Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

STÆ106G - Línuleg algebra A

Vikublað 14

19. nóvember 2015

Ég minni ykkur á að lesa hi-póstinn ykkar reglulega (minnst einu sinni á dag).

Dæmi fyrir dæmatíma 23.11. - 27.11.

- Dæmi 1, 2, 3, 4 og 5 hér að neðan
- **7.1** : 3, 14, 24, 39, 43, 49, 51, 55, 57, 59, 62, 70, 79
- **7.2** : 1, 2, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 20

Dæmi 1. Látum W vera núllrúm fylkisins

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Finnið fylki línulegu vörpunarinnar

$$\mathrm{Proj}_W : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \qquad (x, y, z, w) \mapsto \mathrm{Proj}_W(x, y, z, w).$$

(b) Finnið $\mathrm{Proj}_W(1, 2, 3, 9)$

(c) Gerið grein fyrir að vörpunin Proj_W sé hornalínugeranleg og finnið eigingildi hennar.

Dæmi 2. Við skilgreinum **speglun um sléttu** í $\mathbb{R}^3$ á eftirfarandi hátt:

Látum V vera sléttu sem fer í gegnum núllpunktinn í $\mathbb{R}^3$, með öðrum orðum er V tvívítt hlutrúm í $\mathbb{R}^3$. Fyrir sérhvern vigur $\mathbf{x}$ í $\mathbb{R}^3$ er unnt að rita á nákvæmlega einn hátt

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_V + \mathbf{x}_{V^\perp}$$

þar sem $\mathbf{x}_V \in V$ og $\mathbf{x}_{V^\perp} \in V^\perp$. **Speglun um** V er þá vörpunin $S_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sem er skilgreind með

$$S_V(\mathbf{x}_V + \mathbf{x}_{V^\perp}) = \mathbf{x}_V - \mathbf{x}_{V^\perp}.$$

(a) Sýnið að $S_V = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2 \cdot \mathrm{Proj}_{V^\perp}$ og ályktið út frá því að S_V sé línuleg vörpun.

(b) Finnið eigingildi vörpunarinnar S_V og gerið grein fyrir að hún sé hornalínugeranleg.

(c) Finnið venjulega fylkið fyrir S_V þegar V er sléttan sem gefin er með jöfnunni

$$x - y + z = 0.$$

Dæmi 3. Látum V vera vigurrúm allra vigra í xy-sléttunni í $\mathbb{R}^3$, þ.e.

$$V = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sýnið að $\mathbb{R}^3$ sé bein summa hlutrúmanna V og W í eftirfarandi tilfellum.

(a) $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$.

(b) $W = \{(z, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Dæmi 4. Finnið þverstætt fyllirúm eftirtalinna hlutmengja. í $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 0\}$.

(b) $M = \{\mathbf{0}\}$ í einhverju innfeldisrúmi V.

(c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ og } y + z = 0\}$.

Dæmi 5. Setjum

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\}.$$

Berum saman tvær aðferðir til að finna hornrétt ofanvarp vigurs á hlutrúmið U.

(a) Finnið grunn fyrir U.

(b) Finnið $U^\perp$ og grunn fyrir $U^\perp$.

(c) Búið til grunninn $\mathcal{B}$ með því að taka saman grunnana fyrir U og $U^\perp$. Finnið síðan hnitavigurinn $[(1, 1, 2)]_{\mathcal{B}}$ og notið hann til að finna ofanvarp vigursins $(1, 1, 2)$ á U.

(d) Finnið ofanvarp vigursins $(1, 1, 2)$ á U með því að nota fylki ofanvarpsins Proj_U.

(e) Hvaða fleiri leiðir koma til greina?

Jón Ingólfur Magnússon