Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

STÆ106G - Línuleg algebra A

Vikublað 12

5. nóvember 2015

Ég minni á eftirfarandi atriði:

- Vandið allan frágang á skilaverkefnum! Þegar gefnar verða einkunnir fyrir þau, þá verður góður frágangur metinn til verðleika. Sérstaklega skal tekið fram að dæmatextann ber að skrifa vandlega niður á undan lausninni.
- Á vefsíðu námskeiðins er hægt að nálgast meginatriðin úr fyrirlestrum og vikublöð.
- Lesið hi-póstinn ykkar reglulega (minnst einu sinni á dag).

Skilaverkefni 10. Skilið skriflegum lausnum á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 hér að neðan eigi síðar en klukkan 14:00 fimmtudaginn 12. nóvember.

Dæmi fyrir dæmatíma 09.11 - 13.11.

- Dæmi 6, 7, 8 og 9 hér að neðan.
- **6.1** : 9, 13, 15, 17, 18, 23, 27, 28, 31, 37, 38, 47, 50, 51

Dæmi 1. (Úr lokaprófi 2014) Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

(i) Finnið eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Finnið grunn fyrir sérhvert af eiginrúmum fylkisins $\mathbf{A}$.

(iii) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt.

(iv) Finnið rauntölur a og b sem uppfylla skilyrðið

$$\mathbf{A}^{103} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Dæmi 2. Sýnið fyrst að fylkin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hafi sömu kennimargliðu og gerið síðan grein fyrir að annað þeirra sé hornalínugeranlegt en hitt ekki.

Dæmi 3. [Úr prófi vorið 2003]
Segið til um hvort fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er hornalínugeranlegt.

Dæmi 4. Gerið grein fyrir að fylkið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

sé hornalínugeranlegt. Finnið síðan andhverfanlegt fylki $\mathbf{P}$ sem hefur þann eiginleika að $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ er hornalínufylki.

Dæmi 5.

(a) Er hlutmengið

$$S = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}\ ;\ \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{O}\}$$

hlutrúm í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times k}$?

(b) Er hlutmengið

$$S = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \mathrm{Det}(\mathbf{A} + k\mathbf{I}) = 0, \quad \text{fyrir } k = 1, 2, 3 \ldots\}$$

hlutrúm í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times n}$?

(c) Látum $C[-1, 1]$ tákna vigurrúm allra samfelldra falla á bilinu $[-1, 1]$. Er hlutmengið

$$S = \{f \in C[-1, 1]\ ;\ f^{-1}[\{0\}] = \{0\}\}$$

hlutrúm í $C[-1, 1]$?

Dæmi 6. Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki.

(a) Hvað er hægt að fullyrða um $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$ í eftirfarandi tilfellum:

(1) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (2) $\mathbf{A}^2 = c\mathbf{A}$, þar sem c er tala (3) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I} = \mathbf{O}$.

(b) Gerum ráð fyrir að $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ séu vigrar þannig að $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}^T A = \mu\mathbf{w}^T$. Sýnið að $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ séu hornréttir hvor á annan ef $\lambda \neq \mu$.

Dæmi 7. Látum $\mathcal{C}^\infty$ tákna vigurrúm allra óendanlega oft diffranlegra falla sem skilgreind eru á rauntalnalínunni $\mathbb{R}$. Skilgreinum vörpun

$$T : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$$

með því að setja

$$T(f) := f^{(4)}$$

fyrir öll $f \in \mathcal{C}^\infty$; með öðrum orðum er $T(f)$ *fjórða afleiða* fallsins f.
Gerið grein fyrir að, fyrir hvaða rauntölu a sem er, séu föllin $e^{ax}, e^{-ax}, \sin(ax), \cos(ax)$ eiginföll T og finnið tilheyrandi eigingildi.

Ritháttur. Látum $Q(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ vera margliðu og $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki. Þá ritum við

$$Q(\mathbf{A}) := a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

og ferningsfylkið $Q(\mathbf{A})$ er yfirleitt kallað *gildi margliðunnar* Q *í fylkinu* $\mathbf{A}$.

Dæmi 8. Látum A vera ferningsfylki og Q vera margliðu.

(a) Sýnið að sé $\mathbf{v}$ eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ og λ tilheyrandi eigingildi þá gildi

$$Q(\mathbf{A})\mathbf{v} = Q(\lambda)\mathbf{v}.$$

(b) Eftirfarandi setning er kennd við Cayley og Hamilton.

Setning. *Látum* $\mathbf{A}$ *vera* $n \times n$ *fylki og* $P_{\mathbf{A}}(t)$ *vera kennimargliðu* A. *Þá gildir*

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Notið niðurstöðuna úr lið (a) til að sanna Cayley-Hamilton-setninguna í því tilfelli þegar fylkið $\mathbf{A}$ er hornalínugeranlegt.

Dæmi 9. Gerum ráð fyrir að $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ séu ferningsfylki þannig að $\mathbf{AB} - \mathbf{I}$ sé andhverfanlegt fylki. Sýnið að þá sé fylkið $\mathbf{BA} - \mathbf{I}$ líka andhverfanlegt og

$$(\mathbf{BA} - \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{B}(\mathbf{AB} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{I}.$$