Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

Línuleg algebra A

Lausnir á skilaverkefni 10

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3, 4 og 5 af vikublaði 12)

13. nóvember 2015

Dæmi 1. (Úr lokaprófi 2014) Setjum $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

(i) Finnið eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

(ii) Finnið grunn fyrir sérhvert af eiginrúmum fylkisins $\mathbf{A}$.

(iii) Gerið grein fyrir að fylkið $\mathbf{A}$ sé hornalínugeranlegt.

(iv) Finnið rauntölur a og b sem uppfylla skilyrðið

$$\mathbf{A}^{103} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Lausn. (i) $\mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 3-t & 2 \\ 6 & -1-t \end{bmatrix} = (3-t)(-1-t) - 12 = (t-5)(t+3)$ svo að eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru tölurnar -3 og 5.

(ii) Eiginrúm eigingildisins -3 er hlutrúmið $\mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, sem hefur grunninn $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$.

Eiginrúm eigingildisins 5 er hlutrúmið $\mathrm{Null}\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, sem hefur grunninn $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(iii) Eiginvigrarnir $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ mynda grunn fyrir $\mathbb{R}^2$ svo að $\mathbf{A}$ er hornalínugeranlegt.

(iv) Tökum eftir að $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Af því leiðir að

$$\mathbf{A}^{103} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{103} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{103} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3)^{103} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 5^{103} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^{103} + 5^{103} \\ 3^{104} + 5^{103} \end{bmatrix}.$$

Við fáum þar með $a = 5^{103} - 3^{103}$ og $b = 5^{103} + 3^{104}$.

Dæmi 2. Sýnið fyrst að fylkin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hafi sömu kennimargliðu og gerið síðan grein fyrir að annað þeirra sé hornalínugeranlegt en hitt ekki.

Lausn. Við eftirlátum lesendum að ganga úr skugga um að

$$P_{\mathbf{A}}(t) = P_{\mathbf{B}}(t) = -(t-2)(t-1)^2.$$

Við sjáum að algebruleg margfeldni eigingildisins 2 er einn en algebruleg margfeldni eigingildisins 1 er tveir.

Reiknum fyrst út rúmfræðilega margfeldni eigingildisins 1 fyrir fylkið $\mathbf{A}$. Einfaldir útreikningar sýna að fylkið

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og út frá því sjáum við að $\mathrm{Rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1$ og þar með fæst:

(Rúmfræðileg margfeldni eigingildisins 1 fyrir fylkið $\mathbf{A}$) $=$ $\mathrm{Dim}(\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))$ $=$ $3 - \mathrm{Rank}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 3 - 1 = 2$. Þar með er fylkið $\mathbf{A}$ hornalínugeranlegt samkvæmt setningu 21.1.6.

Reiknum nú út rúmfræðilega margfeldni eigingildisins 1 fyrir fylkið $\mathbf{B}$. Einfaldir útreikningar sýna að fylkið

$$\mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

er línujafngilt fylkinu $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og út frá því sjáum við að $\mathrm{Rank}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 2$ og þar með fæst:

(Rúmfræðileg margfeldni eigingildisins 1 fyrir fylkið $\mathbf{B}$) $=$ $\mathrm{Dim}(\mathrm{Null}(\mathbf{B} - \mathbf{I}))$ $=$ $3 - \mathrm{Rank}(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = 3 - 2 = 1$. Þar með er fylkið $\mathbf{B}$ ekki hornalínugeranlegt samkvæmt setningu 21.1.6.

Dæmi. 3. [Úr prófi vorið 2003]
Segið til um hvort fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

er hornalínugeranlegt.

Lausn. Fylkið er hornalínugeranlegt þá og því aðeins hægt sé að finna grunn fyrir $\mathbb{R}^2$ þar sem vigarnir eru eiginvigrar fylkisins.

Kennimargliða fylkisins $\mathbf{A}$ er

$$P_{\mathbf{A}}(t) = \operatorname{Det}(\mathbf{A} - tI) = \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 5-t & 1 \\ 0 & 5-t \end{bmatrix} = (5-t)^2$$

og kenniafnan $P_{\mathbf{A}}(t) = 0$ hefur bara lausnina $t = 5$, sem er þá eina eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

Eiginrúm eigingildisins er núllrúm fylkisins $\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, en það er greinilega spannað af vigrinum $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Þar með er ljóst að ekki er unnt að finna tvo línulega óháða eiginvigra fylkisins $\mathbf{A}$. Fylkið er því ekki hornalínugeranlegt.

Athugasemd. Rúmfræðileg margfeldni eigingildisins 5 er einn, en algebruleg margfeldni þess er tveir.

Dæmi 4. Gerið grein fyrir að fylkið

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

sé hornalínugeranlegt. Finnið síðan andhverfanlegt fylki $\mathbf{P}$ sem hefur þann eiginleika að $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ er hornalínufylki.

Lausn. Finnum eigingildi A. Kennimargliða fylkisins er

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(A - \lambda I) &= \operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 16-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-3-\lambda)\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & 16-\lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(liðun eftir neðstu línu)} \\
&= (-3-\lambda)\big((1-\lambda)(16-\lambda) - 16\big) \\
&= (-3-\lambda)(\lambda^2 - 17\lambda) \\
&= (-3-\lambda)(\lambda - 17)\lambda.
\end{aligned}$$

Eigingildin eru $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = -3$ og $\lambda_3 = 0$. Samkvæmt setningu 19.1.7 er fylkið hornalínugeranlegt þar sem það hefur þrjú innbyrðis ólík eigingildi. Finnum nú tilheyrandi eiginrúm.

Eiginrúmið sem tilheyrir eigingildinu 17 er núllrúm fylkisins

$$\begin{bmatrix} -16 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

en fljótséð er að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ spannar það.

Eiginrúmið sem tilheyrir eigingildinu 0 er núllrúm fylkisins $\mathbf{A}$ en fljótséð er að vigurinn $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ spannar það.

Eiginrúmið sem tilheyrir eigingildinu -3 er núllrúm fylkisins

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 19 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en fljótséð er að vigurinn $\begin{bmatrix} -29 \\ -14 \\ 30 \end{bmatrix}$ spannar það.

Setjum nú $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -29 \\ -4 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$ og fáum

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 5.

(a) Er hlutmengið

$$S = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k} \ ; \ \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{O}\}$$

hlutrúm í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times k}$?

(b) Er hlutmengið

$$S = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \ ; \ \mathrm{Det}(\mathbf{A} + k\mathbf{I}) = 0, \quad \text{fyrir } k = 1, 2, 3\ldots\}$$

hlutrúm í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times n}$?

(c) Látum $C[-1,1]$ tákna vigurrúm allra samfelldra falla á bilinu $[-1,1]$. Er hlutmengið

$$S = \{f \in C[-1,1] \ ; \ f^{-1}[\{0\}] = \{0\}\}$$

hlutrúm í $C[-1,1]$?

Lausn. (a) Tökum eitthvert fylki $\mathbf{A}$ úr S og táknum línur þess $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$. Þá hefur $n \times n$ fylkið $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ stökin $\|\mathbf{r}_1\|^2, \ldots, \|\mathbf{r}_n\|^2$ á hornalínunni og þau eru öll núll vegna þess að $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{O}$. Þar með er $\mathbf{A}$ núllfylkið. Af þessu sést að $S = \{\mathbf{O}\}$ svo vissulega er S hlutrúm í vigurrúminu $\mathbb{R}^{n\times k}$.

(b) Núllfylkið er ekki í S, svo að S er ekki hlutrúm. (Reyndar er $S = \emptyset$.)

(c) Núllfallið er ekki í S svo að S er ekki hlutrúm.