Hlutafé	6.667	6.694
Yfirverðsreikningur hlutafjár	317.100	320.250
Varasjóður	-8.612	-7.377
Óráðstafað eigið fé	58.316	23.702
Samtals eigið fé	373.471	343.269
Skuldir		
Langtímaskuldir:		
Skuldir við lánastofnanir	254.361	310.751
Tekjuskattsbinding	8.705	4.925
Afskriftarsjóður	6.902	6.719
Skuldabréfalán	12.419	11.028
	282.387	333.423
Skammtímaskuldir:		
Fyrirfram innheimtar tekjur	64.029	78.306
Viðskiptaskuldir	125.570	107.783
Skattar ársins	2.293	1.624
Skuld við lánastofnanir	27.062	9.898
Óráðstafað eigið fé	3.006	3.320
	221.960	200.931
Samtals skuldir	504.347	534.354
Samtals eigið fé og skuldir	877.818	877.623

Mynd 11: Efnahagsreikningur Marel

3.5.3 Sjóðstreymi Marel

Sjóðstreymi Marel	2011
Rekstrarhreyfingar	
Hagnaður ársins	62.166
Rekstrarliðir sem ekki hafa árhif á fjárstreymi:	
Afskriftir	24.840
Hagnaður af sölu eigna	-71
Breytingar á viðskiptakröfum	554
Breytingar á viðskiptaskuldum	0
Hreint veltufé frá rekstri	87.489
Breytingar á rekstrartengdum liðum:	
Birgðir	-51.469
Aðrar viðskiptakröfur	9.623
Aðrar viðskiptaskuldir	18.278
Þóknanir	-205
Breytingar á skammtíma eignum og skuldum	-23.773
Hreint veltufé frá rekstri	63.716
Greiddur tekjuskattur	-3.133
Greiddur vaxta og fjármagnskostn.	-17.400
Handbært fé frá rekstri	43.183
Fjárfestingarhreifingar	
Vaxtatekjur	682
Kaup á fasteignum, vélum og tækjum	-8.850
Fjárfesting í óáþreifanlegum eignum	-20.715
Hagnaður sölu fasteigna, véla og tækja	193
	-28.690
Fjármögnunarhreifingar	
Hagnaður af sölu eigin bréfa	2.417
Kaup eigin bréfa	-5.700
Sala eigin bréfa	225
Tekjur af lánafyrirgreiðslu	20.363
Afborganir langtímalána	-64.652
Breyting á skammtímalánum	500
Afborganir fjármögnunarsamninga	-273
	-47.120
Hækkun (lækkun) á handbæru fé	-32.627
Gengishagnaður (-tap)	-342
Handbært fé í ársbyrjun	63.903
Handbært fé í lok ársins	30.934

Mynd 12: Sjóðstreymi Marel

3.6 Takmarkanir ársreikninga

Nokkur Hugtök

Rekstrartekjur	–	Income
Kostnaðarverð	–	Cost of Goods Sold
Framlegð	–	Gross Profit
Rekstrargjöld	–	Operating Expenses
Afskriftir	–	Depreciation and Amortization Afskriftir – Depreciation and Amortization
Hagnaður	–	Net Income
EBITDA	–	Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation and Amortization

3.6.1 Notendur upplýsinga úr ársreikningum

- Fyrir hverja?
  + Innri notendur:
    – Stjórn, stjórnendur, starsmenn.
  + Ytri notendur:
    - Hluthafar, fjárfestar, lánardrottnar, birgjar, viðskiptavinir, hið opinbera, samfélagið o.s.frv.

3.7 Reikningshald

+ Byggir á bókhaldsjöfnunni:
  - Fjármunir = Fjármagn
+ Fjármagn kemur frá:
  - Eigendum
  - Lánadrottnum
+ Þess vegna verður bókhaldsjafnan svona:
  - Eignir = Eigið fé + Skuldir
  - Hægri hliðin sýnir tilkall eigenda (hluthafa) og lánadrottna til eigna í félagi
+ Fjárhæðirnar bókhaldsjöfnunnar eru í **efnahagsreikningi**

3.8 Grunnhugtök reikningshalds

+ **Eignir**
    - Verðmæti sem fyrirtæki ræður yfir og hafa orðið til með viðskiptum eða vegna liðinna atburða. Í þeim felst hæfi til að afla tekna í framtíðinni.
+ **Skuldir**
    - Kvaðir á fyrirtæki til að láta af hendi eignir eða veita þjónustu í framtíðinni vegna viðskipta eða liðinna atburða.
+ **Eigið fé**
    - Mismunur eigna og skulda. Tilkall eigenda til hreinnar eignar.●
+ **Tekjur**
    - Aukning eigna eða lækkun skulda á tilteknu tímabili vegna afhendingar á vörum og þjónustu eða annarra verkefna í meginstarfsemi fyrirtækis.
+ **Gjöld**
    - Skerðing eigna eða aukning skulda á tilteknu tímabili vegna afhendingar á vörum og þjónustu eða annarra verkefna í meginstarfsemi fyrirtækis.
+ **Afkoma (hagnaður eða tap)**
    - Mismunur tekna og gjalda á tilteknu tímabili. Hefur bein áhrif á eigið fé.

3.9 Rekstrarhreyfingar

+ RR er ætlað að draga fram afkomu félagsins
    - Tekjur- og gjöld færð á rekstrargrunni
    - Tekjur og gjöld eru þannig færð án tillits til þess hvort þau eru innheimt eða greidd.
    - Fyrirfram innheimt og greitt er fæt í EH sem skuld eða eign en kemur ekki fram í RR
+ Í sjóðstreymi er niðurstaða RR (hagnaður/tap) leiðrétt til að draga fram sjóðsáhrif rekstrarins
    - Er sýnt á greiðslugrunni.

Innborganir	Útborganir
Rekstrarhreyfingar:	
Innheimt frá viðskiptavinum	Greitt til birgja
Mótteknar vaxta- og arðstekjur	Launagreiðslur til starfsmanna
Aðrar innborganir tengdar rekstri	Greiddir vextir og skattar
	Aðrar greiðslur tengdar rekstri
Fjárfestingarhreyfingar:	
Sala á landi, byggingum og vélum	Kaup á landi, byggingum og vélum
Sala á fjárfestingareignum, t.d. hlutabréfum og öðrum verðbréfum	Kaup á fjárfestingareignum, t.d. hlutabréfum og öðrum verðbréfum
Innheimtar afborganir af útlánum	Greiðslur vegna útlánastarfsemi
Fjármögnunarhreyfingar:	
Tekin ný lán	Afborganir af langtímaskuldum
Útgáfa og sala nýrra hluta	Kaup á eigin hlutabréfum
Útgáfa og sala skuldabréfa	Greiðsla arðs til hluthafa

Mynd 13: Athafnir sem snerta handbært fé

3.10 Helstu Grunnreglur

+ Kostnaðarverðsregla
  - eignir, skuldir, tekjur og gjöld eru færð við því verði sem gildir er viðskiptin eiga sér stað
  - þetta upphaflega kostnaðarverð er lagt til grundvallar við hver reikningsskil eftir það
  - gangvirði (e. fair value) er þó heimilt að nota við mat á skráðum skuldabréfum og fjáreignum til sölu, skv. IFRS
+ Tekjuregla (innlausnarregla)
  - tekjur skal skrá þegar til þeirra hefur verið unnið
+ Jöfnunarregla
  - leitast skal við að jafna gjöldum á móti tekjum
+ Varkárnisregla
  - varast ber ofmat eigna/tekna og vanmat skulda/gjalda

3.11 Helstu Grunnforsendur

+ Afmörkuð rekstrareining
  - reikningsskilin taka til nákvæmlega tiltekinnar rekstrareiningar / skipulagsheildar
+ Áframhaldandi rekstrarhæfi (e. going concern)

- einingin er í rekstri og engin áform um stöðvun
- reksturinn mun geta gengið a.m.k. næsta ár

+ Tiltekið tímabil
    - jafnlöng uppgjörstímabil – ár, ársfjórðungur, o.s.frv.
    - almanaksárið algengast – getur verið annað tímabil
+ Tiltekinn gjaldmiðill
    - bókhald og reikningsskil í einum gjaldmiðli.
    - miðað er við að verðgildi hans haldist nokkuð stöðugt

3.12 Nokkur hugtök

Móðurfélag: Félag sem ræður yfir öðrum félögum

Dótturfélag: Félag sem er undir yfirráðum annars félags

Hlutdeildarfélag: Félag sem á a.m.k. 20% eignarhlut í öðru félagi getur litið á það sem hlutdeildarfélag sitt

Samstæða: Móðurfélag og dótturfélög þess

3.13 Skattar

- Hlutafélög greiða 20% tekjuskatt
- Fjármagnstekjuskattur er 20%
- Einstaklingar geriða um 37.34 % - 46,24% í tekjuskatt og útsvar. Meðalútsvar er 14,41% (13,66 % - 15,14%)
- Önnur gjöld eru gjald í framkvæmdasjóða aldraðra (9.182) og útvarpsgjald (18.800)
- Sjá nánar t.d. í skattabæklingi KPMG (http://www.kpmg.com/IS/is/utgefidefni/greinar-og-utgefid/Pages/Skattabaeklingur-2012.aspx)

3.14 Einfalt dæmi um rekstur

Fyrirtæki stofnað um rekstur vélar:

+ Kaupverð vélar 200.000
+ Hlutafé 80.000
+ Langtímalán 22.000 til 10 ára: [10% vextir]
+ Birgðir í lok árs 1 og 2: 25.000

Viðskiptakröfur:	20.000 á ári 1
	50.000 á ári 2
Viðskiptaskuldir:	8.333 á ári 1
	15.833 á ári 2

Vélin er afskrifuð um 30.000 á ári:

Efnahagsreikningur:

		ár: 0	ár: 1	ár: 2	
Veltufé:					
	Handbært fé	40.000	11.333	44.993	
	Viðskiptakröfur		20.000	50.000	
	Birgðir		25.000	25.000	
		40.000	56.333	110.993	
Fastafjármunir					
	Vél	200.000	170.000	140.000	
Eignir alls:		240.000	226.333	259.993	
Skammtímaskuldir:					
	Viðskiptaskuldir		8.333	15.833	
Langtímaskuldir:					
	Langtímalán	220.000	198.000	176.000	
	Hlutafé	200.000	20.000	20.000	
	Óráðstafað eigið fé		0	48.160	af RR
Skulir og eigið fé:		240.000	226.333	259.933	

Eignir = skuldir + eigið fé

Á ári 1 = 226.333

Handbært fé(1) = 226.333 - 170.000 - 20.000 - 25.000 = 11.333

Eignir á ári 2 = 259.993

Handbært fé(2) = 259.993 - 140.000 - 50.000 - 25.000 = 44.993

Rekstrarreikningur:

		ár: 1	ár: 2
Veltufé:			
	Tekjur	127.000	300.000
	Gjöld	-75.000	-190.000
	Afskritir	-30.000	-30.000
EBIT:		$\overline{22.000}$	$\overline{80.000}$
	Vetir(10% af eftirst.)	-22.000	-19.800
Hagnaður f. skatta		$\overline{0}$	$\overline{60.200}$
	Skattur	0	12.040
Hagnaður eftir skatta:		$\overline{0}$	$\overline{48.160}$

Sjóðstreymi:

	ár: 1	ár: 2
Hagnaður	0	0
Afskriftir	+ 30.000	+ 30.000
Veltufé frá rekstri	$\overline{30.000}$	$\overline{78.160}$
Δ Viðskiptakröfur	- 20.000	- 30.000
Δ Viðskiptaskuld	8.333	7.5000
Δ Birgðir	- 25.000	0
Handbært fé	$\overline{\underline{\underline{-6.667}}}$	$\overline{\underline{\underline{55.660}}}$
Fjárfestingarhreyfingar	0	
Fjármögnunarhreyfingar	- 22.000	22.000
Breytingar á handb. fé	$\overline{\underline{\underline{-28.667}}}$	$\overline{\underline{\underline{33.660}}}$

4 Kennitölur

+ Kennitölur eru gagnlegar við að meta rekstur fyrirtækja og gera samanburði á milli þeirra
  - Kennitölur tengdar rekstri, eignum og skuldum og sjóðstreymi.
  - Kennitölur tengdar nýtingu á fjármunum og fjárstreymi
+ Heiðræði við skoðun kennitalna(!)
  – Meta fleiri en eina kennitölu og draga réttar ályktanir!
  – Velja ”réttu” fyrirtækin fyrir samanburð
  – Skoða kennitölur yfir tímabil, t.d. 5 ár
+ Kennitölur eru sýndar sem hlutföll eða %
+ Kennitölur veita gagnlegar upplýsingar
  - Nauðsynlegt er þó að þekkja takmarkanir þeirra
  - Matskenndar stærðir
  - Leið til að finna afbrigðilegar/óvenjulegar stærðir
  - Vísbendingar um breytingar í rekstrarumhverfir
  - Kennitala ein og sér gerir lítið gagng, oft segir sagan eða þróun yfir ákveðiði tímabil meira en talan ein og sér
+ Kennitölum er skipt í nokkra flokka eftir því hvað þeim er ætlað að sýna

4.0.1 Kennitölur - Framlegð og álagning

- <u>Framlegð</u>

$$\boxed{\text{Framlegð} = \text{Sala} - \text{Hráefniskostn.} - \text{Laun} - \text{annar breytilegur kostn.}}$$

- <u>Álagning (í verslun)</u>

$$\boxed{\text{Álagning} = \frac{\text{Sala}}{\text{Kostnaðarverð seldra vara}}}$$

4.0.2 Kennitölur - Arðsemi

<u>EBITDA - framlegð</u>

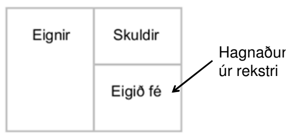
$$\boxed{\text{EBITDA-framlegð} = \frac{\text{Rekstrarhagnaður fyrir afskriftir}}{\text{Rekstrartekjur}}}$$

Hversu hátt flutfall rekstrartekna fyrirtækis stendur eftir til að mæta fjármagnsgjöldum, sköttum og hagnaði.

Arðsemi eigin fjár (ROE), Return on Equity

$$\boxed{\text{Arðsemi eigin fjár} = \frac{\text{Hagnaður}}{\text{Eigið fé}}}$$

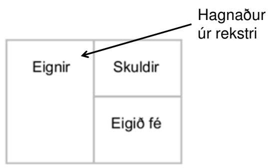
+ Ávöxtun fjármagns sem bundið er í rekstri
    - Sýnir ávöxtun á eign hluthafanna
+ Verður að skoðast samhlið eiginfjárhlutfalli



Arðsemi eigna(ROA), Return on Assets

$$\boxed{\text{Arðsemi eigna} = \frac{\text{Hagnaður}}{\text{Eignir}}}$$

+ Sýnir ávöxtun alls fjár sem bundið er í félaginu án tillits til hver á tilkall til þess
+ Verður að skoðast með hliðsjón af uppbyggingu efnahagsreiknings



Hagnaðarhlutfall, Return on Sales

$$\boxed{\text{Hagnaðarhlutfall} = \frac{\text{Hagnaður}}{\text{Rekstrartekjur}}}$$

Hlutfall rekstrartekna af hagnaði

$$\boxed{\text{Hagnaðarhlutfall rekstrar} = \frac{\text{EBIT}}{\text{Rekstrartekjur}}}$$

Arðgreiðsluhlutfall, Payout Ratio

$$\boxed{\text{Arðgreiðsluhlutfall} = \frac{\text{Arður}}{\text{Hagnaður}}}$$

+ Sýnir hversu stórt hlutfall hagnaðar er greiddur út í arð
+ Mörg fyrirtæki greiða út stóran hluta af hagnaði til eigenda sinna. Telja að eigendur geti ávaxtað þá fjármuni betur en fyrirtækið.

4.0.3 Kennitölur - Rekstur

Veltufjárhlutfall, Current Ratio

$$\boxed{\text{Veltufjárhlutfall} = \frac{\text{Veltufjármunir}}{\text{Skammtímaskuld}}}$$

+ Veltufjármunir eru þær eignir sem hægt er að breyta auðveldlega í handbært fé
+ Skammtímaskuldir þarf að greiða innan skamms tíma
+ Hlutfallið ætti helst að vera > 1

4.0.4 Kennitölur - Sjóðstreymi

Gæði hagnaðar, Quality of Earnings

$$\boxed{\text{Gæði hagnaðar} = \frac{\text{Handbært fé frá rekstri}}{\text{Hagnaður}}}$$

+ Hagnaður er ekki alltaf það sama og peningur í kassann!
+ Tengir saman rekstrarafkomu og sjóðistreymi/fjármunamyndun félags
+ Óeðlilegt að hlutfallið sé undir einum til lengir tíma

Handbært fé á móti skuldum, Quality of Earnings

$$\boxed{\text{Handbært fé á móti skuldum} = \frac{\text{Handbært fé frá rekstri}}{\text{Skuldir}}}$$

+ Segir til um hversu vel rekstur stendur undir skuldum
+ Gefur vísbendingu um hvort rekstur stefnir í gjaldþrot
+ Þumalputtaregla:
  - Ef kennitala er undir 10% til lengri tíma þá er ekki næg fjármunamyndun til að greiða niður skuldir á 10 árum
  - Ef kennitala er undir 20% til lengri tíma þá er ekki næg fjármunamyndun til að greiða niður skuldir á 5 árum

Cashflow Adequasy Ratio

$$\boxed{\text{CAshflow Adequasy Ratio} = \frac{\text{Handbært fé frá rekstri}}{\text{Fjárfestingar} + \text{Birgðaaukning} + \text{Arðgreiðslur}}}$$

+ Er Nægileg fjármunamyndun í rekstri til að standa undir vexti og viðgangi félags?

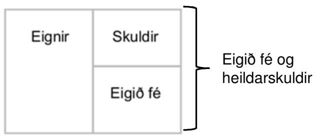
  $\longrightarrow$ Ef hlutfall er yfir 1 þá er svarið já.
+ Æskilegt að skoða í ljósi nokkurra ára rekstrarsögu

4.0.5 Kennitölur - efnahagur

Eiginfjárhlutfall, Equity to Assets Ratio

$$\boxed{\text{Eiginfjárhlutfall} = \frac{\text{Eigið fé}}{\text{Eigið fé og heildar skuldir}}}$$

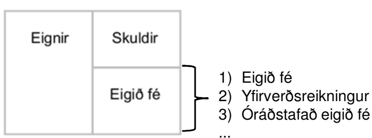
+ Eigið fé sem hlutfall af efnahagsreikningi
+ Vitnar um fjárhagslegan styrk félags



Innra virði hlutafjár

$$\boxed{\text{Innra virði} = \frac{\text{Eigið fé}}{\text{Hlutaflé}}}$$

+ Hvers virði eru hlutabréf samkvæmt efnahagsreikningi
+ Innra virði er gjarnan borið saman við markaðsverðmæti hlutabréfanna til að meta verð þeirra miðað við bókfært eigið fé þeirra
+ Innra virði getur verið hátt t.d. vegna uppsafnaðs hagnaðar

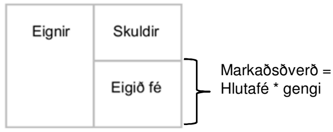


4.0.6 Kennitölur - Verðmat

V/H hlutfall, Price Earnings Ratio

$$\boxed{\text{V/H hlutfall} = \frac{\text{Markaðsverð}}{\text{Hagnaður}}}$$

- Algengasti mælikvarðinn fyrir hlutabréf
- Jafngildi hversu margra ára hagnaður er virði fyrirtækis á markaði
- Hátt V/H gefur til kynna að í markaðsverði felist væntingar til rekstur sem sjáist ekki enn í hagnaði



<u>V/I hlutfall, Price to Book Ratio, Q-ratio</u>

$$\boxed{\text{V/I hlutfall} = \frac{\text{Markaðsverð}}{\text{Eigið fé}}}$$

- Ber saman markaðsverð fyrirtækis og virði skv. efnahagsreikningi
- Ef hlutfall er hátt þá telja fjárfestingar að eignir séu vanmetnar skv. bókhaldi
- Ef hlutfall er lágt, lægra en 1, þá eru eignir ofmetnar í bókhaldi

<u>EBITDA margfaldari</u>

$$\boxed{\text{EV/EBITDA} = \frac{\text{Markaðsverð + vaxtaberandi skuldir - reiðufé}}{\text{EBITDA}}}$$

- EV, Enterprive Value, er markaðsvirði félags ástamt vaxtaberandi skuldum að frádreignu reiðufé
- EBITDA margfaldarinn segir til um hverju reksturinn skilar til eigenda og lánadrottna
- EBITDA tekur þó ekki tillti til atriða eins og
  - fjárfestingarþarfar sem getur haft áhrif á sjóðstreymið
  - fjárbindingu í veltufjármunum sem getur einnig dregið verulega úr sjóðstreyminu

    $\longrightarrow$ þá notað EBIT

4.0.7 Kennitölur - Fjárstreymi

<u>Innheimtutími útistandandi krafna</u>

$$\boxed{\text{Innheimtutími útistandandi krafna} = \frac{\text{Meðalstaða viðskiptakrafna}}{\text{Vörusala}}}$$

- Segir til um hversu lengi tekur að innheimta kröfu í árum

- Venjulega margfaldað með 260 til að færa yfir í daga

Veltuhraði birgða

$$\boxed{\text{Veltuhraði birgða} = \frac{\text{Kostnaðarverð seldra vara}}{\text{Meðalstaða birgða}}}$$

+ Segir til um hversu oft lagernum er velt
+ Birgðir binda fjármagn, viljum ekki eiga miklar birgðir heldur selja þær sem fyrst

4.1 Mat á fjárfestingum

Heint núvirði (Net Present Value; NPV)

$$NPV = -\text{Fjárfesting} + \frac{\text{Tekjur}_1 - \text{Kostn}_1}{(1+r)} + \frac{\text{Tekjur}_2 - \text{Kostn.}_2}{(1+r)^2} + \cdots$$

Ávöxtunarkrafa r sem gefur NPV = 0 er kölluð núllpunktsávöxtunarkrafa eða innri vetir; IRR (Internal Rate of Return)

Dæmi:

Verkefni með fjárfestingu upp á 5.000:

Ár	Tekjur	Gjöld	Samtals
0			
1	3.000	1.000	2.000
2	3.500	900	2.600
3	3.600	1.000	2.600

$$NPV = -5000 + \frac{2000}{1+r} + \frac{2.600}{(1+r)^2} + \frac{2.600}{(1+r)^3}$$

Ávöxtunarkrafa:

- 10 % 5.920 - 5.000 = 920
- 15 % 5.415 - 5.000 = 415
- 20 % 4.997 - 5.000 = -23

$$\Longrightarrow IRR = 19,7\%$$

4.2 MARR: Minimum Acceptable Rate of Return

Hvernig finnum við "rétta" ávöxtunarkröfu?

Ákvörðun hvort ráðist er í verkefnið ræðst af því hvaða ávöxtunarkrafa er notuð

+ MARR: Minimum Acceptable(Attractive) Rate of Return
  - Lágmarksávöxtun verkefnis, þ.e. ávöxtun verður að vera hærri en þessi stuðull.
  - Metum hvernig við getum ávaxtað fjármuni með örðum hætti og ávörðum ávöxtunarkröfu og arðbærni verkefnis út frá því

Dæmi:

Val á milli tveggja verkefna:

Ár	A	B	-	Mat C(B-A)
0	- 20.000	- 100.000		- 80.000
1	10.000	40.000		30.000
2	12.000	50.000		38.000
3	10.000	50.000		40.000

Reiknum IRR:

$$A : -20.000 + \frac{100.000}{(1+r_1)} + \frac{12.000}{(1+r_1)^2} + \frac{10.000}{(1+r_1)^3} \Longrightarrow r_1 = 28\%$$

$$B : -100.000 + \frac{40.000}{(1+r_2)} + \frac{50.000}{(1+r_2)^2} + \frac{50.000}{(1+r_2)^3} \Longrightarrow r_2 = 18\%$$

+ Ef við ættum 10.000 og MARR væri 12 %
  - Fjárfestum í A fyrir 20.000
  - Eftir stendur 80.000 sem við gætum ávaxtað á 12 % vöxtum

    Er það arðbært?

$$C : -80.000 + \frac{30.000}{(1+r_3)} + \frac{38.000}{(1+r_3)^2} + \frac{40.000}{(1+r_r)^3} \Longrightarrow r_3 = 16\%$$

Það væri betra að fjárfesta í B en A og þurfa að ávaxta afganginn af preningunum á 12 % vöxtum

4.3 Verðmat fyrirtækja

Þrjár aðferðir við vermat á restri:

1. Kennitölusamanburður
   - Bera saman kennitölur við sambærileg fyrirtæki
2. Endurmetið eigið fé
   - Bera saman raunvirði og bókfært virði eigna
3. Sjóðstreymisgreining
   - Meta framtíðarsjóðstreymi og núvirða með ”réttri” ávöxtunarkröfu

4.3.1 Verðmat

- Fyrista regla í verðmati:

$$\text{Garbage in} \Longrightarrow \text{Garbage out}$$

- Önnur regla í verðmati:

þar er erfit að spá, sérstaklega um framtíðina

Niðurstaðan eða verðmatið verður alltaf mjög háð gefnum forsendum, spá um framtíðina og aðferðafræðinni. Það skemmir ekki fyrir ef sá sem gerir verðmatið þekkir viðfangsefnið vel!

5 Verðmat Fyrirtækja

5.1 Hvað myndar verðmæti fyrirtækja

- Verð fyrirtækis endurspeglar þau verðmæti sem fjárfestir væntir að rekstur þess skapi í framtíð að viðbættu verðmæti eigna sem ekki eru nýtar við að búa til framtíðarverðmæti.
  + Framtíðar verðmæti eru summa fjárflæðis frá rekstri að frádreginn nettó fjárfestingu í framleiðsluþáttum núvirt með ávöxtunarkröfu sem endurspeglar áhættumat fjárfestis.
  + Eignir se mekki eru nýtta við að búa til framtíðar verðmæti geta t.d. verið eftirfarandi:
    - Handbært fé
    - Verðbréf
    - Fasteignir sem ekki tengjast starfsemi félagsins
  + Því gildir fyrir nær öll fyrirtæki að verðmæti þeirra ráðast af væntingum um framtíðar rekstur

+ Rekstrarárangur í fortíð hefur því enga aðra merkingu fyrir verðmæti fyrirtækja en að vera vísbending um hvaða verðmætum fyrirtækið gæti skilað í framtíðinni
+ Verðmæti hlutabréfa eru ekki gervi verðmæti eins og oft heyrist fleygt fram heldur er um að ræða ávísun á verðmæti í framtíð sem háð eru óvissu
+ Framtíðar sjóðstreymi má áætla með aðferðum sem byggja í grunninn á líkindareikningi
+ Óvissan endurspeglast í ávöxtunarkröfu
    + Þeim mun meiri áhætta - þeim mun hærri ávöxtunarkrafa
    + Þeim mun hærri ávöxtunarkrafa - þeim mun lægri verð (annað óbreytt)

5.2 Lestur ársreikninga við verðmöt

- Ársreiknnigar eru mikilvægar upplýsingar við gerð rekstrarspár sem spegill á rekstrarárangur og fjárhagslega stöðu á þeim tímapunkti sem hann er gerður og þar með vísbending um hvað vænta má í framtíð
    + Það er því mikilvægt að geta lesið úr þeim upplýsingum sem birtast í ársreikningi
- Aðrar upplýsingar sem geta komið að gagni
    + Greiningar og spár um þann markað sem fyrirtækið starfar á
    + Upplýsingar um samkeppnisaðila
    + Efnahagsspár
    + Áætlanir félags ef þær eru aðgengilegar
    + Yfirlýsingar stjórnenda um horfur í rekstri

Rekstrarreikningur Marel

	2011	2010
Rekstrartekjur		
Samtals rekstrartekjur	668.357	600.421
	668.357	600.421
Rekstrargjöld		
Kostnaðarverð seldra vara	-421.068	-373.347
Annar rekstrarkostnaður	-11.292	-8.073
Sölu og markaðskostnaður	-79.815	-70.647
Rannsóknar og þróunarkostnaður	-40.323	-36.474
Stjórnunarkostnaður	-28.853	-29.677
Afskriftir	-24.840	-24.842
	-606.191	-543.060
Rekstrarhagnaður	62.166	57.361
Fjármunatekjur og (fjármunagjöld)		
Fjármunagjöld	-19.854	-43.012
Fjármunatekjur	1.744	916
	-18.110	-42.096
Hagnaður fyrir skatta	44.056	15.265
Skattar		
Tekjuskattur	-9.595	-1.612
Hagnaður ársins	34.461	13.653

- **Gagnlegar spurningar:**
    - **Eru tekjur að vaxa eða dragast saman**
    - **Hvað skýrir breytingu í tekjum**
    - **Bindur vöxtur fjármagn (sjá efnahag)**
    - **Hvernig eru kostnaðarhlutföll að þróast**
    - **Hvernig eru afskriftir í samanburði við fjárfestingar**
    - **Hver er fjármagnskostnaður félagsins og hvernig er hann í samanburði við sambærileg félög**
    - **Hvert er virkt skatthlutfall félagsins**
    - **Er félagið að greiða skatta eða getur það frestað þeim**

Efnahagsreikningur Marel
Eignir

	2011	2010
Eignir		
Fastafjármunir		
Fasteignir og lóðir	108.088	109.418
Viðskiptavild	380.419	379.897
Aðrar óáþreifanlegar eignir	100.073	92.884
Eignahlutir í öðrum félögum	109	109
Viðskiptakröfur	3.115	3.669
Tekjuskattsinneign	11.567	12.619
Fastafjármunir samtals	603.371	598.596
Veltufjármunir		
Birgðir	99.364	80.590
Sölusamningar	38.046	18.354
Viðskiptakröfur	77.497	87.780
Eignir til sölu	555	598
Aðrar skammtímakröfur og fyrirframgreiddur kostnaður	28.051	27.815
"Restricted" cash	752	12.509
Handbært fé	30.182	51.399
	274.447	279.045
Eignir samtals	877.818	877.641

- **Gagnlegar spurningar**
  - Er félagið yfirfjárfest eða undirfjárfest
  - Óefnislegar eignir – skoða hvað stendur á bak við þær og átta sig á hvaða áhrif bókhaldsaðferðir skv. alþjóðlegium reikningsskilastöðlum (IFRS) hafa
  - Eru veltufjármunir að aukast eða minka sem hlutfall af veltu – fjárbinding kostar því hún dregur úr fjárstreymi til fjárfesta
  - Þegar horft er á hanbært fé þarf að átta sig á hvort það sé allt laust til ráðstöfunar (sjá umfjöllun um hreinar skuldir)

Efnahagsreikningur Marel
Skuldir og eigið fé

	2011	2010
Eigið fé		
Hlutafé	6.667	6.694
Yfirverðsreikningur hlutafjár	317.100	320.250
Varasjóður	-8.612	-7.377
Óráðstafað eigið fé	58.316	23.702
Samtals eigið fé	373.471	343.269
Skuldir		
Langtímaskuldir:		
Skuldir við lánastofnanir	254.361	310.751
Tekjuskattsbinding	8.705	4.925
Afskriftarsjóður	6.902	6.719
Skuldabréfalán	12.419	11.028
	282.387	333.423
Skammtímaskuldir:		
Fyrirfram innheimtar tekjur	64.029	78.306
Viðskiptaskuldir	125.570	107.783
Skattar ársins	2.293	1.624
Skuld við lánastofnanir	27.062	9.898
Óráðstafað eigið fé	3.006	3.320
	221.960	200.931
Samtals skuldir	504.347	534.354
Samtals eigið fé og skuldir	877.818	877.623

- **Gagnlegar spurningar**
  - Endurspeglar bókfært eigið fé markaðsvirði eigin fjár – sjá umfjöllun um upplausnarvirði
  - Hvað af skuldum félagsins eru vaxtaberandi (mynda fjármagnskostnað)
  - Hvernig er skuldahlutfall með tilliti til rekstrarhæfis
  - Hverjar eru hreinar skuldir félagsins þ.e. Vaxtaberandi skuldir að frádregnu handbæru fé sem ekki er bundið
  - Eru viðskiptaskuldir að aukast eða minka sem hlutfall af veltu – Jákvætt að geta fjármagnað sem mest af rekstrinum í gegnum birgja ef um hefðbundar birgjaskuldir eru að ræða sem eru gegn gjaldfresti og án vaxta þar sem það sparar vaxtakostnað og eykur fjárflæði til fjárfesta

Sjóðstreymi Marel

	2011
Rekstrarhreyfingar	
Hagnaður ársins	62.166
Rekstrarliðir sem ekki hafa áhrif á fjárstreymi:	
Afskriftir	24.840
Hagnaður af sölu eigna	-71
Breytingar á viðskiptakröfum	554
Breytingar á viðskiptaskuldum	0
Hreint veltufé frá rekstri	87.489
Breytingar á rekstrartengdum liðum:	
Birgðir	-51.469
Aðrar viðskiptakröfur	9.623
Aðrar viðskiptaskuldir	18.278
Þóknanir	-205
Breytingar á skammtíma eignum og skuldum	-23.773
Hreint veltufé frá rekstri	63.716
Greiddur tekjuskattur	-3.133
Greiddur vaxta og fjármagnskostn.	-17.400
Handbært fé frá rekstri	43.183

Fjárfestingarhreifingar	
Vaxtatekjur	682
Kaup á fasteignum, vélum og tækjum	-8.850
Fjárfesting í óáþreifanlegum eignum	-20.715
Hagnaður sölu fasteigna, véla og tækja	193
	-28.690
Fjármögnunarhreifingar	
Hagnaður af sölu eigin bréfa	2.417
Kaup eigin bréfa	-5.700
Sala eigin bréfa	225
Tekjur af lánafyrirgreiðslu	20.363
Afborganir langtímalána	-64.652
Breyting á skammtímalánum	500
Afborganir fjármögnunarsamninga	-273
	-47.120
Hækkun (lækkun) á handbæru fé	-32.627
Gengishagnaður (-tap)	-342
Handbært fé í ársbyrjun	63.903
Handbært fé í lok ársins	30.934

- **Gagnlegar spurningar**

  Skoða afskriftir á móti fjárfestingum
  Á sér stað binding í rekstrarfjármunum

Efnahagsreikningur 30. júní 2012

	Skýr.	30.6.2012	31.12.2011
Eignir			
Fjárfestingareignir	6	26.309.165	27.104.361
Eignir til eigin nota		24.972	22.688
Áhættufjármunir og langtímakröfur		19.570	45.101
Fastafjármunir		26.353.707	27.172.150
Ógreitt söluverð fjárfestingareigna		0	15.000
Næsta árs afborgun langtímakrafna		6.326	12.212
Kröfur á tengd félög	11	81.650	1.601.103
Viðskipta- og aðrar skammtímakröfur	7	290.546	283.381
Handbært fé		1.721.537	861.971
Veltufjármunir		2.100.059	2.773.667
Eignir samtals		28.453.766	29.945.817
Eigið fé			
Hlutafé		1.300.000	5.610.100
Varasjóður		6.864.713	716.113
Matsbreyting fjárfestingareigna		671.824	312.864
Óráðstafað eigið fé		653.749	30.006
Eigið fé		9.490.286	6.669.083
Skuldir			
Vaxtaberandi skuldir	9	17.490.559	17.029.661
Ógreitt kaupverð fasteigna		0	24.000
Tekjuskattsskuldbinding		589.056	564.794
Langtímaskuldir		18.079.615	17.618.455
Vaxtaberandi skuldir	9	572.868	2.133.524
Ógreitt kaupverð fasteigna		0	52.706
Skuld við tengd félög	11	0	3.153.900
Viðskipta- og aðrar skammtímaskuldir	10	310.997	318.149
Skammtímaskuldir		883.865	5.658.279
Skuldir samtals		18.963.480	23.276.734
Eigið fé og skuldir samtals		28.453.766	29.945.817

- **Hvað er sérstakt við þessa mynd?**

- **Ekki alltaf allt sem sýnist:**

  Endurspeglar bókfært verð eigna markaðsvirði?

  Markaðsvirði Regins um 13,3 ma.kr. En bókfært verð 9,5 ma.kr.

  Markaðsverð Regins endurspeglar að verð pr. fm sé um 195 þús kr.

  Bókfært verð Regins endurspeglar að verð pr. fm sé um 175 þús kr.

USD million	30.06 2012	31.12 2011
Assets		
Operating Assets	287.7	276.2
Intangible assets	176.1	176.7
Other non-current assets	25.7	30.2
Total non-current assets	**489.5**	**483.1**
Other current-assets	143.0	140.0
Markatable securities	17.0	27.3
Cash and cash equivalents	172.1	79.4
Total current assets	**332.1**	**246.7**
Total assets	**821.7**	**729.7**

USD million	30.06 2012	31.12 2011
Equity and liabilities		
Stockholders equity	**253.7**	**263.4**
Loans and borrowings non-current	136.7	163.1
Other non-current liabilities	34.9	33.5
Total non-current liabilites	**171.6**	**196.6**
Loans and borrowings current	30.4	33.7
Trade and other payables	172.2	135.0
Deferred income	193.8	101.0
Total current liabilites	**396.4**	**269.8**
Total equity and liabilities	**821.7**	**729.7**
Equity ratio	31%	36%
Current ratio	0.84	0.91
Net interest bearing debt	-22.0	90.2
Interest bearing debt	167.1	196.9

5.3 Núvirðing

- Sparnaður er frestun á neyslu
- Fjárfesting í hlutabréfum/fyrirtækjum er ein tegund sparnaðar
- Ávöxtunarkrafa er það leiguverð fjármagns sem fjármagnseigandi vill fá greitt fyrir að fresta neyslu
  - Ávöxtunarkrafa er því jöfn fórnarkostnaði við að fresta neyslu í dag
- Núvirðing er aðferð til að reikna tímavirði peninga
- Sjóðstreymi (e. cash flow) getur t.d. verið
  - Greiðslu skuldabréfs
  - Leigugreiðslur af fasteign
  - Nettó sjóðstreymi frá rekstri fyrirtækja

+ Nettó fjárstreymi frá tilteknu fjárfestingarverkefni eins og t.d. Virkjun

Núvirt sjóðstreymi (DCF = Discounted Cashflow) er:

$$DCF = \sum_{0}^{n} \frac{CF_i}{(1+r)^i} = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+r)^n}$$

$\longrightarrow$ þar sem CF_i er sjóðstreymi á tíma i og r = vextir

Enginn eðlismunur á núvirðingu eftir eðli fjárstreymis en mismunandi óvissa skapar mismunandi viðfangsefni og kallar á mismunandi ávöxtunarkröfu

- Sú greiðslur fastar og greiðsluröðin óendanleg þá verður formúlan:

$$DCF = \frac{CF}{r}$$

- Vaxi greiðslur föstum (línulegum) vexti milli tímabila þá gildir að:

$$DCF = \frac{CF_0 \cdot (1+g)}{(r-g)}$$

$\longrightarrow$ þar sem g = framtíðarvöxtur

Þessi formúla nefnist Gordon's formúla

5.4 Aðferðafræði við verðmöt. Frjálst sjóðstreymi

Hvað er frjálst sjóðsflæði?

- Nettó tekjustreymi frá fyrirtæki til eigenda (hluthafa)
- Tekjustreymi sem myndast yfir tíma og er mis verðmætt eftir því hvenær það verðu til
- Undirstaða verðmætis fyrirtækja (hlutabréfa)

Hvert er verðmæti frjáls sjóðsflæðis?

- Fjárfesting er frestun á neyslu og einstaklingar vilja fá greitt fyrir að fresta neyslu
- Ávöxtunarkrafa er fórnarkostnaður þess að fresta neyslu
- Sjóðsflæði núvirt með ávöxtunarkröfu til að reikna verðmæti þess
- Sjóðsflæði sem verður til nálægt í tíma er verðmætara en sjóðsflæði sem verður til eftir lengri tíma

Hvert er verðmæti frjáls sjóðsflæðis? - Einfalt dæmi

- Frjálst fjárflæði 100 kr. pr. ár um alla framtíð
- Ávöxtunarkrafa 10%

$$\text{Verðmæti} = 100/10\% = 1.000$$

Hvert er verðmæti frjáls sjóðsflæðis? - Gordons's Formúla

- Frjáls fjárflæði 100 kr. á þessu ári
- Ávöxtunarkrafa 10 %
- Vöxtur fjárflæðis 5 % á ári

$$\text{Verðmæti} = 100 \cdot \frac{(1+5\%)}{(10\% - 5\%)} = 2.100$$

5.5 Frjálst sjóðsflæði - Tvær aðferðir

Hagnaður af reglulegri starfsemi

+ Afskriftir

- Breytingar á rekstrartengdum eignum og skuldum

Fjárfestingar

Breytingar á langtímalánum

= Frjálst sjóðsflæði til hluthafa

Núvirt með ávöxtunarkröfu á eigið fé

Hagnaður fyrir fjármagnsliði

- Reiknaðir skattar

= NOPLAT (Net opperating profit/loss after taxes)

+ afskritir

- Breytingar á rekstrartengdum eignum og skuldum

- Fjárfestingar

= Frjálst sjóðsflæði til fjármagnseigenda

Núvirt með WACC

5.5.1 WACC

- WACC = vegin meðalkostnaður fjármagns (e. weighted average cost of capital)

$$\begin{aligned}\text{WACC} = \;& \text{Lánsfjárhlutfall} \cdot \text{Vextir af lánsfé} \cdot (1 - \text{Skattar}) \\ & + (1 - \text{Lánsfjárhlutfall}) \cdot \text{ávöxtunarkrafa á eigið fé}\end{aligned}$$

  WACC er aðferð til að meta ávöxtunarkröfur:

$$\text{WACC} = \frac{E}{C} \cdot r_e + \frac{S}{C} \cdot r_s(1 - T)$$

  Þar sem:

  E: Eigið fé

  S: Skuldir

  C = E +S

  T: Skattur(t.d. 20%)

  r_e: Ávöxtunarkrafa á eigið fé

  r_s: Lánsvextir

- Dæmi:

  Lánsfjárhlutfall = 60 %

  Vextir af lánsfé = 10 %

  Ávöxtunarkrafa á eigið fé = 15 %

  Skattar = 30 %

  WACC = $60\% \cdot 10\% \cdot (1 - 30\%) + 40\% \cdot 15\% = 10,2\%$

- Miða skal við markaðsverð eiginfjár þegar lánsfjárhlutfall er metið

5.5.2 Frjálst sjóðsflæði

Frjáls sjóðsflæði til fjármagnseigenda

- Hreinar vaxtaberandi skuldir

= Frjálst sjóðsflæði til hluthafa

Peningaleg staða í upphafi

- Er það sjóðsflæði sem fyrirtækið hefur þegar skilað en hefur ekki verið greitt út til hluthafa
- Handbært fé + skammtímaverðbréf

Aðrar peningalegar eignir

- Eru þær eignir sem ekki hafa áhrif á framtíðar sjóðsflæði, þ.e. ekki nauðsynlegar til að viðhalda rekstri fyrirtækisins
- Þessar eignir má því leysa upp og líta á sem laust fé
- Taka verður tillit til skatts af söluhagnaði
- Dæmi: Hlutabréfaeign í öðrum félögum, lóð sem ekki er í notkun

Núvirt frjálst fjárflæði - Dæmi

Dæmi	2009 Actual	2010 Actual	2011 Actual	2012 Actual	2013 Forecast	2014 Plan	2015 Plan	2016 Plan
Net sale (excl. VAT)	**100**	**103**	**108**	**112**	**121**	**130**	**134**	**138**
revenue growth		**3%**	**5%**	**4%**	**8%**	**7%**	**3%**	**3,0%**
Net margin	42	43	44	46	49	52	54	55
Net margin %	42,0%	41,5%	41,0%	41,0%	40,5%	40,0%	40,0%	40,0%
Opperational cost	15	15	16	17	18	19	20	21
% of sale	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%
EBITDA	**27**	**27**	**28**	**29**	**31**	**32**	**33**	**34**
EBITDA%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Depreciation	4	4	4	4	4	4	4	4
EBIT	**23**	**23**	**24**	**25**	**27**	**28**	**29**	**30**
Interest	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3
EBT	**20**	**20**	**21**	**22**	**24**	**25**	**26**	**27**
Taxes	**- 4**	**- 4**	**- 4**	**- 4**	- 5	- 5	- 5	- 5
Profit/Loss	**16**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
Net investments	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**	**5**	**4**	**4**
Debt					**50**	**54**	**55**	**57**

DCF Dæmi	2009 Actual	2010 Actual	2011 Actual	2012 Actual	2013 Forecast	2014 Plan	2015 Plan	2016 Plan	Terminal value
Profit/Loss	16	16	17	18	19	20	21	22	
Depreciation	4	4	4	4	4	4	4	4	
Operating Cash Flow	20	20	21	22	23	24	25	26	
Change in working capital	-	-	-	-	-	-	-	-	
Investments	- 3	- 3	- 5	- 5	- 5	- 5	- 4	- 4	
Net Loan repayment	-	-	-	-	-	4	2	2	
FCF	17	17	16	17	18	23	23	23	191
Time factor					1,0	2,0	3,0	4,0	4,0
DFC					16	17	15	13	109

Equity value	**170**
Net debt	50
EV	220

Assumptions	
Debt	50
interest	6%
Tax ratio	20%
RROE	15,0%
Future growth	2,5%
Wacc	12,7%

DCF Dæmi	2009 Actual	2010 Actual	2011 Actual	2012 Actual	2013 Forecast	2014 Plan	2015 Plan	2016 Plan	Terminal value
EBIT	23	23	24	25	27	28	29	30	
Calculated taxes	- 5	- 5	- 5	- 5	- 5	- 6	- 6	- 6	
Depreciation	4	4	4	4	4	4	4	4	
NOPLAT	22	23	23	24	26	27	28	28	
Change in working capital	-	-	-	-	-	-	-	-	
Investments	- 3	- 3	- 5	- 5	- 5	- 5	- 4	- 4	
FCF	19	20	18	19	21	22	24	24	245
Time factor					1,0	2,0	3,0	4,0	4,0
DFC					18	17	16	15	152

EV	**219**
Net debt	50
Equity value	169

5.6 Aðferðarfræði við verðmöt. Kennitölur.

5.6.1 Kennitölur - Mismunandi þættir

- Flokkar kennitalna sem hjálpa til við gerð rekstrarspár:
  - Lausafjárhæfni
  - Nýting eigna
  - Nýting skulda
  - Arðsemi
  - Markaðsvirði

Mikilvæt að samanburður sé gerður við svipuð fyrirtæki

5.6.2 Lausafjárhæfni

- Veltufjárhlutfall
  + Veltufjármunir/skammtímaskuldir
  + Quick(acid) test
    - Skammtímaegin. - Birgðir / skammtíamskuldir

5.6.3 Eignastýring

- Veltuhraði birgða
  + Vörusala / Birgðir
- Veittur greiðslufrestur
  + Kröfur á viðskiptavini/(sala/360)
- Veltuhraði fastra egina (fastafjárm)
  + Regl.rekstrartekjur/Fastafjármunir
- Veltuhraði heildareigna
  + Regl.rekstrartekjur/Heildareignir

5.6.4 Skuldastýring

- Skuldahlutfall
  + Heildarskuldir/heildareignum
- Vaxtaþekja
  + EBIT/Vaxtagjöld
- Skuldaþekja
  + Veltufé frá rekstri/Næsta árs afborgun langtímalána

5.6.5 Arðsemi

- Hagnaðurhluti tekna
  + Hagnaður/regl.rekstrartekjur
- Grunn hagnaðarkraftur
  + EBIT/Heildareignum
- Arðsemi heildareigna (ROA)

- Hagnaður/Heildareignir

- Heildararðsemi fjármagns (ROIC)
  - (Hagnaður + Vextir)/Heildarfjármagn

- Arðsemi eiginfjár (ROE)
  - Hagnaður/EF

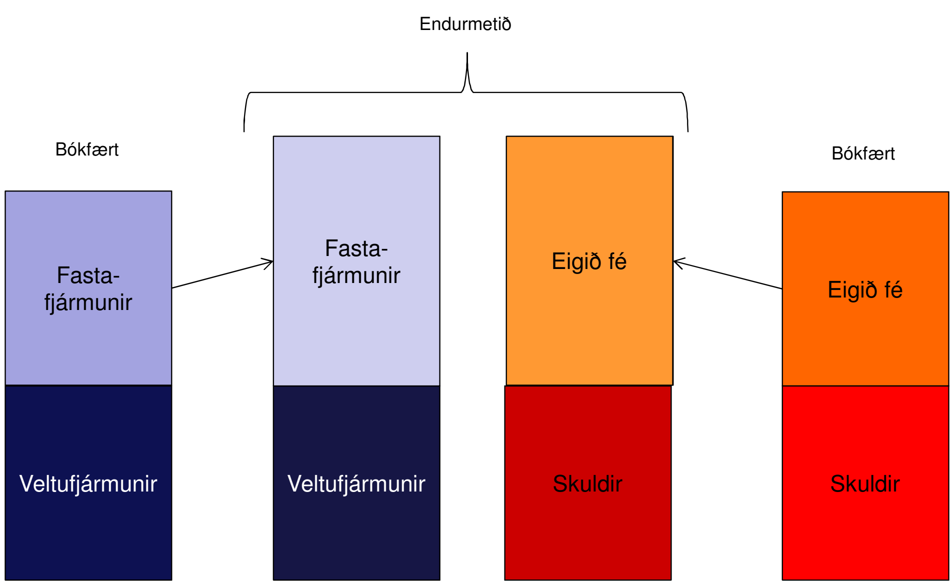
5.6.6 Markaðsvirði

- Verð/Hagnaður (V/H) = P/E
- Verð/Veltufé frá rekstri (V/S)
- PEG = (V/H)/Vöxtur hagnaðar (stundum notað spá 5 ára meðaltal)
- Verð/bökfært verð eiginfjár (V/B) = Q
- Innra virði =
  - Eigið fé (bókf. eða endurmetið)/nafnverð hlutafjár

5.7 Aðferðafræði við verðmöt. Upplausnarvirði og EVA

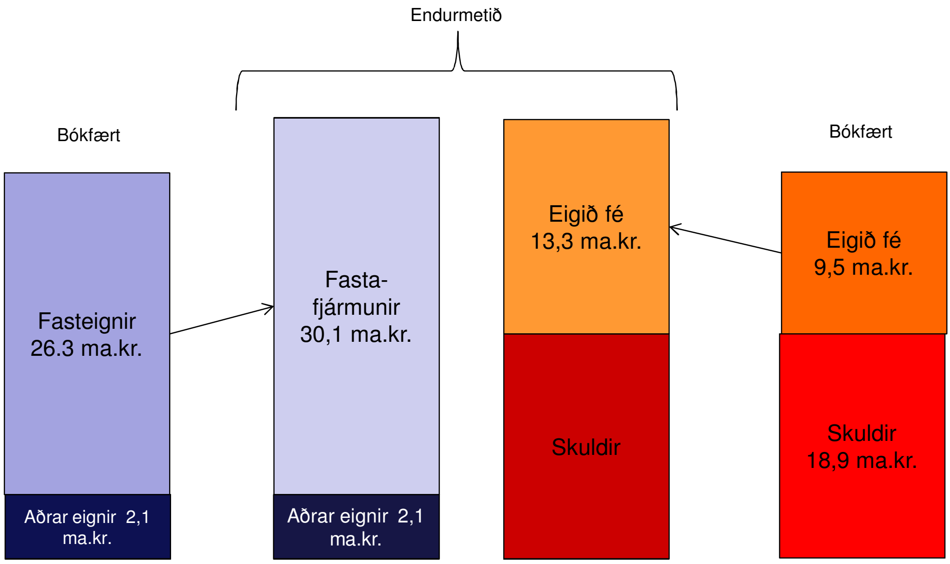
5.7.1 Upplaustnarvirði

- Við mat á upplausnarvirði er metið virði eigna og skulda fyrirtækis og fæst þá út virði eiginfjár
- Hugsunin í raun þess - Hvað situr eftir til handa hluthöfum ef allar eignir eru seldar og allar skuldir gerðar upp
- Allar stærðir metnar á markaðsvirði sem getur verið frábrugðið bókfærðu virði



Upplausnarvirði - Dæmi

- Tökum Reginn fasteignafélag sem dæmi og gefum okkar að verð á markaði endurspegli raun fasteignaverð eigna félagsins



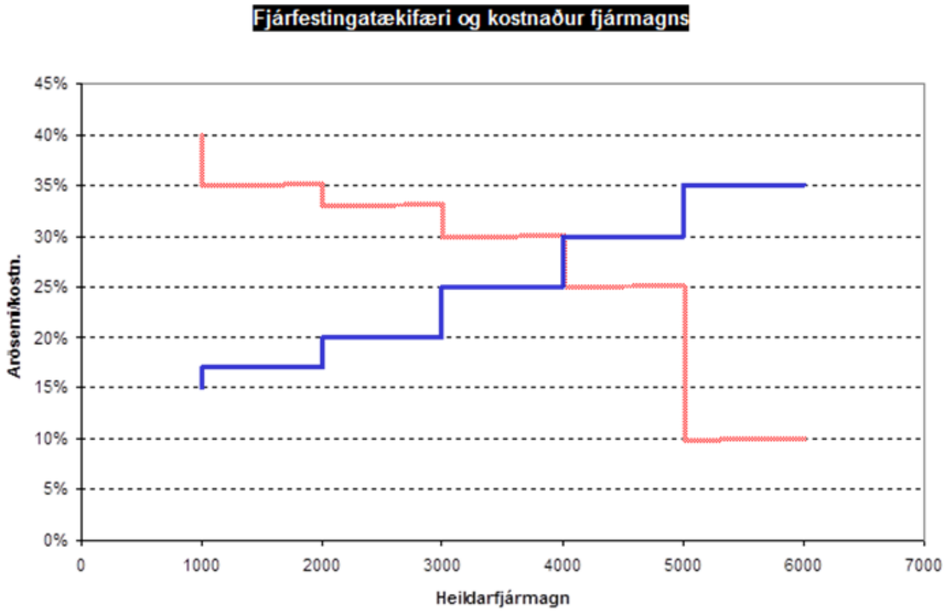
5.7.2 Upplausnarvirði

- Af hverju getur verið munur á milli mats skv. upplausnarvirði og bókfærðs verð
- Af hverju getur verið munur milli upplausnarvirðis og mats skv. frjálsu sjóðsflæði
- Veltur á því hvort það fjármagn sem búið er að fjárfesta í rekstrinum skili ávöxtun umfram þá ávöxtunarkröfu sem gerð er til rekstrarins
  + Til að mæla það er notuð svokölluð EVA aðferðafræði - Economic Value Added

5.7.3 Hvað er EVA (Economic Value Added)

- Hagnaður af reglulegri starfsemi eftir skatta mínus vegin meðalkostnaður fjármagns eftir skatta margf.m. heildarfjármagn mínus skammtímaskuldir

5.7.4 Vegin meðalkostnaður fjármagns (WACC, MCC, ROIC)



5.7.5 EVA

EVA = Hagnaður e. skatta

+ (WACC e. skatta X (Heildareignir - Skammtímaskuldir))

- Tæki til að meta hvort frekar fjárfesting borgar sig - því nátengt hugsun á bak við upplausnarvirði
- Lykilatriðið er að reikna WACC-ið
  + Skuldahlið fyrirtækis skiptist í tvennt
    - Skuldar 4.500.000 og borgar 10 % vexti af þeirri upphæð
    - Eigið fé bókfært er 1.000.000 en markaðsverð er 3.000.000
- Gerum ráð fyrir að skattar séu 30 %
  + Vaxtagreiðslur eru frádráttabærar ⇒ Fjármagnskostnaður e. skatta v/ lánanna er þá $0,1 \cdot (1 - 0,3) = 0,07$ eða 7 %
  + Hver er ávöxtunarkrafa sem að eigendur gera til fyrirtækis, þ.e. hvað gætur þeir fengið fyrir fjárfestingu sína í öðru formi sem hefur sömu áhættu, segjum að ácöxtunarkrafan sé 15%
- WACC-ið er þá:

$$\text{WACC} = \frac{(0,07 \cdot 4.500.000) + (0,15 \cdot 3.000.000)}{4.500.000 + 3.000.000} = 0,102 = 10,2\%$$

- EVA eyksta því aðeins ef að hagnaður e. skatta er meiri en fjármagnskostnaður v/ fjárfestinga

$$\text{EVA} = \text{IC} \cdot (\text{ROIC} - \text{WACC})$$

5.8 Framvirkur samningur

Við viljum framvirkja verð, F, eignar/vöru til T-ára. Gerum bara ráð fyrir vaxtakostnaði:

$$F = S(0) \cdot (1 + r)^T$$

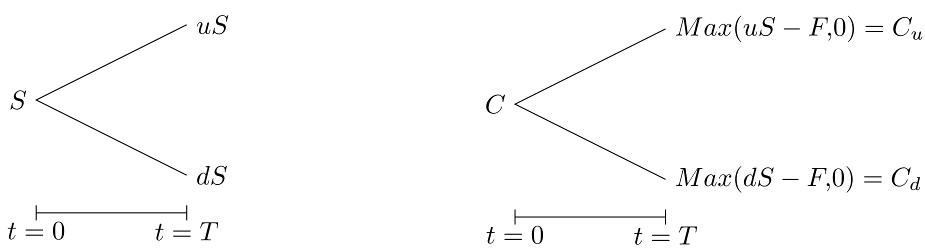
Þar sem:

S(0): Verð eignar í dag

r: Vextir

5.9 Verðlagning með óvissu

Skilgreinum:



Þar sem:

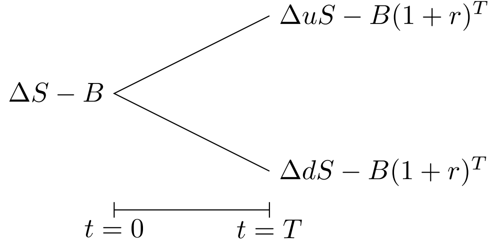
S = Verð vöru a á tíma t = 0

F = Samningsverð ákveðið á tíma t = 0

Verðlagning:

1) $Max(uS \cdot F, 0) = C_u = \Delta uS - B(1 + r)^T$

2) $Max(dS \cdot F, 0) = C_d = \Delta dS - B(1 + r)^T$



<u>Þar sem:</u>

Δ: Hversu mikið mikið er keypt af undirliggjandi eigu á t = 0

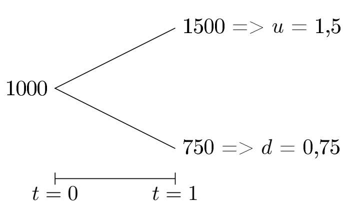
$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$$

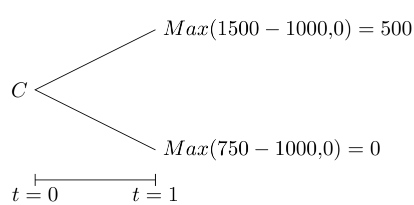
B: Fjárhæð láns á tíma t = 0

$$B = \frac{1}{(1+r)^T} \cdot \frac{dC_u - uC_d}{u-d}$$

Dæmi:

Vara kostar 1000 í dag og hækkar í 1500 með 40 % líkum eða lækkar í 750 með 60 % líkum. Vextir í dag eru 15% með samfelldum vöxtum. Hvað kostar trygging með samningsverð 1000. T=1.





Þá er:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} = \frac{500 - 0}{(1,5 - 0,75) \cdot 1000} = 2/3$$

$$B = e^{-rT} \cdot \frac{dC_u - uC_d}{u-d} = e^{-15\%} \cdot \frac{0,75 \cdot 5000 - 0 \cdot 0,15}{1,5 - 0,75} = \underline{\mathbf{430{,}4}}$$

6 Tenging milli mismunandi aðferðafræða

6.0.1 Frjálst sjóðsflæði vs. Kennitölur

+ Kennitölur - Helstu kostir

  - Einfaldleiki
  - Fljótlegt í notkun
  - Vísbending um áhættu

+ Kennitölur - Helstu ókostir

  - Setja margar stæðrir inn í eina og festa hlutfallið á milli þeirra
  - Framtíðin ??
  - Gerir engan greinarmun á því hvort framtíaðrhagnaður verði til eftir skamman eða langan tíma

Frjálst sjóðsflæði vs. Kennitölur - Samband FCF og V/H

- FCF = 100, áv.kr = 10 %, vöxtur = 8 % og verðmæti 5.400 samkvæmt Gordons's formúlu
- G.r.f. að afskriftir sú jafnar fjárfestingum og því sé FCF = hagnaður
- Þá er V/H = 5.400 / 100 = 54

- FCF = 100, áv.kr = 15 %, vöxtur = 8 % og verðmæti 1.543 samkvæmt Gordons's formúlu
- G.r.f. að afskriftir sú jafnar fjárfestingum og því sé FCF = hagnaður
- Þá er V/H = 1.543 / 100 = 15,4
- **Vöxtur hagnaðar, vöxtur veltu, verðmæti**
  - Velta 1.000 og hagnaður 100 í upphafi og profit margin því 10 %
  - Ef velta vex um 10 % og profit margin óbreytt, þá er hagnaður 110
  - Ef profit margin batnar um 10 % (verður 11 %) og velta er óbreytt, þá er hagnaður einnig 110
  - Líklegt að meiri fjárfestinga sé þörf til að auka veltu en profit margin
- Ekki er allt fengið emð vexti fyrirtækis (í veltu talið) þó mikið sé horft á þá stærð. Stjórnendur sem einblína á vöxt veltu eru ekki að hámarka verðmæti hluthafa

6.1 Ávöxtunarkrafa

- Þú ert dýr ráðgjafinn!
- Samsett úr tveim þáttum
  + Áhættulaus ávöxtun (ríkisskuldabréf)
    - Áhægtuálag á fyrirtækið sjálft

6.1.1 Áhægtuálag fyrirtækis

- Atriði sem hafa ber í huga
  + Áhættuálag á markaðssafnið
  + Atvinnugrein (rekstraráhætta)
  + Fjármagnsskipan
  + Seljanleiki
  + Stjórnunarleg áhætta
  + Skráð vs. óskráð

6.1.2 Raunvöxtur vs. Nafnvöxtur

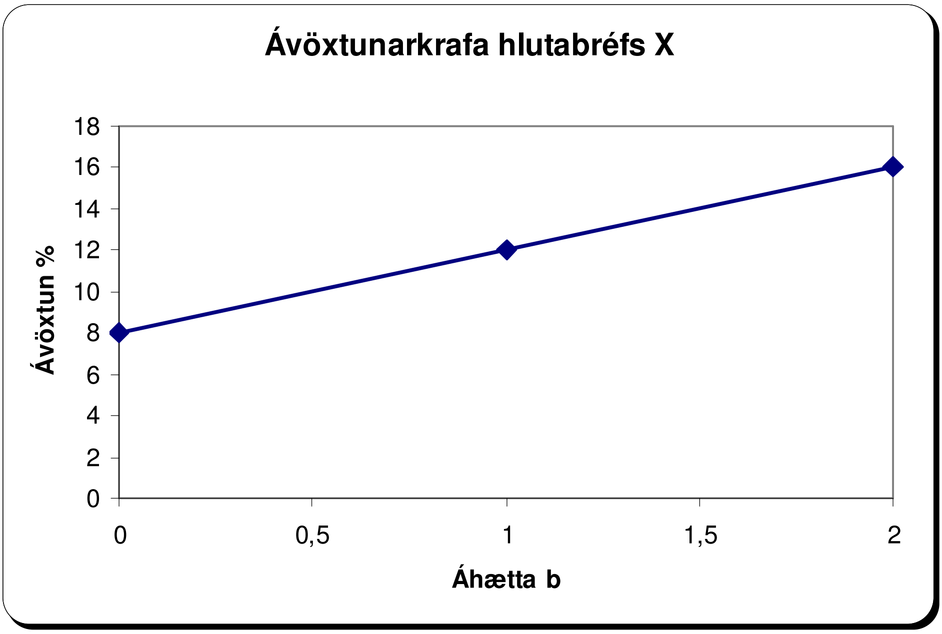
- Í sjálfu sér skiptir ekki máli hvort er notað
- Raunvöxtur
  - Notuð raunávöxtunarkrafa
  - Þarf ekki að spá fyrir um verðlagsþróun
- Nafnvöxtur
  - Notuð nafnávöxtunarkrafa
  - Spá um verðlagsþróun hluti af líkaninu
- ATH hver er grunnmynt spálíkansins

6.1.3 CAPM

- Vapital Asset Pricing Mode: Aðferðafræði til að finna fræðilega rétta ávöxtunarkröfu
- Aðferðafræði sem byggier á að finna samhengi ávöxtunar og áhættu með aðfallsgreiningu
- Strangt til tekið þarf að framkvæma aðfallgreiningu fyrir allar eignir í heiminum en í öllu falli þarf að framkvæma mat á mjög stóur og dreifðu safni

- Því erfitt að framkvæma matið en mjög góður þankagangur við val á ávöxtuanrkröfu
- Miðað við viðbót í verðbréfasafn

$$k_x = k_{RF} + (k_m - k_{RF})b_X$$



6.1.4 BETA

- Beta er mælikvarði á áhættu tiltekinnar fjárfestingar í samanburði við aðrar eignir í safninu
- Áhætta fyrirtækj í sömu atvinnugrein ætti að vera svipuð ef fjármögnunarstrúktúr er svipaður
- Aukinn skuldasetning eykur áhættu og hefur því áhrif á Beta
- Hægt að leiðrétta fyrir skuldasetningu og fá þannig samanburð óháð skuldsetningu
  - Gíður vs Ógíruð Beta

$$\beta_L = \beta U \cdot [1 + (1 - T) \cdot (D/E)]$$

og

$$\beta_U = \frac{\beta L}{[1 + (1 - T) \cdot (D/E)]}$$

6.2 Atriði sem koma upp við gerð verðmats í raunheimum

6.2.1 Hvað ber að varast

- Vöxtur tekna kallar á fjárfestingu
- Hvernig er vöxtur tekna og hagnaður að þróast í samanburði við hagvöxt
- Bera innviðir fyrirtækissins þær rekstrarforsendur sem liggja til grundvallar verðmats
- Mikilvægt að þekkja það líkan sem er notað
- Gæta þarf samræmis í forsendum
  - Er líkan raunvaxtalíkan eða nafnvaxtalíkan
  - Eru vaxtaforsendur gerðar miðað við væntan hagvöxt grunnmyntar

Til umhugsunar

- Íhugið vel allar forsendur - Velta fyrir sér hvort þær séu raunhæfar
- Stilla af greiðsluflæði áður en reiknað er framtíðarvirði
- Gera næmnigreiningu á lykilforsendur
  - Data tables í excel gagnlegt tól en má einnig nota einfalda forritun
- Nota varaaðferð til að tékka af niðurstöðu
  - Til dæmis að nota DCF sem aðalaðferð en kennitölur til að kanna hvort niðurstaðan sé líkleg til að vera rétt
- Lesa yfir módelið og yfirfara útreikninga þegar mati er lokið til að koma í veg fyrir reiknivillur
  - Gott verðmat getur ferið fyrir lítið ef ein lítil reiknivilla kollvarpar niðurstöðunni

7 Væntigildi og dreifni safns, samdreifni

7.1 Ávöxtun & áhætta

Oft höfum við ákveðna fjármuni tilað leggja í eina eða fleiri fjárfestingar, þ.e. við þurfum að velja úr. Við viljum að safnið gefi hæstu ávöxtun/arðsemi, en við þurfum líka að spá um áhættu.

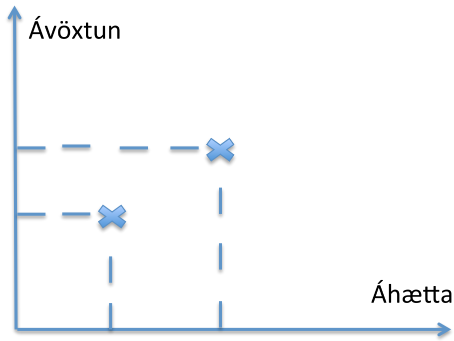
Aðferðafræðin gengur út á að velja n verkefni $x_1, x_2, \cdots, x_n$ þ.s. hver verkefni hækkar eða lækkar virði í framtíðinni. Vitum að ávöxtun hvers verkefnis er háð e_{-i} líkindadreifingu.

Markmið:

Búa til safn verkefna með sem hæsta vænta ávöxtun m.v. ákv. ávöxtun.

Safn verkefna $S = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n$ þar sem w_1 er hlutfall upphæðar sem við leggjum í verkefni 1.

<u>Verkefnið er tvíþætt:</u>



Ávöxtun:

Metum ávöxtun

$$a = \frac{P_1 - P_0}{P_1} \begin{cases} P_1\text{: Virði í framtíð} \\ P_0\text{: Virði í dag} \\ \text{a er háð } e_{-i} \text{ líkindadreifingu} \end{cases}$$

Horfum því til væntrar ávöxtunar þ.s. væntigildi ávöxtunar (expected value)

$$a \text{ er } E(a) = \overline{a}$$

Áhættunar mælum við með dreifni og staðalfrávikum.

7.2 Dreifni:

<u>Dreifni:</u> (e. Variance) er fundin með jöfnunni

$$Var[a] = \sigma^2 = E[(a - \overline{a})]$$

Verkefnið er að hámarka ávöxtun og lágmarka áhættu fyrir safnið þ.s:

$$\text{Max:} \qquad E[s] = E[w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n]$$

þ.s. (n er fjöldi fjárfestinga)

$$Var[s] = \sigma^2 \quad \text{og} \quad w_i \geqslant 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Nokkrir eiginleikar vænts gildis og dreifni

1) Ef y og x er tilviljanabreytur þá gildir:

$$E[\alpha y + \beta z] = E[\alpha y] + E[\beta z] = \alpha E[y] + \beta E[z] \quad , \quad \alpha \& \beta \in \mathbb{R}$$

T.d. gidlir fyrir ávöxtun safns $w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n$ að vænt gildi safns:

$$E[w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n] = w_1 E[X_1] + w_2 E[X_2] + \cdots w_n E[w_n]$$

2) $Var[b] = 0$ þ.e. b er almenn breyta, þe.e ekki tilviljanabreyta

3) $Var[X + b] = Var[X]$

4) $Var[b \cdot X] = b^2 \cdot Var[X]$

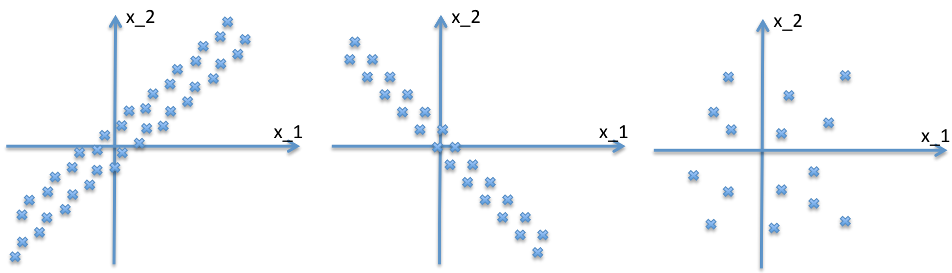
7.3 Samdreifni

$$Var[X + X] = Var[2X] = 2^2 Var[X] = 4Var[X] \neq Var[X] + Var[X]$$

$$COV[X_1, X_2] = \sigma_{12} = E[(X_1 - \overline{X_1}) \cdot (X_2 - \overline{X_2})]$$

Sem metur hversu háðar breyturnar eru hvor annari:

- Ef $\sigma_{12} = 0$ er sagt að tilbiljnarbreyturnar séu óháðar
- Ef $\sigma_{12} > 0$ eru breyturnar jákvætt háðar
- Ef $\sigma_{12} < 0$ Þá eru X_1 og X_2 neikvætt háðar



Jákvað fylgni   Neikvæð fylgni   Engin fylgni

Fylgni stuðull: $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$ (e. Correlation Coefficient)

$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2COV[X_1, X_2]$

Almennt gildir:

$$Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = Var[X_1 + X_2 + \cdot + X_n] = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} \begin{cases} \sigma_{ij} = COV[X_i, X_j] \text{ fyrir } i \neq j \\ \sigma_{ij} = \sigma_i^2 = Var[X_i] \text{ fyrir } i = j \end{cases}$$

$\rightarrow$ t.d. n = 2, þá:

$$Var[\sum_{i=1}^{2} X_i] = Var[X_1{+}X_2] = \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{ij} \begin{cases} \sigma_{12} = COV[X_1, X_2] \text{ og } \sigma_{21} = COV[X_2, X_1] \\ \sigma_{11} = Var[X_1] \text{ og } \sigma_{22} = Var[X_2] \end{cases}$$

$$= Var[X_1] + Var[X_2] + 2COV[X_1, X_2] = Var[X_1 + X_2]$$

7.3.1 Samdreifni safns

$$S = w_1X_1 + w_2X_2 = Var[w_1X_1 + w_2X_2]$$

Dreifnin er þá:

$$\begin{aligned} Var[S] &= Var[w_1X_1 + w_2X_2] = Var[w_1X_1] + Var[w_2X_2] + 2COV[w_1X_1, w_2X_2] \\ &= w_1^2 Var[X_1] + w_2^2 Var[X_2] + 2w_1w_2 COV[X_1, X_2] \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

Almennt:

$$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} w_iX_i\right]$$

Á fylkjaformi:

$$Var[S] = W^TCW$$

Þar sem:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Samdreifni er lykilatriði

Hugsum okkur safn þ.s. öll verkefni hafa vænta ávöxtun r, staðalfrávik σ og eru öll óháð hvert öðru, þ.e. væntigildið:

$$E[S] = E[w_1X_1 + w_2X_2 + \cdots + w_nX_n] = w_1E[X_1] + w_2E[X_2] + \cdots w_nE[w_n]$$

Skiptum fjárfestingunni jafnt á milli allra verkefna þ.e. $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \dfrac{1}{n}$

Höfum $E[S] = \dfrac{1}{n}r + \dfrac{1}{n}r + \cdots + \dfrac{1}{n}r = \dfrac{n}{n}r = r \leftarrow$ heildar ávöxtun safns.

Hver er þá áhætta safnsins?

$$\begin{aligned} Var[S] &= Var[w_1X_1 + w_2X_2 + \cdots + w_nX_n] \\ &= w_1^2 Var[X_1] + w_2^2 Var[X_2] + \cdots + w_n^2 Var[X_n] + 0(\text{verk. óháð}) \\ &= \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}n = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Þegar $n \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Var[S] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0 \Rightarrow \text{DREIFNI/ÁHÆTTA} = 0$$

Í raunveruleikanum er alltaf einhver fylgni til staðar:

$$Var[S] = Var[w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n] = \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} w_1 w_2$$

Dæmi:

2 Fjárfestingar með vænta ávöxtun:

$$\text{Vænt meðalávöxtun:} \begin{cases} \overline{r_1} = 0,12 \\ \overline{r_2} = 0,15 \end{cases}$$

$$\text{Staðalfrávik(mat á dreifni):} \begin{cases} \sigma_1 = 0,2 \\ \sigma_2 = 0,18 \end{cases}$$

$$\sigma_{12} = 0,01 \leftarrow COV[r_1, r_2]$$

Fjárfesting $w_1 = 0,25$ og $w_2 = 0,75$

- Meðalávöxtun:

$$\overline{r} = w_1 r_1 + w_2 r_2 = 0,25 \cdot 0,12 + 0,75 \cdot 0,15 = 0,1425$$

- Áhætta metin með staðalfráviki

$$\sigma^2 = 0,25^2 \cdot 0,2^2 + 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,01 + 0,75^2 \cdot 0,18^2 = 0,024475$$

Svo $\sigma = 0,1504$

8 Væntigildi og dreifni safns, samdreifni - áframhald

Úr seinasta tíma

Ávöxtun:

$$a = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

p_1:= framtíðarvirði, p_0:= virði í nútíð

Væntigildi ávöxtunar: $E[a] = \overline{a}$

Dreifni: $r^2 = V[a] = EE(a - \overline{a})^2$

Samdreifni = $COV[x_1; x_2]$, þar sem x_i:= fjárfestingarkostur

Staðalfrávik = σ

$\sigma_{12} = 0 \Rightarrow$ óháðar tilviljanabreytur

$\sigma_{12} > 0 \Rightarrow$ jákvætt háðar tilviljanabreytur

$\sigma_{12} < 0 \Rightarrow$ neikvætt háðar tilviljanabreytur

$\sigma_{12} = 1 \Rightarrow$ ef annar fjárf. kostur hækkar þá hækkar hinn í sama hlutfalli

$\sigma_{12} = -1 \Rightarrow$ sama og að ofan nema lækkar

Fylgnistuðull: $\rho_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$

Samdreifni safns: $s = \omega_1 x_1 + \omega_2 \cdot x_2$

$v[s] = \omega_1^2 \cdot r_1^2 + \omega_2^2 \cdot r_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} \cdot r_1 \cdot r_2$

$\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

Á fylkjaformi: $v[s] = \omega^T \cdot c \cdot \omega$

8.0.2 Áætta í verðbréfaviðskiptum

Áhætta í verðbréfaviðskiptum er þríþætt:

1. Greiðsluáhætta - ekki greitt á réttum tíma
2. Tapáhætta - ekki greitt yfirhöfuð
3. Verðbréfaáhætta - verðbréf lækka í virði

Verð til greiðslu $\neq$ virði á markaði

Liður 3) er viðfangsefni líkans við útreiknun á framfalli verðbréfa. Byggjum á samspili ávöxtunar hvers bréfs í eignasafni og áhættu þess. Öll verðbréf í eignasafni er hægt að teikna á $\overline{a} \cdot \sigma$ - línurit.

[Mynd]

Sjáum á línuriti að velja frekar B en A: Sama ávöxtun, minni áhætta.

Að sama skapi veljum við frekar C en B: Sama áhætta, meiri ávöxtun.

Einstaklingur mun taka verkefni B,C og D fram yfir A, að teknu tilliti til áhættu og væntrar ávöxtunar.

Tvær fjárfestingar x_1 og x_2 sem hægt er að fjárfesta í hlutföllum í safni S.

[Mynd]

Ávöxtun safns S er e-s staðar á þrýhirningnum 1,3 og A. Fallið sýnir hvernig hægt er að velja saman verkefni. Fylgnin milli verkefna ákvarðar heildarávöxtun og áhættu frekar en áhættu hvers verkefnis. Þar sem samdreifni er ekki sýnd á grafinu vitum við ekki nkl hvar ávöxtunin er.

$$V[S] = V[\omega_1 \cdot x_1] + V[(1-\omega_1)\cdot x_2] + 2\cdot \omega_1(1-\omega_1)\cdot \sigma_{12}$$

$$= \omega_1^2 \cdot \sigma^2 + (1-\omega_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\cdot \omega_1(1-\omega_1)\cdot \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_s^2} = \sqrt{\omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 1-\omega_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\cdot \omega_1 \cdot (1-\omega_1)\cdot \rho \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

8.0.3 Þrjú tilfelli fyrir ρ

Skoðum þrjú tilfelli fyrir ρ

1. $\rho = 1$: jákvæð fylgni

$$\sigma_3 = \sqrt{\omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-\omega_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2\cdot \omega_1 \cdot (1-\omega_1)\cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

$$= \sqrt{\omega_1^2 \cdot \sigma_1 + (1-\omega_1)\cdot \sigma_2)^2}$$

$$= \omega_1 \cdot \sigma_1 + (1-\omega_1)\cdot \sigma_2$$

2. $\rho = -1$

$$\sigma = \mid \omega_1 \cdot \sigma_1 - (1-\omega_1)\cdot \sigma_2 \mid$$

$$= \omega_1 \cdot \sigma_1 - (1-\omega_1)\cdot \sigma_2$$

Eða:

$$-\omega_1 \cdot \sigma_1 + (1-\omega_1)\cdot \sigma_2$$

3. $\rho = 0$

$$\sigma_s = \sqrt{w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \cdot \sigma_2^2}$$

Framfall lausnar jöfnu

Besta lausn í MVP (e. Minimum variance point)

Höfum í raun bara áhuga á efri hluta kúrfunnar (e. Efficien frontier), því við veljum hærri ávöxtunina fyrir sömu áhættu.

<u>ATH</u>: Skilvirk söfn liggja alltaf á framfallinu - Hver punktur á framfallinu er ákveðið samsafn verkefna sem gefa hæstu vænta ávöxtun fyrir ákveðið staðalfrávik.

9 Markovitz-líkan

Viljum finna safn S sem gefur lágmarks áhættu miðað við gefna vænta ávöxtun α. Viljum markfall sem gefur min áhættu fyrir ávöxtun α

$$Min \sum_{i,j}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}$$

þ.a.

$$\sum_{i=1}^{n} E[x_i] \cdot w_i = \alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Á fylkjaformi:

Min

$$w^T \cdot c \cdot w$$

$$w^T \cdot E[x] = \alpha$$

$$w_1 = 1$$

Notum Lagrange til að finna lausn

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij}) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E[x_i] - \alpha\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)$$

Fyrir 2 verkefni gildir:

$$L = \frac{1}{2}\left(w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \sigma_{12} + w_2^2 \cdot \sigma_2^2\right) - \lambda\left(w_i \cdot \overline{a}_1 + w_2 \cdot \overline{a}_2 - \alpha\right) - \mu\left(w_1 + w_2 - 1\right)$$

$\overline{a}_1 = E[a_1]$

$\overline{a}_2 = E[a_2]$

Þekktar jöfnur

1. $\dfrac{\partial L}{\partial w_1} = w_1 \cdot \sigma_1^2 + w_2 \cdot \sigma_{12} - \lambda \overline{a_1} - \mu$
2. $\dfrac{\partial L}{\partial w_2} = w_2 \cdot \sigma_2^2 + w_1 \cdot \sigma_{12} - \lambda \overline{a_2} - \mu$
3. $w_1 \cdot \overline{a_1} + w_2 \cdot \overline{a_2} - \alpha = 0$
4. $w_1 + w_2 - 1$

Lausn í fylkjareikningi - setjum jöfnu 1. og 2. á fylkjaform:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & 1 \\ \overline{a}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jafna 3. og 4. á fylkjaformi:

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

svo

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & 1 \\ \overline{a}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

10 Skilvirkni, Markowitx-líkanið, MVP

10.1 Skilvirkni

Samsetning sem uppfyllir:

a) Skila minnstri áhættu fyrir ákveðna vænta ávöxtun (Markowitz)

b) Skila mestri ávöxtun fyrir ákveðna áhættu

Söfn sem uppfylla þessi skilyrði eru kölluð skilvirk eða á ensku *efficient*

10.2 Markowitz-líkanið

Verkefnið er að finna safn eigna/verkefna(köllum hér eftir stök) se gefur minnstu áhættu fyrir gefna vænta ávöxtun. Þegar ið tölum um minnstu áhættu vísum við til safns með lægstu dreifni.

Markfallið verður að lágmarka dreifni safns

$$\min_w \frac{1}{2} w^T C w$$

Og skorður

$$w^T \overline{a} = \overline{a_s}$$
$$w^T \mathbf{1} = 1$$

þ.s.

$w = [w_1, ..., w_n]^T$ er vægi hvers staks í safni

$\overline{a} = [\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}]^T$ er vænt ácöxtun staka

$\overline{a_s}$ er vænt ávöxtun safns

$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ er samdreifni-fylki fyrir ávöxtun staka, $\sigma_{11} = \sigma_1^2$ og

$\sigma_{1,2}$ er samdreifni ávöxtunar staka 1 og 2

Verkefnið er hægt að leysa með hjálp Lagrange

$$L(w, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} w^T C w - \lambda(w^T \overline{a} - \overline{a_s}) - \mu(w^T \mathbf{1} - 1)$$

Við diffrum nú m.t.t breytanna og fáum

$$\frac{\delta L}{\delta w} = Cw - \lambda \overline{a} - \mu \mathbf{1} = \mathbf{0}$$
$$w^T \overline{a} - \overline{a_s} = 0$$
$$w^T \mathbf{1} - 1 = 0$$

Við getum tekið jöfnunar saman á eftirfarandi form

$$w = C^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \overline{a_s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Við leysum svo saman:

Setjum w inn í seinni jöfnuna og fáum.

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a}^T C^{-1} \overline{a} & \overline{a}^T C^{-1} \mathbf{1} \\ \overline{a}^T C^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T C^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} d & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Hægt er að sýna fram á að andhverfa A fylkis sé til. Lausn fyrir Lagrange margfaldarana er

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a_s} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stingum því næst þessari lasn inn í jöfnu fyrir w hér fyrir ofan og þá fæst.

$$\hat{w} = C^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a} & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a_s} & 1 \end{bmatrix}$$

Við eigum því að velja saman stökin þ.e. eignir eða verkefni í hlutföllunum $\hat{w}$ til að mynda safn með lægstu dreifni fyrir gefna vænta ávöxtun $\overline{a_s}$.

Dreifni safns verður þá:

$$\hat{\sigma}_s^2 = \hat{w}^T C \hat{w} = \begin{bmatrix} \overline{a_s} & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} \overline{a_s} & 1 \end{bmatrix} = \frac{d - 2b\overline{a_s} + c\overline{a_s}^2}{dc - b^2}$$

þ.s. stuðlarni d, b, c, eru stök í fylki A.

Áhugi okkar beinist einungis að efri helmingi fleygbogans, þ.s. vænt ávöxtun safns, $\overline{a_s}$, er fall af dreifni. Ástaðn er einföld: fyrir gefna dreifni fáum við nánast alltaf tvær lausnir fyrir $\hat{w}$ og $\overline{a_s}$ en við veljum alltaf safni með hærri væntu ávöxtunina.

Punkturinn sem hefur lægstu dreifni á framfallinu nefnist upp á ensku *global minimum variance point*, MVP.

Punktinn má auðveldlega finn út frá jöfnu fyrir $\hat{\sigma}_s^2$

$\dfrac{d\hat{\sigma}_s^2}{d\overline{a}} = 0, \dfrac{-2b + 2c\overline{a}}{dc - b^2} = 0, \overline{a} = \dfrac{b}{c}$ og í þessum punkti er dreifni $\hat{\sigma}_s^2 = \dfrac{1}{c}$

Auðvelt er að sýna fram á að samsetning safns í punkti sé

$$w = \frac{1}{c} \cdot C^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

11 Heimaverkefni

Heimaverkefni

Dæmi 1:

Útskýrið með dæmi hvað átt er við með því að bókhaldslegur kostnaður eins og afskriftir hafi ekki áhrif á flæði fjármuna, en skattaleg áhrif afskrifta geti verið fjárhagslegs eðlis?

Ef fyrirtæki kaupir vél sem í upphafi kostar 5 milj. og er greidd út og er skráð sem eign á móti. Segjum að það eigi að afskrifa vélina á 10 árum, þá eru árlegar afskriftir 500 þ. á ári engir raunverulegir fjármunir fara í það. Þá hefur vélin engin áhrif á flæði fjármuna. Hinsvegar þá getum við fengið skattaafslátt vegna afskriftanna og því eru skattalegu áhrifin fjárhagslegs eðlis.

Dæmi 2:

Reikningur einn ber 3% veldisvexti með einu vaxtatímabili. Ef við leggjum einn 1.000 í upphafi hvað eigum við þá eftir 18 mánuði?

Höfum formúlu fyrir veldisvexti sem $V = A(1+r)^t$, Þar sem við höfum t = 18 mánuði = 18/12 og því:

$$V = A(1+r)^t = 1.000 \cdot (1+3\%)^{18/12} = \underline{\mathbf{1.045{,}34}}$$

Dæmi 3:

Reikningur einn er með 6 vaxtatímabil og 6% ársvexti ef við leggjum inn 1.000 í upphafi hvað eigum við þá eftir 12 mánuði?

Höfum formúlu fyrir vaxtatímabil $V = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m}$ þar sem m: # vaxtatímabila. Höfum því hér einfaldlega:

$$V = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m} = 1.000 \cdot \left(1 + \frac{6\%}{6}\right)^{1 \cdot 6} = \underline{\mathbf{1061.52}}$$

Dæmi 4:

Bankareikningur einn greiðir mánaðarlega vexti. Ársvextir reiknings eru 11%. Ef við leggjum í upphafi inn 100 kr. og tökum ekkert út hvað eigum við þá eftir 9 mánuði?

Höfum hér bankareikning sem greiðir vexti mánaðarlega, eða með öðrum orðum þá eru 12 vaxtatímabil. Höfum því sömu formúlu og í dæmi 3 en hér er $t = 9/12$, eða:

$$V = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m} = 100 \cdot \left(1 + \frac{11\%}{12}\right)^{1 \cdot 9/12} = \underline{\mathbf{108.56}}$$

Dæmi 5:

Reikningur einn, A ber 3% flata ársvexti. Annar reikningur, B ber veldisvexti. Hver þarf vaxtaprósenta reiknings B að vera svo að reikningar A og B séu jafnháir eftir 6 mánuði?

Byrjum á því að finna hver staða reiknings A verður eftir 6 mánuði, notum 100 einingar sem viðmið fyrir A í jöfnu:

$$V = A(1 + r \cdot t) = 100 \cdot (1 + 3\% \cdot 6/12) = 101.5$$

Skoðum nú reikning B, höfum þar formúluna $V = A \cdot (1 + r)^t$. Einangrum útúr jöfnunni vaxtaprósentuna og notum V = 101.5:

$$r = \sqrt[t]{\frac{V}{A}} - 1 = \sqrt[0.5]{\frac{101.5}{100}} - 1 = \underline{\mathbf{3.0225\ \%}}$$

Heimaverkefni 2

Dæmi 1:

Greiðsluflæði gefur 100 eftir eitt ár og 100 eftir 3 ár. Hvað er framtíðarvirði greiðsluflæðis á ári 2 ef miðað er við 10 % ávöxtunarkröfu?

Til þess að fá út framtíðarvirði greiðsluflæðisins á ári 2 þurfum við að framtíðarvirða það sem greiðsluflæðið gefur eftir eitt ár og núvirða það sem greiðsluflæðið gefur eftir 3 ár. Erum að skoða tímapunktinn eftir 2 ár og fáum því:

$$F(\text{ár } 2) = F(\text{ár } 1) + P(\text{ár } 3) = C_1 \cdot (1+r)^1 + \frac{C_3}{(1+r)^{3-2}}$$

$$\Rightarrow F(\text{ár } 2) = 100 \cdot (1+0.1) + \frac{100}{(1+0.1)} = \underline{\mathbf{200.91}}$$

Dæmi 2:

Á fjórum vikum hækkar verð á ólíutunnum úr \$ 52 í \$ 58. Hvað er ávöxtunin á ársgrundvelli (52 vikur í ári)?

Byrjum á því að reikna ávöxtun yfir gefið tímabil, þeas fyrir 4 vikur:

$$\frac{58-52}{52} = 0.1154 \simeq 11.54\%$$

Finnum svo ávöxtun á ársgrundvelli. Það gerum við með jöfnunni $P_t = P_0 \cdot (1+y)^t$, endurskrifum og einangrum y, því:

$$\rightarrow y = \sqrt[4/52]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 = \sqrt[4/52]{\frac{58}{52}} - 1 = \underline{\mathbf{313.5\ \%}}$$

Dæmi 3:

Greiðsluflæði gefur greiðslu A eftir eitt ár og aðra jafnháa greiðslu, A, eftir 4 ár. Núvirði greiðsluflæðis er 159.72 m.v. ávöxtunarkröfu 12 %. Hversu há er greiðsla A?

Höfum hér jöfnu fyrir núvirði og einangrum $C_1 = C_4 = A$ útúr jöfnunni:

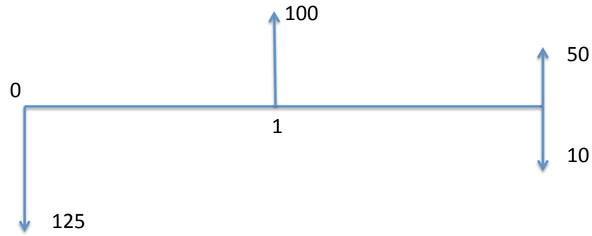
$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_4}{(1+r)^4} = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^4}$$

$$\longrightarrow 159.72 = \frac{A}{1+0.12} + \frac{A}{(1+0.12)^4} \Rightarrow \underline{\mathbf{A = 104.503}}$$

Dæmi 4:

Verkefni eitt er til tveggja ára og eru tekjur metnar 100 fyrsta árið og 50 annað árið. Kostnaður á öðru ári er 10. Stofnkostnaður er 125. Er fjárfestingin arðbær m.v. 5 % ávöxtunarkröfu? En 22 % ávöxtunarkröfu? Rökstyðjið svarið.

Byrjum á því að teikna upp mynd af ferlinu og setja upp formúlu fyrir NPV miðað við n = 2.



$$NPV = -C_0 + \frac{A_1 - C_1}{(1+r)^1} + \frac{A_2 - C_2}{(1+r)^2}$$

Skoðum svo hvort fjárfestingin er arðbær miðað við ávöxtunarkröfu uppá 5 %:

Höfum þá að:

$$NPV = -125\frac{100}{(1+0,05} + \frac{50-10}{(1+0,05)^2} = 6,519$$

$\longrightarrow$ Fjárfestingin er því arðbær uppá auka 6,519 þegar miðað er við 5% ávöxtunarkröfu. Hér er ekki tekið inn í reikninga mögulega ávöxtun á tekjum, en þær myndi hér aðeins auka arbærni verkefnisins.

Skoðum nú hvort fjárfestingin er arbær miðað við 22% ávöxtunarkröfu.

Höfum sömu jöfnu og áður en nú er $r = 22\% = 0.22$, og því:

$$NPV = -125\frac{100}{(1+0,22} + \frac{50-10}{(1+0,22)^2} = -16,16$$

$\longrightarrow$ Fjárfestingin er því ekki arbær eða uppá -46.05 miðað við ávöxtunarkröfu uppá 22% .

Heimaverkefni 3

Dæmi 1:

Bankabók gefur 2% nafnvexti á ári og verðbólga mælist yfir sama tíma 5%. Hver er raunávöxtun bankabókar?

Höfum jöfnu sem tengir saman nafnvextir, verðbólgu og raunávöxtun:

$$(1+y) = (1+y_r)\cdot(1+v)\begin{cases} y_r: & \text{Raunvextir} \\ y: & \text{Nafnvextir} \\ v: & \text{Verðbólga} \end{cases}$$

Viljum vita raunávöxtunina og einangrum því y_r úr jöfnunni og fáum:

$$y_r = \frac{(1+y)}{(1+v)} - 1$$

$$\implies y_r = \frac{(1+2\%)}{(1+5\%)} - 1 = -2.86\%$$

Raunávöxtunin er neikvæð uppá 2.86%

Dæmi 2:

Íslendingar eru með 87 milljarða á yfirdrætti. Vextir eru 12.5% og eru reiknaðir mánaðarlega (gefið er að sama upphæðin sé í yfirdrætti allt árið). Hvað greiða íslendingar mikið í yfirdráttavexti á ári?
Hvað myndi sama lánsupphæð kosta ef tekið væri verðtryggt lán í banka til eins árs með 4.1% verðtryggðum vöxtum og 4% verðbólgu með einn gjalddaga í lok árs. Gera má ráð fyrir að lántökukostnaður sé enginn og engin stimpilgjöld heldur.

Byrjum á því að finna yfirdráttavextina á ársgrundvelli, þar sem vextirnir eru reiknaðir mánaðarlega þá höfum við 12 vaxtatímabil:

$$V = A \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m} = 87mkr. \cdot \left(1 + \frac{12.5\%}{12}\right)^{1 \cdot 12} = 98,52mkr.$$

Höfum því greiðslu í yfirdráttarvexti $(98,52 - 87)mkr. = 11,52\text{mkr.}$

Skoðum nú hvernig verðtryggða lánið kæmi út, höfum þar lán til eins árs(n=1), P = 87 mkr. Höfum engin stimpilgjöld né lántöukostnað. Finnum út höfuðstól í loks ársins.

$$87 \text{ mkr.} \cdot (1 + 4\%) = 90.84 \text{ mkr.}$$

Reiknum nú út hver höfuðstóll auk vaxta er:

$$90.84 \text{ mkr.} \cdot (1 + 4.1\%)^1 = 94.19 \text{ mkr.}$$

Kostnaður við verðtryggða lánið væri því 90.84 mkr. − 87 mkr. = 7.19 mkr.

Munurinn á yfirdrættinum og verðtryggða láninu er því $11,52$ mkr. − 7.19 mkr. = **4.33 mkr.**

Dæmi 3:

Jafngreiðslulán með 4.15% vöxtum, höfuðstóll 1 milljón til 40 ára og árlegum greiðslum. Hver er árleg greiðsla láns?

Höfum hér jafngeriðslulán með:

n: 40

r: 4.15%

P: 1.000.000

Höfum jöfnu fyrir greiðslu[A], og þar sem greiðslurnar eru árlegar þá:

$$A = P \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \right]$$

$$\Longrightarrow A = 1.000.000 \cdot \left[\frac{4.15\% \cdot (1+4.15\%)^{40}}{(1+4.15\%)^{40} - 1} \right] = 51.656,79-$$

Árleg greiðsla lánsins er því $\approx$ **51.657 kr**

Dæmi 4:

Lán eitt er jafngreiðslulán, með vaxtaprósentu 10 % og árlegum greiðslum. Gjalddagi láns er eftir 4 ár og upphaflegur höfuðstóll 100. Hvað greiðum við mikið í vexti á ári 3?

Höfum hér jafngreiðslulán, r = 10%, t = 4 og P = 100. Reiknum A og setjum upp reikniformulur í töflu og reiknum:

$$A = P \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right] = 1000 \cdot \left[\frac{10\% \cdot (1+10\%)^4}{(1+10\%)^4 - 1}\right] = 31,55-$$

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				$P = P_0$
1	A	$r \cdot P_0$	$A - r \cdot P_0$	$P_1 = P_0 - (A - r \cdot P_0)$
2	A	$r \cdot P_1$	$A - r \cdot P_1$	$P_2 = P_1 - (A - r \cdot P_1)$
3	A	$r \cdot P_2$	$A - r \cdot P_2$	$P_3 = P_2 - (A - r \cdot P_{n-1})$
4	A	$r \cdot P_3$	$A - r \cdot P_3$	$P_4 = P_3 - (A - r \cdot P_{n-1})$

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				$P = 100$
1	31,55	10	21,55	$P_1 = 78,45$
2	31,55	7,845	23,705	$P_2 = 54,745$
3	31,55	5,4745	26.0755	$P_3 = 28,6695$
4	31,55	$10\% \cdot P_3$	$31,55 - 10\% \cdot P_3$	$P_4 = P_3 - (31,55 - 10\% \cdot P_3)$

Við greiðum því 5,4745 í vexti á tímabili 3.

Dæmi 5:

Við höfum vaxtagreiðslulán, lán með jöfnum afborgunum og jafngreiðslulán. Öll eru til 5 ára, 10% vaxtaprósenta, árlegar greiðslur og höfuðstóll 100. Hvaða fullyrðing að neðan er röng? Rökstyðjið!

a. *Eftir fyrstu greiðslu eru eftirstöðvar höfuðstóls hærri hjá jafngreiðsluláninu en láni með jöfnum afborgunum en þó hæstar hjá vaxtagreiðsluláninu.*

b. *Við aðra greiðslu greiðir jafngreiðslulán hærri vaxtagreiðslu en lán með jöfnum afborgunum.*

c. *Við þriðju greiðslu eru eftirstöðvar höfuðstóls en hæstar hjá jafngreiðsluláninu en lægstar hjá láninu með jöfnum afborgunum.*

d. *Við fjóru greiðslu eru afborganir höfuðstóls hærri hjá jafngreiðsluláninu en jöfnum afborgunum.*

e. *Við fimmtu greiðslu eru hæstu vaxtagreiðslur hjá vaxtagreiðluláninu en lægstar hjá láni með jöfnum afborgunum.*

Lausn:

Byrju á því að reikna út lánin, gerum það með aðstoð Excel og setjum upp í töflu:

Útfrá þessum reikningum(á næstu síðu) sést glögglega að liður c) (Við þriðju greiðslu eru eftirstöðvar höfuðstóls en hæstar hjá jafngreiðsluláninu en lægstar hjá láninu með jöfnum afborgunum.) er rangur, því að eftirstöðvar höfuðstólsins eru hæstar hjá vaxtagreiðsluláni(kúluláni) en ekki jafngreiðsluláni.

r = 10.00%

Jafngreiðslulán	A	n
	26.38	5

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				100
1	26.38	10.00	16.38	83.62
2	26.38	8.36	18.02	65.60
3	26.38	6.56	19.82	45.78
4	26.38	4.58	21.80	23.98
5	26.38	2.40	23.98	0.00
	131.90	31.90	100.00	

Vaxtagreiðslulán (kúlulán)

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				100
1	10	10	0	100
2	10	10	0	100
3	10	10	0	100
4	10	10	0	100
5	110	10	100	0
	150	50	100	

Jafnar afborganir

t	Greiðsla	Vextir	Afborgun	Eftirstöðvar
0				100
1	30	10	20	80
2	28	8	20	60
3	26	6	20	40
4	24	4	20	20
5	22	2	20	0
	130	30	100	

Heimaverkefni 4

Dæmi 1:

Hvert er núvirði(PV) greiðslustraums þar sem fyrsta greiðsla fæst á ári eitt upp á 1.000. Árið eftir fæst greiðsla uppá 1.200, þriðja árið er greiðslan 1.400 o.s.frv, greiðslan hækkar sem sagt alltaf um 200 á ári út í hið óendanlega. Reiðknið með 10% vaxtastigi

Hfum útleitt að greiðsluflæði með jöfnum afborgunum er:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a} \qquad \text{fyrir } 0 \leqslant a < 1$$

Sem þýrir að fyrir $a = \dfrac{1}{(r+1)}$ er summan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^k} = \frac{1}{r}$$

Hér erum við ekki með jafnt greiðsluflæði heldur hækkar greiðsluflæðið árvisst um 200 á ári, (1000, 1200, 1400... o.s.frv) Þar sem að grunnurinn að því að finna núvirði óendanlegs greiðslustraums er sá að eftir 'óendanlegan' tíma(200 ár eða svo í þessu tilfelli) þá er núvirðing greiðslustraums þess árs = 0 eða:

$$\overrightarrow{k \to \infty} a \to 0$$

Setjum nú upp formúluna hér að ofan þannig að hún henti fyrir okkar greiðslustreymi:

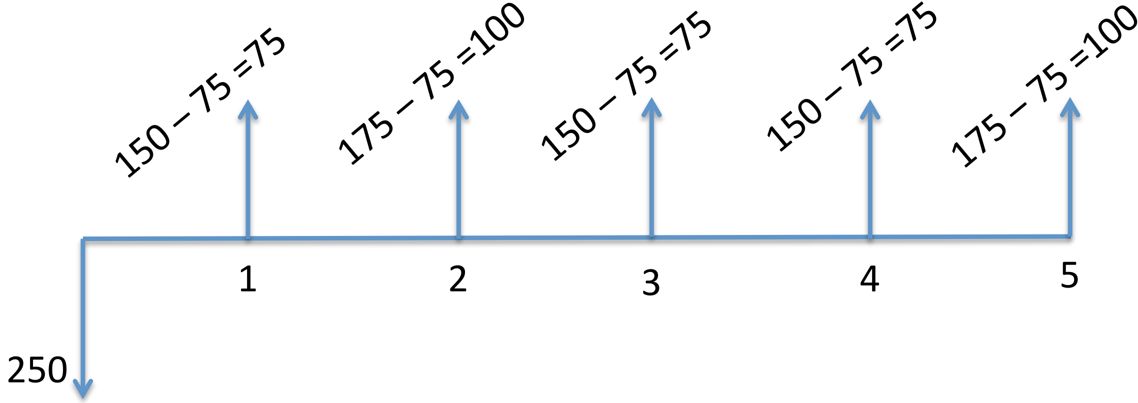
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1000 + (k-1) \cdot 200}{(1+r)^k}$$

En þessi jafna er samleitin þegar að $\dfrac{1}{|r+1|} < 1$

<u>Fáum því að núvirði greiðslustraumsins er **30.000**</u>

Dæmi 2:

Verkefni eitt er til fimm ára og eru tekjur metnar 150 þús. á ári að viðbættum 25 þús. á ári 2 og 5. Kostnaður á ári er 75 þús. Stofnkostnaður er 250 þ.ús. Hverjir eru innri vextir verkefnisins?



Höfum röðina:

$$250 = \frac{75}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} + \frac{75}{(1+r)^3} + \frac{75}{(1+r)^4} + \frac{100}{(1+r)^5}$$

Leitum að r þ.a. P(r) = 0 og þá:

$$P(r) = NPV = -250 + \frac{75}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} + \frac{75}{(1+r)^3} + \frac{75}{(1+r)^4} + \frac{100}{(1+r)^5} = 0$$

Stillum dæminu upp í Excel og fáum: **r = 20,304 %**

Dæmi 3:

Lán A er jafngreiðslulán með 5% vöstum, árlegum greiðslum til 4 ára. Lán B er með sömu skilmálum er með jöfnum afborgunum. Hvaða fullyrðing er rétt? Rökstyðjið!

a. *Fyrsta greiðsla láns B er lægri en fyrsta greiðsla A.*

b. *Lán B greiðir jafnmikið í vexti í fyrstu greiðslu eins og lán A.*

c. *Síðasta greiðsla láns A er jöfn síðustu greiðslu láns B.*

d. *Afborgun höfuðstóls í fyrstu greiðslu er jafnhá hjá láni A og B.*

e. *Ekkert af ofangreindu er rétt.*

Sjáum því að **b)-liður** er réttur!

t	Vextir	Afborgun	Greiðsla	Efirstöðvar
0				1.000.000
1	50.000	232.012	282.012	767.988
2	38.399	243.012	282.012	524.376
3	26.219	255.793	282.012	268.583
4	13.429	268.583	282.012	0
Σ	128.047	1.000.000	1.128.047	

Tafla 2: Jafnar greiðslur

t	Vextir	Afborgun	Greiðsla	Efirstöðvar
0				1.000.000
1	50.000	250.000	300.000	767.988
2	37.500	250.000	287.500	524.376
3	25.000	250.000	275.000	268.583
4	12.500	250.000	262.500	0
Σ	125.000	1.000.000	1.125.000	

Tafla 3: Jafnar afborganir

Dæmi 4:

Óverðtryggt jafngreiðslulán með 4.15% vöxtum, höfuðstóll 1 milljón krónur til 40 ára og árlegum greiðslum. Hver er síðasta greiðsla láns þ.e. greiðslan á ári 40 ?

Höfum formúlu fyrir greiðlu jafngreiðsluláns:

$$A = P \cdot \left(\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \right)$$

og við höfum hér r = 4.5%, n = 40 og P = 1.000.000

Því fæst:

$$A = 1.000.000 \cdot \left(\frac{4.15\% \cdot (1+4.5\%)^{40}}{(1+4.15\%)^{40} - 1} \right) = \underline{\mathbf{51.657}}$$

þ.e. sama og fyrsta greiðslan(jafngreiðslulán)

Dæmi 5:

Lán A er jafngreiðslulán með höfuðstól H o g vexti r. Núvirði láns með ávöxtunarkröfunni I er P. Hvaða fullyrðing er rétt? rökstyðjið!

a. *Ef ávöxtunarkrafan I er hærri en vextir láns r er $P > H$*

b. *Ef ávöxtunarkrafan I er lægri en vextir láns r er $P > H$*

c. *Ef ávöxtunarkrafan I er jöfn vöxtum láns er $P = H$*

d. *a) og b) eru bæði rétt.*

e. *b) og c) eru bæði rétt.*

Lausn:

Höfum tilbúið jafngreiðslulán með höfuðstól 100 og vexti 10% til 5 ára(5 greiðslur)

$$A = 100 \cdot \left(\frac{10\% \cdot (1+10\%)^5}{(1+10\%)^5 - 1} \right) = 26.38$$

Skoðum lið a):

Árlegar greiðslur eru 26.38 núvirðum því næst lánið með ávöxtunarkröfu sem er hærri heldur en vextir lánsins (t.d. 12%) út úr því fáum við:

$$P = \frac{26.38}{(1+12\%)^1} + \frac{26.38}{(1+12\%)^2} + \frac{26.38}{(1+12\%)^3} + \frac{26.38}{(1+12\%)^4} + \frac{26.38}{(1+12\%)^5} = 100$$

Liður a) er því rangur!

Skoðum lið b):

Árlegar greiðslur eru 26.38 núvirðum því næst lánið með ávöxtunarkröfu sem er lægri heldur en vextir lánsins (t.d. 8%) út úr því fáum við:

$$P = \frac{26.38}{(1+8\%)^1} + \frac{26.38}{(1+8\%)^2} + \frac{26.38}{(1+8\%)^3} + \frac{26.38}{(1+8\%)^4} + \frac{26.38}{(1+8\%)^5} = 105.3$$

Liður b) er því réttur!

Skoðum lið c):

Árlegar greiðslur eru 26.38 núvirðum því næst lánið með ávöxtunarkröfu sem er jöfn vöxtum lánsins, út úr því fáum við:

$$P = \frac{26.38}{(1+10\%)^1} + \frac{26.38}{(1+10\%)^2} + \frac{26.38}{(1+10\%)^3} + \frac{26.38}{(1+10\%)^4} + \frac{26.38}{(1+10\%)^5} = 100$$

Liður c) er því réttur!

Skoðum lið d):

Höfum að liður a) er rangur og því er d) rangt

Skoðum lið e):

Höfum að liðir b) og c) eru réttir!

$\Longrightarrow$ **og því er liður e) réttur(réttasta svarið)!**

Heimaverkefni 5

Dæmi 1:

Lán A er vaxtagreiðslulán til tveggja ára með árlegum gjalddögum, höfuðstól 100 og 10% vöxtum. Hver er meðaltími (e. Modified duration) greiðsluflæðis?

Höfum hér formúlu fyrir meðaltíma:

$$D_m = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} k \cdot P$$

Höfum einnig að:

- Höfuðstóll: $\rightarrow$ P = 100
- Vexti: $\rightarrow$ r = 10% = 0.10
- Tímabil: $\rightarrow$ n = 2

k	greiðsla	P_k	kP_k
1	10	$\frac{10}{1,1} = 9,1$	9,1
2	110	$\frac{110}{(1,1)^2} = 90,9$	181,8

Setjum því inn og fáum:

$$D_m = \frac{1}{100} \frac{1}{1+10\%} \cdot 190,9 = \underline{1,735}$$

Meðaltíminn er því **1,735**

Dæmi 2:

Núvirði greiðsluflæðis með höfuðstól 100 og 7% ávöxtunarkröfu er 98.5 og meðaltími (e. Modified duration) t. Hvert er núvirði greiðsluflæðis m.v. 8% ávöxtunarkröfu með meðaltímanálgun?

Höfum nálgum með meðaltíma fyrir fleiri en einnar greiðslu flæði að:

$$\Delta P = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r$$

$$\Rightarrow P_2^* - P_1 = -D_m \cdot P_1 \cdot (r_2 - r_1)$$

<u>Þar sem:</u>

P_1: Núvirði m.v. r_1 $\xrightarrow{\text{höfum hér}}$ $P_1 = 100$

P_2^*: Núvirði m.v. r_2 $\xrightarrow{\text{þarf að finna}}$ $P_2^* = ?$

D_m: Meðaltími (e. Modified duration) $\rightarrow D_m = 5$

$$r_1 = 7\% \qquad r_2 = 8\%$$

Einangrum P_2^* úr formúlunni hér að ofan og setjum inn:

$$\Longrightarrow P_2^* = [-D_m \cdot P_1 \cdot (r_2 - r_1)] + P_1 = [-5 \cdot 100 \cdot (8\% - 7\%)] + 98.5$$

$$\Longrightarrow P_2^* = 93.5$$

Höfum því núvirði greiðsluflæðisin með nálguninni er <u>**93.5**</u>

Dæmi 3:

Við höfum til skoðunar þrjú lán sem eru með árlegum greiðslum. Helstu upplýsingar eru í neðangreindri töflu. Finnið X, Y og Z. Sýnið útreiking/rökstuðning.

Tegund greiðslu / payment type	*Höfuðstóll / Principal*	*Vextir/ interest rate*	*Lánstími / maturity*	*Ávöxtunarkrafa / yield*	*Núvirði / Present Value*	*Meðaltími / modified duration*
Vaxtagreiðslur/ coupon payments	*100*	***X***	*3*	*7%*	*100*	*2,62*
Jafnar greiðslur/ equal payments	*100*	*6%*	*2*	*7%*	***Y***	*1,39*
Jafnar afborganir/ equal principal payments	*100*	*6,5%*	*2*	*7%*	*99,31*	***Z***

Byrjum á því að finna **X**:

Höfum hér að höfuðstóll og núvirði er það sama og því $\Delta P = 0$

Sjáum því að til að jafnan $\Delta P = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r$ gangi upp hér þar sem við höfum meðaltíma = 2,62 og höfuðstól = 100 að eina lausn hennar er að $\Delta r = 0$ og því $r_1 = r_2 = \mathbf{X} = 7\%$

Finnum nú **Y**:

Höfum hér sömu jöfnu og áður, $\Delta P = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r$ og en hana getum við einnig skrifað $P_2 - P_1 = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r$ og erum að leita að **Y** sem er núvirði og setjum inn sem P_2 og einangrum:

$$\mathbf{Y} = -D_m \cdot P_1 \cdot \Delta r + P_1 = -D_m \cdot P_1 \cdot (r_2 - r_1) + P_1$$

$$\mathbf{Y} = [-1,39 \cdot 100 \cdot (7\% - 6\%)] + 100 = 98,61$$

Höfum því að núvirðið hér er $\underline{\mathbf{Y = 98{,}61}}$

Finnum nú **Z**:

k	afborgun	vextir	greiðsla	núvirði(P_k)	kP_K	eftirst.
0						100
1	50	6,5	56,5	52,8	52,8	50
2	50	3,25	53,25	46,5	93,0	0

Svo:

$$\mathbf{Z} = D_m = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{k=1}^{n} t \cdot P_t = \frac{1}{52,8 + 46,5} \cdot \frac{1}{1 + 7\%} \cdot (52,8 + 93)$$

$$\underline{\mathbf{Z = 1{,}37}}$$

Dæmi 4:

Við erum að skoða lán með jöfnum árlegum greiðslum, A, höfuðstól P og vöxtum r og heildarfjöldi greiðslna er n. Þið eigið að reikna tvennt:

a. *Eftir hversu margar greiðslur eru eftirstöðvar höfuðstóls láns komnar niður fyrir helming af upprunalegum höfuðstól, P?*

b. *Við ætlum að greiða aukalega 20%, inn á lánið í hverri árlegri greiðslu þ.e. $A + 20\% \cdot A$. Eftir hversu margar greiðslur er lánið að fullu greitt upp?*

a)

Bitum eftirstöðvar láns á tíma k:

$$P_k = \frac{A}{r}\left[1 - (1+r)^{k-n}\right]$$

Viljum vita hvenær $P_k = \dfrac{P_0}{2}$

$$\frac{A}{r}\left[1 - (1+r)^{k-n}\right] = \frac{\frac{A}{r}\left[1 - (1+r)^{-n}\right]}{2}$$

$$1 - (1+r)^{k-n} = \frac{1}{2} - \frac{(1+r)^{-n}}{2}$$

$$\vdots$$

$$k = \frac{ln((1+r)^n + 1) - ln(2)}{ln(1+r)}$$

b)

Höfum að:

$$1,2A = \frac{r \cdot P \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Leysum svo fyrir n;

$$n = \frac{ln(1,2A) - (1,2A - rP)}{ln(1+r)}$$

Dæmi 5:

Valgerður hefur lánað Jóni 1.000.000 kr. með lokagjalddaga eftir 40 ár. Jón hefur gert Valgerði tilboð um að ef hún er tílbuin að lækka skuldina um 25% í dag þá er Jón tilbúinn að greiða þremur prósentustigum hærri vextir næstu 40 árin. Á Valgerður að taka þessu tilboði? Rökstyðjið svar ykkar.

Helstu upplýsingar um lánið:

- *Lánið er til 40 ára.*
- *Mánaðarlegar greiðslur.*
- *Verðtryggt með vísitölu neysluverðs.*
- *Meðaltími láns er 15 og kúpni 350.*
- *Ekki er hægt að greiða lánið upp fyrir lokagjalddaga.*
- *Ekki er hægt að selja lánið eða framselja það.*
- *Lánið er með jöfnum greiðslum.*

Lausn:

Höfum jöfnuna:

$$\Delta P \approx -D_m \cdot P \cdot \Delta r + \frac{P \cdot G}{2} \cdot \Delta r^2$$

Notum hana til að komast að því hve mikið lánið má lækka til að koma út á sléttu miðað við gefið Δr.

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_m \cdot \Delta r + \frac{G \cdot \Delta r^2}{2} = \underline{\textbf{-29\%}}$$

Svo höfuðstólinn má lækka um 29% m.v. Δr til að koma út á sléttu, svo augljóst er að Valgerður ætti að taka tilboði Jóns.

Heimaverkefni 6

Dæmi 1:

Verslun ein ætlar að bjóða vaxtalaust lán fyrir jólin. Lánið er til 3ja mánaða og með 1% lántökugjaldi. Hver er hlutfallstala kostnaðar fyrir þessi lán?

Höfum í upphafi tímann 0 (t=0) og erum að hugsa á ársbasis og því líftími lánsins því $t = 3/12 = 1/4$. Höfum heildarkostnaðinn (H). Setjum upp í töflu:

	t = 0	t = 1/4
	H - 0,01 H	H
$\sum$	0,99 H	H

Hlutfallstala kostnaðar verður því:

$$1 = 0,99 \cdot (1 + r)^{1/4}$$

$$\Longrightarrow (1 + r)^{1/4} = \frac{1}{0,99}$$

$$\Longrightarrow r = \left(\frac{1}{0,99}\right)^4 - 1 = \underline{\mathbf{4{,}10\%}}$$

Hlutfallstala kostnaðar fyrir vaxtalausu jólalánin er því 4,10%

Dæmi 2:

Á efnahagsreikningi Glósóla hf. Í upphafi árs eru eignir samtals2.672.500 kr. og eigið fé metið 1.684.000 kr. Í lok árs höfðu skuldir lækkað um 256.000 og eigið fé hækkað um 126.000. Hverjar voru eignir Glósóla hf. Í lok árs?

Höfum að eignir samanstanda af skuld og eigin fés, setjum upp jöfnu miðað við þetta:

$$2.672.500 = \text{skuldir} + 1.684.000 \longrightarrow \text{skuldir} = 988.500$$

Setjum nú inn breytingar milli ára og finnum út eignir Glósóla í lok árs:

$$\text{eignir} = (988.500 - 256.000) + (1.684.000 + 126.000) = 732.500 + 1.810.000$$

Höfum því að:

$$\underline{\underline{\textbf{eignir} = \textbf{2.542.500 kr.}}}$$

Dæmi 3:

Hlutafé fyrirtækis er 10.000, óraðstafað eigið fé 5.000. Aðrir liðir eru ekki undir eigið fé. Langtímaskuldir eru 50.000. Skammtímaskuldir eru alls 10.000 og þar með taldar viðskiptaskuldir upp á 3.000. Hvaða fullyrðing er rétt?

a. Eignir fyrirtækis eru 70.000
b. Samtals skuldir fyrirtækis eru 60.000
c. Samtals skuldir og eigið fé er 70.000
d. Vaxtaberandi skuldir eru 50.000
e. Vaxtaberandi skuldir eru 57.000 kr.

Förum í gegnum þetta lið fyrir lið:

a.

Eignir $= 10.000 + 5.000 + 50.000 + 10.000 = 75.000$

Liðurinn er rangur því $70.000 = 75.000$

b.

Skuldir $= 10.000 + 50.000 = 60.000$

Liðurinn er **RÉTTUR** því $60.000 = 60.000$

c.

Skuldir + eigið fé $= 60.000 + 10.000 + 5.000 = 75.000$

Liðurinn er rangur því $70.000 = 75.000$

d.

Vaxtaberandi skuldir $= 60.000$ ef tekið er með að viðskiptaskuldir séu vaxtaberandi.

Liðurinn er rangur því skuldir eru a.m.k. ekki 50.000

e.

Eins og farið var útí í lið b. og d. þá eru heildarskuldir fyrirtækisins 60.000, ef að viðskiptaskuldin er ekki vaxtaberandi þá eru vaxtaberandi skuldir 57.000 en ef þær eru vaxtaberandi á 60.000. Viðskiptaskuld ber ekki vexti fyrr en kemur að greiðsludætti, segjum sem svo að vörunar séu teknar út í reikning fyrir ofangreindri upphæð 3.000 þá ber skuldin enga vexti innan þess ramma sem fyrirtækið hefur til að greiða hana, eða ekki fyrren reikningur sem skrifaður er út af lánveitenda fer að bera vexti(t.d. dráttarvexti). Ekki eru því nægar forsendur til þess að ákvarða hvort þessi liður sér réttur, jafnvel væri mögulegt að ef þessu viðskiptaskuld er yfir langt tímabil(t.d. 2 mánuði) að eldri hluti skuldarinnar beri vexti en hinn hlutinn sem ekki er kominn að greiðsludrætti geri það ekki.

Liður b. er því "Réttastur"

Hægt er að rökræða um það hvort liður e. er réttur, því eins og farið var í röksemdafærslu um hann þá eru ekki nægar forsendur til að ákvarða ótvírætt um hann. Miðað við spurninguna "Hvaða fullyrðing er rétt?" ætlum við því að gera ráð fyrir að aðeins einn liður sé réttur og því er það b. liður.

Dæmi 4:

Í ársreikningi fyrirtækis má finna eftirfarandi liði fyrir eitt rekstrarár: Rekstrartekur 100.000, vaxtaberandi skuldir 1.000.000, vaxtaprósenta 10%, heildargjöld 75.000. Greiddar afborganir af skuldum á rekstrarári voru 50.000. Engar afskriftir voru á árinu. Reiknum með 15% skattprósentu. Hver var hagnaður fyrir skatta?

Höfum hér forsendur:

Rekstrartekjur:	100.000
Vaxtaberandi skuldir:	1.000.000
Vaxtaprósenta	10%
Heildargjöld	75.000
Greiddar afborganir:	50.000
Skattprósenta	15%

Framlegd = sala - breytilegur kostnaður

Reiknum út:

EBITA = **E**arnings **B**efore **I**nterests **T**ax **D**epreciation **A**mortization.

Rekstrartekjur	100.000
Rekstrargjöld	**-75.000**
EBITA	25.000
Afskriftir	**0**
EBIT	25.000
Fjármagnsgjöld	**-100.000**
EBT	-75.000

EBT er því **-75.000**

Heimaverkefni 7

Dæmi 1:

Hans þarf að gera rekstrar áætlun fyrir fyrirtæki sitt. Skv. áætlun verður tekið lán upp á 10.000.000 og eigendur, hann og tengdapabbi, leggja fram 5.000.000. Síðan verða keyptar tvær loftpressur, önnur fyrir 10.000.000 og hin minni fyrir 3.000.000. Auk þess verða keyptir inn varahlutir fyrir 1.000.000 og afgangurinn lagður inn á bankabók fyrirtækis. Lánið er jafnar afborganir til 10 ára með 6,5% vöxtum. Gerum ráð fyrir að rekstrartekjur á ári 1 séu 7.000.000 og 9.000.000 á ári tvö og gjöld séu 3.000.000 ár ári 1 og 4.000.000 á ári 2. Reiknum með 10% af tekjum sem viðskiptakröfum. Árlegar afskriftir eru 5% af upprunalegu kaupvirði af væðum loftpressunum. Skattprósenta er 20% og greiddur verður út arður á ári 2 sem nemur 10% af hagnaði. Stillið upp efnahags-, rekstrarreikningi og sjóðstreymi fyrir ár eitt og tvö í rekstri fyrirtækis og einnig stofnefnahagsreikningi.

Setjum upp rekstrarreikning, sjóðstreymi, efnahagsreikning.

Rekstrarreikningur

Ár		1	2
	Tekjur	7.000.000	9.000.000
	Gjöld	- 3.000.000	- 4.000.000
	EBITA	**4.000.000**	**5.000.000**
	Afskrfitir (5%)	- 650.000	- 650.000
	EBT	**2.700.000**	**3.766.000**
	Vextir	- 650.000	-585.000
	EBIT	**2.700.000**	**3.765.000**
	Skattur (20%)	- 540.000	- 753.000
Hagnaður		**2.160.000**	**3.012.000**

Sjóðstreymi

Ár	1	2
Hagnaður	2.160	3.012.000
Afskriftir	650.000	650.000
Veltufé frá rekstri	**2.810.000**	**3.662.000**
Viðskiptakröfur	- 700.000	- 200.000
Handbært fé	**2.110.000**	**3.462.000**
Afborganir langtímalána ...	- 1.000.000	- 1.000.000
Arður		-301.200
Breyting á handbæru fé	**1.110.000**	**4.270.800**
Handbært fé í byrjun árs ...	1.000.000	2.110.000
Handbært fé í lok árs	2.110.000	4.270.800

Efnahagsreikningur

Ár		0	1	2
Eignir:				
	Handbært fé	1.000.000	2.110.000	4.270.800
	Viðskiptakröfur ...	0	700.000	900.000
	Varahlutir	1.000.000	1.000.000	1.000.000
	Loftpressur	13.000.000	12.350.000	11.700.000
		15.000.000	**16.160.000**	**17.870.800**
Skuldir:				
	Lán	10.000.000	9.000.000	8.000.000
Eigið fé:				
	Hlutafé	5.000.000	5.000.000	5.000.000
	Óráðstafað eigið fé	0	2.160.000	4.870.800
		15.000.000	**16.160.000**	**17.170.800**

Dæmi 2:

Veltufé frá rekstri fyrirtækis 2006 var 1.273.212. Á sama ári hækkuðu skammtímakröfur þess um 270.000 og skammtímaskuldir hækkuðu einnig um 80.000. Hvert er handbært fé frá rekstri þessa fyrirtækis árið 2006?

Höfum hér að:

$$\text{Handbært fé} = \text{Veltufé frá rekstri} \; - \text{Skammtímakröfur} + \text{Skammtímaskuld}$$

Setjum því einfanldlega inn í jöfnuna gefnar forsendur og fáum:

$$\text{Handbært fé} = 1.273.212 - 270.000 + 80.000 = \underline{\mathbf{1.083.212\ kr.}}$$

Dæmi 3:

Að neðan er rekstrarreikningur fyrirtækis. Skattprósentan er 18%. Rekstrartekjur: 100.000 Rekstrargjöld: 80.000 Fjármagnsgjöld: 15.000 Afskriftir: 20.000 Reiknið, EBITDA, hagnað fyrir og eftir skatt.

Byrjum á því að stilla upp rekstrarreikningi, lesum gildin sem beðið er um útúr töflunni:

Rekstrarreikningur

Ár		1
	Rekstrartekjur	100.000
-	Kostnaðarverð	0
=	**Framlegð**	**100.000**
-	Rekstrargjödl(FK)	- 80.000
=	**EBITDA**	**20.000**
	(Hagnaður fyrir skatta, fjármagnsliði og afriftir)	
-	Afskrfitir	- 20.000
=	**EBIT**	**0**
	(Hagnaður fyir skatta og fjármagnsliði)	
-	Fjármagnsgjöld	- 15.000
=	**EBT** (Hagnaður fyrir skatta)	**- 15.000**
-	Skattur (18%)	0
Hagnaður		**- 15.000**

Dæmi 4:

Grímur Geitskór er að skoða efnahagsreikning félags. Þar kemur fram: Birgðir 20.000, viðskiptakröfur 15.000, tæki 22.000, viðskiptaskuld 5.000 og óefnislegar eignir 1.500. Aðra liði er ekki að finna í efnahagsreikningi. Hvaða fullyrðing að neðan er rétt? Rökstyðjið!

a) Félagið er skuldlaust

b) Langtímaksuldir félags eru 53.500

c) Heildareignir félags eru 57.000

d) Eigið fé félags er 53.500

e) Veltufjármundir eru 16.500

Sjáum að liður **d) er réttur** ...

$$\text{Eigið fé} = 20.000 + 15.000 + 22.000 + 1.500 = \underline{\mathbf{53.500}}$$

Heimaverkefni 8

(1)

Richard Ivey School of Business
The University of Western Ontario

IVEY

9B02B005

FENG FARM

Yasheng Chen prepared this case under the supervision of Professors David Sharp and Murray Bryant solely to provide material for class discussion. The authors do not intend to illustrate either effective or ineffective handling of a managerial situation. The authors may have disguised certain names and other identifying information to protect confidentiality.

Ivey Management Services prohibits any form of reproduction, storage or transmittal without its written permission. This material is not covered under authorization from CanCopy or any reproduction rights organization. To order copies or request permission to reproduce materials, contact Ivey Publishing, Ivey Management Services, c/o Richard Ivey School of Business, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, N6A 3K7; phone (519) 661-3208; fax (519) 661-3882; e-mail cases@ivey.uwo.ca.

Copyright © 2002, Ivey Management Services

Version: (A) 2003-06-10

Yasheng Chao was the leader of Feng village in China's Shandong province. As a government official, he was responsible for allocating farmland to peasants. In China, the government, not farmers, owned all farmland. Farmers signed contracts with local governments to work the land. After the harvest, farmers sold most of their crops to the government. At the end of January 2003, one of the Feng farmers left the village, so Chao had to find someone to take over his 10-year contract on 12 hectares of farmland.

THE FARMLAND CONTRACTS

The 12 hectares of farmland were the most productive in Feng village and were especially suited to growing wheat. The farmer who had previously worked the land had paid RMB1,000 per hectare per growing season in rent. As good farmland was scarce near the village, Chao wanted to have someone capable take over the contract. After reviewing the 2002 harvests of all the farmers in the village, Chao identified Fei Chang, Bei Liu and Yu Kwan as the three most diligent and capable farmers in the village. Chao decided to meet them to decide who should take over the contract.

After a long discussion, Chao and the three peasants reached an agreement. In the coming farming season, from February to July, each farmer would work on part of the farmland, and the farmer with the best performance would be allowed to take over the contract for all 12 hectares. Fei Chang agreed to farm three hectares, Bei Liu agreed to farm four hectares and Yu Kwan the remaining five hectares. Each could keep a portion of his output in exchange for the work he put into the farm, and had to sell the rest to Feng village. Before the peasants left, Chao reminded them that if they needed financial support, the local bank had loans for farmers, available at five per cent.

THE HARVEST

At the beginning of August, Chao called for a meeting with Chang, Liu and Kwan. At the meeting, the three farmers reported to Chao what they had accomplished during the farming season.

Chang started first:

> In February, I used RMB2,800 of my own money and borrowed RMB3,000 from the bank to buy seeds and fertilizer. I needed a tractor, but I thought that RMB6,000 for a new tractor was too expensive, so I rented one — after all, I only needed it for three days. During the season, I paid RMB100 for tractor rent and diesel fuel. I used the traditional amount of seeds and fertilizer on my land, 200 kilograms of seed and 220 kilograms of fertilizer per hectare. The total yield of wheat from my three hectares was 13,800 kilograms, of which I will keep 2,000 kilograms as payment for the 120 days I worked on the farm. The rest is available for sale to the village, and when the village pays me, I will easily be able to repay the bank loan and interest. In addition to farming, I spent time working in a small factory in the village. I earned RMB17 a day in this part-time job.

Liu said:

> I didn't think renting a tractor was a good idea. The rent was just too high. I used RMB850 of my own money to buy an old tractor and another RMB230 for repairs and diesel fuel. I think the tractor is in good running condition now, and can be used for at least another two years. I also used the traditional amount of seed, but I used more fertilizer and spent more time on the farm, keeping it clear of weeds. I used 1,120 kilograms fertilizer in total and spent 168 days on the farm. I am very satisfied with the output of my part of the farm. In total, I produced 19,200 kilograms of wheat. I am going to keep 2,800 kilograms for myself. After selling the rest of the output to the village, I will be able to repay with interest the RMB8,000 bank loan that I took in February.

Kwan told Chao:

> I don't like borrowing money. I used all my own savings instead, and saved the cost of interest. I spent RMB5,500 on a new tractor and RMB200 on diesel fuel. The tractor should last for 20 years. I used the same amount of seed per acre as Chang and Liu did, but to increase my yield, I used even more fertilizer — 340 kilograms per hectare. I was very busy for the whole season, spending all my time on the farm. The yield from my farm is 25,000 kilograms of wheat, of which I want to sell 22,000 kilograms to Feng village.

Chao knew that the price of wheat was RMB1 per kilogram. The price of seed wheat was also RMB1 per kilogram. One kilogram of fertilizer cost RMB4, and the average living cost for a farmer in the village was about RMB15 a day. Chao calculated that all three had managed his part of the farm well, but was unsure who should take over the whole farm next year.

QUESTIONS

1. For each plot of the farm, prepare an income statement for the farming season from February to July and balance sheets at the beginning and the end of the farming season.
2. Which farm had the best performance?
3. Who was the best farmer?

Chang

Efnahagsreikningur		
Mánuður	febrúar	júlí
Eignir		
Handbært fé	5800	-3495
Viðskiptakröfur	0	11800
	5800	8305
Skuldir		
Lán	3000	0
Eigið fé		
Hlutafé	2800	2800
Óráðstafað eigði fé	0	5,505
	5800	8305

Rekstrarreikningur	
Tekjur	13800
Gjöld	6220
EBITA	7580
Afskriftir	0
EBIT	7580
Fjármagnsgjöld (vextir)	75
EBT	7,505
Skattur	0
Hagnaður eftir skatta	7,505

Sjóðsstreymi	
Hagnaður árs	7,505
Afskriftir	0
Veltufé frá rekstri	7,505
Viðskiptakröfur	11800
Handbært fé frá rekstri	-4,295
Afborganir langtímalána	3000
Arður	2000
Breyting á eigin hlutafé	0
Breyting á handbæru fé	-9295
Handbært fé í byrjun timabils	5800
Handbært fé í lok tímabils	-3495

Chang	
Dagar í þorpi	60
Kostnaður á dag	15
Hlutastarf	1020
Uppihaldskostnaður	-120
Dagar	180
Leiga á hektara	1000
Fjöldi hektara	3
Leiga	3000
Eigið fé	2800
Lán frá banka	3000
Leiga á traktor + rekstur	100
Seed hveiti (kg/hektara)	200
Seed hveiti kostnaður	600
Áburður kostnaður	2640
Tekjur	13800
Arður (hann tekur f. sig)	2000
Afskriftir	5%
Vextir	2.50%

Liu

Efnahagsreikningur		
Mánuður	febrúar	júlí
Eignir		
Handbært fé	8000	-9890
Traktor	850	425
Viðskiptakröfur	0	16400
	8850	6935
Skuldir		
Lán	8000	0
Eigið fé		
Hlutafé	850	850
Óráðstafað eigði fé	0	6,085
	8850	6,935

Rekstrarreikningur	
Tekjur	19200
Gjöld	9690
EBITA	9510
Afskriftir	425
EBIT	9085
Fjármagnsgjöld (vextir)	200
EBT	8,885
Skattur	0
Hagnaður eftir skatta	8,885

Sjóðsstreymi	
Hagnaður árs	8,885
Afskriftir	425
Veltufé frá rekstri	9,310
Viðskiptakröfur	16400
Handbært fé frá rekstri	-7,090
Afborganir langtímalána	8000
Arður	2800
Breyting á eigin hlutafé	0
Breyting á handbæru fé	-17890
Handbært fé í byrjun timabils	8000
Handbært fé í lok tímabils	-9890

Liu	
Dagar í þorpi	12
Kostnaður á dag	15
Uppihaldskostnaður	180
Dagar	180
Leiga á hektara	1000
Fjöldi hektara	4
Leiga	4000
Eigið fé	850
Lán frá banka	8000
Kaup á traktor	850
Leiga á traktor + rekstur	230
Seed hveiti (kg/hektara)	200
Seed hveiti kostnaður	800
Áburður kostnaður	4480
Tekjur	19200
Arður (hann tekur f. sig)	2800
Afskriftir	50%
Vextir	2.50%

Kwan

Efnahagsreikningur		
Mánuður	febrúar	júlí
Eignir		
Handbært fé	0	-13000
Traktor	5500	5225
Viðskiptakröfur	0	22000
	5500	14225
Skuldir		
Lán	0	0
Eigið fé		
Hlutafé	5500	5500
Óráðstafað eigði fé	0	8,725
	5500	14,225

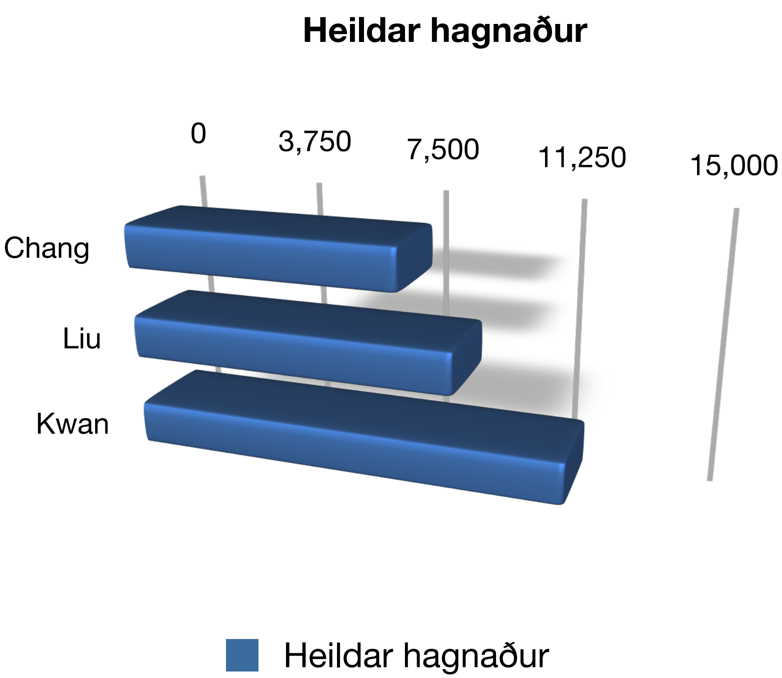
Rekstrarreikningur	
Tekjur	25000
Gjöld	13000
EBITA	12000
Afskriftir	275
EBIT	11725
Fjármagnsgjöld (vextir)	0
EBT	11,725
Skattur	0
Hagnaður eftir skatta	11,725

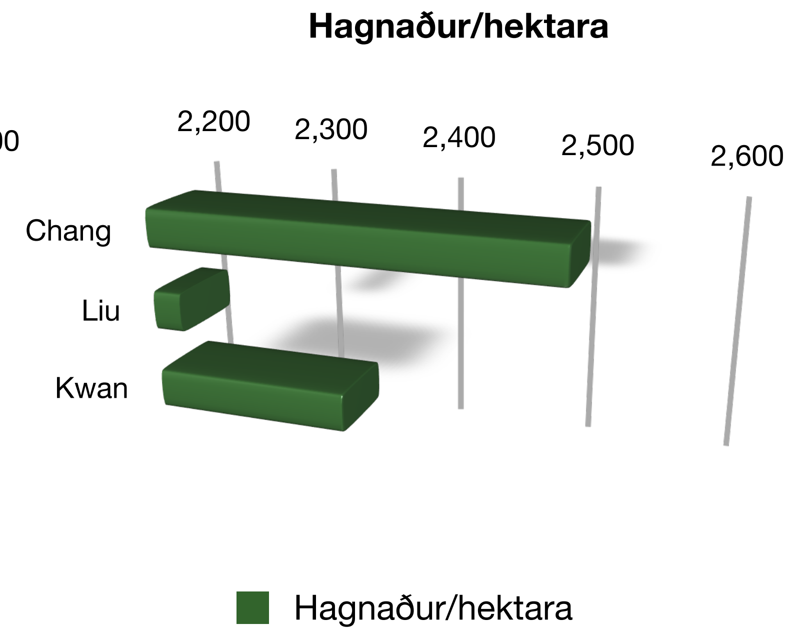
Sjóðsstreymi	
Hagnaður árs	11,725
Afskriftir	275
Veltufé frá rekstri	12,000
Viðskiptakröfur	22000
Handbært fé frá rekstri	-10,000
Afborganir langtímalána	0
Arður	3000
Breyting á eigin hlutafé	0
Breyting á handbæru fé	-13000
Handbært fé í byrjun timabils	0
Handbært fé í lok tímabils	-13000

Liu	
Dagar í þorpi	0
Kostnaður á dag	15
Uppihaldskostnaður	0
Dagar	180
Leiga á hektara	1000
Fjöldi hektara	5
Leiga	5000
Eigið fé	5500
Lán frá banka	0
Kaup á traktor	5500
Leiga á traktor + rekstur	200
Seed hveiti (kg/hektara)	200
Seed hveiti kostnaður	1000
Áburður kostnaður	6800
Tekjur	25000
Arður (hann tekur f. sig)	3000
Afskriftir	5%
Vextir	2.50%

Niðurstöður

	Hektarar	Efnahagsreikningur		Hlutfall	Heildar hagnaður	Hagnaður/ hektara
		Febrúar	Júlí			
Chang	3	5800	8305		7,505	2,502
Liu	4	8850	6,935		8,885	2,221
Kwan	5	5500	14,225		11,725	2,345





Sjáum nú að sá bóndi sem náði mestum hagnaði var Kwan, en aftur á móti var Chang með bestu frammistöðu á hvern hektara, þ.a. svar við <u>spurningu 2</u> er Kwan en svar við <u>spurningu 3</u> er augljóslega Chang.

Heimaverkefni 9

Dæmi 1:

Fyrirtæki eitt skilaði arðsemi eigin fjár upp á 15 % og greiddi síðan út 100.000 kr. í arð. Eigið fé eftir arðgreiðslu nam 1.000.000 kr. Hver var hagnaður ársins eftir skatta?

Byrjum á því að finna eigið fé í upphafi ársins (tími = 0):

$$E_0 \cdot 1,15 - 100.000 = 1.000.000 \Longrightarrow E_0 = 956.522$$

Finnum svo hagnað ársins eftir skatta:

$$\text{hagnaður} = 1.100.000 - 956.522 = \underline{\mathbf{143.478\ kr}}$$

Dæmi 2:

Valgerði býðst að kaupa hlutafé í framleiðslufyrirtæki á genginu 1,2. Fyrirtækið sem um ræðir á eignir upp á 50.000.000 og skuldir upp á 25.000.000. Hlutafé fyrirtækis er 5.000.000 og óráðstafað eigið fé er 20.000.000. Fyrirtækið er í stöðugum rekstri. Rekstrartekjur er áætlaðar 20.000.000 á ári, hráefniskostnaður 10.000.000 og önnur rekstrargjöld 4.000.000. Afskriftir 500.000 á ári. Gert er ráð fyrir birgðaaukningu upp á 400.000 á fyrsta ári en síðan ekki meir. Viðskiptakröfur munu á öðru ári lækka um 500.000 og ekki breystast eftir það. Fjárfesta þarf 500.000 árlega. EFtir þriðjá ár er gert ráð fyrir 2% árlegum vexti. Skattprósentan er 15%, ávöxtun eigin fjár 15% og lánsvextir 10%. Út frá gefnum upplýsingum á Valgerður að kaupa hlutafé fyrirtækis á genginu 1,2 ? Rökstyðjið svar ykkar.

Byrjum á því að setja upp rekstrarreikningum:

Rekstrarreikningur

Reikstrartekjur ..	20.000.000
Hráefniskostnaður	- 10.000.000
Framlegð	**10.000.000**
Rekstrargjöld	- 4.000.000
EBiTDA	**6.000.000**
Afskriftir	- 500.000
EBIT	**5.500.000**
Skattur (15%)	- 825.000
EBIT(1-T)	**4.675.000**

EBIT(1-T)	**4.675.000**	**4.675.000**	**4.675.000**
Afskriftir	500.000	500.000	500.000
Birgðaaukning ..	- 400.000	0	0
Viðskiptakröfum	0	500.000	0
Fjárfestingar ...	- 500.000	- 500.000	- 500.000
FCFF	**4.275.000**	**5.175.000**	**4.675.000**

Höfum nú til að reikna $WACC = \frac{E}{C}r_e + \frac{D}{C}(1-T)r_0$ eftirfarandi:

$$E = 25.000 \qquad \text{D} = 25.000$$

$$\text{C} = 50.000 \qquad r_e = 15\%$$

$$r_0 = 10\% \qquad \text{T} = 15\%$$

$$\text{g} = 2\%$$

Setjum nú inn:

$$WACC = \frac{25.000}{50.000}15\% + \frac{25.000}{50.000}(1 - 15\%)10\% = 11,75\%$$

Setjum r = WACC og finnum virði fyrirtækisins frá tímapunkti sem er eftir 3 ár og fram til ∞:

$$\text{TV} = \frac{FCFF_n(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} = \frac{4.675.000 \cdot 1,02}{1,1175^3 \cdot 0.0975} = 35.045.000$$

Finnum nú heildarvirði fyrirtækisins:

$$\text{EV} = 11.319.000 + 35.045.000 = 46.364.000$$

Skoðum nú virðir eigin fjárs:

Virði eigin fjár = EV - Vaxtaberandi skuldir = $46.364.000 - 25.000.000 = 21.364.000$

Skoðum nú gengi fyrir fyrirtækið:

$$\text{Gengi} = \frac{\text{Virði eigin fjár}}{\text{Hlutafé}} = \frac{21.364.000}{5.000.000} = 4.2728$$

Sjáum nú að það væri hagstætt fyrir Valgerði að kaupa hlutafé á genginu 1,2

Dæmi 3:

Við höfum eftirfarandi liði úr rekstrar- og efnahagsreikningi fyrirtækis: Rekstrartekjur eru 100.000 og heildargjöld 60.000. Afskriftir 10.000, fjármagnsgjöld 20.000. Skattprósenta 15%. Eignir 100.000 og eiginfjárhlutfall 33%. Metið hvaða fullyrðing að neðan er rétt. Rökstyðjið svar ykkar!

a) *Veltufé frá rekstri er 20.000*

b) *EBITDA framlegð er 50 %*

c) *Hlutafé fyrirtækis er 33.000 og skuldir 67.000*

d) *Arðsemi eigin fjár er 25,8%*

e) *Ekkert af ofantöldu*

Rétt svar hér er **d)** arðsemi eigin fjár er 25,8%, það sést útfrá eftirfarandi útreikningum.

$$\text{Hagnaður} = (\text{Tekjur - Gjöld - Afskriftir - Fjármagnsgjöld}) \cdot (1 - T)$$

$$\text{Hagnaður} = (100.000 - 60.000 - 10.000 - 20.000)(1 - 15\%) = 8500$$

Eigið fé er síðan:

$$\text{Arðsemi eigin fjár} = 33\% \cdot 100.000 = 33.000$$

Fáum því að arðsemi eigin fjár er:

$$\text{Arðsemi eigin fjár} = \frac{\text{Hagnaður}}{\text{Eigið fé}} = \frac{8500}{33.000} = \underline{\mathbf{25{,}8\ \%}}$$

Dæmi 4:

Elín hefur verið beðin um að verðmeta fyrirtækið Glósóla hf. og fékk eftirtaldar upplýsingar: Í ár voru rekstrartekjur samtals 10.000.000 og í áætlun fyrir næstu tvö ár munu þær aukast um 10 % á hverju ári. Gjöld eru 80% af tekjum og gert er ráð fyrir að afskriftir séu fastar 250.000 á ári. Árlega þarf að fjárfesta fyrir 150.000 í fastafjármunum og breyting á veltufjármunum er engin. Í ár munu skattar hækka í 20 %. Fyrirtækið er fjármagnað til helminga með eigin fé 7.500.000 og langtímaskuldum 7.500.000 sem eru jafnar afborganir með 5% vöxtum og einum gjalddaga á ári. Eigið fé fyrirtækis er þannig að hlutafé er 2.500.000 og 5.000.000 fellur undir varasjóð og óráðstafanað hagnað. Arðsemi eigin fjár er 20 %. Ekki er gert ráð fyrir neinum vextir eftir næstu tvö ár. Hvert er virði hlutafjár skv. ofangreindum tölum?

Ár		1	2	3
Ávöxtunarkrafa - 10 %				
	Rekstrartekjur ..	10.000.000	11.000.000	12.100.000
	Rekstrargjöld ...	- 8.000.000	- 8.800.000	9.680.000
	EBITA	**2.000.000**	**2.200.000**	**2.420.000**
	Afskrfitir	- 250.000	- 250.000	- 250.000
	EBIT	**1.750.000**	**1.950.000**	**2.170.000**
	Skattur (20%) ...	- 350.000	- 390.000	- 434.000
	EBIT(1-T)	**1.400.000**	**1.560.000**	**1.736**
	Afskriftir	250.000	250.000	250.000
	Breyting á veltufé			
	Fjárfestingar	- 150.000	- 150.000	- 150.000
	FCFF	**1.500.000**	**1.660.000**	**1.836.000**
	Núvirði	1.363.636	1.371.901	1.379.414
EV	16.529.677			

Finnum virði eigin fjár:

Virði eigin fjár = EV - Vaxtaberandi skuldir $= 16.529.677 - 7.500.000 = 0.029.677$

Höfum svo að virði hlutafésins er þriðjungur af virði eigin fjár eða:

$$\text{Virðir hlutafés} = \frac{\text{Virði eigin fjár}}{3} = \frac{9.029.677}{3} = \underline{\mathbf{3.009.892}}$$

Heimaverkefni 10

Dæmi 1:

Þú átt að verðmeta sjávarútvegsfyrirtæki nokkurt út frá upplausnarvirði þessi. Stærsti liðurinni í efnahagsreikningi er skip sem er bókfært er á 50.000.000 en söluverð þess í dag er 67.000.000. Einnig er að finna í reikningi óefnislegar eignir sem metnar eru 21.000.000. Auk þess er í fyrirtækinu handbært fé upp á 3.700.000. Hvert er upplausnarverðmæti fyrirtækis skv. þessum upplýsingum?

Upplausnarverðmæti =

Eigið fé + Markaðsverð - Óseljanlegar eignir - Annað til frádráttar

Efnahgasreikningur	
Handbært fé	3.700.000
Skip	50.000.000
Óefnislegar eignir	21.000.000
Eignir samtals:	74.700.000

$$\text{Eignir} = \text{Skuldir} + \text{Eigið fé}$$

Þar sem ekki er talað um að fyrirtækið skuldi eitthvað þá hlýtur eigið fé fyrirtækisins að vera jafnt eignum svo: Eigið fé = 74.700.000

þ.a.

$$\text{Upplausnarverðmæti} = 74.700.000 + 67.000.000 - 21.000.000 = \underline{\mathbf{120.700.000}}$$

Nema! þetta sé trikk spurning og þá er ekki hægt að reikna þetta þar sem það vantar upplýsingar um eigið fé.

Dæmi 2:

Fyrirtæki eitt ætlar að ráðast í verkefni með þriggja ára líftíma. Ítarleg greining á stofnkostnaði og áætluðum tekjum/gjöldum liggur til grundvallar ákvörðunar um að ráðast í verkefnið. Reiknað er með að árlegar tekjur næstu þriggja ára verði

60 og gjöld 30. Útlögð fjárfesting í upphafi er 60 og er hún afskrifuð til fulls á þremur árum, 20 árlega. Við ráðgerum hins vegar að geta selt verkefnið í lok þriðja árs fyrir 5, jafnvel þótt það hafi verið að fullu afskrifað í bókum okkar. Gerum ráð fyrir 15% skattprósentu. Reiknið sjóðstreymi/fjárstreymi þessa verkefnis. Hver er núllpunktsávöxtunarkrafan, IRR? Hvert er hreint núvirði, NPV, verkefnis m.v. 13% ávöxtunarkröfu?

Fyrir ár 1 og 2:

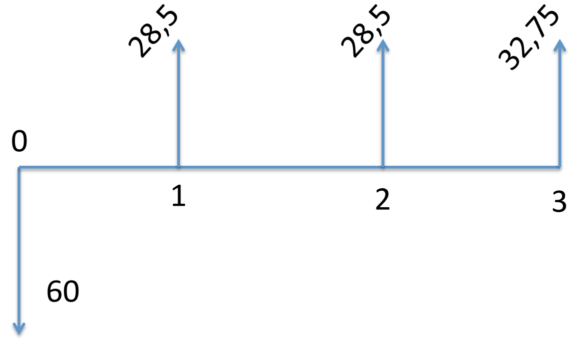
$$\text{Hagnaður} = (60 - 30 - 20) \cdot 0,85 = 8,5$$

Fyrir ár 3:

$$\text{Hagnaður} = (65 - 30 - 20) \cdot 0,85 = 12,75$$

Sjóðstreymi

Ár	1	2	3
Hagnaður	8,5	8,5	12,5
Afskriftir	20	20	20
Veltufé frá rekstri	28,5	28,5	32,75
Δ Handb. fé	28,5	28,5	32,75



Innri vextir (IRR) eru:

$$60 = \frac{28,5}{1+r^t} + \frac{28,5}{(1+r^t)^2} + \frac{32,75}{(1+r^t)^3}$$

$$\Longrightarrow \text{svo: } \underline{r^t = 22,58\%}$$

Hreint núvirði (NPV) er:

$$NPV = \frac{28,5}{1,13} + \frac{28,5}{(1,13)^2} + \frac{32,5}{(1,13)^3} - 60 = \underline{10,24}$$

Dæmi 3:

Árið 2003 var stofnað fyrirtæki utanum sérstakt átaksverkefni. Stofnkostnaður samanstóð af fjárfestingu í framleiðsluvél fyrir samtals 105 milljónir sem keypt var í lok ársins 2003 og afskrifuð á 3 árum. Eignfærður þróunarkostnaður árið 2003 var 15 milljónir. Annar kostnaður á fyrsta starfsári félagsins fólst í almennum rekstrarkostnaði að upphæð samtals 18 milljónir króna. Tekjur á fyrsta starfsári voru engar. Fyrirtækið hefur þá stefnu að eignfæra það sem má eignfæra samkvæmt lögum. Gerum ráð fyrir að félagið þurfi að greiða tekjuskatt en að félagið borgi ekki eignaskatt. Gert er ráð fyrir að eignir séu afskrifaðar í reikningum félagins á 3 árum.

Eigendur félagsins leggja sjálfir til 63 milljónir í formi hlutafjár. Viðskiptabanki þeirra lánar 75 milljónir til 3ja ára. 10% vextir eru greiddir af láninu á ári en höfuðstóll greiddur upp í lok ársins 2006. Ekki er gert ráð fyrir að félagið þurfi frekari fjármögnun. Áætlanir félagsins gera ráð fyrir að félagið skili fyrst tekjum árið 2004 og tímabilið sem er horft til sé 2003, 2004, 2005 og 2006. Fyrirtækið gerir ráð fyrir að selja vörur fyrir samtals 210 milljónir á ári, árin 2004, 2005 og 2006 og þar af þurfi félagið að kaupa hráefni vegna þeirrar vöru fyrir alls 54 milljónir á ári fyrir sama tímabil. Gert er ráð fyrir að heildar launakostnaður sé 47 milljónir króna og annar rekstrarkostnaður 31 milljón króna á árunum 2004, 2005 og 2006. Ekki þarf að gera ráð fyrir að félagið ávaxti eigin sjóð á tímabilinu. Stillið upp rekstrar- og efnahagsreikning og sjóðstreymi fyrir árin 2003,2004,2005,2006

Efnahgasreikningur					
Ár:		2003	2004	2005	2006
Veltufjármunir:					
	Handbært fé	0	64,4	128,8	118,2
	Fastafjármunir				
	Varanl. Rekstrarfjárm.				
	Vél	105	75	35	0
	Óefnislegar eignir				
	Þróunarverkefni	15	10	5	0
Eignir samtals		120	144,4	168,8	118,2
Langtímaskuldir:					
	Lán	75	75	75	0
	Eigið fé				
	Hlutafé	63	63	63	63
	Óráðst. Eigið fé	-18	6,4	30,8	55,2
Skuldir + eigið fé samt.		120	144,4	168,8	118,2

Rekstrarreikningur				
Ár:	2003	2004	2005	2006
Tekjur	0	210	210	210
- Gjöld	-18	-132	-132	-132
Afskriftir	0	40	40	40
EBIT	-18	38	38	38
- Vextir(fjárm gj)	0	7,5	7,5	7,5
Hagnaður f. Skatt	-18	30,5	30,5	30,5
Skattur(20%)	0	-6.1	-6.1	-6.1
Hagn. E. Skatt	-18	24,4	24,4	24,4

Sjóðstreymi				
Ár:	2003	2004	2005	2006
Hagnaður	-18	24,4	24,4	24,4
Afskriftir	0	40	40	40
Bókf. Þróunark.	-15	0	0	0
Veltufé frá rekstri	-33	64,4	64,4	64,4
Br. Á birgðum				
Br. Á viðsk.kr.				
Br. Á viðsk. Sk.				
Handb. Fé frá rekst.	-33	64,4	64,4	64,4
Fjárf. Í vél	-105			
lán	75			
Br. Á Hlutafé	63			
- Afborgun				-75
Br. Á handb. Fé	0	64,4	64,4	-10.6
Handb. Fé þá			64,4	128,8
Handb. Fé nú	0	64,4	128,8	118,2

Heimaverkefni 11

Dæmi 1:

Við höfum til skoðunar tvö verkefni, annað, verkefni A, er með vænta ávöxtun 7,5% og staðalfrávik 7,5% en hitt, verkefni B, er með vænta ávöxtun 5% og metið áhættulaust. Ef við veljum verkefnin saman í safn í hlutföllum 30% A og 70% B hver er vænt ávöxtun safns og dreifni?

Byrjum á því að finna vænta ávöxtun safns:

Höfu fyrir því formúlu sem hér útlegst: $S = w_1 X_1 + w_2 X_2$

og gefnar forsendur í dæminu eru að: $w_1 = 30\%$, $w_2 = 0$, $X_1 = 7,5\%$ og $X_2 = 5\%$.

Setjum inn og reiknum:

$$S = w_1 X_1 + w_2 X_2 = 30\% \cdot 7,5\% + 70\% \cdot 5\% = \underline{\mathbf{5{,}75\%}}$$

Finnum nú dreifni samfnsins:

Höfum fyrir því formúlu sem hér útlegst: $\sigma^2 = Var[w_1 X_1 + w_2 X_2]$

eða: $\sigma^2 = Var[w_1 X_1] + Var[w_2 X_2] + 2Cov[w_1 X_1, w_2 X_2]$

Og þar sem X_1 og X_2 eru óháð hvort öðru getum við skrifað:

$$\sigma^2 = w_1^2 Var[X_1] + w_2^2 Var[X_2] = w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_2^2 =$$

$$\sigma^2 = (30\%)^2 \cdot (7,5\%)^2 + (70\%)^2 \cdot 0 = \underline{\mathbf{0{,}050625\%}}$$

Dæmi 2:

Jón Kaldi hefur til skoðunar tvær fjárfestingar; A með vænta ávöxtun 10% og staðalfrávik 0,1; B með vænta ávöxtun 15% og staðalfrávik 0,2. Samfylgni milli A og B er 0. Jón ætlar að velja A og B þ.a. safnið hafi sem lægst staðalfrávik. Í hvaða hlutföllum veljum við saman A og B?

Viljum hér finna hlutföll á milli A og B (w_1 og w_2) sem gefur okkur lægt staðalfrávik á safninu. Höfum gefið að engin samfylgni sé á milli A og B($\rho_{AB} = 0$) og að $X_1 = 10\%$, $X_2 = 15\%$, $\sigma_1 = 0,1$ og $\sigma_2 = 0,2$.

Viljum finna w_1 og w_2 til að lágmarka fallið:

$$Var[S] = \sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2$$

Þar sem að safnið samanstendur aðeins af tveimur fjárfestingum þá setjum við $w_2 = (1 - w_1)$ og fáum:

$$Var[S] = \sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2$$

Diffrum nú með tilliti til w_1 og setjum Var[S] $=$ 0:

$$0 = 2w_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_2^2$$

$$\rightarrow 2w_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 2\sigma_2^2$$

$$\rightarrow w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Setjum nú inn og fáum:

$$w_1 = \frac{(0.2)^2}{[(0,1)^2 + (0,2)^]} = \underline{0,8} \qquad \text{og} \qquad w_2 = \underline{0.2}$$

Jón Kaldi á því að velja **80% af A** og **20% af B**.

Dæmi 3:

Jón kaldi ætlar að kaupa eins árs gamlan bíl. Ásett verð er 3.390.000 kr. en hann telur sig geta fengið bílinn á 3.200.000 kr. Honum býðst að taka lán til 5 ára gegn 33% innborgun af kaupverði bíls. Lánið er jafngreiðslulán með mánaðarlegum greiðlum og ber 6,5% ársvexti. Að venju er lántökugjald 1%, stimpilgjald 1,5% og þinglýsingargjald 2.000 kr og greiðslugjald 350 kr.

1. *Hver er lánsfjárhæð Jóns Kalda ef hann vill jafnfram taka lán fyrir kostnaði í upphafi?*
2. *Sýnið greiðsluflæði láns þessi 5 ár.*
3. *Hver er árleg hlutfallstala kostnaðar?*

a) Lánsfjárhæð með kostnaði:

Setjum upp jöfnu sem lýsir láninu og tökum inn lántökugjald stimpilgjald og þinglýsingargjald:

$$P_0 = [3.200.000 \cdot (1 - 33\%)] + (1\% \cdot P_0) + (1,5\% \cdot P_0) + 2000$$

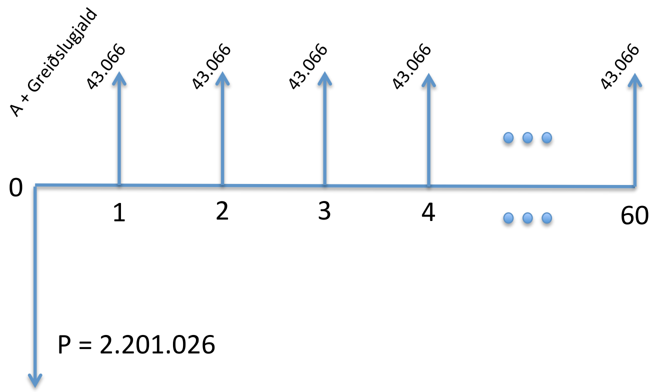
$$97,5\% P_0 = 2.146.000 \rightarrow P_0 = \frac{2.146.000}{97.5\%} = \underline{\mathbf{2.201.026}}$$

b) Greiðsluflæði þessi 5 ár:

Byrjum á því að finni mánaðarlegar greiðslur af láninu:

$$A = P\frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = 2.201.026 \cdot \frac{\frac{(0.065}{12} \cdot \left(1 + \frac{(0.065}{12}\right)^{60}}{\left(1 + \frac{(0.065}{12}\right)^{60} - 1} = 43.066$$

Þar sem að greiðslugjald uppá 350 kr bætist við hverja greiðslu verða mánaðarlega greiðslur af lánainu 43.416 kr.



t	vextir	afborgun	gr.gjald	greiðsla	eftirstöðvar
0					2,201,026
1	11922.2222	31143.3717	350	43415.5939	2,169,882
2	11753.529	31312.065	350	43415.5939	2,138,570
3	11583.9219	31481.672	350	43415.5939	2,107,089
4	11413.3962	31652.1977	350	43415.5939	2,075,436
5	11241.9468	31823.6471	350	43415.5939	2,043,613
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
57	920.587902	42145.006	350	43415.5939	127,810
58	692.302453	42373.2915	350	43415.5939	85,436
59	462.780458	42602.8135	350	43415.5939	42,834
60	232.015218	42833.5787	350	43415.5939	0

c) Árleg hlutfallstala kostnaðar:

Höfum jöfnu fyrir árlega hlutfallstölu kostnaðar:

$$\text{Lánsfjárhæð - lántökukostn} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} \begin{cases} C_k: & \text{Árleg greiðsla} \\ r: & \text{vextir} \\ n: & \#\ \text{ára} \end{cases}$$

Sem að væri hér:

$$2.144.000 = \sum_{k=1}^{60} \frac{43.416}{(1+r)^{k/12}}$$

Sem gefur okkur árlega hlutfallstölu kostnaðar sem $r' = 8,24\%$

Dæmi 4:

Óendanlegt greiðsluflæði greiðir árlega 50 og er núvirt með 5% ávöxtunarkröfu. Hvert er núvirði og meðaltími greiðsluflæðis?

Höfuð áður séð að fyrir óendanlegt greiðsluflæði gildir að:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{r}$$

Því höfum við hér að:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{(1+5\%)^n} = \frac{50}{5\%} = 1000$$

Núvirði greiðsluflæðisins er því **<u>1000</u>**

Höfum einni að fyrir meðaltíma D_m að:

$$\frac{dP}{dr} = -D_m \cdot P$$

Umritum:

$$D_m = -\left(\frac{dP}{dr}\right) \cdot \frac{1}{P}$$

Tökum svo inn að fyrir óendanlegt greiðsluflæði má nálga P = A/r:

$$D_m = -\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r}\right)\right] \cdot \frac{r}{A} = -\left(-\frac{A}{r^2}\right) \cdot \frac{r}{A} = \frac{1}{r}$$

Höfum því að meðaltími greiðsluflæðisins er:

$$D_m = \frac{1}{r} = \frac{1}{5\%} = \underline{\textbf{20 ár}}$$