Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

LÍNULEG ALGEBRA A

Lausnir á skilaverkefni 6

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 7)

22. október 2015

Dæmi 1. Reiknið ákveðu fylkisins $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) með því að koma því fyrst á efra stallaform,

(b) með því að beita liðun eftir vel valinni línu eða dálki.

LAUSN. (a) Með því að framkvæma línuaðgerðirnar $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - 3L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_4$, $L_3 \to L_3 - 4L_2$, $L_4 \to L_4 - 3L_2$ og $L_4 \to L_4 + L_3$ á fylkinu $\mathbf{A}$ fæst fylkið

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Þar sem ákveða breytist ekki við umskiptingar, og víxlun tveggja lína breytir formerki á ákveðu, þá fæst að $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = \operatorname{Det}(\mathbf{B})$. Nú er $\mathbf{B}$ efra þríhyrningsfylki svo ákveða þess er jöfn margfeldi hornalínustakanna og við fáum því $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = \operatorname{Det}(\mathbf{B}) = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4$.

(b) Með liðun eftir annarri línu fáum við

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(\mathbf{A}) &= -\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\left(\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) - \left(-\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) \\
&= -(16 - 1 + 3 - 16) - (-(8 - 3) + 8 - 9) = 4.
\end{aligned}$$

(Hér eru ákveður 3×3 fylkjanna hægra megin við fyrsta jafnaðarmerkið báðar reiknaðar með liðun eftir þriðju línu.)

Dæmi 2. Sannið eftirfarandi fullyrðingar eða hrekið þær með mótdæmum.

(i) Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera línujafngild $m \times n$ fylki. Þá gildir um sérhvert $n \times k$ fylki $\mathbf{C}$, að $\mathbf{AC}$ og $\mathbf{BC}$ línujafngild.

(ii) Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{B}$ vera $n \times k$ fylki. Þá gildir að

$$\operatorname{Rank}(\mathbf{AB}) \;\leq\; \min\{\operatorname{Rank}(\mathbf{A}), \operatorname{Rank}(\mathbf{B})\}.$$

(iii) Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki sem hefur metorð n, þá er $\operatorname{Det}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \neq 0$.

Lausn. (i) Þessi fullyrðing er rétt. Við vitum að tvö fylki $\mathbf{H}$ og $\mathbf{K}$ eru línujafngild þá og því aðeins að hægt sé að fá $\mathbf{K}$ fram með því að margfalda $\mathbf{H}$ frá vinstri með endanlega mörgum frumfylkjum. Það eru því til frumfylki $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_k$ sem uppfylla jöfnuna

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_k \mathbf{A}.$$

Af því leiðir að

$$\mathbf{BC} = (\mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_k \mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_k (\mathbf{AC})$$

og þar með eru fylkin $\mathbf{AC}$ og $\mathbf{BC}$ línujafngild.

(ii) Ekki þurfti að skila lausn á þessum lið vegna þess að hann var fullsnemma á ferðinni miðað við framvindu námskeiðsins. Nú er hins vegar búið að fara yfir það efni sem á þarf að halda fyrir lausnina svo hún kemur hér.

Sýnum að fullyrðingin sé rétt. Sérhver dálkur í fylkinu $\mathbf{AB}$ er línuleg samantekt af dálkum fylkisins $\mathbf{A}$ svo að dálkrúm fylkisins $\mathbf{AB}$ er innihaldið í dálkrúmi fylkisins $\mathbf{A}$. Af því leiðir að

$$\operatorname{Rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{Dim}(\operatorname{Col}(\mathbf{AB})) \;\leq\; \operatorname{Dim}(\operatorname{Col}(\mathbf{A})) = \operatorname{Rank}(\mathbf{A}).$$

Sérhver lína í fylkinu $\mathbf{AB}$ er línuleg samantekt af línum fylkisins $\mathbf{B}$ svo að línurúm fylkisins $\mathbf{AB}$ er innihaldið í línurúmi fylkisins $\mathbf{B}$. Af því leiðir að

$$\operatorname{Rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{Dim}(\operatorname{Row}(\mathbf{AB})) \;\leq\; \operatorname{Dim}(\operatorname{Row}(\mathbf{B})) = \operatorname{Rank}(\mathbf{B}).$$

(iii) Þessi fullyrðing er rétt. Um $n \times n$ fylkið $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ gildir, að $\operatorname{Det}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \neq 0$ er jafngilt því að línulega jöfnuhneppið $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hafi aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sýnum að síðara skilyrðið sé uppfyllt. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{v}$ sé lausn á umræddu hneppi. Þá fæst

$$(\mathbf{Av}) \cdot (\mathbf{Av}) = (\mathbf{Av})^T(\mathbf{Av}) = (\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T)(\mathbf{A})\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{Av}) = \mathbf{v}^T\mathbf{0} = 0$$

og það jafngildir því að $\mathbf{Av}$ sé núllvigurinn. Samkvæmt forsendu er metorð fylkisins $\mathbf{A}$ jafnt dálkafjölda þess svo að jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hefur aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Við getum því ályktað að $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dæmi. 3. Notið Cramer-reglu til þess að leysa eftirfarandi línulegt jöfnuhneppi.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}.$$

Lausn. Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Fyrir $j = 1, 2, 3$ látum við samkvæmt venju $\mathbf{A}_j(\mathbf{b})$ tákna fylkið sem fæst með því að setja $\mathbf{b}$ inn í stað j-ta dálkvigursins í $\mathbf{A}$.
Til þess að geta beitt Cramer-reglu þurfum við fyrst að ganga úr skugga um að ákveða fylkisins $\mathbf{A}$ sé ekki núll og þá hefur jöfnuhneppið nákvæmlega eina lausn og hún er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} \mathrm{Det}(\mathbf{A}_1(\mathbf{b})) \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_2(\mathbf{b})) \\ \mathrm{Det}(\mathbf{A}_3(\mathbf{b})) \end{bmatrix}$$

Við fáum nú (útreikningar eftirlátnir lesendum):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \\
\mathrm{Det}(\mathbf{A}_1(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -6 \\
\mathrm{Det}(\mathbf{A}_2(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 32 \\
\mathrm{Det}(\mathbf{A}_3(\mathbf{b})) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -22.
\end{aligned}$$

Vigurinn $\begin{bmatrix} -3 \\ 16 \\ -11 \end{bmatrix}$ er þar með eina lausn jöfnuhneppisins.

Dæmi. 4. Í hverjum lið hér að neðan er gefið hlutmengi í tilteknu vigurrúmi. Gerið grein fyrir hvort þau eru hlutrúm í viðkomandi vigurrúmi.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$.

(c) $\{p \in \mathbb{P}_3 \mid \mathrm{stig}\, p = 0\}$.

(d) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \mathbf{AC} = \mathbf{CA}\}$, þar sem $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Lausn. (a) Þetta er lausnamengi línulegrar jöfnu og þar með er það hlutrúm.

(b) Vigrarnir $(1, 0, 0)$ og $(0, 1, 1)$ eru í hlutmenginu, en summa þeirra $(1, 1, 1)$ er ekki í því. Þar með er það ekki hlutrúm.

(c) Í þessum lið gerði innsláttarpúkinn vart við sig því hér átti að standa $\mathrm{stig}\, p \leq 0$. Miðað við þessa leiðréttu útgáfu er hér um hlutrúm að ræða því ljóst er að hlutmengið er ekki tómt og summa tveggja margliða af stigi 1 eða lægra er af stigi 1 eða lægra.

Einnig er ljóst að sé margliða af stigi 1 eða lægra margfölduð með rauntölu þá fæst fram margliða af stigi 1 eða lægra.

(d) Táknum umrætt hlutmengi með V og sýnum að það sé hlutrúm í $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

- Núllfylkið er í V vegna þess að $\mathbf{O} = \mathbf{OC} = \mathbf{CO} = \mathbf{O}$.
- Ef fylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru í V og c er rauntala, þá er fylkið $\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ líka í V vegna þess að

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+c\mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC} + c(\mathbf{BC}) \quad \text{(reglur um fylkjamargföldun)}\\ &= \mathbf{CA} + c(\mathbf{CB}) \quad (\ \mathbf{A} \text{ og } \mathbf{B} \text{ eru í } V)\\ &= \mathbf{C}(\mathbf{A}+c\mathbf{B}) \quad \text{(reglur um fylkjamargföldun).}\end{aligned}$$

Dæmi 5. Gerið grein fyrir hvort eftirfarandi tvístæð vensl eru spegilvirk, samhverf, andsamhverf eða gegnvirk.

(a) Venslin $\sim$ á $\mathbb{R}$ skilgreind með

$$x \sim y \quad \text{ef og aðeins ef} \quad x \leq y$$

(b) Venslin $\sim$ á $\mathbb{N}$ skilgreind með

$$n \sim m \quad \text{ef og aðeins ef} \quad n - m = p$$

þar sem p er gefin frumtala.

(c) Venslin $\sim$ á $\mathcal{P}(M)$, þar sem M er gefið mengi, skilgreind með

$$A \sim B \quad \text{ef og aðeins ef} \quad A \subset B.$$

Lausn. (a) Þessi vensl eru spegilvirk, andsamhverf og gegnvirk, en ekki samhverf.

(b) Þessi vensl eru andsamhverf, en hvorki spegilvirk, samhverf né gegnvirk.

(c) Þessi vensl eru spegilvirk, andsamhverf og gegnvirk, en ekki samhverf.

Eina atriðið sem hugsanlega þarfnast skýringar hér er að venslin í lið (b) séu andsamhverf, en það er vegna þess að ekki er til nein spyrða (n, m) af náttúrlegum tölum, sem fullnægir báðum skilyrðunum $m - n = p$ og $n - m = p$.