Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 7

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 8)

29. október 2015

Dæmi 1. Setjum $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 \text{ og } x_2 = -2x_3\}$.

(a) Gerið grein fyrir að V sé hlutrúm í $\mathbb{R}^4$.

(b) Finnið grunn fyrir V.

(c) Finnið $\mathrm{Dim}(V)$.

Lausn. (a) Þar sem að V er lausnamengi óhliðraða línulega jöfnuhneppisins

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

í breytunum x_1, x_2, x_3, x_4 þá er V hlutrúm í $\mathbb{R}^4$.

(b) Með því að setja $x_3 = s$ og $x_4 = t$ og beita aftur-á-bak innsetningu á jöfnuhneppið fáum við

$$V = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Af því sést að V er spannað af vigrunum $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ljóst er að þeir eru línulega óháðir og mynda þar með grunn fyrir vigurrúmið V.

(c) Vigurrúmið V er af víddinni 2 vegna þess að í lið (b) fundum við grunn fyrir það sem hefur nákvæmlega tvö stök.

Dæmi 2. Gangið úr skugga um að mengið

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1)\}$$

sé grunnur fyrir $\mathbb{R}^3$ og finnið síðan hnitavigur vigursins $(3, 0, 1)$ miðað við hann.

Lausn. Látum $\mathbf{A}$ vera fylkið sem hefur vigrana í B sem dálkvigra í þeirri röð sem þeir eru taldir upp, nánar til tekið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Með því að framkvæma línuaðgerðirnar $L_3 \to L_3 - L_1$ og $L_3 \to L_3 - L_2$ á fylkinu $\mathbf{A}$ fæst fylkið

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Við fáum því $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = \operatorname{Det}(\mathbf{B}) = -1$ svo að fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt og þar með er B grunnur fyrir $\mathbb{R}^3$.

Finnum nú hnitavigur vigursins $(3, 0, 1)$ miðað við B. Þó svo það sé ekki tekið fram þá er hér átt við *raðgrunninn* B þar sem vigrunum er raðað í sömu röð og þeir eru taldir upp. Vigurinn sem við erum að leita að er eini vigurinn $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ úr $\mathbb{R}^3$ sem fullnægir skilyrðinu

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

með öðrum orðum er vigurinn $\mathbf{c}$ eina lausnin á línulega jöfnuhneppinu

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Með því að beita sömu línuaðgerðum og hér að ofan á þetta hneppi fæst línulega jöfnuhneppið

$$\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

og með afturábak-innsetningu sést að það hefur (einungis) lausnina $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Við höfum því sýnt að hnitavigur vigursins $(3, 0, 1)$ miðað við raðgrunninn B er vigurinn $(3, -2, 2)$.

Dæmi. 3. Látum samkvæmt venju $\mathbb{P}_3$ tákna vigurrúm allra margliða af stigi 3 eða lægra og látum $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ vera vörpunina, sem varpar sérhverri margliðu $p(t)$ úr $\mathbb{P}_3$ í fylkið

$$\begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{bmatrix}.$$

Sýnið að vörpunin sé einsmótun (þ.e.a.s. línuleg og gagntæk).

Lausn. Sýnum fyrst að vörpunin T sé línuleg. Fyrir sérhverjar margliður p og q úr $\mathbb{P}_3$ og sérhverja rauntölu c fæst samkvæmt reglum um diffrun og fylkjareikning

$$T(c\cdot p+q) = \begin{bmatrix} (c\cdot p+q)(0) & (c\cdot p+q)'(0) \\ (c\cdot p+q)''(0) & (c\cdot p+q)'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\cdot p(0)+q(0) & c\cdot p'(0)+q'(0) \\ c\cdot p''(0)+q''(0) & c\cdot p'''(0)+q'''(0) \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(0) & q'(0) \\ q''(0) & q'''(0) \end{bmatrix} = cT(p) + T(q).$$

Af þessu sést að vörpunin T er línuleg.

Sýnum nú að vörpunin T sé gagntæk. Nú varpar T margliðunni $a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$ í fylkið $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 2a_2 & 6a_3 \end{bmatrix}$ og af því má sjá að fyrir sérhvert fylki $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ úr $\mathbb{R}^{2\times 2}$ er til nákvæmlega ein margliða sem T varpar í $\mathbf{C}$, nánar til tekið margliðan

$$\frac{c_{22}}{6}t^3 + \frac{c_{21}}{2}t^2 + c_{12}t + c_{11}.$$

Þar með höfum við sýnt að vörpunin T er gagntæk.

Dæmi. 4. Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki.

(a) Sýnið að vörpunin

$$T : \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}, \qquad \mathbf{C} \mapsto (\mathbf{AC})^T$$

sé línuleg.

(b) Gerið grein fyrir að vörpunin T sé gagntæk ef fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt.

(c) Gerum nú ráð fyrir að $m = 2$ og $n = 3$ og setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Finnið kjarna vörpunarinnar T í þessu tilfelli og segið til um vídd hans.

Lausn. (a) Látum $\mathbf{X}$ og $\mathbf{Y}$ vera fylki úr $\mathbb{R}^{n\times m}$ og c vera rauntölu, þá gildir samkvæmt almennum reglum um fylkjareikning að

$$T(\mathbf{X}+c\mathbf{Y}) = (\mathbf{A}(\mathbf{X}+c\mathbf{Y}))^T = (\mathbf{AX}+c\mathbf{AY})^T = (\mathbf{AX})^T + c(\mathbf{AY})^T = T(\mathbf{X}) + cT(\mathbf{Y})$$

og þar með er sýnt að T er línuleg vörpun.

(b) Ef fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt (og þar með $n = m$), þá er vörpunin

$$S : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \mathbf{C} \mapsto \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}^T$$

andhverfa vörpunarinnar T.

(c) Fylki $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2]$ úr $\mathbb{R}^{3\times 2}$ er í kjarna vörpunarinnar T þá og því aðeins að $\mathbf{O} = \mathbf{AC} = [\mathbf{Ac}_1\, \mathbf{Ac}_2]$, en það jafngildir því að bæði $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$ séu í $\mathrm{Null}(\mathbf{A})$. Nú er fljótséð að $\mathrm{Null}(\mathbf{A})$ er spannað af vigrinum $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ svo að kjarni vörpunarinnar T er spannaður af fylkjunum

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ljóst er að þau eru línulega óháð svo að þau mynda grunn fyrir kjarnann og þar með hefur hann víddina 2.

Dæmi 5. Látum $f : A \to B$ vera vörpun milli tveggja mengja.

(a) Sannið að eftirfarandi fullyrðingar séu jafngildar.

- Fyrir sérhvert hlutmengi X í A gildir að $f^{-1}[f[X]] = X$.
- Vörpunin f er eintæk.

(b) Sannið að eftirfarandi fullyrðingar séu jafngildar.

- Fyrir sérhvert hlutmengi Y í B gildir að $f[f^{-1}[Y]] = Y$.
- Vörpunin f er átæk.

(c) Sannið að eftirfarandi fullyrðingar séu jafngildar.

- Fyrir sérhver hlutmengi X_1 og X_2 í A gildir að

$$f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2].$$

- Vörpunin f er eintæk.

Lausn. Við látum okkur nægja að leysa lið (c).

Gerum ráð fyrir að fyrra skilyrðið í (c) sé uppfyllt og sýnum að vörpunin f sé eintæk. Ef $x_1, x_2 \in A$ og $f(x_1) = f(x_2)$ þá fæst

$$f[\{x_1\} \cap \{x_2\}] = f[\{x_1\}] \cap f[\{x_2\}] = \{f(x_1)\}$$

og þar með $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$, en það hefur í för með sér að $x_1 = x_2$.

Gerum nú ráð fyrir að vörpunin f sé eintæk og leiðum af því að fyrra skilyrðinu í (c) sé fullnægt.
Ef X_1 og X_2 eru hlutmengi í A, þá er $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1]$ og $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_2]$ og þar með $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1] \cap f[X_2]$. Okkur nægir því að sýna að $f[X_1] \cap f[X_2] \subseteq f[X_1 \cap X_2]$. Ef $y \in f[X_1] \cap f[X_2]$, þá eru til $x_1 \in X_1$ og $x_2 \in X_2$ sem uppfylla $f(x_1) = f(x_2) = y$, en þar sem f er eintæk, þá eru x_1 og x_2 eitt og sama stakið. Þetta stak tilheyrir $X_1 \cap X_2$ og því er y í menginu $f[X_1 \cap X_2]$.