Háskóli Íslands **Raunvísindadeild**

LÍNULEG ALGEBRA A

Lausnir á skilaverkefni 9

(Lausnir á dæmum 1, 2, 3 og 4 af vikublaði 11)

12. nóvember 2015

Dæmi 1. **(Úr lokaprófi 2014)** Látum $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ vera raðgrunn fyrir vigurrúm V.

(a) Hvað merkir að fylki $\mathbf{A}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ sé fylki línulegrar vörpunar $T : V \to V$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$?

(b) Látum $\mathcal{C}$ vera annan raðgrunn fyrir V. Hvað merkir að fylki $\mathbf{P}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ sé hnitaskiptafylkið frá raðgrunninum $\mathcal{B}$ til raðgrunnsins $\mathcal{C}$?

Setjum nú $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ og látum

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vera línulegu vörpunina sem gefin er með $T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$.

(c) Gerið grein fyrir að $\mathcal{B}$ sé grunnur fyrir $\mathbb{R}^3$.

(d) Finnið hnitaskiptafylkið frá raðgrunninum $\mathcal{B}$ til staðlaða raðgrunnsins fyrir $\mathbb{R}^3$.

(e) Finnið fylki línulegu vörpunarinnar T miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$.

LAUSN. (a) Að segja að $\mathbf{A}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ sé fylki línulegrar vörpunar $T : V \to V$ miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$ þýðir að um alla vigra $\mathbf{v}$ úr V gildi

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}.$$

(b) Að segja að fylki $\mathbf{P}$ úr $\mathbb{R}^{n\times n}$ sé hnitaskiptafylkið frá raðgrunninum $\mathcal{B}$ til raðgrunnsins $\mathcal{C}$ þýðir að um alla vigra $\mathbf{v}$ úr V gildi

$$\mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}. \qquad (*)$$

Þó ekki sé beðið um það í dæminu skulum við rifja upp hvernig þetta fylki er reiknað út:

Látum $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vera staðlaða raðgrunninn fyrir $\mathbb{R}^n$. Þá fæst út frá (*) hér að ofan

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{P}\mathbf{e}_n] = [\mathbf{P}[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}} \cdots \mathbf{P}[\mathbf{u}_n]_{\mathcal{B}}] = [[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{u}_n]_{\mathcal{C}}]$$

(c) Okkur nægir að sýna að fylkið $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ hafi metorð 3. Með því að

framkvæma línuaðgerðirnar $L_2 \to L_2 - L_1$ og $L_3 \to L_3 - L_1$ fáum við fylkið

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, sem hefur metorð 3, og af því sést að umræddir þrír vigrar mynda grunn fyrir $\mathbb{R}^3$.

(d) Það er fylkið $\mathbf{P}$ úr lið (c). (Sjá útskýringarnar í lið (b))

(e) Setjum $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Samkvæmt lið (a) viljum við finna fylkið $\mathbf{A}$, sem uppfyllir skilyrðið

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}.$$

fyrir alla vigra $\mathbf{v}$ úr $\mathbb{R}^3$. Við fáum því

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}\mathbf{e}_1\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3] = [\mathbf{A}[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}\ \mathbf{A}[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}}\ \mathbf{A}[\mathbf{u}_3]_{\mathcal{B}}] = [[T(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

Nú er $T(\mathbf{u}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og á sama hátt fáum við $T(\mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $T(\mathbf{u}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Fyrir $j = 1, 2, 3$ gildir að vigurinn $[T(\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{B}}$ er lausn á línulega jöfnuhneppinu

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = T(\mathbf{u}_j).$$

Við þurfum því að leysa þrjú línuleg jöfnuhneppi sem öll hafa sama stuðlafylkið $\mathbf{P}$ og við getum því leyst þau samtímis með því að beita Gauss-Jordan-eyðingu á aukna fylkið

$$[\mathbf{P} \mid T(\mathbf{u}_1)\ T(\mathbf{u}_2)\ T(\mathbf{u}_3)] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

og fáum þá

$$[\mathbf{I} \mid [T(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{B}}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Fylki línulegu vörpunarinnar T miðað við raðgrunninn $\mathcal{B}$ er því $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Dæmi 2. Finnið allar tvinntölur z_1, z_2, z_3, z_4, sem uppfylla jöfnuhneppið

$$\begin{array}{ccccccccc} z_1 & + & iz_2 & + & z_3 & - & z_4 & = & 0 \\ z_1 & & & + & (1+i)z_3 & + & z_4 & = & 0. \end{array}$$

Lausn. Ef við drögum fyrstu línu frá annari línu fáum við hneppið

$$\begin{array}{ccccccccc} z_1 & + & iz_2 & + & z_3 & - & z_4 & = & 0 \\ & - & iz_2 & + & iz_3 & + & 2z_4 & = & 0 \end{array}$$

og með aftur-á-bak innsetningu fáum við þá (z_3 og z_4 frjálsar) að $z_2 = z_3 - 2iz_4$ og $z_1 = -iz_2 - z_3 + z_4 = -(1+i)z_3 - z_4$. Láusnamengi hneppisins er því

$$\left\{ u \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -1 \\ -2i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid u, w \in \mathbb{C} \right\}$$

Dæmi. 3. Útskýrið eftirfarandi hugtök.

(a) Eigingildi ferningsfylkis.

(b) Kennimargliða ferningsfylkis.

(c) Eiginvigur ferningsfylkis.

(d) Eiginrúm ferningsfylkis.

Setjum nú $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) Finnið kennimargliðu fylkisins $\mathbf{A}$.

(f) Finnið eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$.

(g) Finnið eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(h) Finnið grunna fyrir eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

Lausn. Látum $\mathbf{A}$ vera $n \times n$ fylki.

(a) Tvinntala λ er eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ ef jafnan $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}$ hefur fleiri lausnir en augljósu lausnina $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ í $\mathbb{C}^n$.

(b) Margliðan $p_{\mathbf{A}}(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I})$ kallast kennimargliða fylkisins $\mathbf{A}$.

(c) Við segjum að vigur $\mathbf{w}$ úr $\mathbb{C}^n$ sé eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ ef hann er *ekki núll* og uppfyllir jöfnu af gerðinni

$$\mathbf{Aw} = \lambda\mathbf{w}$$

þar sem λ er tvinntala.

(d) Látum $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vera upptalningu á eigingildum fylkisins $\mathbf{A}$, þá kallast hlutrúmin $\mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}), \ldots, \mathrm{Null}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})$ í $\mathbb{C}^n$ eiginrúm fylkisins $\mathbf{A}$.

(e) Kennimargliðan er

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - t\mathbf{I}) = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 2 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2(3-t).$$

(Ákveðan reiknuð með liðun eftir þriðja dálki.)

(f) Eigingildi fylkisins $\mathbf{A}$ eru rætur kennimargliðunnar $p_{\mathbf{A}}(t) = (1-t)^2(3-t)$, en þær eru tölurnar 1 og 3.

(Takið eftir að eigingildið 1 hefur algebrulega margfeldni tvo, en eigingildið 3 hefur algebrulega margfeldni einn.)

(g) Eiginrúm eigingildisins 1 er hlutrúmið $\text{Null}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$ í $\mathbb{R}^3$ og með Gauss-eyðingu og aftur-á-bak innsetningu er fljótséð að

$$\text{Null}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Eiginrúm eigingildisins 3 er hlutrúmið $\text{Null}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right)$ og með Gauss-eyðingu og aftur-á-bak innsetningu er fljótséð að

$$\text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

(h) Ljóst er að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ myndar grunn fyrir eiginrúm eigingildisins 3 og vigrarnir $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mynda grunn fyrir eiginrúm eigingildisins 1 vegna þess að þeir eru línulega óháðir.

Dæmi 4.

(a) Sýnið að vigrarnir $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ séu allir eiginvigrar fylkisins

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ og finnið eigingildin, sem tilheyra þeim.

(b) Skrifið vigurinn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sem línulega samantekt af eiginvigrunum þremur og

notið það til þess að reikna út vigurinn $\mathbf{A}^{13}\mathbf{v}$.

Lausn. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ svo að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ og tilheyrandi eigingildi er talan 6.

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ svo að vigurinn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ og tilheyrandi eigingildi er talan -3.

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ svo að vigurinn $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er eiginvigur fylkisins $\mathbf{A}$ og tilheyrandi eigingildi er talan 0.

(b) Tökum fyrst aftir að almennt gildir: Ef $\mathbf{w}$ er eiginvigur ferningsfylkis $\mathbf{B}$ og tilheyrandi eigingildi er λ, þá gildir um allar heilar tölur $k \geq 1$, að

$$\mathbf{B}^k\mathbf{w} = \lambda^k\mathbf{w}.$$

Þetta sést með einfaldri þrepun, því ef fullyrðingin er rétt fyrir töluna k þá fæst

$$\mathbf{B}^{k+1}\mathbf{w} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^k\mathbf{w}) = \mathbf{B}(\lambda^k\mathbf{w}) = \lambda^k\mathbf{B}\mathbf{w} = \lambda^k\lambda\mathbf{w} = \lambda^{k+1}\mathbf{w}.$$

Nú er fljótséð að $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og af því leiðir

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{13} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (-3)^{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)^{13} \\ 0 \\ (-3)^{13} \end{bmatrix}.$$