Fyrirlestrar í línulegri algebru haust 2015

Í þessu skjali er að finna allar glærur sem notaðar eru í fyrirlestrunum. Það er fyrst og fremst ætlað þeim sem vilja koma glærunum á prent, en þær innihalda að megninu til aðeins þær skilgreiningar og setningar sem fyrir koma í námskeiðinu.

Tölusetning er með þeim hætti að fyrst kemur númer fyrirlestrarins og síðan númerið á undirgrein hans. Síðan eru skilgreiningar og setningar tölusettar innan hverrar greinar fyrir sig. Til dæmis kemur setning 15.2.3 fyrir í annari grein fimmtánda fyrirlestrar og á undan henni koma fyrir í sömu grein ein skilgreining og ein setning.

Jón Ingólfur Magnússon

1. fyrirlestur 24. ágúst 2015 (Greinar 1.1-1.2 í bók)

1.1 Hnitarúm og vigrar

Fyrir sérhverja heiltölu $k > 0$ látum við $\mathbb{R}^k$ tákna mengið af öllum röðuðum k-undum $(s_1, \ldots, s_k)$ af rauntölum.

Skilgreining 1.1.1

(i) Mengið $\mathbb{R}^k$ kallast **hnitarúmið** af **vídd** k.

(ii) Stökin $(s_1, \ldots, s_k)$ úr $\mathbb{R}^k$ kallast **vigrar** (í eintölu *vigur*) og tölurnar $s_1, \ldots, s_k$ kallast **hnit** vigursins. Vigurinn $(0, \ldots, 0)$ kallast **núllvigurinn** í $\mathbb{R}^k$.

- **Samlagning vigra** er skilgreind með því að setja

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) + (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n).$$

- **Frádráttur vigra** er skilgreindur með því að setja

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) - (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s_1 - t_1, s_2 - t_2, \ldots, s_n - t_n).$$

- **Margföldun vigurs með rauntölu** r er skilgreind með því að setja

$$r(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (rs_1, rs_2, \ldots, rs_n).$$

- Vigurinn $(-s_1, -s_2, \ldots, -s_n)$ er oft táknaður $-(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

1.2 Línuleg jöfnuhneppi

Skilgreining 1.2.1
Jafna af taginu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

þar sem $a_1, \ldots, a_n, b$ eru gefnar rauntölur og $x_1, \ldots, x_n$ eru óþekktar stærðir (eða breytur), kallast **línuleg jafna** (e. *linear equation*). Tölurnar $a_1, \ldots, a_n$ kallast **stuðlar** (e. *coefficients)* jöfnunnar. Vigur $(s_1, \ldots, s_n)$ er sagður **uppfylla** jöfnuna eða vera **lausn** á jöfnunni ef

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Athugasemd
Línulegar jöfnur auðkennast af því að breyturnar koma bara fyrir í fyrsta veldi og margfeldi tveggja eða fleiri breyta koma ekki fyrir í jöfnunni.

Skilgreining 1.2.2
Línulegt jöfnuhneppi (e. *system of linear equations* eða *linear system)* er raðað safn af einni eða fleiri línulegum jöfnum og er oftast sett fram á forminu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

þar sem fyrsta jafnan er efst o.s.frv. Vigur $(s_1, \ldots, s_n)$ sem uppfyllir allar jöfnurnar kallast **lausn** jöfnuhneppisins og mengi allra lausna hneppisins kallast **lausnamengi** þess. Það að **leysa línulegt jöfnuhneppi** felst í því að finna allar lausnir þess, með öðrum orðum að finna lausnamengi hneppisins. Tvö línuleg jöfnuhneppi eru sögð **jafngild** ef þau hafa sama lausnamengið.

Málvenjur

(i) Jöfnur línulegs jöfnuhneppis eru nær undantekningalaust tölusettar frá einum og upp úr og því er talað um fyrstu jöfnu, aðra jöfnu o.s.frv.

(ii) Jöfnurnar í línulegu jöfnuhneppi eru oft kallaðar **línur** hneppisins.

(iii) Jafna af taginu $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$ er oft kölluð **núlllína** í hneppinu.

(iv) Ef x_i og x_j eru breytur í hneppinu þannig að $i < j$, þá er oft sagt að x_j sé **hægra megin** við x_i og x_i sé **vinstra megin** við x_j.

1.3 Línuaðgerðir og efri stallagerð
Hugsum okkur að við höfum gefið eitthvert línulegt jöfnuhneppi og skoðum eftirfarandi aðgerðir sem unnt er að framkvæma á hneppinu.

(1) Víxlað er á tveimur jöfnum úr hneppinu.

(2) Jafna úr hneppinu er margfölduð með fasta $r \neq 0$.

(3) Ein jafna úr hneppinu er margfölduð með fasta og lögð við aðra jöfnu úr hneppinu.

Skilgreining 1.3.1
Aðgerðirnar þrjár eru kallaðar **einfaldar línuaðgerðir** (e. *elementary row operations)* eða bara **línuaðgerðir**.

Setning 1.3.2
Línulegt jöfnuhneppi sem fæst með því að beita endanlegum fjölda línuaðgerða á gefið línulegt jöfnuhneppi hefur sama lausnamengi og upphaflega hneppið.

Skilgreining 1.3.3

(i) **Forustubreyta** (e. *leading variable)* tiltekinnar línulegrar jöfnu er fyrsta breytan (frá vinstri), sem hefur stuðul sem er ekki núll.

(ii) **Forystustuðull** (e. *leading coefficient)* tiltekinnar línulegrar jöfnu er stuðullinn við forystubreytu línunnar.

(iii) Línulegt jöfnuhneppi er sagt vera **á efra stallaformi** eða **af efri stallagerð** (e. *row echelon form)* ef forustubreyta sérhverrar línu, frá og með línu tvö, er hægra megin við forustubreytu línunnar fyrir ofan og þær línur sem hafa enga forustubreytu eru allar neðst í hneppinu.

(iv) Þær breytur tiltekins línulegs jöfnuhneppis *af efri stallagerð*, sem ekki eru forustubreytur í neinni af jöfnum þess, kallast **frjálsar breytur** (e. *free variables)* hneppisins.

1.4 Gauss-eyðing

Línuleg jöfnuhneppi eru yfirleitt leyst með svokallaðri **Gauss-eyðingu**, sem felst í því að beita línuaðgerðum á hneppið þar til fram kemur hneppi af efri stallagerð. Hið síðara hefur sama lausnamengi og hið fyrra og það er auðvelt að leysa með svokallaðri **aftur-á-bak innsetningu**.

Gauss-eyðing er framkvæmd með eftirfarandi hætti:
Skref 1 Kannað er hvort einhver jafna hneppisins hefur enga lausn, þ.e.a.s. hvort fyrir komi í hneppinu jafna þar sem stuðlarnir við allar breytur eru talan 0, en hægra megin við jafnaðarmerkið er tala sem er ekki núll. Ef svo er þá hefur jöfnuhneppið enga lausn og þarflaust að halda áfram.

Skref 2 Valin er ein af jöfnunum sem hefur forustubreytu lengst til vinstri og víxlað á henni og efstu jöfnunni (línuaðgerð 1).

Skref 3 Með endurtekinni beitingu línuaðgerðar 3 er efsta jafnan notuð til að „eyða“ öllu úr dálkinum fyrir neðan forustubreytu hennar. Þannig fæst jöfnuhneppi þar sem forustubreytur allra línanna fyrir neðan þá efstu eru hægra megin við forustubreytu hennar.

Skref 4 Litið er á jöfnuhneppið sem myndað er úr jöfnunum sem eru fyrir neðan efstu jöfnuna og framantalin skref endurtekin.

Þannig er haldið áfram þar til fram kemur jöfnuhneppi af efri stallagerð eða jöfnuhneppi sem hefur enga lausn.

Athugasemd
Jöfnur af gerðinni $0 = 0$ má alltaf strika út úr línulegum jöfnuhneppum.

Línulegt jöfnuhneppi af efri stallagerð er leyst með **aftur-á-bak innsetningu** á eftirfarandi hátt:

Byrjað er á neðstu jöfnu (sem ekki er núlllína) og fengin út „formúla" fyrir forustubreytu hennar út frá frjálsu breytunum. Þar sem þessi forustubreyta kemur fyrir í jöfnunum fyrir ofan (hún er ekki forustubreyta neinnar þeirra) eru frjálsu breyturnar settar inn fyrir hana samkvæmt formúlunni. Að svo búnu er farið eins að með næst neðstu jöfnuna (sem ekki er núlllína) og þannig koll af kolli „aftur á bak" eftir hneppinu þar til fengist hafa formúlur fyrir allar forustubreyturnar út frá frjálsu breytunum.

Þessi aðferð gefur okkur **stikaframsetningu** á lausnamengi hneppisins með frjálsu breyturnar sem **stika**, með öðrum orðum ákvarða sérhver gildi á frjálsu breytunum nákvæmlega eina lausn á hneppinu.

2. fyrirlestur 27. ágúst 2015 (Grein 1.2 í bók)

2.1 Rudd efri stallagerð og Gauss-Jordan-eyðing

Skilgreining 2.1.1
Línulegt jöfnuhneppi er sagt vera **á ruddu efra stallaformi** eða **af ruddri efri stallagerð** (e. *reduced row echelon form)* ef það er af efri stallagerð og allir forustustuðlar þess eru 1 og forustubreyta sérhverrar línu hefur stuðulinn 0 í öllum hinum línunum.

Að leysa línulegt jöfnuhneppi með svokallaðri **Gauss-Jordan-eyðingu** felst í því að koma hneppinu fyrst á efra stallaform með Gauss-eyðingu, en beita svo línuaðgerð 3 þar til forustubreyta sérhverrar línu hefur stuðulinn 0 í öllum hinum línunum. Síðan er öllum forustustuðlum hneppisins breytt í 1 með línuaðgerð 2 og lausnirnar loks fundnar með aftur-á-bak innsetningu.

2.2 Fylki

Skilgreining 2.2.1
Fylki (e. *matrix)* er rétthyrndur talnareitur

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Talan a_{ij} er í i-tu línu og j-ta dálki og kallast **stak** fylkisins. Segjum líka að talan a_{ij} sé **í sæti** (i,j).
- **Stærð fylkis** er táknuð með (fjöldi lína)$\times$(fjöldi dálka), t.d. hefur fylkið hér að ofan m línur og n dálka og stærð þess er því $m \times n$. Fylki af stærð $m \times n$ er yfirleitt kallað $m \times n$ **fylki**.

Skilgreining 2.2.2
Fylki með aðeins einn dálk kallast **dálkvigur** (e. *column vector*) og fylki með aðeins eina línu kallast **línuvigur** (e. *row vector*).

Yfirleitt er ekki gerður greinarmunur á 1×1 fylkinu $[a]$ og tölunni a.

Skilgreining 2.2.3
Látum

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vera $m \times n$ fylki.

- Vigurinn $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ kallast i**-ti línuvigur** fylkisins $\mathbf{A}$.
- Vigurinn
$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$
kallast j**-ti dálkvigur** fylkisins $\mathbf{A}$.

Við tökum eftir að sérhver línuvigur $m \times n$ fylkis hefur n hnit, en sérhver dálkvigur þess hefur m hnit.

Skilgreining 2.2.4
Byrjum með línulegt jöfnuhneppi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Fylkið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

kallast **stuðlafylki** (e. *matrix of coefficients)* jöfnuhneppisins.

Dálkvigurinn

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

kallast **breytuvigur** jöfnuhneppisins.

Dálkvigurinn

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

kallast **hægri hlið** jöfnuhneppisins.

Aukið fylki (e. *augmented matrix)* jöfnuhneppisins er skilgreint sem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

og er oft ritað á forminu $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{b}\,]$.

- Fylki er sagt vera **á efra stallaformi** eða **af efri stallagerð** ef línulegu jöfnuhneppin sem hafa það sem stuðlafylki eru af efri stallagerð.
- Fylki er sagt vera **á ruddu efra stallaformi** eða **af ruddri efri stallagerð** ef línulegu jöfnuhneppin sem hafa það sem stuðlafylki eru af ruddri efri stallagerð.

2.3 Línulegt spann

Skilgreining 2.3.1
Látum $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vera vigra og $c_1, c_2, \ldots, c_k$ vera rauntölur. Þá kallast vigurinn

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n.$$

línuleg samantekt (e. *linear combination*) vigranna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ og við köllum $c_1, c_2, \ldots, c_k$ **stuðla** hennar.

Ef S er hlutmengi í $\mathbb{R}^n$, þá nefnist mengi allra vigra sem eru línulegar samantektir vigra úr S **línulegt spann** (e. *linear span*) mengisins S eða **línulegur hjúpur** mengisins S.

Við táknum línulegt spann mengisins S með $\mathrm{Span}(S)$.

Fyrir $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og $S = \{\mathbf{v}\}$ fæst

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}\}) = \{t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

sem er **línan** sem vigurinn $\mathbf{v}$ **stikar** gegnum upphafspunktinn $\mathbf{0}$.

Skilgreining 2.3.2
Látum nú $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki með dálkvigra $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og látum $\mathbf{x}$ vera n-vigur, m.ö.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Þá er **margfeldi** fylkisins $\mathbf{A}$ og vigursins $\mathbf{x}$ skilgreint sem línulega samantektin

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Með hnitum er margfeldið gefið með

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Reiknireglur fyrir margfeldi fylkis og vigurs
Það er fljótlegt að sannfæra sig um að dreifiregla og víxlregla fyrir margföldun rauntalna gefur okkur

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{A}(r\mathbf{x}) = r\mathbf{A}\mathbf{x}$$

fyrir öll $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ alla n-dálkvigra $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og allar rauntölur r.

Skilgreining 2.3.3
Spann dálkvigra tiltekins fylkis $\mathbf{A}$ er táknað $\mathrm{Col}(A)$ og kallað **dálkrúm** fylkisins. Nánar til tekið: ef $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ þá er

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}).$$

2.4 Meira um línuleg jöfnuhneppi

Jafngildar framsetningar á línulegu jöfnuhneppi:

(i) Á fylkjaformi: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

(ii) Með summutákni: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m.$

(iii) Með upptalningu á jöfnum:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

(iv) Á fylkjaformi með upptalningu á öllum stökum:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(v) Með auknu fylki:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

(vi) Með línulegum samantektum á dálkum $\mathbf{A}$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(vii) Með línulegum samantektum á dálkum $\mathbf{A}$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Skilgreining 2.4.1
Tvö fylki $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru sögð **línujafngild** (e. *row equivalent*) ef hægt er að fá annað þeirra út úr hinu með einföldum línuaðgerðum.

Þetta táknum við með $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Fljótséð er að eftirfarandi reglur gilda um hvaða fylki $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ sem er.

(i) $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ef og aðeins ef $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$.

(iii) Ef $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, þá er $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

Setning 2.4.2
Sérhvert fylki er línujafngilt nákvæmlega einu fylki af ruddri efri stallagerð.

Málvenja
Þetta eina fylki af efri ruddri stallagerð, sem er línujafngilt gefnu fylki A, er oft kallað **rudd efri stallagerð fylkisins** A.

3. fyrirlestur 31. ágúst 2015 (Greinar 1.2-1.3 í bók)

3.1 Meira um línuleg jöfnuhneppi (framhald)

Upprifjun
Sérhvert fylki $\mathbf{A}$ er línujafngilt nákvæmlega einu fylki af ruddri efri stallagerð $\mathbf{U}$. Fylkið $\mathbf{U}$ er oft kallað **rudd efri stallagerð fylkisins** $\mathbf{A}$.

Fylgisetning 3.1.1
Tvö fylki eru línujafngildi þá og því aðeins að þau hafi sömu ruddu efri stallagerðina

Setning 3.1.2
Línuleg jöfnuhneppi eru jafngild (þ.e.a.s. hafa sama lausnamengi) ef tilheyrandi aukin fylki eru línujafngild.

Skilgreining 3.1.3
Línulegt jöfnuhneppi er sagt **samkvæmt** (e. *consistent*) ef það hefur að minnsta kosti eina lausn. Annars er það sagt **ósamkvæmt** (e. *inconsistent*).

Setning 3.1.4
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vera m-dálkvigur.

(i) Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er samkvæmt ef og aðeins ef $\mathbf{b}$ er í dálkrúmi fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er samkvæmt fyrir öll $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ef og aðeins ef dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna allt rúmið $\mathbb{R}^m$, þ.e.a.s. $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$.

(iii) Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er samkvæmt fyrir öll $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ef og aðeins ef sérhver lína í efri stallagerð stuðlafylkisins $\mathbf{A}$ hefur forystustuðul.

(iv) Línulegt jöfnuhneppi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er ósamkvæmt ef og aðeins ef efri stallagerð aukna fylkisins $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ hefur forystustuðul í síðasta dálki.

3.2 Kjarnar (núllrúm) og óhliðraðar jöfnur

Í framhaldinu látum við $\mathbf{A}$ tákna $m \times n$ fylki með dálka $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Skilgreining 3.2.1

(i) Ef vigurinn $\mathbf{b}$ er ekki núllvigurinn, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, þá segjum við að hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sé **hliðrað** (e. *inhomogeneous*).

(ii) Ef vigurinn $\mathbf{b}$ er núllvigurinn, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, þá segjum við að hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sé **óhliðrað** (e. *homogeneous*).

(iii) Lausnin $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ á óhliðraða hneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ nefnist **augljósa lausnin** eða **sjálfgefna lausnin** (e. *trivial solution*).

Skilgreining 3.2.2

(i) Mengi allra lausna óhliðraða hneppisins, þ.e.a.s.

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,;\ \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\},$$

nefnist **kjarni** (e. *kernel*) fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Mengið $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ er líka kallað **núllrúm** (e. *null space*) fylkisins $\mathbf{A}$ og er einnig táknað $\mathrm{Null}(\mathbf{A})$.

Athugasemd
Takið eftir að $\mathbf{x}$ er í kjarna fylkisins $\mathbf{A}$ þá og því aðeins að

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Setning 3.2.3

(i) Ef $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, þá er $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ og $\alpha\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

(ii) Ef $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{y}$ er í $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, þá er $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{b}$

(iii) Ef $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay}$, þá er $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$

(iv) Ef $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, þá er sérhver lausn jöfnunnar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ af gerðinni $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$ með $\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

(v) Ef tvö fylki $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru línujafngild, þá eru kjarnar þeirra þeir sömu, $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{B})$.

3.3 Myndvídd (metorð) fylkis

Skilgreining 3.3.1
Fjöldi þeirra lína, sem eru ekki núlllínur, í ruddri efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$ er táknaður með $\text{Rank}(\mathbf{A})$ og kallast **myndvídd** eða **metorð** (*e. rank*) fylkisins.

Athugasemdir

(i) Metorð fylkisins $\mathbf{A}$ er jafnt fjölda forustustuðla í ruddri efri stallagerð þess.

(ii) $\text{Rank}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Setning 3.3.2
Eftirfarandi skilyrði eru jafngild.

(i) $\text{Rank}(\mathbf{A}) < n$.

(ii) Rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$ hefur færri en n línur sem eru ekki núll.

(iii) Rudd efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$ hefur færri en n forystustuðla.

(iv) Að minnsta kosti einn dálkur í ruddri efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$ hefur engan forystustuðul.

(v) Það er að minnsta kosti ein frjáls breyta í lausnarformúlunni fyrir óhliðraða hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

(vi) Jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hefur lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Fylgisetning 3.3.3
Óhliðrað jöfnuhneppi $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hefur lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ef breyturnar eru fleiri en jöfnurnar.

4. fyrirlestur 3. september 2015 (Greinar 1.3-2.2 í bók)

4.1 Margfeldi tveggja fylkja

Látum áfram $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og látum $\mathbf{B}$ vera $n \times k$ fylki með dálkvigra $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$.

Margfeldið $\mathbf{AB}$ er þá skilgreint sem $m \times k$ fylkið sem hefur dálkvigrana

$$\mathbf{Ab}_1, \mathbf{Ab}_2, \ldots, \mathbf{Ab}_k$$

það er að segja

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{Ab}_1 \ \mathbf{Ab}_2 \ \cdots \ \mathbf{Ab}_k \ ].$$

Athugasemd
Margfeldið $\mathbf{AB}$ er aðeins skilgreint ef fjöldi dálka í $\mathbf{A}$ er sami og fjöldi lína í $\mathbf{B}$.

Meginregla
Þegar reiknað er með vigrum í $\mathbb{R}^n$ skiptir engu hvort litið er á þá sem dálkvigra eða línuvigra. Þegar kemur að fylkjamargföldun skiptir það hins vegar höfuðmáli. Við munum ávallt líta á þá sem *dálkvigra* nema annað sé skýrt tekið fram.

Dæmi 4.1.1
Hugsum okkur að við þurfum að leysa mörg jöfnuhneppi

$$\mathbf{Ax}_j = \mathbf{b}_j, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

þar sem $m \times n$ stuðlafylkið $\mathbf{A}$ er alltaf það sama, en hægri hliðarnar $\mathbf{b}_j$ breytast.

Við getum þá sett þetta upp sem það verkefni að finna $n \times k$ fylki $\mathbf{X}$ sem uppfyllir fylkjajöfnuna

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

þar sem $m \times k$ fylkið $\mathbf{B}$ hefur dálkvigrana $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, það er að segja

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_k].$$

4.2 Línulega háðar og óháðar upptalningar á vigrum

Við segjum að $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sé **upptalning** (*e. indexed set*) á n vigrum úr $\mathbb{R}^m$. Hún fæst með því að úthluta sérhverri talnanna $1, \ldots, n$ nákvæmlega einum vigri úr $\mathbb{R}^m$.

Varúð!
Upptalning á n vigrum úr $\mathbb{R}^m$ er ekki það sama og mengið sem inniheldur þá. Ef t.d. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \cdots = \mathbf{v}_n$ þá fæst að $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_1\}$.

Þegar röð vigranna í upptalningunni skiptir ekki máli, þ.e.a.s. þegar tölurnar $1, \ldots, n$ eru ekki notaðar til að *raða* vigrunum heldur einungis til auðkenningar, þá er stundum talað um **fjölskyldu** í stað upptalningar.

Skilgreining 4.2.1
Við segjum að upptalningin $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ á vigrum úr $\mathbb{R}^m$ sé **línulega háð** (e. *linearly dependent*) ef til eru tölur $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sem eru ekki allar núll, þannig að

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ef engar slíkar tölur eru til, m.ö.o. ef upptalningin er ekki línulega háð, þá er hún sögð **línulega óháð** (e. *linearly independent*).

Þegar engin hætta er á misskilningi, þá segjum við einfaldlega að *vigrarnir* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ séu línulega háðir eða línulega óháðir.

Reiknirit
Til þess að finna út hvort vigrar $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ í $\mathbb{R}^m$ eru línulega háðir eða óháðir þá myndum við $m \times n$ fylkið

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$$

og beitum svo línuaðgerðum á óhliðraða línulega jöfnuhneppið $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(i) Ef hneppið hefur lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, þá eru vigrarnir línulega háðir.

(ii) Ef hneppið hefur aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, þá eru vigrarnir línulega óháðir

Setning 4.2.2
Dálkvigrar tiltekins fylkis eru línulega óháðir ef og aðeins ef allir dálkarnir í ruddri efri stallagerð þess hafa forustustuðul.

Setning 4.2.3

Upptalning $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ á vigrum í $\mathbb{R}^m$ er línulega háð ef og aðeins ef til er k þannig að $\mathbf{v}_k$ sé línuleg samantekt af hinum vigrunum í upptalningunni.

Setning 4.2.4
Línuvigrar tiltekins fylkis eru línulega háðir þá og því aðeins að rudd efri stallagerð fylkisins hafi núlllínu.

4.3 Hnitarúmið $\mathbb{R}^n$

Samantekt á reiknireglum

1.	Ef $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, þá $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$	(lokun við samlagningu)
2.	$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$	(víxlregla samlagningar)
3.	$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$	(tengiregla samlagningar)
4.	$\mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$	($\mathbf{0}$ er samlagningarhlutleysa)
5.	$\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	($-\mathbf{x}$ er samlagningarandhverfa $\mathbf{x}$)
6.	Ef $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, þá $r\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	(lokun við margföldun með tölu)
7.	$r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$	(tengiregla margföldunar)
8.	$r(\mathbf{y}+\mathbf{x}) = r\mathbf{y}+r\mathbf{x}$	(dreifiregla)
9.	$(r+s)\mathbf{x} = r\mathbf{x}+s\mathbf{x}$	(dreifiregla)
10.	$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$	(talan 1 er margföldunarhlutleysa)

Þessar reglur fást beint út frá tilheyrandi reglum fyrir rauntölurnar. Tökum dæmi:

SÖNNUN Á REGLU 2:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+\mathbf{y} &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2, \ldots, y_n+x_n) = \mathbf{y}+\mathbf{x}\end{aligned}$$

SÖNNUN Á REGLU 5:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) &= (x_1+(-x_1), x_2+(-x_2), \ldots, x_n+(-x_n)) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

SÖNNUN Á REGLU 7:

$$\begin{aligned}r(s\mathbf{x}) &= r(sx_1, sx_2, \ldots, sx_n) \\ &= (r(sx_1), r(sx_2) \ldots, r(sx_n)) \\ &= ((rs)x_1, (rs)x_2 \ldots, (rs)x_n) = (rs)\mathbf{x}\end{aligned}$$

Skilgreining 4.3.1
Látum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vera vigur í $\mathbb{R}^n$.

(i) Talan

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

kallast **lengd** (e. *length*) vigursins $\mathbf{x}$.

(ii) Vigurinn $\mathbf{x}$ kallast **einingarvigur** (e. *unit vector*) ef $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Athugasemd
Um alla vigra $\mathbf{x}$ í $\mathbb{R}^n$ og allar rauntölur r gilda eftirfarandi reglur:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ og $\|\mathbf{x}\| = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) $\|r\mathbf{x}\| = |r|\,\|\mathbf{x}\|$.

Skilgreining 4.3.2
Látum $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vera vigra í $\mathbb{R}^n$. Talan

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

kallast **depilmargfeldi** (e. *dot product*) vigranna $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

Setning 4.3.3
Um alla vigra $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ í $\mathbb{R}^n$ og allar rauntölur r gilda eftirfarandi reglur:

(i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(ii) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

(iii) $r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (r\mathbf{y})$.

(iv) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

(v) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ og $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ ef og aðeins ef $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Skilgreining 4.3.4
Látum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ vera vigra úr $\mathbb{R}^n$, sem hvorugur er núllvigurinn

(i) Vigrarnir eru sagðir **samsíða** ef til er tala t þannig að $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$.

(ii) Við segjum að vigrarnir **hafi sömu stefnu** ef til er tala $t > 0$ þannig að $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$.

Skilgreining 4.3.5
Tveir vigrar úr $\mathbb{R}^n$ eru sagðir **hornréttir** ef depilmargfeldi þeirra er núll.

5. fyrirlestur 7. september 2015 (Greinar 2.1-2.2 í bók)

5.1 Líkan fyrir fólksfjöldaþróun.

Þegar fólksfjöldaþróun er athuguð er yfirleitt nóg að skoða kvenfólkið (og margfalda svo með tveimur).

Látum Δt tákna ákveðið tímabil, segjum til dæmis 5 ár.

Skiptum kvenfólkinu í aldurshópa $j = 0, 1, \ldots, m$.
Í hópi $j = 0$ eru þær sem eru á aldrinum 0 til Δt,
í hópi $j = 1$ eru þær sem eru á aldrinum Δt til $2\Delta t$, o.s.frv. Talan m er valin þannig að þær elstu séu í hópi m.

Fyrir $t = 0$, $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$, ...setjum við aldursdreifinguna fram sem vigra

$$\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ \vdots \\ n_{m0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{01} \\ n_{11} \\ \vdots \\ n_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{02} \\ n_{12} \\ \vdots \\ n_{m2} \end{bmatrix}, \ldots$$

þar sem n_{jk} táknar fjölda kvenna í aldurshópi j þegar $t = k\Delta t$.
Látum F_j tákna meðalfjölda stúlkubarna sem kona í hópi j eignast á tímabilinu Δt og er lifandi í lok tímabilsins.

Heildarfjöldi stúlkubarna sem fæðist á tímabilinu Δt og er lifandi í lok þess er þá

$$F_0 n_{00} + F_1 n_{10} + \cdots + F_m n_{m0}.$$

Þessar stúlkur mynda þá hóp $j = 0$ (og ekki aðrar), þ.e.a.s.

$$F_0 n_{00} + F_1 n_{10} + \cdots + F_m n_{m0} = n_{01}.$$

Látum p_j tákna hlutfall þeirra kvenna í hópi j sem lifa það að komast í hóp $j + 1$. Höfum því $p_j n_{jk} = n_{j+1,k+1}$.
Tökum eftir að $p_m = 0$.

Á fylkjaformi verður þetta svona

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{m-1} & F_m \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{00} \\ n_{10} \\ \vdots \\ n_{m0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{01} \\ n_{11} \\ \vdots \\ n_{m1} \end{bmatrix}$$

Með því að tákna fylkið $\mathbf{M}$ má skrifa þetta $\mathbf{M}\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_1$.

Almennt fæst: $\mathbf{n}_k = \mathbf{M}^k \mathbf{n}_0$.

5.2 Flatneskjur

Upprifjun úr síðasta fyrirlestri:
Upptalning $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ á vigrum úr $\mathbb{R}^m$ er **línulega háð** (e. *linearly dependent*) ef til eru tölur $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sem eru ekki allar núll, þannig að

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ef engar slíkar tölur eru til, m.ö.o. ef upptalningin er ekki línulega háð, þá er upptalningin **línulega óháð** (e. *linearly independent*).

Skilgreining 5.2.1
Látum $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ með $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Þá kallast hlutmengið

$$L = \{\mathbf{a} + t\mathbf{v} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$$

línan gegnum $\mathbf{a}$ **samsíða** $\mathbf{v}$. Þessi framsetning línunnar L kallast **stikaform** hennar.

Skilgreining 5.2.2
Mengi af gerðinni

$$\{\mathbf{a} + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k \ ; \ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\},$$

þar sem $\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ eru línulega óháðir, kallast k-**flatneskja**.

Athugasemdir

- Lína er 1-flatneskja.
- Ef $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, þá fæst að $\{\mathbf{a} + t\mathbf{v} \ ; \ t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{a}\}$. Í því tilfelli er talað um **úrkynjaða línu** eða 0-**flatneskju**.

Setning 5.2.3
Ef línulegt jöfnuhneppi er samkvæmt, þá er lausnamengi þess k-flatneskja.

6. fyrirlestur 10. september 2015 (Grein 2.3 í bók)

6.1 Varpanir

Látum X og Y vera tvö mengi.

Vörpun (e. *map, mapping, transformation),* frá X yfir í Y er *regla* sem úthlutar sérhverju staki úr X *nákvæmlega einu staki* úr Y.

Vörpun frá X yfir í Y er yfirleitt táknuð

$$f : X \to Y \qquad \text{eða} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

eða bara f ef ljóst er um hvaða mengi X og Y er að ræða.

Mengið X köllum við **skilgreiningarmengi** (e. *domain*) vörpunarinnar f og mengið Y köllum við **ráðstöfunarmengi** (e. *co-domain*) vörpunarinnar f.

Athugasemd

Önnur heiti sem notuð eru yfir mengið X eru:

formengi, frámengi og **óðal**.

Önnur heiti sem notuð eru yfir mengið Y eru:

bakmengi, aðmengi og **ítak**.

Þau verða ekki notuð í þessu námskeiði.

Nema annað sé tekið fram mun $f : X \to Y$ tákna vörpun.

- Fyrir sérhvert x úr X er stakið, sem vörpunin f úthlutar x, yfirleitt táknað $f(x)$ og kallað **gildi** vörpunarinnar f í x. Þá er líka sagt að f **varpi** x **í** $f(x)$. Þetta er stundum táknað

  $$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x).$$

- Hlutmengið í Y sem skilgreint er með

  $$\{f(x)\,;\, x \in X\}$$

  nefnist **myndmengi** eða **mynd** (e. *range*) vörpunarinnar f.

- Mengið af öllum röðuðum pörum (x, y), þar sem $x \in X$ og $y \in Y$, táknum við $X \times Y$ og köllum **faldmengi** (e. *set product*) mengjanna X og Y.

- Hlutmengið í $X \times Y$ sem skilgreint er með

  $$\mathrm{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \, ; \, y = f(x)\}.$$

  Köllum við graf vörpunarinnar f.

Athugasemd
Orðið **fall** (e. function) er iðulega notað yfir það sem hér kallast vörpun. Við munum aðeins nota orðið fall um varpanir sem hafa ráðstöfunarmengið $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$.

Til þess að skilgreina vörpun þarf að

- tilgreina skilgreinigarmengið X,
- tilgreina ráðstöfunarmengið Y,
- tilgreina hver reglan er sem úthlutar sérhverju staki x úr X stakinu $f(x)$.

Stundum er vikið frá þessu og til dæmis sagt: *Látum f vera fallið*

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

án frekari útskýringa. Þá ber að líta svo á að ráðstöfunarmengið sé allt $\mathbb{R}$ og skilgreiningarmengið sé stærsta mögulega mengið þar sem stæðan hægra megin hefur merkingu; í þessu tilfelli mengið $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Skilgreining 6.1.1
Við segjum að vörpunin $f : X \to Y$ sé

(i) **eintæk** (e. *injective, one-to-one)* ef hún varpar ólíkum stökum úr X í ólík stök úr Y; með öðrum orðum ef $x_1, x_2 \in X$ og $x_1 \neq x_2$ hefur alltaf í för með sér að $f(x_1) \neq f(x_2)$,

(ii) **átæk** (e. *surjective, onto)* ef öll stökin úr Y eru gildi vörpunarinnar f; með öðrum orðum ef um sérhvert y úr Y gildir að til er x úr X þannig að $y = f(x)$,

(iii) **gagntæk** (e. *bijective)* ef hún er bæði eintæk og átæk.

Athugasemd
Við getum líka túlkað þessi þrjú hugtök út frá úrlausnum jafna.

(i) Vörpunin f er eintæk ef og aðeins ef jafnan $y = f(x)$ hefur í mesta lagi eina lausn x fyrir sérhvert $y \in Y$. (Enga lausn eða eina lausn, en ekki fleiri.)

(ii) Vörpunin f er átæk ef og aðeins ef jafnan $y = f(x)$ hefur að minnsta kosti eina lausn fyrir sérhvert $y \in Y$.

(iii) Vörpunin f er gagntæk ef og aðeins ef jafnan $y = f(x)$ hefur nákvæmlega eina lausn fyrir sérhvert $y \in Y$.

Skilgreining 6.1.2
Látum Z vera mengi og $g : Y \to Z$ vera vörpun. Þá skilgreinum við nýja vörpun

$$g \circ f : X \to Z$$

með því að setja $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ fyrir öll x úr X. Þessi vörpun kallast **samskeyting** *(e. composition)* varpananna f og g.

Skilgreining 6.1.3
Vörpunin $\mathrm{id}_X : X \to X$, sem skilgreind er með $\mathrm{id}_X(x) = x$ fyrir öll x úr X, kallast **hlutlausa vörpunin** eða **samsemdarvörpunin** *(e. identity map).*

Skilgreining 6.1.4
Ef vörpunin $f : X \to Y$ er gagntæk, þá skilgreinum við nýja vörpun $f^{-1} : Y \to X$ með því að setja $f^{-1}(y) = x$ ef $y = f(x)$. Hún kallast **andhverfa** (e. *inverse)* vörpunarinnar f.

Vörpunin f^{-1} auðkennist af skilyrðunum

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \text{og} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X.$$

6.2 Línulegar varpanir

Skilgreining 6.2.1
Vörpun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er sögð **línuleg** (e. *linear*), ef hún varðveitir samlagninguna og margföldun með tölu, nánar tiltekið ef hún fullnægir eftirtöldum skilyrðum:

(i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, fyrir alla vigra $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr $\mathbb{R}^n$.

(ii) $f(r\mathbf{x}) = rf(\mathbf{x})$, fyrir alla vigra $\mathbf{x}$ úr $\mathbb{R}^n$ og allar rauntölur r.

Athugasemd
Með þrepun getum við sýnt fram á að vörpunin f er línuleg ef og aðeins ef um sérhverja upptalningu $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ á vigrum úr $\mathbb{R}^n$ og sérhverja upptalningu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ á rauntölum gildir að

$$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k f(\mathbf{x}_k).$$

Með summutáknum verður þetta að

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(\mathbf{x}_j).$$

Setning 6.2.2
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki. Þá er vörpunin

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$$

línuleg.

Skilgreining 6.2.3
Vigarnir

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \;, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

nefnast **stöðluðu einingarvigrarnir** (e. *standard unit vectors*) í $\mathbb{R}^n$.

Setning 6.2.4
Látum nú $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vera línulega vörpun. Þá er til nákvæmlega eitt $m \times n$ fylki A sem uppfyllir skilyrðið

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \text{fyrir öll } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Málvenja
Þegar T og $\mathbf{A}$ eru eins og í setningu 6.2.4, þá segjum við að línulega vörpunin T sé **gefin með fylkinu $\mathbf{A}$**.

Setning 6.2.5
Línuleg vörpun $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ákvarðast fullkomlega af gildum sínum í stöðluðu einingarvigrunum $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Setning 6.2.6
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki. Þá er línulega vörpunin

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$$

átæk ef og aðeins ef dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna $\mathbb{R}^m$.

Skilgreining 6.2.7
Látum nú $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vera línulega vörpun. Þá skilgreinum við hlutmengið

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

og köllum það **kjarna** línulegu vörpunarinnar T.

Setning 6.2.8
Línuleg vörpun $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er eintæk þá og því aðeins að $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Setning 6.2.9
Línulegar varpanir varpa línustrikum á línustrik.

7. fyrirlestur 14. september 2015 (Grein 2.3 í bók)

7.1 Línulegar varpanir (framhald)

Setning 7.1.1
Snúningur um núllpunktinn í $\mathbb{R}^2$ um hornið φ í jákvæða stefnu er línuleg vörpun og hún er gefin með fylkinu

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Setning 7.1.2
Látum nú $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ og $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ vera línulegar varpanir sem gefnar eru með fylkjunum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Þá gildir:

(i) Samskeytingin $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ er línuleg vörpun.

(ii) Línulega vörpunin $S \circ T$ er gefin með fylkinu $\mathbf{BA}$.

7.2 Vigurrúm

Skilgreining 7.2.1
Vigurrúm (e. *vector space*) er mengi V með stökum sem nefnd eru **vigrar** (e. *vectors*) ásamt tveimur aðgerðum **samlagningu** og **margföldun með rauntölu**, sem fullnægja eftirtöldum skilyrðum:

1. Ef $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, þá $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ (lokun við samlagningu)
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (víxlregla samlagningar)
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (tengiregla samlagningar)
4. Til er stak $\mathbf{0}$ í V kallað **núll** þannig að $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ er samlagningarhlutleysa)
5. Fyrir sérhvert $\mathbf{x} \in V$ er til stak $\tilde{\mathbf{x}}$ þannig að $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ($\tilde{\mathbf{x}} \in V$ er samlagningarandhverfa $\mathbf{x}$)

6. Ef $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$, þá $r\mathbf{x} \in V$ (lokun við margföldun með tölu)

7. $r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$ (tengiregla margföldunar)

8. $r(\mathbf{y} + \mathbf{x}) = r\mathbf{y} + r\mathbf{x}$ (dreifiregla)

9. $(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$ (dreifiregla)

10. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (1 er margföldunarhlutleysa)

Athugasemdir

- Skilyrðin tíu í síðustu skilgreiningu eru oft kölluð **frumsendur** fyrir vigurrúm.

- Samlagningarhlutleysan $\mathbf{0}$ er oft nefnd **núllstakið** eða **núllvigurinn** í V.

Setning 7.2.2
Í sérhverju vigurrúmi er aðeins eitt núllstak $\mathbf{0}$.

Sönnun: Hugsum okkur að $\tilde{\mathbf{0}}$ sé annað núllstak. Þá gefa frumsendurnar

$$\tilde{\mathbf{0}} = \mathbf{0} + \tilde{\mathbf{0}} = \tilde{\mathbf{0}} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Fyrsta jafnaðarmerkið gildir vegna þess að $\mathbf{0}$ er núllstak, annað er víxregla og þriðja gildir vegna þess að $\tilde{\mathbf{0}}$ er núllstak.

Setning 7.2.3
Um sérhvern vigur $\mathbf{x} \in V$ gildir að $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Sönnun: $0\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) = (0\mathbf{x} + 1\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{x}} \quad = (0 + 1)\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Setning 7.2.4
Sérhvert stak $\mathbf{x}$ í V á sér *nákvæmlega eina* samlagningarandhverfu $\tilde{\mathbf{x}}$.

Sönnun: Hugsum okkur að $\mathbf{x}$ eigi sér tvær samlagningarandhverfur $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Þá gildir

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} + (\mathbf{x} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{x}) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Setning 7.2.5
Um sérhvern vigur $\mathbf{x}$ úr V gildir að samlagningarandhverfa hans er $(-1)\mathbf{x}$.

SÖNNUN: $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Rithattur
Framvegis látum við $-\mathbf{x}$ tákna samlagningarandhverfu vigursins $\mathbf{x}$.

7.3 Línulega háð og óháð mengi og upptalningar

Skilgreining 7.3.1
Látum S vera hlutmengi í vigurrúmi V.

(i) Við segjum að S sé **línulega háð** (e. *linearly dependent*) ef til eru innbyrðis ólíkir vigrar $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ úr S og rauntölur $c_1, \ldots, c_m$, sem eru ekki allar núll, þannig að

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

(ii) Hlutmengið S er sagt **línulega óháð** (e. *linearly independent*) ef það er ekki línulega háð.

Skilgreining 7.3.2
Við segjum að upptalning á vigrum $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ úr vigurrúmi V sé **línulega háð** ef til eru tölur $c_1, \ldots, c_m$, sem eru ekki allar núll og fullnægja jöfnunni

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Annars segjum við að upptalningin sé **línulega óháð**.

Athugasemd
Ef ekki er hætta á misskilningi þá segjum við einfaldlega að vigrarnir $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ séu *línulega háðir* eða *línulega óháðir* eftir því sem við á.

Skilgreining 7.3.3
Látum $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ vera upptalningu á vigrum úr vigurrúmi V. Sérhver summa af gerðinni

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m$$

þar sem $c_1, \dots, c_m$ eru rauntölur kallast **línuleg samantekt** upptalningarinnar (eða vigranna ef ekki er hætta á misskilningi). Tölurnar $c_1, \dots, c_m$ eru kallaðar **stuðlar** línulegu samantektarinnar.

Æfing
Látum $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ vera upptalningu á vigrum úr vigurrúmi V. Sannið eftirfarandi fullyrðingar:

(a) Upptalningin er línulega háð ef og aðeins ef til er k þannig að unnt sé að skrifa $\mathbf{u}_k$ sem línulega samantekt af $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m$.

(b) Upptalningin er línulega óháð þá og því aðeins að $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$ hafi í för með sér $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

7.4 Spann hlutmengis í vigurrúmi

Skilgreining 7.4.1
Látum S vera hlutmengi í vigurrúmi V.

(i) Mengið af öllum línulegum samantektum

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m$$

þar sem $c_1, \dots, c_m$ eru rauntölur og $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_m$ eru stök í S, kallast **spann** mengisins S, táknað $\mathrm{Span}(S)$.

(ii) Við segjum að V sé spannað af S (eða S spanni V) ef $\mathrm{Span}(S) = V$.

Málvenja
Þegar S spannar V þá er sagt að V sé **spannað af vigrunum í** S.

Setning 7.4.2
Látum S vera línulega óháð mengi í vigurrúmi V og $\mathbf{x}$ vera í $\mathrm{Span}(S)$. Þá er hægt að skrifa $\mathbf{x}$ á nákvæmlega einn veg sem línulega samantekt af innbyrðis ólíkum stökum úr S.

8. fyrirlestur 17. september 2015 (Grein 2.4 í bók)

Upprifjun
Setning 7.4.2 úr síðasta fyrilestri segir:

Látum S vera línulega óháð mengi í vigurrúmi V og $\mathbf{x}$ vera í $\mathrm{Span}(S)$. Þá er hægt að skrifa $\mathbf{x}$ á nákvæmlega einn veg sem línulega samantekt af innbyrðis ólíkum stökum úr S.

8.1 Spann hlutmengis í vigurrúmi (framhald)

Setning 8.1.1
Ef fylki hefur fleiri dálka en línur, þá er eru dálkar fylkisins línulega háðir.

Setning 8.1.2
Upptalning á k vigrum í $\mathbb{R}^n$ er línulega háð ef $k > n$.

Setning 8.1.3
Látum $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vera upptalningu á vigrum úr vigurrúmi V. Ef enginn vigranna er núllvigurinn og upptalningin er línulega háð, þá er a.m.k. einn vigranna línuleg samantekt af vigrum sem koma á undan honum í upptalningunni.

Setning 8.1.4
Ef vigurrúm V er spannað af n vigrum þá er sérhvert hlutmengi í V sem inniheldur fleiri en n vigra línulega háð.

Setning 8.1.5
Ef S er línulega óháð mengi í vigurrúmi V og $\mathbf{x} \notin \mathrm{Span}(S)$ þá er $S \cup \{\mathbf{x}\}$ línulega óháð mengi.

9. fyrirlestur 21. september 2015 (Greinar 2.4 - 3.1 í bók)

9.1 Línulegar varpanir

Skilgreining 9.1.1
Vörpun $T : V \to W$ frá vigurrúmi V inn í vigurrúm W er sögð **línuleg** ef

$$T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \qquad \text{og} \qquad T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})$$

fyrir öll $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ og allar rauntölur α.

Athugasemd
Með þrepun fáum við að sérhver línuleg vörpun T varpar línulegum samantektum á línulegar samantektir, nánar til tekið

$$T(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n).$$

Af þessu sést að sé upptalningin $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ línulega háð þá er upptalningin $T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$ það líka.

Setning 9.1.2
Látum $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vera línulega óháða vigra í vigurrúmi V og látum $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vera vigra í vigurrúmi W. Þá er til nákvæmlega ein línuleg vörpun

$$T : \mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}) \longrightarrow W$$

sem fullnægir skilyrðinu

$$T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{v}_j, \qquad \text{fyrir} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Skilgreining 9.1.3
Látum $T : V \to W$ vera línulega vörpun. Hlutmengið

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V \ ; \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

kallast **kjarni** línulegu vörpunarinnar T.

9.2 Fylki og fylkjareikningur (upprifjun)

Fylki (e. *matrix)* er rétthyrndur talnareitur af gerðinni

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Tala a_{ij} nefnast *stak* (e. *entry*) í fylkinu $\mathbf{A}$ og a_{ij} er sagt vera stakið í sæti (i,j) í fylkinu $\mathbf{A}$.

- **Stærð fylkis** er táknuð með (fjöldi lína)$\times$(fjöldi dálka), til dæmis hefur fylkið hér að ofan m línur og n dálka og stærð þess er því $m \times n$. Fylki af stærð $m \times n$ er yfirleitt kallað $m \times n$ **fylki**.

- Fylki með aðeins einn dálk kallast **dálkvigur** (e. *column vector)*.

- Fylki með aðeins eina línu kallast **línuvigur** (e. *row vector)*.

Fylki af sömu stærð eru lögð saman á eftirfarandi hátt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Þessari samlagningu má lýsa í stuttu máli svona

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}.$$

Hér tilgreinum við eingfaldlega hvaða stak lendir í sæti (i,j) í fylkinu $\mathbf{A}+\mathbf{B}$. Margföldun fylkis með rauntölu r er skilgreind með því að setja

$$r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Þessari margföldun má lýsa í stuttu máli svona

$$(r\mathbf{A})_{ij} = r\mathbf{A}_{ij}$$

Munum að mengi allra $m \times n$ fylkja verður að vigurrúmi með ofangreindri samlagningu og margföldun með tölu.

Látum nú $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{x}$ vera n-dálkvigur. Við táknum dálkvigra $\mathbf{A}$ með $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og skrifum þá

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n].$$

Margfeldi fylkisins $\mathbf{A}$ og vigursins $\mathbf{x}$ er skilgreint sem línulega samantektin

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

Með hnitum er margfeldið gefið með

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{B}$ vera $n \times k$ fylki.
Margfeldið $\mathbf{AB}$ er þá skilgreint sem $m \times k$ fylkið sem hefur dálkvigrana

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{b}_k$$

þar sem $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ tákna dálkana í fylkinu $\mathbf{B}$.
Við skrifum þetta sem

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \ \cdots \mathbf{A}\mathbf{b}_k \ ].$$

Stutta útgáfan af þessari formúlu er

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{A}_{ir}\mathbf{B}_{rj}$$

Athugið!
Margfeldið $\mathbf{AB}$ er aðeins skilgreint ef fjöldi dálka í fylkinu $\mathbf{A}$ er jafn fjölda lína í fylkinu $\mathbf{B}$.

Látum nú $\mathbf{r}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ tákna i-ta línuvigur fylkisins $\mathbf{A}$.

Þá höfum við

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{A}_{ir}\mathbf{B}_{rj} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{b}_j = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

Þetta má orða svo að í sæti (i, j) í margfeldinu $\mathbf{AB}$ sé innfeldið af i-ta línuvigri fylkisins $\mathbf{A}$ og j-ta dálkvigri fylkisins $\mathbf{B}$.
Við getum einnig litið svo á að fylkið $\mathbf{AB}$ fáist með því að margfalda fylkið $\mathbf{B}$ frá vinstri með línum fylkisins $\mathbf{A}$, nánar til tekið

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{r}_2\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Skilgreining 9.2.1
Við segjum að fylki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sé **ferningsfylki** ef $m = n$. Þá kallast tölurnar $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ **hornalínustök** (e. *diagonal elements*) fylkisins $\mathbf{A}$ og vigurinn $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ er þá oft nefndur **hornalína** fylkisins $\mathbf{A}$.

Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki. Við segjum að $\mathbf{A}$ sé **efra þríhyrningsfylki** ef $a_{ij} = 0$ fyrir $i > j$ og við segjum að $\mathbf{A}$ sé **neðra þríhyrningsfylki** ef $a_{ij} = 0$ fyrir $i < j$.

Við segjum að $\mathbf{A}$ sé **hornalínufylki** ef það er bæði efra og neðra þríhyrningsfylki, með öðrum orðum ef $a_{ij} = 0$ fyrir $i \neq j$

Setning 9.2.2
Margfeldi efri þríhyrningsfylkja er efra þríhyrningsfylki, margfeldi neðri þríhyrningsfylkja er neðra þríhyrningsfylki og margfeldi hornalínufylkja er hornalínufylki.

Skilgreining 9.2.3

Látum $\mathbf{I}_n$ vera fylkið þar sem öll hornalínustökin eru 1 og öll stök utan hornalínunnar eru 0, þ.e.a.s.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Það kallast $n \times n$ **einingarfylkið** eða **einingarfylkið af stærðinni** $n \times n$.

Tvöfalda runan (δ_{ij}) sem skilgreind er með

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ef } i = j, \\ 0 & \text{ef } i \neq j. \end{cases}$$

kallast **Kronecker-delta**. Við sjáum að $\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^{n}$.

Athugasemdir

- Látum samkvæmt venju $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tákna stöðluðu einingarvigrana í $\mathbb{R}^n$. Þá er $\mathbf{I}_n = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$.

- Þegar ljóst er hvert n er þá skrifum við oft $\mathbf{I}$ í stað $\mathbf{I}_n$.

Setning 9.2.4
Um sérhvert $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ og sérhvert $n \times m$ fylki $\mathbf{B}$ gildir að

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$$

Skilgreining 9.2.5
Ef $\mathbf{A}$ er $m \times n$ fylki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Þá skilgreinum við **bylta fylkið af** $\mathbf{A}$ (lesið $\mathbf{A}$ bylt) sem $n \times m$ fylkið sem fengið er með því að mynda dálkvigra úr línuvigrum $\mathbf{A}$ og öfugt,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

10. fyrirlestur 24. september 2015 (Greinar 3.1 - 3.2 í bók)

Upprifjun úr síðasta fyrirlestri

Skilgreining 9.2.3
Látum $\mathbf{I}_n$ vera fylkið þar sem öll hornalínustökin eru 1 og öll stök utan hornalínunnar eru 0, þ.e.a.s.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Það kallast $n \times n$ **einingarfylkið** eða **einingarfylkið af stærðinni** $n \times n$.

Athugasemdir

- Látum samkvæmt venju $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tákna stöðluðu einingarvigrana í $\mathbb{R}^n$. Þá er $\mathbf{I}_n = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n]$.

- Þegar ljóst er hvert n er þá skrifum við oft $\mathbf{I}$ í stað $\mathbf{I}_n$.

Setning 9.2.4
Um sérhvert $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ og sérhvert $n \times m$ fylki $\mathbf{B}$ gildir að

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$$

Skilgreining 9.2.5
Ef $\mathbf{A}$ er $m \times n$ fylki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Þá skilgreinum við **bylta fylkið af** $\mathbf{A}$ (lesið $\mathbf{A}$ bylt) sem $n \times m$ fylkið sem fengið er með því að mynda dálkvigra úr línuvigrum $\mathbf{A}$ og öfugt,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

10.1 Fylkjareikningur (framhald)

Setning 10.1.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{B}$ vera $n \times k$ fylki. Þá gildir

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Skilgreining 10.1.2
Við segjum að fylki $\mathbf{A}$ sé **samhvert** (e. *symmetric*) ef það uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Skilgreining 10.1.3
Við segjum að fylki $\mathbf{A}$ sé **andsamhvert** (e. *antisymmetric*) ef það uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}.$$

Athugasemd
Öll samhverf og andsamhverf fylki eru ferningsfylki.

Setning 10.1.4
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki, $\mathbf{B}$ vera $n \times k$ fylki og $\mathbf{C}$ vera $k \times l$ fylki. Þá er

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}).$$

10.2 Frumfylki

Rifjum upp að aðgerðirnar, sem framkvæmdar eru á línulegum jöfnuhneppum til þess að koma þeim yfir á efri stallagerð, eru þrjár:

(i) **Umskipting:** Ein lína í hneppinu er valin. Við hana er lagt margfeldi af annarri línu og útkoman síðan sett inn í stað línunnar sem valin var.

(ii) **Skölun:** Lína er margfölduð með fasta, sem er ekki núll.

(iii) **Víxlun:** Víxlað er á tveimur línum.

Skilgreining 10.2.1
Ferningsfylki sem fæst með því að beita einni línuaðgerð á einingarfylki kallast **frumfylki** (e. *elementary reduction matrix*).

Setning 10.2.2
Látum $\mathbf{H}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{R}$ vera $m \times m$ frumfylki sem var fengið með því að beita ákveðinni línuaðgerð á $\mathbf{I}_m$. Ef þessari línuaðgerð er beitt á $\mathbf{H}$ þá fæst út fylkið $\mathbf{RH}$. (Að margfalda fylkið $\mathbf{H}$ með $\mathbf{R}$ frá vinstri hefur sömu áhrif og að beita umræddri línuaðgerð á fylkið $\mathbf{H}$.)

Setning 10.2.3
Fyrir sérhvert fylki $\mathbf{H}$ eru til frumfylki $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_r$ þannig að fylkið

$$\mathbf{R}_r\mathbf{R}_{r-1}\cdots\mathbf{R}_1\mathbf{H}$$

sé af ruddri efri stallagerð.

10.3 Andhverfur fylkja

Skilgreining 10.3.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki.

(i) Við segjum að fylkið $\mathbf{A}$ sé **andhverfanlegt frá vinstri** ef til er $n \times m$ fylki $\mathbf{B}$ sem uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

og þá er fylkið $\mathbf{B}$ kallað **vinstri andhverfa** fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Við segjum að fylkið $\mathbf{A}$ sé **andhverfanlegt frá hægri** ef til er $n \times m$ fylki $\mathbf{C}$ sem uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{AC} = \mathbf{I}_m$$

og þá er fylkið $\mathbf{C}$ kallað **hægri andhverfa** fylkisins $\mathbf{A}$.

Setning 10.3.2
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vera m-vigur.

(i) Ef $\mathbf{A}$ á sér vinstri andhverfu $\mathbf{B}$ og línulega jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er samkvæmt, þá hefur það aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$.

(ii) Ef $\mathbf{A}$ á sér hægri andhverfu $\mathbf{C}$ þá er n-vigurinn $\mathbf{Cb}$ lausn á línulega jöfnuhneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Setning 10.3.3
Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera $n \times n$ fylki þannig að $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Þá gildir einnig $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

11. fyrirlestur 28. september 2015 (Greinar 3.2 - 4.1 í bók)

Upprifjun úr síðasta fyrirlestri:

Skilgreining 10.3.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki.

(i) Við segjum að fylkið $\mathbf{A}$ sé **andhverfanlegt frá vinstri** ef til er $n \times m$ fylki $\mathbf{B}$ sem uppfyllir skilyrðið
$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$
og þá er fylkið $\mathbf{B}$ kallað **vinstri andhverfa** fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Við segjum að fylkið $\mathbf{A}$ sé **andhverfanlegt frá hægri** ef til er $n \times m$ fylki $\mathbf{C}$ sem uppfyllir skilyrðið
$$\mathbf{AC} = \mathbf{I}_m$$
og þá er fylkið $\mathbf{C}$ kallað **hægri andhverfa** fylkisins $\mathbf{A}$.

Setning 10.3.2
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vera m-vigur.

(i) Ef $\mathbf{A}$ á sér vinstri andhverfu $\mathbf{B}$ og línulega jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ er samkvæmt, þá hefur það aðeins lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$.

(ii) Ef $\mathbf{A}$ á sér hægri andhverfu $\mathbf{C}$ þá er n-vigurinn $\mathbf{Cb}$ lausn á línulega jöfnuhneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Setning 10.3.3
Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera $n \times n$ fylki þannig að $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Þá gildir einnig $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

11.1 Andhverfur fylkja (framhald)

Setning 11.1.1
Ferningsfylki hefur í mesta lagi eina hægri andhverfu.

Skilgreining 11.1.2
Ferningsfylki $\mathbf{A}$ er sagt **andhverfanlegt** ef til er ferningsfylki $\mathbf{B}$ þannig að $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Þá kallast fylkið $\mathbf{B}$ **andhverfa** fylkisins $\mathbf{A}$ og við táknum það yfirleitt $\mathbf{A}^{-1}$.

Athugasemd
Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki.

- Ef $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt, þá er fylkið $\mathbf{A}^{-1}$ eina vinstri andhverfan og eina hægri andhverfan sem $\mathbf{A}$ hefur.
- Ef fylkið $\mathbf{A}$ er ekki andhverfanlegt, þá hefur það hvorki vinstri né hægri andhverfu.

Setning 11.1.3
Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera andhverfanleg $n \times n$ fylki. Þá gildir að $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Verklag.
Eftirfarandi aðferð er oft beitt til að kanna hvort tiltekið $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ sé andhverfanlegt og til að finna andhverfu þess ef svo er.

- Jöfnuhneppið $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ er leyst með því að setja upp aukna fylkið $[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ og beita Gauss-Jordan-eyðingu.
- Ef hneppið hefur enga lausn þá er fylkið $\mathbf{A}$ ekki andhverfanlegt.
- Ef hneppið hefur lausn, þá fæst að lokum aukna fylkið $[\mathbf{I}_n|\mathbf{A}^{-1}]$.

11.2 LU-þáttun

Setning 11.2.1
Frumfylki eru andhverfanleg.

Setning 11.2.2
Sérhvert andhverfanlegt ferningsfylki er margfeldi (endanlega margra) frumfylkja.

Setning 11.2.3
Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki, sem unnt er að koma á efra stallaform með því að nota einungis umskiptingar af gerðinni $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + c\mathbf{r}_j$ með $j < i$. Þá er hægt að þátta $\mathbf{A}$ í margfeldi tveggja fylkja

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

þar sem $\mathbf{L}$ er neðra þríhyrningsfylki með 1 í öllum sætum á hornalínunni og $\mathbf{U}$ er efra þríhyrningsfylki.

Skilgreining 11.2.4
Þáttunin í setningu 11.2.3 er kölluð LU-**þáttun** á fylkinu $\mathbf{A}$.

Athugasemd
Fljótlegasta leiðin til að leysa „stór“ línuleg jöfnuhneppi fæst með því að nota LU-þáttun. Þessi aðferð er þríþætt:

(i) LU**-þáttun:** Fylkin $\mathbf{L}$ og $\mathbf{U}$ eru reiknuð út.

(ii) Jafnan $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ er leyst með **áfram innsetning** (þ.e.a.s byrjað á að finna x_1 o.s.frv.) og látum $\mathbf{c}$ tákna lausnina.

(iii) Jafnan $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ er leyst með aftur-á-bak innsetningu.

11.3 Setningin langa um andhverf fylki
Í eftirfarandi setningu eru sett fram 30 jafngild skilyrði varðandi ferningsfylki. Um nokkur þeirra höfum við enn ekki fjallað, en munum gera það í síðar; þau eru merkt með *.

Setning 11.3.1
Eftirfarandi 30 staðhæfingar um $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ eru jafngildar:

Stuðlafylki:

1. Fylkið $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt.

2. Bylta fylkið $\mathbf{A}^T$ er andhverfanlegt.

Línuleg jöfnuhneppi:

3. Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hefur a.m.k. eina lausn fyrir sérhvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

4. Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hefur nákvæmlega eina lausn fyrir sérhvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

5. Hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ hefur aðeins augljósu lausnina $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Forystustuðlar:

6. $\mathbf{A}$ hefur n forystustuðla.

7. Sérhver dálkur $\mathbf{A}$ hefur forystustuðul.

8. Sérhver lína $\mathbf{A}$ hefur forystustuðul.

Myndvídd og línujafngildi:

9. $\mathbf{A}$ er línujafngilt einingarfylkinu $\mathbf{I}_n$.

10. $\text{Rank}(\mathbf{A}) = n$.

Línulegar varpanir:

11. Vörpunin $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ er eintæk.

12. Vörpunin $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ er átæk.

Hægri andhverfa og vinstri andhverfa:

13. Til er $n \times n$ fylki $\mathbf{B}$ þannig að $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.

14. Til er $n \times n$ fylki $\mathbf{C}$ þannig að $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_n$.

Dálkvigrar:

15. Dálkvigrar $\mathbf{A}$ eru línulega óháðir.

16. Dálkvigrar $\mathbf{A}$ spanna allt rúmið $\mathbb{R}^n$.

***17.** Dálkvigrar $\mathbf{A}$ mynda grunn í $\mathbb{R}^n$.

18. $\text{Col}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

***19.** $\text{Dim}(\text{Col}(\mathbf{A})) = n$.

Línuvigrar:

20. Línuvigrar $\mathbf{A}$ eru línulega óháðir.

21. Línuvigrar $\mathbf{A}$ spanna allt rúmið $\mathbb{R}^n$.

***22.** Línuvigrar $\mathbf{A}$ mynda grunn í $\mathbb{R}^n$.

23. $\text{Row}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

***24.** $\mathrm{Dim}(\mathrm{Row}(\mathbf{A})) = n$.

Eigingildi, sérstöðugildi og ákveður:

***25.** 0 er ekki eigingildi $\mathbf{A}$.

***26.** 0 er ekki sérstöðugildi $\mathbf{A}$.

***27.** $\mathbf{A}$ hefur n sérstöðugildi frábrugðin $\mathbf{0}$.

***28.** $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$.

Kjarni/núllrúm:

29. $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

30. $\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

11.4 Ákveður ferningsfylkja

Skilgreining 11.4.1
Ákveða eða **ákveðufall** er fall $\mathrm{Det} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, sem úthlutar sérhverju $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ tölu $\mathrm{Det}(\mathbf{A})$, sem er kölluð er **ákveða** fylkisins A og hefur eftirfarandi eiginleika:

(I) Ákveða þríhyrningsfylkis er margfeldi stakanna á hornalínunni.

(II) Ef fylkið $\tilde{\mathbf{A}}$ er fengið út frá $\mathbf{A}$ með einni umskiptingu (þ.e.a.s. tiltekinni línu í $\mathbf{A}$ er skipt út fyrir summu af henni og margfeldi af annarri línu), þá er $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(III) Ef $\tilde{\mathbf{A}}$ er fylkið sem fæst út þegar tiltekin lína í fylkinu $\mathbf{A}$ er margfölduð með tölu $c \neq 0$, þá er $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}) = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Setning 11.4.2
Fyrir sérhvert $n = 1, 2, 3, \dots$ er til nákvæmlega eitt ákveðufall

$$\mathrm{Det} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

(þ.e.a.s fall sem uppfyllir skilyrði I, II og III í skilgreiningu 11.4.1).

12. fyrirlestur 1. október 2015 (Greinar 4.1 - 4.2 í bók)

12.1 Ákveður ferningsfylkja (framhald)

Upprifjun: Fyrir sérhvert $n = 1, 2, 3, \ldots$ er til nákvæmlega eitt ákveðufall

$$\mathrm{Det} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

þ.e.a.s fall sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

(I) Ákveða þríhyrningsfylkis er margfeldi stakanna á hornalínunni.

(II) Ef fylkið $\tilde{\mathbf{A}}$ er fengið út frá $\mathbf{A}$ með einni umskiptingu (þ.e.a.s. tiltekinni línu í $\mathbf{A}$ er skipt út fyrir summu af henni og margfeldi af annarri línu), þá er $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

(III) Ef $\tilde{\mathbf{A}}$ er fylkið sem fæst út þegar tiltekin lína í fylkinu $\mathbf{A}$ er margfölduð með tölu $c \neq 0$, þá er $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}) = c\mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Setning 12.1.1
Ef fylkið $\tilde{\mathbf{A}}$ er fengið með því að víxla tveimur línum í $n \times n$ fylkinu $\mathbf{A}$, þá er

$$\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{A}}) = -\mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

Verklag við útreikning á ákveðum

- Við vitum að með línuaðgerðunum þremur, umskiptingu, skölun og víxlun getum við komið sérhverju $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ yfir í efra þríhyrningsfylki $\mathbf{U}$. Jafnframt vitum við hvernig ákveðan breytist við hverja línuaðgerð. Með því að halda gott bókhald yfir breytingarnar fæst

  $$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = c \cdot \mathrm{Det}(\mathbf{U})$$

  þar sem c er fasti sem við þekkjum. Okkur nægir því að reikna út ákveðu efra þríhyrningsfylkisins $\mathbf{U}$, en hana er auvelt að reikna því samkvæmt reglu I er hún jöfn margfeldi hornalínustakanna í $\mathbf{U}$.

- Ef við sleppum skölunum í þessu ferli (alltaf hægt), þá fæst

  $$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-1)^k \mathrm{Det}(\mathbf{U})$$

  þar sem k er fjöldi víxlana sem við höfum beitt.

Setning 12.1.2

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Sönnun: Ef $c = 0$, þá erum við með þríhyrningsfylki og ákveða þess er margfeldi hornalínustakanna. Ákveðan er sem sagt $ad = ad - bc$ í þessu tilfelli.

Ef $c \neq 0$ þá fáum við

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= -\operatorname{Det}\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = -\operatorname{Det}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b - ad/c \end{bmatrix} \\ &= -c(b - ad/c) = ad - bc. \end{aligned}$$

Setning 12.1.3
Ef $\mathbf{A}$ er $n \times n$ fylki þá eru eftirfarandi staðhæfingar jafngildar:

(i) $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = 0$.

(ii) Línuvigrar $\mathbf{A}$ eru línulega háðir.

(iii) Dálkvigrar $\mathbf{A}$ eru línulega háðir.

Setning 12.1.4
Ferningsfylki $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt ef og aðeins ef $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$.

12.2 Flatarmálsreikningur með ákveðum

Setning 12.2.1
Samsíðungurinn S, sem vigrarnir $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ í $\mathbb{R}^2$ spanna, hefur flatarmálið

$$a(S) = \left|\operatorname{Det}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$

Setning 12.2.2
Látum S vera þríhyrning í $\mathbb{R}^2$ (með hornpunkt $\mathbf{0}$) og $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vera línulega vörpun sem gefin er með fylkinu $\mathbf{A}$. Þá hefur mynd þríhyrningsins $T(S) = \{T(\mathbf{x}) \, ; \, \mathbf{x} \in S\}$ flatarmálið

$$a(T(S)) = |\operatorname{Det}(\mathbf{A})| \, a(S).$$

12.3 Ákveður: eiginleikar

Skilgreining 12.3.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki. Fyrir sérhvert línunúmer i og dálknúmer j skilgreinum við **hlutfylkið** (e. *minor*) $\mathbf{M}^{ij} = \mathbf{M}^{ij}(\mathbf{A})$ af stærðinni $(n-1) \times (n-1)$ sem fæst með því að taka burt i-tu línu og j-ta dálk úr fylkinu $\mathbf{A}$.

Setning 12.3.2
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki. Fyrir sérhvert i og j úr $\{1, \dots, n\}$ gildir

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} \mathrm{Det}(\mathbf{M}^{ir}), \qquad \textbf{(liðun eftir línu } i\textbf{)}$$

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+j} a_{sj} \mathrm{Det}(\mathbf{M}^{sj}), \qquad \textbf{(liðun eftir dálki } j\textbf{)}$$

Dæmi
Lítum á formúluna sem sýnir liðun eftir fyrstu línu:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{1+r} a_{1r} \mathrm{Det}(\mathbf{M}^{1r}).$$

Ef við beitum henni á 2×2 fylki, þá fáum við

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) &= \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} + (-1)^{1+2} a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

Ef $\mathbf{A}$ er 3×3 fylki, þá verður þessi formúla

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \mathrm{Det} &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &+ (-1)^{1+2} a_{12} \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &+ (-1)^{1+3} a_{13} \mathrm{Det} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Setning 12.3.3
Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru $n \times n$ fylki, þá er

$$\mathrm{Det}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Det}(\mathbf{A})\mathrm{Det}(\mathbf{B})$$

Athugasemd
Með þrepun fæst að ef $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ eru $n \times n$ fylki, þá er

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k) = \mathrm{Det}(\mathbf{A}_1)\mathrm{Det}(\mathbf{A}_2) \cdots \mathrm{Det}(\mathbf{A}_k)$$

13. fyrirlestur 5. október 2015 (Greinar 4.2 - 5.1 í bók)

13.1 Ákveður: eiginleikar (framhald)

Setning 12.3.3 úr síðasta fyrirlestri segir: Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru $n \times n$ fylki, þá gildir

$$\text{Det}(\mathbf{AB}) = \text{Det}(\mathbf{A})\text{Det}(\mathbf{B})$$

Athugasemd

Með þrepun fæst: Ef $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ eru $n \times n$ fylki, þá gildir

$$\text{Det}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k) = \text{Det}(\mathbf{A}_1)\text{Det}(\mathbf{A}_2) \cdots \text{Det}(\mathbf{A}_k)$$

Setning 13.1.1

Ef $\mathbf{A}$ er $n \times n$ fylki, þá er

$$\text{Det}(\mathbf{A}^T) = \text{Det}(\mathbf{A}).$$

Virðum aftur fyrir okkur formúlurnar fyrir liðun á ákveðunni eftir línum og dálkum,

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} \text{Det}(\mathbf{M}^{ir}), \qquad \textbf{(liðun eftir línu } i\textbf{)}$$

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+j} a_{sj} \text{Det}(\mathbf{M}^{sj}), \qquad \textbf{(liðun eftir dálki } j\textbf{)}$$

Skilgreining 13.1.2

Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki. Fyrir sérhvert (i, j) með $i, j = 1, \ldots, n$ skilgreinum við **hjáþátt** (e. *cofactor*) fylkisins $\mathbf{A}$ í sætinu (i, j) sem töluna

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\text{Det}(\mathbf{M}^{ij})$$

og **hjáþáttafylki** (e. *cofactor matrix*) þess sem $\mathbf{C} = (C_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Setning 13.1.3

Fyrir sérhvert $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ með hjáþáttafylki $\mathbf{C}$ gildir

$$\mathbf{AC}^T = (\text{Det}(\mathbf{A}))\,\mathbf{I}_n.$$

Ef $\mathbf{A}$ er andhverfanlegt, sem gildir aðeins ef $\mathrm{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$, þá fáum við formúlu fyrir andhverfunni

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}\mathbf{C}^T.$$

og þá sérstaklega fyrir stökum andhverfunnar

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})} \cdot \mathrm{Det}(\mathbf{M}^{ji}(\mathbf{A}))$$

Eftirfarandi setning er yfirleitt kölluð **Regla Cramers**.

Setning 13.1.4
Lítum á línulega $n \times n$ jöfnuhneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og gerum ráð fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ sé andhverfanlegt og látum $\mathbf{A}_j(\mathbf{b})$ vera $n \times n$ fylkið sem fæst með því að skipta út j-ta dálki í $\mathbf{A}$ fyrir $\mathbf{b}$. Þá eru hnit lausnarinnar $\mathbf{x}$ gefin með formúlunni

$$x_j = \frac{\mathrm{Det}(\mathbf{A}_j(\mathbf{b}))}{\mathrm{Det}(\mathbf{A})}$$

Setning 13.1.5
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki og látum $\mathbf{A}_j(\mathbf{x})$ vera $n \times n$ fylkið sem fæst með því að skipta út j-ta dálki í $\mathbf{A}$ fyrir $\mathbf{x}$. Þá er vörpunin

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \longmapsto \mathrm{Det}(\mathbf{A}_j(\mathbf{x}))$$

línuleg.

13.2 Hlutrúm í vigurrúmum

Skilgreining 13.2.1
Hlutmengi U í vigurrúmi V kallast **hlutrúm** (í V) ef það er ekki tómt og lokað við aðgerðirnar tvær í V, samlagningu og margföldun með tölu.

Athugasemdir

(i) Skilyrðin þrjú í skilgreiningunni eru:

- Ef $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ eru í U, þá er $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ í U. (Lokun við samlagningu.)
- Ef $\mathbf{x}$ er í U og $c \in \mathbb{R}$, þá er $c\mathbf{x}$ í U. (Lokun við margföldun með tölu.)
- $U \neq \emptyset$. (U er ekki tómt.)

(ii) Ef U er hlutrúm í V, þá er $\mathbf{0} \in U$.

(iii) $\{\mathbf{0}\}$ og V eru hlutrúm í V.

Upprifjun

Vigurrúm (e. *vector space*) er mengi V með stökum sem nefnd eru **vigrar** (e. *vectors*) ásamt tveimur aðgerðum **samlagningu** og **margföldun með rauntölu**, sem fullnægja eftirfarandi frumsendum:

1.	Ef $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, þá $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V$	(lokun við samlagningu)
2.	$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$	(víxlregla samlagningar)
3.	$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$	(tengiregla samlagningar)
4.	til er stak $\mathbf{0}$ í V kallað *núll* eða *núllvigur* þannig að $\mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$	($\mathbf{0}$ er samlagningarhlutleysa)
5.	fyrir sérhvert $\mathbf{x} \in V$ er til stak $\tilde{\mathbf{x}}$ þannig að $\mathbf{x}+\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$	($\tilde{\mathbf{x}} \in V$ er samlagningarandhverfa $\mathbf{x}$)
6.	Ef $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$, þá $r\mathbf{x} \in V$	(lokun við margföldun með tölu)
7.	$r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$	(tengiregla margföldunar)
8.	$r(\mathbf{y}+\mathbf{x}) = r\mathbf{y}+r\mathbf{x}$	(dreifiregla)
9.	$(r+s)\mathbf{x} = r\mathbf{x}+s\mathbf{x}$	(dreifiregla)
10.	$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$	(1 er margföldunarhlutleysa)

Athugasemd

Ef U er hlutrúm í vigurrúminu V, þá er U vigurrúm með reikningsaðgerðunum sem það „erfir“ frá V.

Setning 13.2.2

Látum S vera hlutmengi í vigurrúminu V. Ef S er ekki tómt, þá er $\operatorname{Span}(S)$ hlutrúm í V.

Setning 13.2.3

Látum U vera hlutrúm í vigurrúmi V og S vera hlutmengi í U. Ef S er ekki tómt, þá er $\operatorname{Span}(S) \subseteq U$.

Dæmi um nokkur hlutrúm í vigurrúmum

1. Einu hlutrúmin í $\mathbb{R}$ eru $\{0\}$ og $\mathbb{R}$.

2. Hlutrúmin í $\mathbb{R}^2$ eru $\{\mathbf{0}\}$ og $\mathbb{R}^2$ sem og allar línur gegnum núllpunktinn.

3. Hlutrúmin í $\mathbb{R}^3$ eru $\{\mathbf{0}\}$ og $\mathbb{R}^3$ sem og allar línur og öll plön, sem fara gegnum núllpunktinn.

4. Mengi allra efri þríhyrningsfylkja í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times n}$ er hlutrúm í $\mathbb{R}^{n\times n}$.

5. Mengi allra neðri þríhyrningsfylkja í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times n}$ er hlutrúm í $\mathbb{R}^{n\times n}$.

6. Mengi allra samhverfra fylkja í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times n}$ er hlutrúm í $\mathbb{R}^{n\times n}$.

7. Mengi allra margliða er hlutrúm í $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

8. Mengi allra diffranlegra falla $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er hlutrúm í $\mathrm{Varp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Skilgreining 13.2.4
Látum U_1 og U_2 vera hlutrúm í vigurrúmi V. Þá kallast hlutmengið

$$U_1 + U_2 = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}\in U_1,\ \mathbf{y}\in U_2\},$$

vigursumma (eða bara **summa**) (e. *vector sum*) þeirra.

Setning 13.2.5
Látum U_1 og U_2 vera hlutrúm í vigurrúmi V. Þá eru bæði $U_1\cap U_2$ og U_1+U_2 hlutrúm í V.

Skilgreining 13.2.6
Látum $f:X\to Y$ vera vörpun, S vera hlutmengi í X og T vera hlutmengi í Y.

(i) Hlutmengið
$$f[S] = \{f(x) \mid x\in S\}$$
kallast **mynd** (e. *image*) vörpunarinnar f af S.

(ii) Hlutmengið
$$f^{-1}[T] = \{x\in X \mid f(x)\in T\}.$$
kallast **frummynd** (e. *inverse image*) vörpunarinnar f af T.

14. fyrirlestur 8. október 2015 (Greinar 5.1 - 5.2 í bók)

14.1 Dálkrúm, línurúm og núllrúm

Setning 14.1.1
Látum $f : X \to Y$ vera línulega vörpun frá vigurrúmi X inn í vigurrúm Y.

(i) Um sérhvert hlutrúm U í X gildir að myndin $f[U]$ er hlutrúm í Y.

(ii) Um sérhvert hlutrúm V í Y gildir að frummyndin $f^{-1}[V]$ er hlutrúm í X.

Upprifjun
Látum $f : X \to Y$ vera línulega vörpun frá vigurrúmi X inn í vigurrúm Y. **Kjarni** línulegu vörpunarinnar f er skilgreindur með

$$\mathrm{Ker}(f) \;=\; \{\mathbf{x} \in X\,;\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \;=\; f^{-1}(\{\mathbf{0}\}).$$

Núllrúm er annað heiti yfir kjarna.

Takið vel eftir! Af setningu 14.1.1 leiðir beint að $\mathrm{Ker}(f)$ er hlutrúm í X.

Skilgreining 14.1.2
Látum $f : X \to Y$ vera línuleg vörpun frá vigurrúmi X inn í vigurrúm Y. Myndin $f[X]$ verður oftast táknuð $\mathrm{Range}(f)$ og kölluð **myndrúm** (e. *range*) línulegu vörpunarinnar f.

Skilgreining 14.1.3
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki.

(i) Hlutrúmið í $\mathbb{R}^m$, sem dálkvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna, er táknað $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ og kallað **dálkrúm** (e. *column space*) fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Hlutrúmið í $\mathbb{R}^n$, sem línuvigrar fylkisins $\mathbf{A}$ spanna, er táknað $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$ og kallað **línurúm** (e. *row space*) fylkisins $\mathbf{A}$.

Setning 14.1.4
Látum $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vera línulega vörpun sem gefin er með fylki $\mathbf{A}$. Þá er $\mathrm{Range}(T) = \mathrm{Col}(A)$.

Setning 14.1.5

Línujafngild fylki hafa sama línurúm.

Setning 14.1.6
Um öll fylki $\mathbf{A}$ gildir að

$$\mathrm{Row}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Col}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{Row}(\mathbf{A}).$$

Setning 14.1.7
Látum $\mathbf{A}$ vera fylki og $\mathbf{B}$ vera rudda efri stallagerð þess. Þá gildir:

(i) Línurúmið $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$ er spannað af þeim línum í $\mathbf{B}$ sem eru ekki núll.

(ii) Dálkrúmið $\mathrm{Col}(A)$ er spannað af þeim dálkum í A sem hafa sömu númer og þeir dálkar í $\mathbf{B}$ þar sem eru forustustuðlar.

14.2 Grunnar fyrir vigurrúm

Skilgreining 14.2.1
Hlutmengi í vigurrúmi V nefnist **grunnur** (e. *basis*) ef það er línulega óháð og spannar allt rúmið.

Við segjum iðulega að tilteknir vigrar í vigurrúmi V **myndi grunn** fyrir V ef mengi þeirra er grunnur fyrir V.
Stöðluðu einingarvigrarnir í $\mathbb{R}^n$, sem við táknum $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ mynda grunn í $\mathbb{R}^n$.

Þessi grunnur nefnist **staðalgrunnur** (e. *standard basis*) vigurrúmsins $\mathbb{R}^n$.
Hann er líka kallaður **náttúrlegi** eða **sjálfgefni** grunnurinn fyrir $\mathbb{R}^n$.

Setning 14.2.2
Dálkvigrar andhverfanlegs $n \times n$ fylkis mynda grunn fyrir $\mathbb{R}^n$.

Upprifjun
Látum S vera línulega óháð mengi í vigurrúmi V. Þá er unnt að skrifa sérhvern vigur úr $\mathrm{Span}(S)$ á nákvæmlega einn hátt sem línulega samantekt af stökum úr S.

Eftirfarandi setningu leiðir beint af ofangreindri niðurstöðu.

Setning 14.2.3
Látum $\mathcal{B}$ vera grunn fyrir vigurrúmi V. Þá er unnt að skrifa sérhvern vigur úr V á nákvæmlega einn veg sem línulega samantekt af stökum úr $\mathcal{B}$.

14.3 Raðgrunnar, hnit og einsmótanir

Þegar vigrunum í grunni $\mathcal{B}$ er raðað á tiltekinn hátt, þá segjum við að $\mathcal{B}$ sé **raðgrunnur** (e. *ordered basis*).

Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm V. Þá má skrifa sérhvern vigur $\mathbf{x}$ úr V á nákvæmlega einn hátt sem línulega samantekt

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

Stuðlarnir $c_1, \ldots, c_n$ eru því ótvírætt ákvarðaðir og n-vigurinn $(c_1, \ldots, c_n)$ nefnist **hnitavigur** (e. *coordinate vector*) vigursins $\mathbf{x}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$ og er táknaður $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Setning 14.3.1

Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm V. Þá er vörpunin, sem úthlutar vigrinum $\mathbf{x}$ hnitavigri sínum miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$,

$$V \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}},$$

línuleg og gagntæk.

15. fyrirlestur 12. október 2015 (Greinar 5.2 - 5.3 í bók)

Upprifjun úr síðasta fyrirlestri
Þegar vigrunum í grunni $\mathcal{B}$ er raðað á tiltekinn hátt, þá segjum við að $\mathcal{B}$ sé **raðgrunnur** (e. *ordered basis*).
Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm V. Þá má skrifa sérhvern vigur $\mathbf{x}$ úr V á nákvæmlega einn hátt sem línulega samantekt

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

Stularnir $c_1, \ldots, c_n$ eru því ótvírætt ákvarðaðir og n-vigurinn $(c_1, \ldots, c_n)$ nefnist **hnitavigur** (e. *coordinate vector*) vigursins $\mathbf{x}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$ og er táknaður $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Setning 14.3.1
Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm V. Þá er vörpunin, sem úthlutar vigrinum $\mathbf{x}$ hnitavigri sínum miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$,

$$V \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}},$$

línuleg og gagntæk.

15.1 Raðgrunnar hnit og einsmótanir (framhald)

Skilgreining 15.1.1
Tvö vigurrúm U og V eru sögð **einsmóta** (e. *isomorphic*) ef til er gagntæk línuleg vörpun $T : U \to V$. Vörpunin T nefnist þá **einsmótun** (e. *isomorphism*) frá U til V.

Athugasemdir

(i) Sérhvert vigurrúm V er einsmóta sjálfu sér, því samsemdarvörpunin $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ er einsmótun.

(ii) Ef U er einsmóta V, þá er V einsmóta U, því ef $T : U \to V$ er einsmótun, þá er $T^{-1} : V \to U$ einsmótun.

(iii) Ef U er einsmóta V og V er einsmóta W, þá er U einsmóta W, því ef $T : U \to V$ er einsmótun og $S : V \to W$ er einsmótun, þá er $S \circ T : U \to W$ einsmótun.

Upprifjun
Faldmengið $X \times X$ er mengið af öllum tvenndum (x, y), þar sem x og y eru stök úr X.

Skilgreining 15.1.2
Vensl (e. relation) R á mengi X er hlutmengi í $X \times X$.

Þegar vensl R eru skilgreind er oft skrifað xRy í stað $(x, y) \in R$. Oft eru önnur tákn en bókstafir notuð fyrir vensl, til dæmis $\sim$ og $\equiv$.

Dæmi um vensl

1. Á sérhverju mengi X skilgreinir $=$ vensl, $R = \{(x, x)\,;\, x \in X\}$ sem er jafngilt því að segja að $(x, y) \in R$ ef og aðeins ef $x = y$.

2. Á rauntalnalínunni skilgreinir röðunin $\leq$ vensl og sama er að segja um röðunina $<$, $R = \{(x, y)\,;\, x \leq y\}$ og $R = \{(x, y)\,;\, x < y\}$.

3. Ef S er mengi og við látum $X = \mathcal{P}(S)$ tákna mengi allra hlutmengja í S, þá skilgreinir $\subset$ vensl á X, $R = \{(A, B)\,;\, A \subset B\}$

Skilgreining 15.1.3
Vensl $\equiv$ á mengi X eru nefnd **jafngildisvensl** (e. *equivalence relation*) ef eftirfarandi þrjú skilyrði gilda um öll stök $x, y, z \in X$ (í sviga fyrir aftan hvert skilyrði er lýsingarorðið sem notað er um vensl sem fullnægja því):

1. $x \equiv x$, (**spegilvirk** (e. *reflexive*)).

2. Ef $x \equiv y$, þá $y \equiv x$ (**samhverf** (e. *symmetric*))

3. Ef $x \equiv y$ og $y \equiv z$, þá $x \equiv z$ (**gegnvirk** (e. *transitive*))

Dæmi um jafngildisvensl

1. Látum $X = \mathbb{R}^{m \times n}$ tákna mengi allra $m \times n$ fylkja og skilgreinum venslin $\sim$ þannig að $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ tákni að fylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ séu línujafngild. Þetta eru jafngildisvensl.

2. Látum X tákna mengi allra vigurrúma og skilgreinum venslin $\equiv$ þannig að $U \equiv V$ tákni að vigurrúmin U og V séu einsmóta. Samkvæmt athugasemdunum við skilgreiningu 14.2.2 eru þetta jafngildisvensl.

16. fyrirlestur 19. október 2015 (Grein 5.2 í bók)

16.1 Vídd vigurrúms

Upprifjun (Setning 8.1.4)
Ef vigurrúm V er spannað af n vigrum þá er sérhvert hlutmengi í V sem inniheldur fleiri en n vigra línulega háð.

Setning 16.1.1
Ef vigurrúm V hefur grunn með endanlega mörgum stökum, þá hafa allir aðrir grunnar í V sama fjölda staka og hann.

Skilgreining 16.1.2
Vigurrúm V sem hefur grunn með endanlega mörgum vigrum er sagt **endanlega vítt** (e. *finite dimensional*) og fjöldi staka í grunni fyrir V nefnist **vídd** (e. *dimension*) rúmsins V.

Ef V er ekki endanlega vítt, þá segjum við að V sé **óendanlega vítt** (e. *infinite dimensional*).

Við táknum vídd vigurrúms V með $\mathrm{Dim}(V)$ og skrifum $\mathrm{Dim}(V) = \infty$ ef V er óendanlega vítt.

Dæmi um víddir vigurrúma

1. $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$.
2. $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$.
3. $\mathrm{Dim}(\mathbb{P}_n) = n + 1$.
4. Rúm allra margliða með rauntölustuðla, $\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$, er óendanlega vítt.

Setning 16.1.3
Tvö endanlega víð vigurrúm eru einsmóta ef og aðeins ef þau hafa sömu víddina.

Dæmi um einsmóta vigurrúm

1. Rúmin $\mathbb{P}_{n-1}$ og $\mathbb{R}^n$ hafa víddina n. Dæmi um einsmótun milli þeirra er

$$c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \longmapsto (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

2. Rúmin $\mathbb{R}^{2\times 2}$ og $\mathbb{R}^4$ hafa víddina 4. Dæmi um einsmótun milli þeirra er:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}).$$

Setning 16.1.4
Látum V vera vigurrúm og $S \neq \varnothing$ vera hlutmengi í V.

(i) Ef $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, þar sem $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in S \setminus \{\mathbf{v}\}$, þá er

$$\text{Span}(S) = \text{Span}(S \setminus \{\mathbf{v}\}).$$

(ii) Ef $\text{Span}(S) = V$, S inniheldur n stök og $\text{Dim}(V) = n$, þá er S grunnur fyrir V.

(iii) Ef $\text{Dim}(V) = n$ og S er línulega óháð, þá er S grunnur fyrir V ef og aðeins ef S er n staka mengi.

(iv) Ef S hefur n stök og $\text{Span}(S) = V$, þá er $\text{Dim}(V) \leq n$.

(v) Ef S hefur n stök og S er línulega óháð mengi, þá er $\text{Dim}(V) \geq n$.

Setning 16.1.5
Látum $\mathbf{A}$ vera fylki og $\mathbf{B}$ vera fylki af efri stallagerð sem er línujafngilt $\mathbf{A}$. Þá mynda þær línur í $\mathbf{B}$, sem eru ekki núll, grunn fyrir línurúm fylkisins $\mathbf{A}$.

Setning 16.1.6
Látum $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ vera $m \times n$ fylki og $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ tákna númerin á þeim dálkum í ruddri efri stallagerð fylkisins $\mathbf{A}$, sem hafa forustustuðla. Þá mynda $\{\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}\}$ grunn fyrir dálkrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

Tölurnar $\text{Dim}(\text{Col}(\mathbf{A}))$ og $\text{Dim}(\text{Row})$ eru kallaðar **dálkvídd** og **línuvídd** fylkisins $\mathbf{A}$. Talan $\text{Dim}(\text{Null}(\mathbf{A}))$ er kölluð **núllvídd** fylkisins $\mathbf{A}$.

17. fyrirlestur 22. október 2015 (Greinar 5.2 - 5.3 í bók)

17.1 Grunnar, vídd og línulegar varpanir

Setning 17.1.1
Látum S vera hlutmengi í vigurrúmi V. Gerum ráð fyrir að S hafi aðeins endanlega mörg stök og $V = \text{Span}(S)$. Þá inniheldur S grunn fyrir V. Sér í lagi er V endanlega vítt.

Setning 17.1.2
Látum U vera endanlega vítt vigurrúm, V vera vigurrúm og $T : U \to V$ vera línulega vörpun. Þá gildir:

$$\text{Dim}(T[U]) \leq \text{Dim}(U).$$

Setning 17.1.3
Látum $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm U, og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vera upptalningu af vigrum í vigurrúmi V. Þá er til nákvæmlega ein línuleg vörpun $T : U \to V$ sem hefur þann eiginleika að $\mathbf{v}_j = T(\mathbf{u}_j)$, fyrir $j = 1, \ldots, n$.

Upprifjun (setning 8.1.5)
Látum S vera línulega óháð hlutmengi í vigurrúmi V og $\mathbf{v} \in V$. Ef $\mathbf{v}$ er ekki úr $\text{Span}(S)$, þá er hlutmengið $S \cup \{\mathbf{v}\}$ línulega óháð.

Setning 17.1.4
Sérhvert línulega óháð hlutmengi í endanlega víðu vigurrúmi er hluti af grunni fyrir vigurrúmið.

Setning 17.1.5
Sérhvert hlutmengi í endanlega víðu vigurrúmi, sem spannar vigurrúmið, inniheldur grunn fyrir vigurrúmið.

Upprifjun og skilgreiningar

- Fyrir línulega vörpun $T : U \to V$ skilgreinum við hlutrúmið

  $$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in U \ ; \ T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

  í U og köllum það **kjarna** línulegu vörpunarinnar T,

  og línulega hlutrúmið

  $$\text{Range}(T) = \{T(\mathbf{x}) \ ; \ \mathbf{x} \in U\}$$

  í V og köllum það **myndrúm** vörpunarinnar T.

- Fyrir línulega vörpun $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er til nákvæmlega eitt $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ sem uppfyllir
$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
fyrir öll $\mathbf{x}$ úr $\mathbb{R}^n$ og í því tilfelli gildir
$$\text{Range}(T) = \text{Col}(\mathbf{A}) \qquad \text{og} \qquad \text{Ker}(T) = \text{Null}(\mathbf{A}).$$

- **Myndvídd** eða **metorð** tiltekins fylkis $\mathbf{A}$ er fjöldi þerra lína í ruddri efri stallagerð fylkisins sem ekki eru núll. Þessi tala er táknuð $\text{Rank}(\mathbf{A})$. Hún er jöfn fjölda forustustuðla sem fyrir koma í ruddu efri stallagerðinni.

- Látum $\mathbf{A}$ vera fylki. Vídd núllrúmsins $\text{Null}(\mathbf{A})$ er nefnd **núllvídd** fylkisins $\mathbf{A}$ og er táknuð $\text{Nullity}(\mathbf{A})$.

Athugasemd
Núllvídd fylkis er jöfn fjölda þeirra dálka í efri stallagerð þess sem ekki hafa forustustuðul.

Setning 17.1.6
Um sérhvert $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ gildir að
$$\text{Rank}(\mathbf{A}) + \text{Nullity}(\mathbf{A}) = n.$$

Setning 17.1.7
Látum $T : U \to V$ vera línulega vörpun milli vigurrúma og gerum ráð fyrir að rúmið U sé endanlega vítt. Þá er
$$\text{Dim}(\text{Range}(T)) + \text{Dim}(\text{Ker}(T)) = \text{Dim}(U).$$

Setning 17.1.8
Um sérhvert fylki gildir að dálkrúm þess og línurúm hafa sömu vídd.

18. fyrirlestur 26. október 2015 (Grein 5.3 í bók og tvinntölur)

18.1 Hnitakerfi og línuleg hnitaskipti

Upprifjun
Látum V vera vigurrúm og $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir V. Þá má skrifa sérhvern vigur $\mathbf{x}$ úr V *á nákvæmlega einn hátt* sem línulega samantekt

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$

þ.e.a.s. stuðlarnir $a_1, \ldots, a_n$ eru *ótvírætt ákvaðraðir*. Þeir nefnast **hnit vigursins $\mathbf{x}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$** og n-vigurinn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$ er kallaður **hnitavigur vigursins $\mathbf{x}$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$**.
Hnitavörpunin

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

er einsmótun (þ.e.a.s. línuleg og gagntæk).

Setning 18.1.1
Látum V vera endanlega vítt vigurrúm og $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir V. Ef $\mathcal{C}$ er annar raðgrunnur fyrir V, þá gildir um öll $\mathbf{x}$ úr V að

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

þar sem $\mathbf{P}$ er $n \times n$ fylkið sem gefið er með formúlunni

$$\mathbf{P} = \big[\, [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \ [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}} \,\big].$$

Skilgreining 18.1.2
Fylkið $\mathbf{P}$ í setningunni hér að ofan nefnist **hnitaskiptafylki** (e. *transition matrix*) frá raðgrunninum $\mathcal{B}$ í raðgrunninn $\mathcal{C}$.

Setning 18.1.3
Látum $L : V \to W$ vera línulega vörpun milli endanlega víðra vigurrúma. Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir V og $\mathcal{C}$ vera raðgrunn fyrir W. Þá gildir um öll $\mathbf{x}$ úr V að

$$[L(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

þar sem $\mathbf{A}$ er fylkið sem gefið er með formúlunni

$$\mathbf{A} = \big[\, [L(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{C}} \ [L(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{C}} \ \cdots \ [L(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{C}} \,\big].$$

Skilgreining 18.1.4
Fylkið $\mathbf{A}$ nefnist **fylki línulegu vörpunarinnar L miðað við raðgrunnana $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$**.

Í því tilfelli þegar $V = W$ og $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, þá segjum við að $\mathbf{A}$ sé **fylki línulegu vörpunarinnar L miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$**.

Setning 18.1.5
Látum V vera endanlega vítt vigurrúm og $L : V \to V$ vera línulega vörpun. Ef $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru fylki línulegu vörpunarinnar L miðað við tvo raðgrunna fyrir V, þá er til andhverfanlegt fylki $\mathbf{P}$ sem uppfyllir

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}.$$

Skilgreining 18.1.6
Ferningsfylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ eru sögð **ámóta** (e. *similar*) ef til er andhverfanlegt fylki $\mathbf{P}$ þannig að $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$.

Séu fylkin $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ ámóta þá skrifum við $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$.

Athugasemd
Um öll ferningsfylki $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ gildir:

(i) $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$.

(ii) Ef $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$, þá er $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$.

(iii) Ef $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \simeq \mathbf{C}$, þá er $\mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$.

Þessi þrjú atriðið segja okkur að $\simeq$ skilgreini jafngildisvensl á $\mathbb{R}^{n\times n}$ fyrir sérhvert n.

Setning 18.1.7
Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ vera ámóta $n \times n$ fylki. Þá er til línuleg vörpun $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sem hefur þann eiginleika að $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ séu fylki hennar miðað við ákveðna raðgrunna fyrir $\mathbb{R}^n$.

19. fyrirlestur 29. október 2015 (Tvinntölur)

19.1 Tvinntölur

Vandaða umfjöllun um tvinntölur má meðal annars finna á bl 45 - 53 í ritinu *Undirbúningsnámskeið í stærðfræði* sem er á vef námskeiðsins.

Við skilgreinum margföldun í hnitasléttunni $\mathbb{R}^2$ með eftirfarandi hætti:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Ef $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ og $z_3 = (x_3, y_3)$, þá er fljótséð að eftirfarandi reglur gilda:

- Tengiregla: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
- Víxlregla: $z_1z_2 = z_2z_1$
- Dreifiregla: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

Tökum nú eftir : Fyrir öll $a \in \mathbb{R}$ og öll $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gildir að

$$(a, 0)(x, y) = (ax, ay) = a(x, y).$$

Við getum því litið á stakið $(a, 0)$ á x-ásnum og rauntöluna a sem sama hlutinn og skrifum nær undantekningalaust a í stað $(a, 0)$.

Setjum $i = (0, 1)$ og fáum

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Nú er $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi$ og með því að nota reiknireglurnar hér að framan fáum við

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2i^2\\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (y_1x_2 + x_1y_2)i.\end{aligned}$$

Skilgreining 19.1.1
Hnitasléttan $\mathbb{R}^2$ með ofangreindri margföldun kallast **tvinntalnasléttan** og er táknuð með $\mathbb{C}$. Stökin í $\mathbb{C}$ kallast **tvinntölur** og verða táknaðar á forminu $x + yi$ með $x, y \in \mathbb{R}$.

Munið: Allt sem varðar samlagningu, frádrátt, lengdir og fjarlægðir tvinntalna er eins og í venjulegum hnitareikningi í $\mathbb{R}^2$.

Skilgreining 19.1.2
Látum $z = x + yi \in \mathbb{C}$, þar sem $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Rauntalan x kallast **raunhluti** tvinntölunnar z; táknað $\operatorname{Re} z = x$.

(ii) Rauntalan y kallast **þverhluti** tvinntölunnar z; táknað $\operatorname{Im} z = y$.

(iii) Tvinntalan $x - yi$ kallast **samoka tala** tvinntölunnar z og við skrifum $\bar{z} = x - yi$.

(iv) Sagt er að z sé **þvertala** ef $x = 0$, þ.e.a.s. ef $z = yi$.

(v) Lengd tvinntölunnar z er táknuð með $|z|$, þ.e.a.s. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Setning 19.1.3

(i) Um allar tvinntölur z og w gildir

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \text{og} \quad |z \cdot w| = |z||w|.$$

(ii) Um allar tvinntölur z gildir að $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

Setning 19.1.4
Fyrir sérhverja tvinntölu $z \neq 0$ er til nákvæmlega ein tvinntala w sem uppfyllir skilyrðið $z \cdot w = 1$. Nánar tiltekið er þetta talan

$$w = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

og við táknum hana yfirleitt $1/z$.

Setning 19.1.5
Látum $z \in \mathbb{C}$. Þá er til rauntala t þannig að $z = |z|(\cos t + i \sin t)$.

Til að einfalda ritháttt skrifum við oft $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Þá má skrifa sérhverja tvinntölu z á forminu $z = re^{it}$, þar sem $r = |z|$, og tölurnar r og t eru kallaðar **skauthnit** tvinntölunnar z.

Setning 19.1.6

(i) Ef $z_1 = r_1 e^{it_1}$ og $z_2 = r_2 e^{it_2}$, þá er $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(t_1 + t_2)}$.

(ii) Ef $z = re^{it}$ með $r > 0$, þá er $1/z = \frac{1}{r} e^{-it}$.

Setning 19.1.7
Látum z vera tvinntölu og n vera jákvæða heiltölu. Þá hefur jafnan $z^n = 1$ nákvæmlega n lausnir; þær eru

$$z = 1,\ e^{\frac{2\pi}{n}i},\ e^{2\frac{2\pi}{n}i},\ e^{3\frac{2\pi}{n}i}, \dots, e^{(n-1)\frac{2\pi}{n}i}.$$

Skilgreining 19.1.2
Lausnir jöfnunnar $z^n = 1$ kallast **n-tu ræturnar af einum**.

19.2 Margliður yfir $\mathbb{C}$

Skilgreining 19.2.1
Látum $n \geq 0$ vera heila tölu. Við segjum að fall $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sé **margliða af stigi n yfir** $\mathbb{C}$ ef til eru $a_0, \dots, a_n$ úr $\mathbb{C}$ með $a_n \neq 0$ þannig að

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Núllfallið er litið á sem margliðu. Við köllum hana **núllmargliðuna** og stig hennar er skilgreint sem $-\infty$.

Ef f er margliða og z_0 er tvinntala þannig að $f(z_0) = 0$, þá kallast z_0 **rót** eða **núllstöð** margliðunnar f.

Athugasemd
Ef f og g eru margliður, þá er stig margliðunnar fg jafnt summunni af stigum f og g. (Hér gilda reiknireglurnar $-\infty + m = -\infty$ og $-\infty + (-\infty) = -\infty$.)

Setning 19.2.2
Látum f vera margliðu yfir $\mathbb{C}$. Fyrir sérhverja margliðu g yfir $\mathbb{C}$ er til nákvæmlega ein margliða q og nákvæmlega ein margliða r, sem uppfylla eftirfarandi skilyrði:

- *stig* $r <$ *stig* g
- $f(z) = q(z)g(z) + r(z)$, fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Auk þess gildir: Ef f og g eru margliður yfir $\mathbb{R}$, þ.e.a.s. ef allir stuðlar þeirra eru rauntölur, þá gildir það sama um q og r.

Setning 19.2.3
Látum f vera margliðu yfir $\mathbb{C}$. Þá er z_0 rót í f þá og því aðeins að til sé margliða q þannig að $f(z) = (z - z_0)q(z)$ fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Setning 19.2.4 (Undirstöðusetning algebrunnar)
Sérhver margliða yfir $\mathbb{C}$ af stigi einn eða hærra hefur rót.

Setning 19.2.5
Látum $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ vera margliðu yfir $\mathbb{C}$ með $a_n \neq 0$. Þá eru til (ekki endilega ólíkar) tvinntölur $z_1, \ldots, z_n$ þannig að

$$f(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Setning 19.2.6
Látum $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ vera margliðu yfir $\mathbb{C}$ með $a_n \neq 0$. Þá eru til innbyrðis ólíkar tvinntölur $z_1, \ldots, z_k$ og heilar tölur $n_1, \ldots, n_k$, sem allar eru stranglega stærri en núll og uppfylla skilyrðið

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}$$

fyrir öll z úr $\mathbb{C}$.

Fyrir sérhvert j segjum við að n_j sé **margfeldni** rótarinnar z_j í margliðunni $f(z)$.

Setning 19.2.7
Látum $f(z)$ vera margliðu með *rauntölustuðla*. Ef z_0 er rót í $f(z)$, þá er samoka talan $\bar{z}_0$ líka rót.

Setning 19.2.8
Sérhver margliða yfir $\mathbb{R}$ þáttast í fyrsta og annars stigs margliður yfir $\mathbb{R}$.

20. fyrirlestur 2. nóvember 2015 (Grein 6.1 í bók)

20.1 Vigurrúm yfir tvinntölur

- **Vigurrúm yfir tvinntölur**, líka kölluð $\mathbb{C}$**-vigurrúm**, eru skilgreind á sama hátt og vigurrúmin (yfir $\mathbb{R}$) nema hvað í stað margföldunar með rauntölu kemur alls staðar margföldun með tvinntölu.

- Hlutrúm í $\mathbb{C}$-vigurrúmi er hlutmengi í vigurrúminu sem er lokað með tilliti til samlagningar og margföldunar með *tvinntölu.*

- Sérhvert vigurrúm yfir $\mathbb{C}$ er sjálfkrafa vigurrúm yfir $\mathbb{R}$.

- Línulegar samantektir, grunnar og víddir eru skilgreindar fyrir $\mathbb{C}$-vigurrúm á samsvarandi hátt og áður.

- $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$ er $\mathbb{C}$-vigurrúm af vídd n. Við köllum $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ **staðlaða** eða **venjulega grunninn** fyrir $\mathbb{C}^n$.

- Mengi allra $m \times n$ fylkja með stuðla í $\mathbb{C}$ er $\mathbb{C}$-vigurrúm af vídd mn. Þetta rúm verður táknað $\mathbb{C}^{m\times n}$.

- Fylki með stuðla í $\mathbb{C}$ eru margfölduð saman með sama hætti og venjulega.

- Ákveður ferningsfylkja með tvinntölustuðla eru skilgreindar með sama hætti og fyrir ferningsfylki með rauntölustuðla.

- Línuleg jöfnuhneppi yfir $\mathbb{C}$ eru leyst á sama hátt og línuleg jöfnuhneppi yfir $\mathbb{R}$.

- Látum V og W vera $\mathbb{C}$-vigurrúm. Við segjum að vörpun $T : V \to W$ sé $\mathbb{C}$**-línuleg** ef hún varðveitir samlagninguna og um allar tvinntölur z og alla vigra $\mathbf{x}$ úr V gildir að

$$T(z\mathbf{x}) = zT(\mathbf{x}).$$

20.2 Eigingildi og eiginvigrar

Skilgreining 20.2.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki með tvinntölustuðla. Við segjum að tvinntala λ sé **eigingildi** (e. *eigenvalue*) fylkisins $\mathbf{A}$ ef til er vigur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, sem er *ekki núllvigurinn* og fullnægir skilyrðinu

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}.$$

Þá er sagt að $\mathbf{x}$ sé **eiginvigur** (e. *eigenvector*) fylkisins $\mathbf{A}$.

Við þessar aðstæður segjum að eigingildið λ og eiginvigurinn $\mathbf{x}$ **tilheyri** hvort öðru.

Setning 20.2.2
Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki með tvinntölustuðla. Tvinntala λ er eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ ef og aðeins ef

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Setning 20.2.3
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki með tvinntölustuðla. Fallið $P_{\mathbf{A}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sem skilgreint er með

$$P_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n)$$

er margliða af stigi n.

Skilgreining 20.2.4
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki með tvinntölustuðla.

(i) Margliðan $P_{\mathbf{A}}$ er kölluð **kennimargliða** fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Jafnan $P_{\mathbf{A}}(x) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) = 0$ er kölluð **kennijafna** fylkisins $\mathbf{A}$.

Athugasemd
Ef λ er eigingildi ferningsfylkis $\mathbf{A}$, þá eru eiginvigrarnir sem tilheyra λ allir þeir vigrar úr hlutrúminu $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ sem eru frábrugðnir $\mathbf{0}$. Þetta hlutrúm er yfirleitt kallað **eiginrúm** (e. *eigenspace*) fylkisins $\mathbf{A}$.

Skilgreining 20.2.5
Látum $L : V \to V$ vera línulega vörpun á vigurrúmi V. Við segjum að rauntala λ sé **eigingildi** (e. *eigenvalue*) línulegu vörpunarinnar L ef til er vigur $\mathbf{x} \in V$, sem er *ekki núllvigurinn* og fullnægir skilyrðinu

$$L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Þá er sagt að $\mathbf{x}$ sé **eiginvigur** (e. *eigenvector*) línulegu vörpunarinnar L.

Við þessar aðstæður segjum að eigingildið λ og eiginvigurinn $\mathbf{x}$ **tilheyri** hvort öðru.

Skilgreining 20.2.6
Látum $L : V \to V$ vera $\mathbb{C}$-línulega vörpun á $\mathbb{C}$-vigurrúmi V. Við segjum að tvinntala λ sé **eigingildi** (e. *eigenvalue*) línulegu vörpunarinnar L ef til er vigur $\mathbf{x} \in V$, sem er *ekki núllvigurinn* og fullnægir skilyrðinu

$$L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Þá er sagt að $\mathbf{x}$ sé **eiginvigur** (e. *eigenvector*) $\mathbb{C}$-línulegu vörpunarinnar L.

Við þessar aðstæður segjum að eigingildið λ og eiginvigurinn $\mathbf{x}$ **tilheyri** hvort öðru.

Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki með rauntölustuðlum. Þá ákvarðar fylkið $\mathbf{A}$ línulega vörpun

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$$

og $\mathbb{C}$-línulega vörpun

$$T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad \mathbf{z} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

Þá er ljóst að $\mathbb{C}$-línulega vörpunin T og fylkið A hafa sömu eigingildi, en eigingildi línulegu vörpunarinnar L eru nákvæmlega þau eigingildi fylkisisins $\mathbf{A}$ sem eru rauntölur.

20.3 Hornalínugeranleg fylki

Við gerum ráð fyrir að öll fylki séu með stuðla í $\mathbb{R}$ og öll vigurrúm séu $\mathbb{R}$-vigurrúm *nema annað sé skýrt tekið fram.*

Upprifjun
Hornalínufylki eru þau fylki nefnd, sem eru ferningsfylki og hafa núll í öllum sætum utan hornalínunnar.

Skilgreining 20.3.1
Ferningsfylki $\mathbf{A}$ er sagt **hornalínugeranlegt** (e. *diagonalizable*) ef til er hornalínufylki $\mathbf{D}$, sem er ámóta $\mathbf{A}$.

Setning 20.3.2

Látum $\mathbf{A}$ og $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ vera $n \times n$ fylki og

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:

(i) Fylkið $\mathbf{P}$ er andhverfanlegt og

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}.$$

(ii) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eru eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$, um sérhvert j gildir að $\mathbf{u}_j$ er eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$, sem tilheyrir eigingildinu λ_j, og vigrarnir $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ mynda grunn fyrir $\mathbb{R}^n$.

Athugasemdir

- Látum $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ og $\mathbf{P}$ vera eins og í setningu 20.3.2. Þá er $\mathbf{D}$ fylki línulegu vörpunarinnar

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$$

  miðað við raðgrunninn $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

- Setning 20.3.2 segir að $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt þá og því aðeins að til sé grunnur fyrir $\mathbb{R}^n$ þar sem allir grunnvigrarnir eru eiginvigrar fylkisins $\mathbf{A}$.

Skilgreining 20.3.3
Látum V vera endanlega vítt vigurrúm. Við segjum að línuleg vörpun

$$L : V \longrightarrow V$$

sé **hornalínugeranleg** (e. *diagonalizable*) ef til er raðgrunnur $\mathcal{B}$ fyrir V þannig að fylki vörpunarinnar L miðað við hann sé hornalínufylki.

Setning 20.3.4
Látum V vera endanlega vítt vigurrúm. Línuleg vörpun

$$L : V \longrightarrow V$$

er hornalínugeranleg ef og aðeins ef til er raðgrunnur $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ fyrir V og rauntölur (eigingildi) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ þannig að um öll j gildi

$$L(\mathbf{u}_j) = \lambda_j \mathbf{u}_j.$$

21. fyrirlestur 12. nóvember 2015 (Greinar 6.1 og 7.1 í bók)

Upprifjun

Við gerum ráð fyrir að öll fylki séu með stuðla í $\mathbb{R}$ og öll vigurrúm séu $\mathbb{R}$-vigurrúm *nema annað sé skýrt tekið fram.*

Látum $\mathbf{A}$ vera fylki í $\mathbb{R}^{n\times n}$.

- Látum $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tákna eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$. Þá kallast hlutrúmin $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}), \ldots, \mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})$ í $\mathbb{C}^n$ **eiginrúm** fylkisins $\mathbf{A}$.
- Fylkið $\mathbf{A}$ er sagt **hornalínugeranlegt** (e. *diagonalizable*) ef til er hornalínufylki $\mathbf{D}$, sem er ámóta $\mathbf{A}$.
- Setning 20.3.2 segir að $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt þá og því aðeins að til sé grunnur fyrir $\mathbb{R}^n$ þar sem allir grunnvigrarnir eru eiginvigrar fylkisins $\mathbf{A}$.

Meiri upprifjun

Látum V vera endanlega vítt vigurrúm og

$$L : V \longrightarrow V$$

vera línulega vörpun.

- Við segjum að línuleg vörpunin L sé **hornalínugeranleg** (e. *diagonalizable*) ef til er raðgrunnur $\mathcal{B}$ fyrir V þannig að fylki vörpunarinnar L miðað við hann sé hornalínufylki.
- Vörpunin L er hornalínugeranleg ef og aðeins ef til er raðgrunnur $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ fyrir V og rauntölur (eigingildi) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ þannig að um öll j gildi
$$L(\mathbf{u}_j) = \lambda_j\mathbf{u}_j.$$

21.1 Hornalínugeranleg fylki (framhald)

Setning 21.1.1
Látum V vera endanlega vítt vigurrúm og $L : V \longrightarrow V$ vera línulega vörpun. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild.

(i) Vörpunin L er hornalínugeranleg.

(ii) Fylki vörpunarinnar L miðað við sérhvern raðgrunn vigurrúmsins V er hornalínugeranlegt.

Athugasemd
Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki. Þá er fylkið $\mathbf{A}$ hornalínugeranlegt þá og því aðeins að línulega vörpunin

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$$

sé hornalínugeranleg.

Setning 21.1.2
Látum $T : V \to V$ vera línulega vörpun og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vera eiginvigra hennar. Ef eigingildin sem tilheyra þessum eiginvigrum eru tvö og tvö ólík þá eru þeir línulega óháðir.

Setning 21.1.3
Látum V vera n-vítt vigurrúm og $L : V \to V$ vera línulega vörpun. Gerum ráð fyrir að $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ séu eigingildi hennar og þau séu tvö og tvö ólík. Þá er línulega vörpunin L hornalínugeranleg.

Athugasemd.
Af setningunni leiðir að $n \times n$ fylki, sem hefur n innbyrðis ólík eigingildi, er hornalínugeranlegt.

Skilgreining 21.1.4
Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki og λ vera eigingildi þess.

(i) Margfeldni rótarinnar λ í kennimargliðunni $P_{\mathbf{A}}(t)$ er kölluð **algebruleg margfeldni** (e. *algebraic multiplicity*) eigingildisins λ.

(ii) Vídd hlutrúmsins $\mathrm{Null}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ í $\mathbb{R}^n$ kallast **rúmfræðileg margfeldni** (e. *geometric multiplicity*) eigingildisins λ.

Setning 21.1.5
Látum $\mathbf{A}$ vera ferningsfylki og λ vera eigingildi þess. Þá er rúmfræðileg margfeldni eigingildisins λ minni en eða jöfn algebrulegri margfeldni þess.

Setning 21.1.6
Ferningsfylki er hornalínugeranlegt þá og því aðeins að öll eigingildi fylkisins séu rauntölur og rúmfræðileg margfeldni sérhvers eigingildis sé jöfn algebrulegri margfeldni þess.

Reiknitækni.
Þegar við viljum reikna út veldi af hornalínugeranlegu $n \times n$ fylki $\mathbf{A}$, þá er eftirfarandi aðferð einkar heppileg. Veljum andhverfanlegt $n \times n$ fylki $\mathbf{P}$ þannig að fylkið $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ sé hornalínufylki. Þá er $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ og $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$. En mjög auðvelt er að reikna út fylkið $\mathbf{D}^k$:

$$\text{Ef } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ þá er } \mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

21.2 Innfeldisrúm

Látum V vera vigurrúm annað hvort yfir $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$.

Við skrifum tvinntölur á forminu $z = x + iy$ og munum að samoka tala tvinntölunnar z er tvinntalan $\bar{z} = x - iy$, sem fæst með því að spegla z um raunásinn.

Skilgreining 21.2.1
Innfeldi (e. *inner product*) á V er reikniaðgerð sem úthlutar sérhverjum tveimur vigrum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr V tölu, sem við táknum $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, og uppfyllir eftirtalin skilyrði:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ ef $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ á $\mathbb{C}$-vigurrúmum $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ á $\mathbb{R}$-vigurrúmum.

(iii) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

(iv) $\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Vigurrúm með gefnu innfeldi er nefnt **innfeldisrúm** (e. *inner product space*).

Dæmi

1. Depilmargfeldið á $\mathbb{R}^n$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

2. Depilmargfeldið á $\mathbb{C}^n$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n$.

3. Látum $V = C[a,b]$ tákna rúm allra samfelldra falla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ á bilinu $[a,b]$ og skilgreinum innfeldi tveggja falla f og g með

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Öll þessi dæmi gefa okkur innfeldi á vigurrúmunum sem nefnd eru.

Setning 21.2.2
Innfeldi fullnægja eftirfarandi skilyrðum:

(i) $\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

(iii) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$

$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ á $\mathbb{R}$-vigurrúmi

22. fyrirlestur 19. nóvember 2015 (Grein 7.1 í bók)

22.1 Innfeldisrúm(framhald)

Upprifjun
Innfeldi (e. *inner product*) á V er reikniaðgerð sem úthlutar sérhverjum tveimur vigrum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr V tölu, sem við táknum $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, og uppfyllir eftirtalin skilyrði:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ ef $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ á $\mathbb{C}$-vigurrúmum $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ á $\mathbb{R}$-vigurrúmum.

(iii) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

(iv) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Vigurrúm með gefnu innfeldi er nefnt **innfeldisrúm** (e. *inner product space*).

Skilgreining 22.1.1
Norm eða **staðall** eða **lengd** (e. *norm*, *length*) á vigurrúmi V er fall $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ á vigurrúminu sem uppfyllir eftirtalin skilyrði:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ fyrir öll $\mathbf{x}$ og $\|\mathbf{x}\| = 0$ aðeins ef $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ fyrir allar tölur α og öll $\mathbf{x} \in V$,

(iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Þríhyrningsójafnan)

Dæmi

1. Á $\mathbb{R}^n$ höfum við margs konar norm, þau helstu eru

   $$\|\mathbf{x}\|_p = \big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{og} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

   þar sem $1 \leq p < \infty$.

2. Á $\mathbb{C}^n$ höfum við norm sem skilgreind eru með nákvæmlega sömu formúlum og eru táknuð eins.

3. Á rúmi samfelldra falla $C[a,b]$ á bilinu $[a,b]$ skilgreinum við normið

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Setning 22.1.2
Látum $\langle\ ,\ \rangle$ vera innfeldi á vigurrúmi V og setjum, fyrir alla vigra $\mathbf{x}$ úr V,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}.$$

Þá er fallið $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ norm á V.
Þetta norm fullnægir ennfremur eftirfarandi skilyrðum fyrir öll $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr vigurrúminu

(i) (Cauchy-Schwarz-ójafna):

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

(ii) (Regla Pýþagórasar): Ef $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, þá gildir

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Þetta norm er oft nefnt **innfeldisnormið** á V.

Dæmi

1. Depilmargfeldinu á $\mathbb{R}^n$ tilheyrir normið

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Það kallast **evklíðska normið** (e. *the euclidean norm*) á $\mathbb{R}^n$.

2. Depilmargfeldinu á $\mathbb{C}^n$ tilheyrir normið

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

3. Innfeldinu sem við skilgreindum áður á vigurrúminu $V = C[a,b]$ tilheyrir normið

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Skilgreining 22.1.3
Vigurrúm með tilteknu normi (staðli) er kallað **normrúm** eða **staðalrúm** (e. *normed space*).

Skilgreining 22.1.4
Látum X vera mengi. Við segjum að fall $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sé **firð** eða **fjarlægð** ef það fullnægir eftirtöldum skilyrðum fyrir öll x, y og z úr X.

(i) $d(x, y) \geq 0$ og $d(x, y) = 0$ aðeins ef $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Mengi X með gefinni firð d er yfirleitt kallað **firðrúm**.

Setning 22.1.5
Látum V vera vigurrúm með normi $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$. Þá er fallið

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

sem skilgreint er með

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

firð á vigurrúminu V.

Skilgeining 22.1.6
Látum V vera innfeldisrúm.

(i) Tveir vigrar $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ úr V eru sagðir **innbyrðis hornréttir** (eða **þverstæðir**) (e. *mutually orthogonal*) ef

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Þetta er oft táknað $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

(ii) Hlutmengi S í V er sagt **hornrétt** (eða **þverstætt**) (e. *orthogonal*) ef $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ fyrir alla vigra $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ þannig að $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

(iii) Ef vigur $\mathbf{x}$ úr V er hornréttur á alla vigra í hlutmengi S í V, þá segjum við að $\mathbf{x}$ sé **hornréttur** (eða **þverstæður**) **á** S og skrifum $\mathbf{x} \perp S$.

Setning 22.1.7
Hornrétt hlutmengi í innfeldisrúmi, sem inniheldur ekki núllvigurinn, er línulega óháð.

Setning 22.1.8
Látum $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ vera vigra í innfeldisrúmi V og gerum ráð fyrir að $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Þá er til nákvæmlega einn vigur $\mathbf{p}$ sem hefur þá eiginleika að $\mathbf{p}$ er samsíða $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ er hornréttur á $\mathbf{y}$. Þessi vigur er gefinn með formúlunni

$$\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}.$$

Vigurinn $\mathbf{p}$ kallast **hornrétt ofanvarp** (e. *orthogonal projection*) vigursins $\mathbf{x}$ á vigurinn $\mathbf{y}$.

Skilgreining 22.1.9
Ef $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ eru vigrar í innfeldisrúmi V yfir $\mathbb{R}$, sem hvorugur er núll, þá skilgreinum við **hornið milli** (e. *angle between*) þeirra sem töluna

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right).$$

Skilgreining 22.1.10
Látum S vera hlutmengi í innfeldisrúmi V. Þá kallast hlutmengið

$$S^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{s},\ \mathbf{s} \in S\} = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp S\}$$

hornrétt fyllimengi (e. *orthogonal complement*) hlutmengisins S.

Setning 22.1.11
Látum S vera hlutmengi í innfeldisrúmi V. Þá gildir:

(i) $S^\perp = \mathrm{Span}(S)^\perp$.

(ii) $S^\perp$ er hlutrúm í V.

Setning 22.1.12
Um sérhvert $m \times n$ fylki $\mathbf{A}$ gildir

$$\mathrm{Null}(\mathbf{A}) = \mathrm{Row}(\mathbf{A})^\perp.$$

(Hér er innfeldisrúmið $\mathbb{R}^n$ með depilmargfeldinu.)

Setning 22.1.13
Látum V vera innfeldisrúm og U vera hlutrúm í V. Fyrir sérhvern vigur $\mathbf{x}$ úr V er til nákvæmlega einn vigur $\mathbf{p}$ sem uppfyllir skilyrðin

$$\mathbf{p} \in U \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} - \mathbf{p} \perp U.$$

Vigurinn $\mathbf{p}$ er yfirleitt táknaður $\mathrm{Proj}_U(\mathbf{x})$ og kallaður **hornrétta ofanvarpið af $\mathbf{x}$ á U**.

Skilgreining 22.1.14
Við segjum að hlutmengi S í innfeldisrúmi V sé **þverstaðlað** ef það er hornrétt og öll stök þess eru einingarvigrar.

Athugasemd
Ef $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ er upptalning af innbyrðis ólíkum vigrum úr þverstöðluðu hlutmengi í innfeldisrúmi, þá gildir

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Upptalningar eins og hér að ofan verða hér eftir kallaðar **þverstaðlaðar upptalningar**.

Setning 22.1.15
Ef $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ er þverstöðluð upptalning í innfeldisrúmi og $\mathbf{x}$ er úr spanni hennar, þá gildir

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle \, \mathbf{u}_j.$$

Skilgreining 22.1.16
Þverstöðluð upptalning í innfeldisrúmi V, sem spannar V, kallast **þverstaðlaður grunnur** fyrir V.

Athugasemd
Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera þverstaðlaðan raðgrunn fyrir innfeldisrúm V. Þá segir setning 21.1.4 að hnitavigur sérhvers vigurs $\mathbf{x}$ fáist samkvæmt formúlunni

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle).$$

Skilgreining 22.1.17

Fylki $\mathbf{U}$ úr $\mathbb{R}^{n \times n}$ er sagt **þverstaðlað** (e. *orthogonal*) ef dálkvigrar þess mynda þverstaðlaðan grunn fyrir $\mathbb{R}^n$.

Athugasemd
Fylki $\mathbf{U}$ úr $\mathbb{R}^{n \times n}$ er þverstaðlað þá og því aðeins að

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}_n.$$

Af þessu sést að fylki er þverstaðlað þá og því aðeins að línuvigrar þess myndi þverstaðlaðan grunn fyrir $\mathbb{R}^n$.

Setning 22.1.18
Látum U vera hlutrúm í innfeldisrúmi V og gerum ráð fyrir að $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sé þverstaðlaður raðgrunnur fyrir U. Þá gildir um alla vigra $\mathbf{x}$ úr V að

$$\mathrm{Proj}_U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \, \mathbf{u}_i.$$

Fyrirlestur 23. nóvember 2015 (Greinar 7.1-7.2 í bók)

23.1 Innfeldisrúm(framhald)

Skilgreining 23.1.1
Látum U og W vera hlutrúm í vigurrúmi V. Við segjum að vigurrúmið V sé **bein summa** hlutrúmanna U og W ef

$$V = U + W \qquad \text{og} \qquad U \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Athugasemd
Vigurrúmið V er bein summa hlutrúmanna U og W þá og því aðeins að sérhvern vigur $\mathbf{v}$ úr V sé unnt að skrifa *á nákvæmlega einn hátt* sem summu

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

þar sem $\mathbf{u} \in U$ og $\mathbf{w} \in W$.

Setning 23.1.2
Látum U og W vera hlutrúm í endanlega víðu vigurrúmi V. Ef V er bein summa hlutrúmanna U og W, þá gildir að

$$\text{Dim}(U) \ + \ \text{Dim}(W) \ = \ \text{Dim}(V).$$

Setning 23.1.3
Látum U og W vera hlutrúm í innfeldisrúmi. Ef $U \subseteq W$, þá $W^{\perp} \subseteq U^{\perp}$.

Setning 23.1.4
Látum U vera hlutrúm í endanlega víðu innfeldisrúmi V. Þá gildir:

(i) Vigurrúmið V er bein summa hlutrúmanna U og $U^{\perp}$.

(ii) $U = U^{\perp\perp}$

23.2 Þverstaða

Við setjum okkur að leysa eftirfarandi verkefni:

Út frá tilteknum raðgrunni $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ákveðins innfeldisrúms V ætlum við að búa til *þverstaðlaðan raðgrunn* $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ fyrir V.

Þetta er gert með þeim hætti að fyrir sérhvert $k = 1, \ldots, n$ verði $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ þverstöðluð upptalning og

$$\text{Span}(\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}) \ = \ \text{Span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}).$$

Reikniritið sem við notum er oftast nefnt **Gram-Schmidt-aðferð**.

Gram-Schmidt-aðferð
Látum $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vera raðgrunn fyrir innfeldisrúm V og setjum fyrir sérhvert $m = 1, \ldots, n$

$$V_m \;=\; \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}).$$

- Byrjum á að setja

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{w}}_1}{\|\tilde{\mathbf{w}}_1\|}$$

- Hugsum okkur nú að $k > 1$ og að vigrarnir $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1}$ hafi verið valdir þannig að $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1}\}$ sé þverstaðlaður raðgrunnur fyrir rúmið V_{k-1}. Setjum þá

$$\tilde{\mathbf{w}}_k = \mathbf{v}_k - \mathrm{Proj}_{V_{k-1}}(\mathbf{v}_k) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w}_k = \frac{\tilde{\mathbf{w}}_k}{\|\tilde{\mathbf{w}}_k\|}$$

- Ljóst er að $\mathbf{w}_k \perp V_{k-1}$ og þar sem $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ eru innbyrðis hornrétt-ir einingarvigrar þá er $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ þverstaðlaður raðgrunnur fyrir rúmið V_k.

- Þannig er haldið áfram þar til fengist hefur þverstaðlaður raðgrunnur $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ fyrir V.

Setning 23.2 .1
Sérhvert endanlega vítt innfeldisrúm hefur þverstaðlaðan raðgrunn.

Athugasemd
Gram-Schmidt-aðferðinni er einnig hægt að beita með því að reikna fyrst út vigrana $\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_n$ og staðla þá svo í lokin.

Setning 23.2 .2
Látum U vera hlutrúm í innfeldisrúmi V og $\mathbf{x} \in V$. Þá er $\mathrm{Proj}_U(\mathbf{x})$ sá vigur í U sem er í minnstri fjarlægð frá $\mathbf{x}$. Nánar til tekið gildir:

- Ef $\mathbf{u}$ úr U og $\mathbf{u} \neq \mathrm{Proj}_U(\mathbf{x})$, þá er

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{x} - \mathrm{Proj}_U(\mathbf{x})\|.$$

23.3 Aðferð minnstu fervika

Hugsum okkur að við höfum $m \times n$ línulegt jöfnuhneppi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sem er ósamkvæmt, þ.e.a.s. hefur enga lausn

Það jafngildir því að vigurinn $\mathbf{b}$ sé ekki í dálkrúmi fylkisins $\mathbf{A}$, með öðrum orðum $\mathbf{b} \notin \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Aðferð minnstu fervika felst í því að finna sem *besta nálgunarlausn* með tilliti til venjulegu fjarlægðarinnar í $\mathbb{R}^m$, með öðrum orðum að finna $\mathbf{x}$ úr $\mathbb{R}^n$ þannig að $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ verði minnst.

Við vitum að hornrétta ofanvarpið af $\mathbf{b}$ á dálkrúm fylkisins $\mathbf{A}$, þ.e.a.s. vigurinn

$$\mathbf{p} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$$

er sá vigur í dálkrúminu sem er næstur $\mathbf{b}$.
Sérhver lausn á jöfnuhneppinu $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ kallast **nálgunarlausn** (eða bara **lausn**) **minnstu fervika** (e. *least squares solution*) ósamkvæma jöfnuhneppisins $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Skilyrðin sem ákvarða hornrétta ofanvarpið $\mathbf{p}$ eru

$$\mathbf{p} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{p} \perp \mathrm{Col}(\mathbf{A}).$$

Skrifum nú $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$, þar sem $\mathbf{a}_j$ er j-ti dálkur fylkisins $\mathbf{A}$.
Fyrra skilyrðið segir að til er $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ þannig að $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ og það seinna að

$$\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Þessar n jöfnur má nú sameina í eina fylkjajöfnu

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{0}_n$$

þar sem $\mathbf{0}_n$ stendur fyrir núllvigurinn í $\mathbb{R}^n$.
Síðasta jafnan er jafngild jöfnunni

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

en hún er nefnd **staðaljafna** (e. *normal equation*) ósamkvæma jöfnuhneppisins $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og lausnir hennar eru lausnir minnstu fervika á jöfnuhneppinu.

Setning 23.3.1
Látum $\mathbf{A}$ vera $m \times n$ fylki og $\mathbf{b}$ vera vigur úr $\mathbb{R}^m$. Þá hefur línulega jöfnuhneppið

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

lausn og um sérhverja lausn $\mathbf{x}$ á þessu hneppi gildir að $\mathbf{Ax}$ er hornrétta ofanvarpið af $\mathbf{b}$ á dálkrúmið $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ og er þannig sá vigur í dálkrúminu sem næstur er $\mathbf{b}$.

Athugasemd
Ef dálkar fylkisins $\mathbf{A}$ eru línulega óháðir, þá hefur hneppið $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ nákvæmlega eina lausn og þar með hefur hneppið $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ nákvæmlega eina lausn. Það þýðir að $n \times n$ fylkið $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ er andhverfanlegt og umrædd lausn er gefin með formúlunni

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Af því leiðir að ofanvarp $\mathbf{b}$ á dálkrúm fylkisins $\mathbf{A}$ er gefið með

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Setning 23.3.2
Látum V vera hlutrúm í $\mathbb{R}^m$ með grunn $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ og setjum $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$. Þá er fylkið $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ andhverfanlegt og hornrétta ofanvarpið

$$\mathrm{Proj}_V : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathrm{Proj}_V(\mathbf{x})$$

er gefið með fylkinu $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ (miðað við venjulega raðgrunninn í $\mathbb{R}^m$).

Þetta fylki er oft nefnt **ofanvarpsfylki** hlutrúmsins V.

Athugasemdir

- Ef hlutrúmið V í setningu 23.3.2 er lína, sem er spönnuð af vigri $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, þá er ofanvarpsfylki þess

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

- Ef raðgrunnurinn $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ í setningu 23.3.2 er þverstaðlaður, þá er $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ og ofanvarpsfylkið verður einfaldlega

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T.$$

  Ef vigurinn í síðustu athugasemd er einingarvigur, þá verður ofanvarpsfylkið einfaldlega

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

  í því tilfelli.

23.4 Jafna bestu línu

Látum $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ vera safn punkta í plani og hugsum okkur að við viljum finna þá línu sem fellur best að punktasafninu.

Við vitum að sérhver lína sem ekki er lóðrétt er graf falls f af gerðinni

$$f(x) = c_1 + c_2 x.$$

Þegar við segjumst vilja finna línuna sem best fellur að punktasafninu, þá meinum við að stuðlarnir c_1 og c_2 eigi að veljast þannig að ferningssumman

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - f(x_i)\big)^2 = \sum_{i=1}^{m} \big(y_i - c_1 - c_2 x_i\big)^2$$

verði sem minnst.

Við skilgreinum nú fylkið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}.$$

og sjáum að summan hér að framan er

$$\sum_{i=1}^{m} \big(y_i - c_1 - c_2 x_i\big)^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|^2.$$

Lausnin sem við leitum að er því vigurinn $\mathbf{c}$ sem gefur lausn minnstu fervika með formúlunni

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}.$$

24. fyrirlestur 26. nóvember 2015 (Grein 8.1 í bók)

24.1 Rófsetning fyrir samhverf rauntalnafylki

Upprifjun

- Ferningsfylki $\mathbf{A}$ er sagt *samhverft* ef $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

- Fylki $\mathbf{U}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ er sagt *þverstaðlað* ef dálkar þess mynda þverstaðlaðan grunn fyrir $\mathbb{R}^n$, en það er jafngilt því að $\mathbf{U}$ sé andhverfanlegt og andhverfa þess sé bylta fylkið $\mathbf{U}^T$.

Setning 24.1.1
Látum $\mathbf{A}$ vera *samhverft* $n \times n$ fylki með rauntalnastuðlum. Þá eru öll eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ rauntölur og til er þverstaðlað fylki $\mathbf{U}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$, sem hefur þann eiginleika að
$$\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$$
þar sem $\mathbf{D}$ er hornalínufylki úr $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Athugasemd
Setninguna má einnig orða svo að um sérhvert samhverft fylki $\mathbf{A}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ gildi:

- Til er þverstaðlaður grunnur fyrir $\mathbb{R}^n$ þar sem allir vigrarnir eru eiginvigrar fylkisins $\mathbf{A}$.