Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 8

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 10)

5. nóvember 2015

Dæmi 1. Setjum

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Finnið grunna fyrir línurúm, dálkrúm og núllrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(b) Finnið víddir hlutrúmanna þriggja í lið (a).

Lausn. (a) Með Gauss-eyðingu fæst að fylkið $\mathbf{A}$ er línujafngilt fylkinu

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Þær línur fylkisins $\mathbf{U}$, sem eru ekki núll, mynda grunn fyrir línurúm fylkisins $\mathbf{A}$ þ.e.a.s. $\{(1,1,2,0,0),\ (0,1,1,-1,-1),\ (0,0,0,1,2)\}$ er grunnur fyrir $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$.
- Forustustuðlar koma aðeins fyrir í dálkum númer eitt, tvö og fjögur í fylkinu $\mathbf{U}$. Af því sjáum við að fyrsti, annar og fjórði dálkur fylkisins $\mathbf{A}$ mynda grunn fyrir dálkrúm þess þ.e.a.s. $\{(1,1,1,2),\ (1,2,1,1),\ (0,0,1,-1)\}$ er grunnur fyrir $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.
- Með því að leysa línulega jöfnuhneppið $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$ með afturábak-innsetningu fáum við

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

og af því má sjá að $\{-1,-1,1,0,0),\ (1,-1,0,-2,1)\}$ er grunnur fyrir núllrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(b) Með því að telja fjölda vigra í grunnunum, sem við fundum hér að ofan fyrir vigurúmin þrjú sem um ræðir, fáum við

- $\mathrm{Dim}(\mathrm{Row}(\mathbf{A})) = 3$.
- $\mathrm{Dim}(\mathrm{Col}(\mathbf{A})) = 3$.
- $\mathrm{Dim}(\mathrm{Null}(\mathbf{A})) = 2$.

Dæmi 2.

(a) Gerið grein fyrir að margliðurnar 1, $1+x$, $1+2x+x^2$ og x^2+x^3 myndi grunn fyrir $\mathbb{P}_3$.

(b) Látum $\mathcal{B}$ tákna raðgrunninn sem myndaður er úr margliðunum í lið (a) í þeirri röð sem þær eru taldar upp. Finnið hnitavigur margliðunnar $1-x+x^2-x^3$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$.

Lausn. (a) Þar sem margliðurnar fjórar hafa innbyrðis ólík stig þá eru þær línulega óháðar. Þær mynda því grunn fyrir $\mathbb{P}_3$ vegna þess að $\mathrm{Dim}(\mathbb{P}_3)=4$.

(b) Við viljum finna rauntölur a, b, c og d, sem fullnægja skilyrðinu

$$a+b(1+x)+c(1+2x+x^2)+d(x^2+x^3)=1-x+x^2-x^3.$$

Með því að bera saman stuðla margliðanna sitt hvorum megin við jafnaðarmerkið fæst jöfnuhneppið

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & & = & 1 \\ & & b & + & 2c & & & = & -1 \\ & & & & c & + & d & = & 1 \\ & & & & & & d & = & -1 \end{array}$$

og með afturábak-innsetningu fæst auðveldlega að $d=-1$, $c=2$, $b=-5$ og $a=4$. Umbeðinn hnitavigur er því

$$[1-x+x^2-x^3]_{\mathcal{B}} \;=\; (4,-5,2,-1).$$

Athugasemd. Í lið (b) fékkst nákvæmlega ein lausn á hneppinu og af því má sjá (án þess að nota lið (a)), að margliðurnar fjórar eru línulega óháðar.

Dæmi. 3. Skilgreinum vörpun

$$T:\mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3, \qquad p(t) \longmapsto t^2p''(t)-p(t).$$

(a) Gerið grein fyrir að vörpunin T sé línuleg.

(b) Finnið víddir hlutrúmanna $\mathrm{Ker}(T)$ og $\mathrm{Range}(T)$.

(c) Finnið fylki vörpunarinnar T miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}=\{1,t,t^2,t^3\}$.

Lausn. (a) Látum p og q vera margliður úr $\mathbb{P}_3$ og c vera rauntölu. Þá gildir um öll t að

$$\begin{aligned} T(cp+q)(t) &= t^2(cp+q)''(t)-(cp+q)(t)=t^2(cp''(t)+q''(t))-cp(t)-q(t) \\ &= c\big(t^2p''(t)-p(t)\big)+t^2q''(t)-q(t)=cT(p)(t)+T(q)(t)=(cT(p)+T(q))(t). \end{aligned}$$

Þar með höfum við sýnt að vörpunin T er línuleg.

(b) Vörpunin T varpar margliðunni $a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$ í margliðuna $5a_3t^3+a_2t^2-a_1t-a_0$ svo að

$$\mathrm{Ker}(T) \;=\; \{a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0 \mid a_3=a_2=a_1=a_0=0\} \;=\; \{0\}$$

og þar með $\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(T)) = 0$. Af því leiðir svo að

$$\operatorname{Dim}(\operatorname{Range}(T)) = \operatorname{Dim}(\mathbb{P}_3) - \operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(T)) = 4 - 0 = 4.$$

(c) Við sjáum að $T(1) = -1, T(t) = -t, T(t^2) = t^2$ og $T(t^3) = 5t^3$ svo að fylki vörpunarinnar T miðað við raðgrunninn $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ er

$$\big[[T(1)]_{\mathcal{B}}\,[T(t)]_{\mathcal{B}}\,[T(t^2)]_{\mathcal{B}}\,[T(t^3)]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dæmi. 4. Gerið grein fyrir að fylkin

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

myndi grunn fyrir $\mathbb{R}^{2\times 2}$ og finnið síðan hnitavigur fylkisins $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$.

Lausn. Vigurinn (c_1, c_2, c_3, c_4) fullnægir jöfnunni

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

þá og því aðeins að hann fullnægi jöfnuhneppinu

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & + & c_2 & & & - & 3c_4 & = & a \\ c_1 & & & + & 2c_3 & - & 3c_4 & = & b \\ & & & & 3c_3 & + & 2c_4 & = & c \\ & & & & 3c_3 & + & 3c_4 & = & d \end{array}$$

og auðséð er að þetta hneppi hefur nákvæmlega eina lausn fyrir sérhverja hægri hlið. Þar með höfum við sýnt að fylkin fjögur mynda grunn fyrir $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Til þess að finna umbeðinn hnitavigur beitum við afturábak-innsetningu á hneppið og fáum

$$c_4 = d - c, \qquad c_3 = c - \frac{2}{3}d, \qquad c_2 = a - b + 2c - \frac{4}{3}d \qquad \text{og} \qquad c_1 = b - 5c + \frac{13}{3}d$$

og þar með fæst $[\mathbf{B}]_{\mathcal{B}} = (b - 5c + \frac{13}{3}d,\ a - b + 2c - \frac{4}{3}d,\ c - \frac{2}{3}d,\ d - c)$.