TÖL304G — Forritunarmál

Haustpróf 13. desember 2010.

Engin hjálpargögn eru leyfileg.

Öll dæmi gilda jafnt.

Munið að skrifa notkunarlýsingu með forskilyrði og eftirskilyrði fyrir sérhvert stef og fastayrðingu gagna fyrir sérhverja útfærslu gagnamóts.

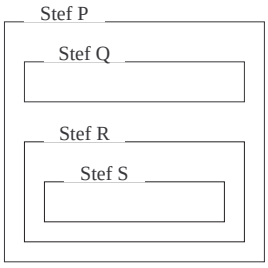
Athugið vel: Svara þarf tilskildum fjölda dæma úr hverjum hluta prófsins. Að því skilyrði uppfylltu gilda **12 bestu dæmi** til einkunnar. Þið hafið því 15 mínútur fyrir hvert dæmi að meðaltali. Byrjið því á að svara dæmum sem krefjast stuttra svara og þið getið auðveldlega svarað.

Hluti I: Bálkmótun o.fl.

Svarið a.m.k. 3 dæmum úr þessum hluta

1. Lýsið því hvernig vakningarfærslur í bálkmótuðum forritunarmálum eru tengdar saman með stýrihlekkjum (*control link, dynamic link*) og tengihlekkjum (*aðgangshlekkjum, access link, static link*) og hvernig hlekkir eru notaðir til að gefa aðgang að breytum í mismunandi földunarhæðum.

2. Gerið ráð fyrir földun í bálkmótuðu forritunarmáli eins og myndin sýnir. Hverjar eftirfarandi fullyrðinga eru þá sannar og hverjar eru ósannar? Eitt rangt svar veldur því að ekkert fæst fyrir dæmið.



   (a) Kalla má á S úr P.

   (b) Kalla má á S úr Q.

   (c) Kalla má á S úr R.

   (d) Kalla má á P úr R.

   (e) Kalla má á P úr S.

(f) Kalla má á P úr Q.

(g) Kalla má á Q úr R.

(h) Kalla má á Q úr S.

(i) Kalla má á Q úr P.

(j) Kalla má á R úr Q.

(k) Kalla má á R úr S.

(l) Kalla má á R úr P.

(m) Í P má nota staðværar breytur úr Q.

(n) Í P má nota staðværar breytur úr R.

(o) Í P má nota staðværar breytur úr S.

(p) Í Q má nota staðværar breytur úr P.

(q) Í Q má nota staðværar breytur úr R.

(r) Í Q má nota staðværar breytur úr S.

(s) Í S má nota staðværar breytur úr P.

(t) Í S má nota staðværar breytur úr R.

(u) Í S má nota staðværar breytur úr Q.

(v) Í R má nota staðværar breytur úr P.

(w) Í R má nota staðværar breytur úr S.

(x) Í R má nota staðværar breytur úr Q.

3. Rökstyðjið að til þess að bálkmótað forritunarmál bjóði þann möguleika að falli sé skilað úr falli þurfi vakningarfærslur að vera geymdar í kös (heap) frekar en á hlaða (stack). Lýsið þeim vandamálum sem upp koma ef vakningarfærslur eru á hlaða.

4. Hverjar eftirfarandi fullyrðinga um lokanir (*closure*) eru sannar?

   (a) Lokanir innihalda tengihlekk (*aðgangshlekk, access link, static link*).

   (b) Lokanir innihalda stýrihlekk (*control link, dynamic link*).

   (c) Lokanir innihalda vakningarfærslu.

   (d) Lokanir innihalda bendi á vakningarfærslu.

   (e) Lokanir innihalda bendi á stef eða fall.

   (f) Lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal vegna þess að í Scheme má geyma lokanir í kös.

(g) Lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal vegna þess að í Scheme má geyma vakningarfærslur í kös.

(h) Í Scheme má lokun vera skilagildi úr falli, en ekki í Standard Pascal.

(i) CAML hefur lokanir.

(j) C++ hefur lokanir.

(k) Morpho hefur lokanir.

(l) Haskell hefur lokanir.

(m) Java hefur lokanir.

5. Svarið öllum eftirfarandi:

   (a) Hvaða upplýsingar eru geymdar í vakningarfærslum forritunarmála?

   (b) Hverjar þessara upplýsinga eru aðeins í bálkmótuðum forritunarmálum og hvers vegna?

   (c) Nefnið tvö forritunarmál þar sem vakningarfærslur eru yfirleitt geymdar á hlaðanum og tvö þar sem vakningarfærslur verða að vera geymdar í kös.

   (d) Rökstyðjið að í síðarnefndu tveimur forritunarmálunum sé nauðsynlegt að vakningarfærslur séu í kös.

6. Hverjar eftirfarandi fullyrðinga um lokanir (*closure*) eru sannar og hverjar eru ósannar? Tvö röng svör valda því að ekkert fæst fyrir dæmið.

   (a) Lokanir innihalda aðgangshlekk (*access link, static link*).

   (b) Lokanir innihalda stýrihlekk (*control link, dynamic link*).

   (c) Lokanir innihalda vakningarfærslur.

   (d) Lokanir innihalda bendi á vakningarfærslur.

   (e) Lokanir innihalda bendi á stef eða fall.

   (f) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma lokanir í kös.

   (g) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma vakningarfærslur í kös.

   (h) Í Scheme má lokun vera skilagildi úr falli, en ekki í Standard Pascal.

   (i) CAML hefur lokanir.

   (j) C hefur lokanir.

   (k) C++ hefur lokanir.

(l) Morpho hefur lokanir.

(m) Java hefur lokanir.

7. Eftirfarandi forritstexti er í einhverju ímynduðu forritunarmáli. (Spyrjið ef ykkur finnst merking eða málfræði ekki augljós.)

```
void f(x,y)
{
  x = 2;
  print x,y;
  y = 1;
}

int i,a[10];
for( i=0 ; i!=10 ; i++ ) a[i]=i;
f(a[0],a[a[0]]);
print a[0], a[1], a[2];
```

Hvað skrifar þetta forrit (fimm gildi í hvert skipti) ef viðföngin eru

- gildisviðföng?
- tilvísunarviðföng?
- nafnviðföng?

Hluti II: Listavinnsla o.fl.

Svarið a.m.k. 3 dæmum úr þessum hluta

8. Skrifið fall í Scheme, CAML, Morpho eða Haskell sem tekur eitt viðfang sem er listi lista af fleytitölum milli 0 og 1 og skilar tölu sem er minnsta hágildi innri listanna, þ.e. minnst af þeim tölum sem fást þegar fundin er hæsta tala í hverjum innri lista. Þið megið reikna með því að hæsta gildi í tómamenginu sé 0 og lægsta gildi í tómamenginu sé 1.

9. Skrifið fall biApplySum í Scheme, CAML, Morpho eða Haskell sem tekur þrjú viðföng, lista af tvíundarföllum og tvo jafn langa lista af gildum og skilar fleytitölumargfeldi gildanna (sem verða að vera fleytitölur) sem út koma þegar föllunum úr fyrsta listanum er beitt eitt af öðru á gildin úr hinum listunum. Segið einnig til um tagið á fallinu samkvæmt tögunarreglum CAML eða Haskell (hvort sem þið skrifið fallið í CAML eða Haskell eður ei). Dæmi um notkun í Scheme væri (biApplySum (list + /) (list 1 2) (list 3 4)), sem skila ætti gildinu $(1 + 3)(2/4) = 4(1/2) = 2$.

10. Skrifið halaendurkvæmt fall í Scheme, Haskell, CAML eða Morpho, sem tekur eina heiltölu $n \geq 0$ sem viðfang og skilar listanum (1 2 ... n). Ef fallið er ekki halaendurkvæmt fæst aðeins hálft fyrir dæmið.

11. Skrifið tvö föll í Scheme, CAML, Morpho eða Haskell sem eru hefðbundnar útfærslur á insert-left og insert-right, þ.e. föll sem taka þrjú viðföng og beita tvíundaraðgerð frá vinstri til hægri eða frá hægri til vinstri.

12. Eftirfarandi er lögleg Haskell skilgreining. Hvað er að skilgreiningunni? Sýnið hvernig laga má skilgreininguna, annars vegar í listarithætti og hins vegar með einhverri annarri aðferð, t.d. með do-rithætti. Hraði lausnarinnar skiptir ekki máli.

```
pyth = [(x,y,z)|x<-[1..],y<-[1..],z<-[1..],x<y,x^2+y^2==z^2]
```

Hluti III: Einingaforritun o.fl.

Svarið a.m.k. 3 dæmum úr þessum hluta

13. Gerið ráð fyrir að til séu klasar A og B í einhverju hlutbundnu forritunarmáli og að B sé undirklasi A og að báðir klasarnir innihaldi tilviksboð t með eftirfarandi lýsingar í A og B.

    - Lýsing í A:

      Notkun: y = z.t(x);
      Fyrir: $a \leq x \leq b$.
      Eftir: $c \leq y \leq d$.

    - Lýsing í B:

      Notkun: y = z.t(x);
      Fyrir: $e < x < f$.
      Eftir: $g < y < h$.

    Hvað þarf sambandið að vera milli a, b, c, d, e, f, g og h til að rökfræðilegt samband klasanna A og B sé rétt? Sambandið sem þið lýsið skal vera nauðsynlegt og nægjanlegt. Rökstyðjið að nauðsynlegt sé að þetta samband gildi.

14. Skrifið hönnunarskjal fyrir einingu í Morpho eða Java sem gerir kleift að vinna með biðröð (*queue*) gilda (eða hluta). Einingin skal vera nægilega fjölnota til að unnt sé að búa til biðröð hluta af hvaða tagi sem er, en þó skal nýta þá tögun sem forritunarmálið býður upp á til að unnt sé að tryggja að biðröðin innihaldi aðeins gildi af því tagi sem til er ætlast.

Unnt skal vera að búa til hvaða endanlega biðröð sem er af slíkum gildum og komast að innihaldi hennar.

Hafa skal upplýsingahuld í heiðri. Aðeins þarf hönnunarskjal, enga útfærslu þarf.

15. Skrifið hönnunarskjal fyrir fjölnota einingu fyrir forgangsbiðraðir í Java eða Morpho.

    Hafa skal upplýsingahuld í heiðri.

    Skrifið einnig fastayrðingu gagna og útfærið aðgerðina til að fjarlægja gildi úr forgangsbiðröðinni.

16. Skrifið hönnunarskjal fyrir fjölnota einingu í Morpho sem útfærir tvinntölureikninga. Úr einingunni skulu vera útfluttar aðgerðir til að reikna með tvinntölur og innfluttar skulu vera aðgerðir til reikninga með rauntölur.

Hluti IV: Blandað efni

Ekki þarf endilega að svara neinu dæmi úr þessum hluta, en ekki gleyma að svara 12 dæmum í heild.

17. Lýsið ruslasöfununaraðferðinni sem byggist á tilvísunartalningu. Nefnið einhverja ástæðu þess að tilvísunartalning er oftast hægvirkari en aðrar aðferðir. Nefnið ástæðu þess að þrátt fyrir lélegan hraða er tilvísunartalning oft notuð í forritunarmálum s.s. C++.

18. Gefin er eftirfarandi BNF mállýsing:

```
<E> ::= <T> <Em>
<Em> ::= + <T> <Em>
<Em> ::= ϵ
<T> ::= <F> <Tm>
<Tm> ::= * <F> <Tm>
<Tm> ::= ϵ
<F> ::= <F>!
<F> ::= (<E>)
<F> ::= t
<F> ::= f
```

    Hverjir eftirfarandi strengja eru í málinu (eitt rangt svar gefur núll)?

    (a) `f+t`

(b) `!f+t`

(c) `f!+t`

(d) `f+!t`

(e) `f+t!`

(f) `f*t`

(g) `!f*t`

(h) `f!*t`

(i) `f*!t`

(j) `f*t!`

(k) `(f*t)`

(l) `!(f*t)`

(m) `(f*t)!`

19. Teiknið endanlega stöðuvél (löggenga eða brigðgenga) fyrir málið yfir stafrófið $\{(,),[,]\}$ sem inniheldur þá strengi sem hafa sviga og hornklofa í jafnvægi og dýpt sviga og hornhlofa í mesta lagi 2. Strengirnir '([])' og '()[][()]' eiga að vera í málinu en ekki '(([]))'.

20. Hvað er sniðmengi málanna sem hafa eftirfarandi BNF míllýsingar?

Mál A:

```
<A> ::= <B> <C>
<B> ::= a <B> b
<B> ::= ϵ
<C> ::= c <C>
<C> ::= ϵ
```

Mál B:

```
<A> ::= <B> <C>
<B> ::= a <B>
<B> ::= ϵ
<C> ::= b <C> c
<C> ::= ϵ
```

TÖL304G - Forritunarmál
Lausnir við lokapróf 2010

Kafli 1 – Bálkmótun

1.
Stýrihlekkurinn bendir ávallt á vakningarfærslu þess stefs sem kallaði. Í forritunarmálum sem styðja halaendurkvæmni, þá bendir stýrihlekkurinn á vakningarfærslu þess stefs sem á að fá niðurstöðuna úr núverandi kalli.
Tengihlekkurinn bendir ávallt á vakningarfærslu þess stefs sem inniheldur viðkomandi stef textalega séð (lexically enclosing scope). Viðeigandi vakningarfærsla er ávallt sú vakningarfærsla sem inniheldur breyturnar í næstu földunarhæð og er næstum alltaf nýjasta vakningarfærsla ytra stefsins. Tengihlekkurinn vísar á vakningarfærslu sem inniheldur breyturnar í næstu földunarhæð fyrir ofan og síðan koll af kolli. Tengihlekkirnir mynda keðju og það er hægt að ganga hana til að komast í breytur í mismunandi földunarhæðum.

2.
(a) Kalla má á S úr P. **- Ósatt**
(b) Kalla má á S úr Q. **- Ósatt**
(c) Kalla má á S úr R. **- Satt**
(d) Kalla má á P úr R. **- Satt**
(e) Kalla má á P úr S. **- Satt**
(f) Kalla má á P úr Q. **- Satt**
(g) Kalla má á Q úr R. **- Satt**
(h) Kalla má á Q úr S. **- Satt**
(i) Kalla má á Q úr P. **- Satt**
(j) Kalla má á R úr Q. **- Satt**
(k) Kalla má á R úr S. **- Satt**
(l) Kalla má á R úr P. **- Satt**
(m) Í P má nota staðværar breytur úr Q. **- Ósatt**
(n) Í P má nota staðværar breytur úr R. **- Ósatt**
(o) Í P má nota staðværar breytur úr S. **- Ósatt**
(p) Í Q má nota staðværar breytur úr P. **- Satt**
(q) Í Q má nota staðværar breytur úr R. **- Ósatt**
(r) Í Q má nota staðværar breytur úr S. **- Ósatt**
(s) Í S má nota staðværar breytur úr P. **- Satt**
(t) Í S má nota staðværar breytur úr R. **- Satt**
(u) Í S má nota staðværar breytur úr Q. **- Ósatt**
(v) Í R má nota staðværar breytur úr P. **- Satt**
(w) Í R má nota staðværar breytur úr S. **- Ósatt**
(x) Í R má nota staðværar breytur úr Q. **- Ósatt**

3.
Þegar falli er skilað úr falli í bálkmótuðu forritunarmáli þá er í raun verið að skila lokun sem inniheldur upplýsingar sem nægja til að kalla á fallið í réttu samhengi.

Lokun inniheldur fallsbendi og aðgangshlekk. Fallsbendirinn vísar á fallið sem átti að skila. Aðgangshlekkurinn vísar á vakningarfærslu þess stefs sem innihélt viðkomandi fall textalega séð, þ.e. vakningarfærsluna sem inniheldur breyturnar í næstu földunarhæð fyrir ofan.
Þegar lokun er framkvæmd þá er búin til ný vakningarfærsla fyrir kall á fallið í lokuninni. Aðgangshlekkurinn í lokuninni er notaður sem aðgangshlekkurinn í vakningarfærslunni. Þá er fallið framkvæmt í réttu umhverfi og kemst í breyturnar í ytri föllum (næstu földunarhæðum fyrir ofan) á þeim stað og í því samhengi þar sem fallið var upphaflega skilgreint.
Vélamálsþulan á bakvið föll er ávallt til staðar á meðan forrit er í keyrslu. Fallbendirinn í lokun vísar á þulu falls. Það er ekkert áhyggjuefni að þulan hætti að vera til. Hinsvegar er ekki hægt að segja það sama um vakningarfærslur.
Aðgangshlekkur í lokun vísar í vakningarfærslu. Lokun er aðeins í nothæfu ástandi á meðan sú vakningarfærsla er enn til staðar. Þegar vakningarfærslur eru geymdar á hlaða þá er minnissvæði vakningarfærslu skilað og vakningarfærslan hættir að vera til þegar það er snúið til baka úr vakningu fallsins. Þegar næsta kall er framkvæmt þá er minnisvæðið endurnýtt þegar ný vakningarfærsla er sett efst á hlaðann. Það er því ekki hægt að skila falli úr falli ef vakningarfærslur eru geymdar á hlaða. Ef vakningarfærslur eru geymdar í kös (heap) frekar en á hlaða (stack) þá eru þær geymdar í víðværu minni og geta haldið áfram að vera til staðar þó þær séu ekki hluti af stýrikeðjunni.

4.
(a) Lokanir innihalda aðgangshlekk (access link, static link)
Svar: Já
(b) Lokanir innihalda stýrihlekk (control link, dynamic link)
Svar: Nei
(c) Lokanir innihalda vakningarfærslur
Svar: Nei
(d) Lokanir innihalda bendi á vakningarfærslur
Svar: Já (aðgangshlekkurinn vísar á vakningarfærslu)
(e) Lokanir innihalda bendi á stef eða fall
Svar: Já
(f) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma lokanir í kös
Svar: Nei
(g) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma vakningarfærslur í kös
Svar: Já
(h) Í Scheme má lokun vera skilagildi úr falli, en ekki í Standard Pascal
Svar: Já
(i) CAML hefur lokanir
Svar: Já
(j) C hefur lokanir
Svar: Nei
(k) C++ hefur lokanir
Svar: Nei
(l) Morpho hefur lokanir
Svar: Já
(m) Java hefur lokanir
Svar: Nei

5.

(a) Hvaða upplýsingar eru geymdar í vakningarfærslum forritunarmála?
Lausn:
Staðværar breyrur
Stýrihlekkir
Tengihlekkir
Viðföng

(b) Hverjar þessara upplýsinga eru aðeins í bálkmótuðum forritunarmálum og hvers vegna?
Lausn:
Tengihlekkir eru bara í bálkmótuðum forritunarmálum. Ástæðan er sú að tengihlekkur er notaður til aðgangs að breytum í efri földunarhæðum og er því merkingarlaus ef ekki er um bálkmótun að ræða.

(c) Nefnið tvö forritunarmál þar sem vakningarfærslur eru yfirleitt geymdar á hlaðanum og tvö þar sem vakningarfærslur verða að vera geymdar í kös.
Lausn:
Vakningarfærslur á hlaða: C og Java. Vakningarfærslur í kös: Scheme og Morpho.
Ein veigamikil afleiðing þess að geyma vakningarfærslur í kös er að þá er auðveldlega hægt að útfæra lokanir sem fyrsta-flokks gildi (first-class value) í forritunarmálinu. Þá er hægt að vinna með lokanir eins og hvert annað gildi í forritunarmálinu, þar með talið nota það sem viðfang í kalli á fall, skila því úr falli, o.s.frv.
Ef vakningarfærslur eru geymdar á hlaða þá er ekki hægt að vinna með lokanir á jafn sveigjanlegan hátt. Það má til dæmis ekki skila lokun sem niðurstöðu úr kalli (því lokunin bendir á vakningarfærslu og það er ekki hægt að tryggja að sú vakningarfærsla verði áfram til staðar jafn lengi og lokunin er til staðar.)

(d) Rökstyðjið að í síðarnefndu tveimur forritunarmálunum sé nauðsynlegt að vakningarfærslur séu í
Lausn:
Scheme og Morpho eru bálkmótuð og leyfa okkur að skila fallsgildum úr föllum. Slík fallsgildi eru lokanir sem innihalda aðgangshlekk sem vísar á vakningarfærslu. Lokun er bara nothæf svo lengi sem sú vakningarfærsla er enn til staðar. Það er nauðsynlegt að geyma vakningarfærslur í kös til að tryggja að þær geti lifað jafn lengi og lokanir sem vísa á þær.

6.
(a) Lokanir innihalda aðgangshlekk (access link, static link)
Svar: Já
(b) Lokanir innihalda stýrihlekk (control link, dynamic link)
Svar: Nei
(c) Lokanir innihalda vakningarfærslur
Svar: Nei
(d) Lokanir innihalda bendi á vakningarfærslur
Svar: Já (aðgangshlekkurinn vísar á vakningarfærslu)
(e) Lokanir innihalda bendi á stef eða fall
Svar: Já
(f) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma lokanir í kös
Svar: Nei
(g) Ástæða þess að lokanir eru sveigjanlegri í notkun í Scheme en í Pascal er að í Scheme má geyma vakningarfærslur í kös
Svar: Já
(h) Í Scheme má lokun vera skilagildi úr falli, en ekki í Standard Pascal

Svar: Já
(i) CAML hefur lokanir
Svar: Já
(j) C hefur lokanir
Svar: Nei
(k) C++ hefur lokanir
Svar: Nei
(l) Morpho hefur lokanir
Svar: Já
(m) Java hefur lokanir
Svar: Nei

7.
Gildisviðföng
Lausn:
2, 0, 0, 1, 2

Tilvísunarviðföng
Lausn:
2, 2, 1, 1, 2

Nafnviðföng
Lausn:
2, 2, 2, 1, 1

Kafli 2 – Listavinnsla

8.
Lausn í Haskell:

```
-- Notkun: minmax xs
-- Fyrir: xs er listi [x1,x2,x3,..,xn] þar sem x_i er listi af fleytitölum milli 0 og 1.
-- Gildi: Tala sem er minnsta hágildi innri listanna, þ.e. min(max(x1),max(x2),max(x3),..,max(xn))
minmax xs = minimum $ map maximum xs
```

Lausn í Haskell sem ræður við tómalistann:
Gerum ráð fyrir að hæsta gildi í tómamenginu sé 0 og lægsta gildi í tómamenginu sé 1, sbr. texta í dæminu sjálfu.

```
-- Notkun: minmax xs
-- Fyrir: xs er listi [x1,x2,x3,..,xn] þar sem x_i er listi af fleytitölum milli 0 og 1.
-- Gildi: Tala sem er minnsta hágildi innri listanna, þ.e. min(max(x1),max(x2),max(x3),..,max(xn))
minmax xs = xmin $ map xmax xs
        where
                xmin [] = 1.0
                xmin xs = minimum xs
                xmax [] = 0.0
                xmax xs = maximum xs
```

Lausn í CAML sem ræður við tómalistann:
Gerum ráð fyrir að hæsta gildi í tómamenginu sé 0 og lægsta gildi í tómamenginu sé 1, sbr. texta

í dæminu sjálfu.

```
(* Notkun: minmax xs
* Fyrir: xs er listi [x1,x2,x3,..,xn] þar sem x_i er listi af fleytitölum milli 0 og 1.
* Gildi: Tala sem er minnsta hágildi innri listanna, þ.e. min(max(x1),max(x2),max(x3),..,max(xn)) *)
let minmax xs =
	let maximum x = List.fold_left max 0.0 x in
		let maxlist = List.map maximum xs in
			List.fold_left min 1.0 maxlist;;
```

9.

Lausn í Haskell:

```
-- Notkun: biApplySum fs xs ys
-- Fyrir: fs=[f1,..,fn] er listi af tvíundarföllum A B -> float
-- xs=[x1,..,xn] er listi af gildum af tagi A
-- ys=[y1,..,yn] er listi af gildum af tagi B
-- Gildi: [f1(x1,y1)*f2(x2,y2)*...*fn(xn,yn)]
biApplySum fs xs ys = product $ zipWith3 ($) fs xs ys
```

Önnur lausn í Haskell:

```
-- Notkun: biApplySum fs xs ys
-- Fyrir: fs=[f1,..,fn] er listi af tvíundarföllum A B -> float
-- xs=[x1,..,xn] er listi af gildum af tagi A
-- ys=[y1,..,yn] er listi af gildum af tagi B
-- Gildi: [f1(x1,y1)*f2(x2,y2)*...*fn(xn,yn)]
biApplySum [] _ _ = 1
biApplySum (f:fs) (x:xs) (y:ys) = (f x y) * biApplySum fs xs ys
```

Lausn í Morpho:

```
;;; Notkun: biApplySum fs xs
;;; Fyrir: fs=[f1,..,fn] er listi af tvíundarföllum A B -> float
;;; xs=[x1,..,xn] er listi af gildum af tagi A
;;; ys=[y1,..,yn] er listi af gildum af tagi B
;;; Gildi: f1(x1,y1) * f2(x2,y2) * ... * fn(xn,yn)
biApplySum = fun(fs,xs,ys)
{
	var p = 1.0;
	while (fs != [])
	{
		var f = head(fs);
		p = p * f(head(xs), head(ys));
		fs = tail(fs);
		xs = tail(xs);
		ys = tail(ys);
	};
	return p;
};
```

Lausn í CAML:

```
(* Notkun: biApplySum fs xs
* Fyrir: fs=[f1,..,fn] er listi af tvíundarföllum A B -> float
* xs=[x1,..,xn] er listi af gildum af tagi A
```

```
* ys=[y1,..,yn] er listi af gildum af tagi B
* Gildi: f1(x1,y1) *. f2(x2,y2) *. ... *. fn(xn,yn)
*)
let rec biApplySum fs xs ys =
        if fs = [] then
                1.0
        else
                (List.hd fs) (List.hd xs) (List.hd ys) *.
                biApplySum (List.tl fs) (List.tl xs) (List.tl ys);;
```

Tag samkvæmt tögunarreglum CAML:

```
        biApplySum :: ('a -> 'b -> float) list -> 'a list -> 'b list -> float
```

10.

Lausn í Haskell:

```
-- Notkun: index n
-- Fyrir: n er heiltala, n >= 0
-- Gildi: Listinn [1,2,..,n]
index n = [1..n]
```

Lausn í Haskell sem býr til listann halaendurkvæmt:

```
-- Notkun: index n
-- Fyrir: n er heiltala, n >= 0
-- Gildi: Listinn [1,2,..,n]
index n = h n []
        where
                h 0 u = u
                h n u = h (n-1) (n:u)
```

Lausn í Morpho:

```
-- Notkun: index n
-- Fyrir: n er heiltala, n >= 0
-- Gildi: Listinn [1,2,...,n]
index = fun(n)
{
        var x = [];
        var i = n;
        while (i > 0)
        {
                // x = [i-1,...,n]
                x = i:x;
                i = i-1;
        };
        return x;
};
```

Lausn í Scheme:

```
;; Notkun: (index n)
;; Fyrir: n er heiltala, n >= 0
;; Gildi: Listinn (1 2 ... n)
(define (index n)
        (define (hjalp i acc)
```

```
                (if (= i 0)
                        acc
                        (hjalp (- i 1) (cons i acc))
                )
        )
        (hjalp n '())
)
```

11.
Lausn í Haskell:

```
-- Notkun: foldl f u xs
-- Fyrir: f er tvíundarfall, u er löglegt vinstra viðfang í f, x=[x1,..,xN] er listi gilda sem eru lögleg, hægri viðföng í f
-- Gildi: Margfeldi u og gildanna í x, reiknað frá, vinstri til hægri, þ.e. f( ... f(f(u,x1),x2) ... xN)
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl _ u [] = u
foldl f u (x:xs) = foldl f (f u x) xs

-- Notkun: foldr f u xs
-- Fyrir: f er tvíundarfall, u er löglegt hægra viðfang í f, x=[x1,..,xn] er listi gilda sem eru lögleg, vinstri viðföng í f
-- Gildi: Margfeldi u og gildanna í x, reiknað frá, hægri til vinstri, þ.e. f(x1,f(x2,f(x3, ... f(xN,u))))
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ u [] = u
foldr f u (x:xs) = f x $ foldr f u xs
```

12.
Hvað er að skilgreiningunni?
Það eru engin efri mörk í y og z listunum og því er haldið endalaust áfram að leita eftir stökum sem uppfylla x2 + y2 == z2.
Dæmi: Fyrir x=1 og y=1, þá skoðum við endalausa listann z=[1..] og leitum að stökum þar sem x2 + y2 = z2. Ekkert stak í listanum z=[1..] uppfyllir skilyrðið, en það er endalaust haldið áfram að leita.

Lagfærð útfærsla sem notar listarithátt:

```
        pyth = [(x,y,z) | z <- [1..],
        x <- [1..z],
        y <- [x..z],
        x^2 + y^2 == z^2]
```

Útgáfa sem notar do-rithátt:

```
        pyth = do
        z <- [1..]
        x <- [1..z]
        y <- [x..z]
        if x^2+y^2==z^2 then [(x,y,z)] else []
```

Útgáfa sem notar do-rithátt og guard:

```
        pyth = do
        z <- [1..]
        x <- [1..z]
        y <- [x..z]
```

```
guard (x^2 + y^2 == z^2)
return (x,y,z)
```

Kafli 3 – Einingaforritun

13.
Látum FA og FB standa fyrir forskilyrðin í A og B, þ.e. F_A = a <= x <= b og F_B = e < x < f.
Önnur leið til að hugsa FA og FB er að FA sé y 2 [a, b] og FB sé y ε (e, f).
Það verður að gilda að FA → FB, þ.e. ef fullyrðingin í forskilyrði A er sönn þá er fullyrðingin í forskilyrði B einnig sönn. Forskilyrðið FB í undirklasanum má því vera víðara en forskilyrðið FA í yfirklasanum.

FA → FB
x 2 [a, b] → x ε (e, f)

Til að þetta gildi alltaf þá verður eftirfarandi samband að gilda:

e < a <= x <= b < f

Látum EA og EB standa fyrir eftirskilyrðin í A og B, þ.e. EA = c <= y <= d og EB = g < y < h.
Önnur leið til að hugsa þetta er að EA sé y 2 [c, d] og að EB sé y 2 (g, h).
Það verður að gilda að EB =) EA, þ.e. ef fullyrðingin í eftirskilyrði B er sönn þá er fullyrðingin í eftirskilyrði A einnig sönn. Eftirskilyrðið EB í undirklasanum má vera þrengra en eftirskilyrðið EA í grunnklasanum.

EB → EA
y 2 (g, h) → y ε [c, d]

Til að þetta gildi alltaf þá verður eftirfarandi samband að gilda:

c <= g < y < h <= d

14.
Lausn í Morpho:

```
;;; Hönnun
;;;
;;; Útflutt:
;;;
;;; Notkun: q = queue()
;;; Fyrir: Ekkert
;;; Eftir: q er ný tóm biðröð gilda af tagi T
;;;
;;; Innflutt:
;;;
;;; Notkun: q.insert(x);
;;; Fyrir: q er biðröð, x er gildi af tagi T
;;; Eftir: Búið er að setja x aftast í biðröðina q
;;;
;;; Notkun: x = q.remove();
;;; Fyrir: q er biðröð, q má ekki vera tóm
;;; Eftir: x er gildið sem var fremst í q,
;;; búið er taka x úr q
;;;
;;; Notkun: x = q.empty();
;;; Fyrir: q er biðröð
;;; Eftir: x er satt þþaa. q er tóm
;;;
```

15.
Hönnun í Morpho:

```
;;; Hönnun
;;;
;;; Útflutt:
;;;
;;; Notkun: q = pq()
;;; Fyrir: Ekkert
;;; Eftir: q er ný tóm forgangsbiðröð gilda af tagi T,
;;; þar sem forgangur er skilgreindur með <<==.
;;;
;;; Innflutt:
;;;
;;; Notkun: z = x <<== y
;;; Fyrir: x og y eru gildi af tagi T
;;; Eftir: z er satt ef x verður að vera á undan y,
;;; ósatt ef y verður að vera á undan x.
;;; Ath.: Skilagildið má vera hvað sem er ef x má
;;; vera á undan y OG y má vera á undan x.
;;; Þ.e. <<== ætti að vera hlutröðunarvensl.
;;;
;;; Notkun: q.insert(x);
;;; Fyrir: q er forgangsbiðröð, x er gildi sem má setja í q
;;; Eftir: Búið er að setja x í q
;;;
;;; Notkun: x = q.remove();
;;; Fyrir: q er forgangsbiðröð, q má ekki vera tóm
;;; Eftir: x er gildið sem var fremst í q,
;;; búið er taka x úr q
;;;
;;; Notkun: x = q.empty();
;;; Fyrir: q er forgangsbiðröð
;;; Eftir: x er satt þþaa. q er tóm
;;;
```

Fastayrðing og insert í Morpho:

```
pq = obj()
{
        ;;; Fastayrðing gagna:
        ;;; Stökin í forgangsbiðröðinni eru geymd í listanum q
        ;;; í engri sérstakri röð.
        var q = [];
        msg insert(x)
        {
                q = x:q;
        }
};
```

16.

Lausn í Morpho:

```
;;; Hönnun
;;;
;;; Útflutt:
;;;
;;; Notkun: c = makeComplex(r,i);
;;; Fyrir: r og i eru rauntölur
;;; Eftir: c er ný tvinntala með raunhluta r
;;; og þverhluta i.
;;;
;;; Innflutt:
;;;
;;; Notkun: r = c.x
;;; Fyrir: c er tvinntala
;;; Eftir: r er raunhluti c
;;;
;;; Notkun: i = c.i
;;; Fyrir: c er tvinntala
;;; Eftir: i er þverhluti c
;;;
;;; Notkun: z = a.+b
;;; Fyrir: a og b eru tvinntölur
;;; Eftir: z er ný tvinntala, z = a+b
;;;
;;; Notkun: z = a.-b
;;; Fyrir: a og b eru tvinntölur
;;; Eftir: z er ný tvinntala, z = a-b
;;;
;;; Notkun: z = a.*b
;;; Fyrir: a og b eru tvinntölur
;;; Eftir: z er ný tvinntala, z = a*b
;;;
;;; Notkun: z = a./b
;;; Fyrir: a og b eru tvinntölur
;;; Eftir: z er ný tvinntala, z = a/b
;;;
;;; Notkun: x = a+b
;;; Fyrir: a og b eru rauntölur
;;; Eftir: x er ný rauntala, x = a+b
;;;
;;; Notkun: x = a-b
;;; Fyrir: a og b eru rauntölur
;;; Eftir: x er ný rauntala, x = a-b
;;;
;;; Notkun: x = a+b
;;; Fyrir: a og b eru rauntölur
;;; Eftir: x er ný rauntala, x = a*b
;;;
;;; Notkun: x = a+b
;;; Fyrir: a og b eru rauntölur
;;; Eftir: x er ný rauntala, x = a/b
```

Kafli 4 – Blandað efni

17.
Tilvísunartalning felst í því að í hverju minnissvæði í kös er teljari, sem ávallt inniheldur fjölda tilvísana á þann hlut úr breytum í forritinu eða öðrum hlutum. Þegar þessi teljari verður núll þá má skila minnissvæðinu.
Í hvert skipti sem ný tilvísun er búin til eða tilvísun er eytt, þá þarf að uppfæra viðeigandi teljara. Ef það er mikið um tilvísanir sem lifa í skamman tíma þá er mikið um uppfærslur á teljurum. Þetta gerir tilvísunartalningu hægvirkari en margar aðrar aðferðir.
Þær tilvísanir sem lifa vanalega skemmst eru tilvísanir frá staðværum breytum. Einföld for-lykkja sem gengur yfir öll stök í tengdum lista með staðværri breytu sem vísar á núverandi stak í listanum, veldur því að teljari í hverjum hlekk er hækkaður þegar sá hlekkur er heimsóttur, og síðan lækkaður aftur þegar við færum okkur yfir á næsta hlekk.
Þrátt fyrir lélegan hraða er tilvísunartalning oft notuð því hún er einföld í útfærslu og það er oftast hægt að útfæra hana innan forritunarmála, án þess að þurfa að breyta sjálfu forritunarmálinu.
Sem dæmi má nefna C++, það er engin innbyggð ruslasöfnun í C++, en það eru til ýmis forritunarsöfn (libraries) fyrir C++ sem útfæra ruslasöfnun. Það er oftast gert með tilvísunartalningu og svoköllum snjöllum bendum (smart pointers) sem sjá um að viðhalda tilvísunartalningu.

18.
(a) f+t
Svar: Já
Útleiðsla:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T\ Em \\ &\rightarrow T + T\ Em \\ &\rightarrow T + T \\ &\rightarrow F + F \\ &\rightarrow f + t \end{aligned}$$

(b) !f+t
Svar: Nei, til að fá ! þarf að nota regluna $F \rightarrow F!$, en það er engin epsilon regla fyrir F.

(c) f!+t
Svar: Já
Útleiðsla:

$$\begin{aligned} E &\rightarrow T\ Em \\ &\rightarrow T + T\ Em \\ &\rightarrow T + T \\ &\rightarrow F + F \\ &\rightarrow F! + F \\ &\rightarrow f! + t \end{aligned}$$

(d) f+!t
Svar: Nei, til að fá ! þarf að nota regluna F *!* F!, en það er engin epsilon regla fyrir F. Endar með f+<F>!t og getur ekki losnað við F.

(e) f+t!
Svar: Já

Útleiðsla:

E → T Em
→ T + T Em
→ T + T
→ F + F
→ F + F!
→ f + t!

(f) f*t
Svar: Já
Útleiðsla:

E → T Em
→ T
→ F Tm
→ F * F Tm
→ F * F
→ f * t

(g) !f*t
Svar: Nei, til að fá ! þarf að nota regluna F → F!, en það er engin epsilon regla fyrir F.

(h) f!*t
Svar: Já
Útleiðsla:

E → T Em
→ T
→ F Tm
→ F * F Tm
→ F * F
→ F! * F
→ f! * t

(i) f*!t
Svar: Nei, til að fá ! þarf að nota regluna F → F!, en það er engin epsilon regla fyrir F. Endar með f*<F>!t og getur ekki losnað við F.

(j) f*t!
Svar: Já
Útleiðsla:

E → T Em
→ T
→ F Tm
→ F * F Tm
→ F * F
→ F * F!
→ f * t!

(k) (f*t)
Svar: Já
Útleiðsla:

E → T Em

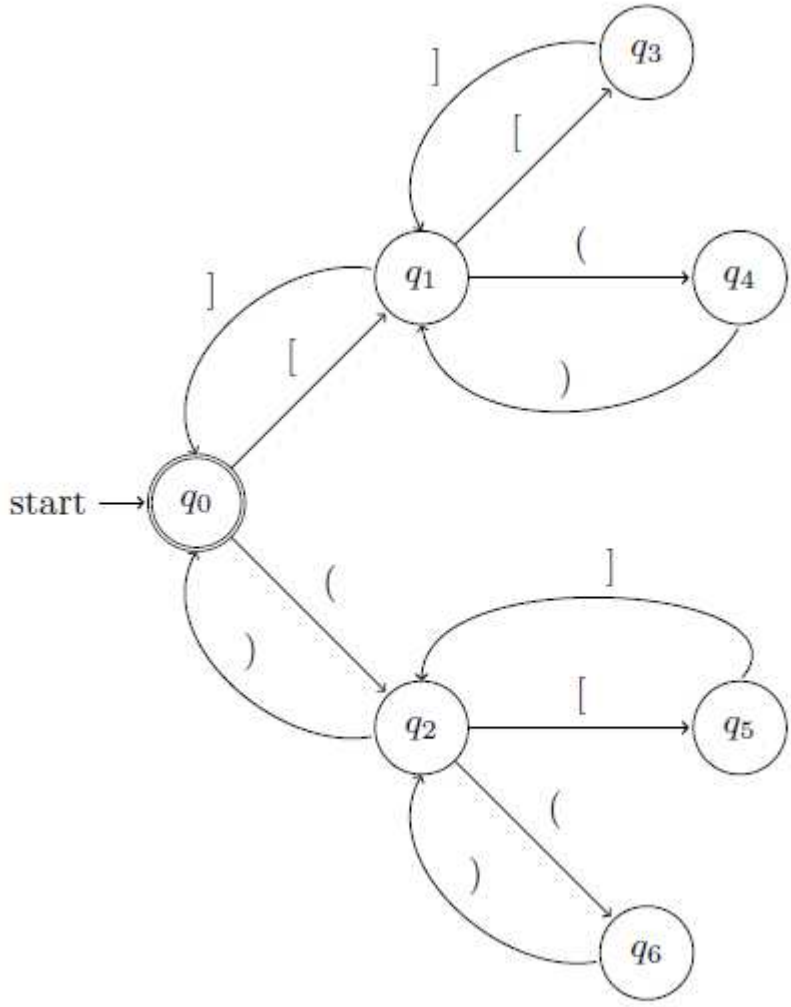
→ T
→ F Tm
→ F
→ (E)
→ (T Em)
→ (T)
→ (F Tm)
→ (F * F Tm)
→ (F * F)
→ (f * t)

(l) !(f*t)
Svar: Nei, til að fá ! þarf að nota regluna F *!* F!, en það er engin epsilon regla fyrir F.

(m) (f*t)!
Svar: Já
Útleiðsla:

E → T Em
→ T
→ F Tm
→ F
→ F!
→ (E)!
→ (T Em)!
→ (T)!
→ (F Tm)!
→ (F * F Tm)!
→ (F * F)!
→ (f * t)!

19.



20.
Mál A inniheldur alla strengi s = $a^i b^i c^j$, þar sem i => 0 og j => 0.
Mál B inniheldur alla strengi s = $a^i b^j c^j$, þar sem i => 0 og j => 0.
Málið A ∩ B inniheldur því alla strengi þar sem i = j, þ.e. s = $a^k b^k c^k$.