Première partie
Enoncés des exercices

1 Nombres réels

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$

Exercice 2
1. Montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.
2. Montrer qu' un entier naturel q tel que q^2 soit un multiple de 3 est aussi un multiple de 3. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$. Montrer que $a=b=c=0$.

Exercice 3.
1. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $x+y \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $xy \notin \mathbb{Q}$.
3. La somme de deux nombres irrationnels est -il toujours un nombre irrationnel ? Même question pour le produit.

Exercice 4 . Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$|x+1| < \dfrac{5}{2}$ et $\sqrt{x^2+x-2} > 1+\dfrac{x}{2}$

Exercice 5. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :
$\mathbf{A}=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $\mathbf{B}=]0,1[\cap\mathbb{Q}$, $\mathbf{C}=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n^2} \;/\; n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 6. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note
$A+B=\{a+b \;/\; a\in A, b\in B\}$
1. Montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Exercice 7. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$.
Répondre en justifiant par Vrai ou faux
1. $A\subset B \Rightarrow \sup A \le \sup B$,
2. $A\subset B \Rightarrow \inf A \le \inf B$,
3. $\sup(-A) = -\inf A$;
4. $\sup A+\inf B \le \sup(A+B)$.

Exercice 8 Soient a et b deux nombres réels donnés. Démontrer les équivalences :
1. $a\le b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0 \,, a\le b+\varepsilon)$
2. $a=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0 \,, |a|\le\varepsilon)$.

Exercice 9. Soit $n\in\mathbb{N}$.
1. Montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2=a_n^2-1$.

2. Montrer que la partie entière de $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.

Exercice 10.
1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a l'encadrement :
$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-.\sqrt{n-1})$
2. En déduire un encadrement de la somme $\sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$
3. Quelle est la partie entière de $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+....+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$?

Exercice 11. Montrer que
i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$..
ii) $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}, E(-x)=-E(x)-1$.
iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, E(x+a)=E(x)+a$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $E(\dfrac{E(nx)}{n})=E(x)$.

Exercice 13
1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$E(x)+E(-x)=-1 \text{ si } x \notin Z \text{et } E(x)+E(-x)=0 \text{ si } x \in Z.$$
2. En déduire que si p et q sont deux entiers naturels premier entre eux alors :
$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 14. Montrer que l'ensemble $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Suites numériques

Exercice 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier la convergence de la suite (w_n) définie par $w_n=\max(u_n, v_n)$.

Exercice 2. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 3.
Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 4. Soit (u_n) une suite qui tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
1. Montrer que si $l=\pm\infty$, alors $(E(u_n))$ tend vers l.
On suppose dans la suite que $l \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $l \notin \mathbb{Z}$, alors $(E(u_n))$converge vers $E(l)$.
3. On suppose que $l \in \mathbb{Z}$.
a) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq l$, alors $(E(u_n))$converge vers l.
b) On suppose qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow u_n < l$, alors $(E(u_n))$converge vers $l-1$.

c) On suppose que a) et b) ne sont pas réalisées, c'est à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq N$ et $n_1 \geq N$ tel que $u_{n_0} < l$ et $u_{n_0} \geq l$. Montrer que la suite $(E(u_n))$ est divergente.

Exercice 5. Moyenne de Cesaro :
Soient (u_n) une suite réelle et (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{u_1 + ... + u_n}{n}$
1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers un réel l, la suite (v_n) converge et a pour limite l. A t'on la réciproque ?
2. Montrer que si la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) est bornée. A t'on la réciproque ?
3. Montrer que si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) l'est aussi.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

1. Montrer que si $l < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $l > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
3. Montrer que si $l = 1$, On ne peut rien conclure.

Exercice 7. Déterminer si elle existent les limites des suites suivantes
a) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$, b) $u_n = \sqrt[n]{n}$, c) $u_n = \sqrt[n]{n!}$,
d) $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ et e) $u_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$.

Exercice 8. Etudier la convergence des suites (u_n) définies par :
i) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, iii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Exercice 9. Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n}$$

$$v_n = 2^{n+1} \tan \frac{\theta}{2^n}$$

sont adjacentes. Calculer leur limite.

Exercice 10. *Moyenne arithmico-géometrique :*
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
1. Montrer que ces suites sont bien définies
2. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a, b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b
3.Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$.
4. Montrer que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.
Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.
En déduire que (u_n) converge.

Exercice 12. Justifier que la suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$ diverge.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 14. Soient $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n \times n!}$.
1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $u_q < e < v_q$ et en déduire une contradiction.

Exercice 15.
Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$: $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de (H_n).
4. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante .
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 16. Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.
1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 17. Soit $a > 0$. On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.
1. Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{4u_n^2}$.
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_n - \sqrt{a})(u_n + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Supposons que $u_1 - \sqrt{a} \leq k$, montrer que pour $n \geq 1$:

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

.
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 18. Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ supposée continue et une suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \quad et \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que (u_n) est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. Application. Calculer la limite de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \quad et \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 5}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

3. On suppose maintenant que f est décroissante. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.

4. Application. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \quad et \\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Calculer les limites des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

3 Continuité et dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xE\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

Exercice 2
Soit f une fonction croissante définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.
1. Montrer que s'il existe $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f.
b) Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
1. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.
2. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 4. Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 5
1. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.
3. Donner un exemple de fonction continue $g :]0,1[\to]0,1[$ qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 7. Montrer que le polynôme défini par $P_n(x) = x^n + ax + b$,(a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 8
1. Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=n+1}^{kn} \dfrac{1}{p}$.

Exercice 9
Soient x et y deux réels avec $0 < x < y$.
1. Montrer que $x < \dfrac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$.
2. En étudiant la fonction f définie sur $[0,1]$ par $\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln(x) - (1-\alpha)\ln(y)$, montrer que
$\alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln(y) < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y)$.
Donner une interprétation géométrique.

Exercice 10. Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction f définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sur l'intervalle $[a,b]$ préciser le nombre "c" de $[a,b]$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction définie continue telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 12.
Soit $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.
Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur son image, que l'on déterminera. Expliciter la bijection réciproque.

Exercice 13.
Etablir les relations

$$\begin{aligned}
\arccos(x)+\arcsin(x) &= \frac{\pi}{2};\\
\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad x\neq 0;\\
\cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\\
\sin(\arctan x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et}\\
\sin(2\ \arcsin x) &= 2x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Exercice 14.
Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hospital après avoir vérifié sa validité :
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2ch^2x-sh(2x)}{x-\ln(chx)-\ln(2)}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Deuxième partie

Corrigés des exercices

4 Nombres réels

Exercice 1.
Montrons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.
Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2}-\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}-\sqrt{3}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.
Or $\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right)$
On aurait donc aussi $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

Exercice 2
1. Montrons que$\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.
Supposons que $\sqrt{6}=\dfrac{p}{q}, q\neq 0$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux. On a alors $p^2=6q^2$. Par conséquent, p^2 est pair, donc p l'est aussi et ainsi $p=2k$. D'où $p^2=4k^2=6q^2$ et $2k^2=3q^2$. Par suite q est pair. Ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

2. Supposons que q^2 soit un multiple de 3 et q n'est pas un multiple de 3.
On a alors $q=3k+1$ ou $q=3k+2$.
Si $q=3k+1$, alors $q^2=9k^2+6k+1=3\left(3k^2+2k\right)+1$. Donc q^2 ne serait pas un multiple de 3.

Si $q=3k+2$, alors $q^2=9k^2+12k+4=3\left(3k^2+4k+1\right)+1$. Donc q^2 ne serait pas un multiple de 3.

Application
Supposons que $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}, q\neq 0$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$,p et q premiers entre eux. Alors $3q^2=p^2$ et donc p^2 est un multiple de 3 et donc p est aussi un multiple de 3, c'est à dire $p=3k$. D'où $p^2=9k^2=3q^2$, donc $q^2=3k$.
Par suite q est un multiple de 3 . Ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

3. Supposons que a, b et c trois entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$ et $a\neq 0, b\neq 0$ ou $c\neq 0$.
On a $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Rightarrow a=-b\sqrt{2}-c\sqrt{3}\Rightarrow a^2=2b^2+2bc\sqrt{6}+3c^2\Rightarrow a^2-2b^2-3c^2=2bc\sqrt{6}$.

■ Si $b\neq 0$ et $c\neq 0$ alors $\sqrt{6}=\dfrac{a^2-2b^2-3c^2}{2bc}$.
Ce qui n'est pas possible car $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$ et $\dfrac{a^2-2b^2-3c^2}{2bc}\in\mathbb{Q}$.

■ Si $b=0$ et $c\neq 0$ alors $a-c\sqrt{3}=0$, d'où $\sqrt{3}=\dfrac{a}{c}$
Ce qui n'est pas possible car $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ et $\dfrac{a}{c}\in\mathbb{Q}$.

■ De même si $b\neq 0$ et $c=0$ alors $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$
Ce qui n'est pas possible car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$.

Par conséquent $b=0$ et $c=0$. Par suite $a=0$.

Exercice 3.
1. Montrons que si $x\in\mathbb{Q}$ et $y\notin\mathbb{Q}$, alors que $x+y\notin\mathbb{Q}$.
Soit $x\in\mathbb{Q}$ et $y\notin\mathbb{Q}$. Par l'absurde : Si $z=x+y\in\mathbb{Q}$, alors par différence de deux nombres rationnels $y=z-x\in\mathbb{Q}$
Or y est irrationnel donc $x+y\notin\mathbb{Q}$.

2. Montrons que si $x\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et $y\notin\mathbb{Q}$, alors que $xy\notin\mathbb{Q}$.
Soit $x\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et $y\notin\mathbb{Q}$. Par l'absurde : Si $z=xy\in\mathbb{Q}$, alors par quotient de deux nombres rationnels $y=\dfrac{z}{x}\in\mathbb{Q}$
Or y est irrationnel $xy\notin\mathbb{Q}$.

3. La somme et le produit de deux nombres irrationnels ne sont pas toujours un nombre irrationnel.
Exemple : $x=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ et $y=-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ alors que $x+y=0\in\mathbb{Q}$ et $xy=-2\in\mathbb{Q}$.

Exercice 4 . On a
$|x+1|<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{5}{2}<x+1<\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}<x<3\Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{3}{2},3\right[$.

$$\sqrt{x^2+x-2}>1+\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+x-2>\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\\ x^2+x-2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+x-2>\frac{x^2}{4}+x+1\\ x^2+x-2>0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2-4>0 \\ x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\\ x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in x \in \left]-\infty,-2\right[\cup$ $\left]2,+\infty\right[$

Exercice 5.

Les majorants de $\mathbf{A}=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ sont $[1,+\infty[$ et ses minorants sont $]-\infty,0]$, donc sa borne supérieure est 1, sa borne inférieure est 0, son plus grand élément est 1 et son plus petit élément est 0.

Les majorants de $\mathbf{B}=]0,1[\cap\mathbb{Q}$ sont $]1,+\infty[$ et ses minorants sont $]-\infty,0[$, donc sa borne supérieure est 1, sa borne inférieure est 0, B n'admet pas de plus grand élément ni de plus petit élément.

Les majorants de $\mathbf{C}=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n^2}\ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ sont $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ et ses minorants sont $]-\infty,-1]$, donc sa borne supérieure est $\dfrac{5}{4}$, sa borne inférieure est -1, son plus grand élément est $\dfrac{5}{4}$, mais n'a pas de plus petit élément .

Exercice 6.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note

$A+B=\{a+b\ /\ a\in A, b\in B\}$

1. $\sup A$ est un majorant de A , donc pour tout $a\in A, a\leq \sup A$. De même, pour tout $b\in B, b\leq \sup B$.

$x\in A+B$, il existe alors $a\in A$ et $b\in B$ tel que $x=a+b$, d'où $x\leq \sup A+\sup B$.

C'est à dire que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.

2. Soit $\varepsilon>0$, $\exists a\in A$ et $b\in B$ tel que $\sup A-\dfrac{\varepsilon}{2}<a\leq \sup A$ et $\sup B-\dfrac{\varepsilon}{2}<b\leq\sup B$ d'où $\sup A+\sup B-\varepsilon<a+b\leq \sup A+\sup B$

On a donc : $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$ et $\forall\varepsilon>0$, $\exists x=a+b\in A+B$ tel que $\sup A+\sup B-\varepsilon<a+b\leq\sup A+\sup B$.

D'après la caractérisation de la borne supérieure $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Exercice 7.

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$.

1. Vrai .

En effet si $a\in A, a\in B$, donc $a\leq\sup B$, c'est à dire $\sup B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit des majorants donc $\sup A\leq\sup B$.

2. Faux. Par exemple, soit $A=\left]\dfrac{1}{2},1\right[$ et $B=]0,1[$. On a $A\subset B, \inf A=\dfrac{1}{2}$ et $\inf B=0$.

3. Vrai . En effet ;

$M=\sup(-A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} i)\ \forall x\in -A,\quad x\leq M \\ ii)\ \forall\varepsilon>0,\ \exists x\in -A:\ M-\varepsilon<x\leq M \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} i)\ \forall x\in -A,\quad -x\geq -M \\ ii)\ \forall\varepsilon>0,\ \exists x\in -A:\ -M<-x\leq -M+\varepsilon \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \inf A=-M$.

4. Vrai . En effet ;

On a $\inf B\leq\sup B$, donc $\sup A+\inf B\leq\sup A+\sup B=\sup(A+B)$.

Exercice 8

1. $a\leq b\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0\ , a\leq b+\varepsilon)$

$\Rightarrow)$ $a \leq b \Rightarrow a \leq b + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$
$\Leftarrow)$ Supposons que $\forall \varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$ et $a > b$.
Pour $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$, on aurait $a \leq b + \dfrac{a-b}{2}$, D'où $(a-b) - \left(\dfrac{a-b}{2}\right) \leq 0$ et par suite $a - b \leq 0$.

2. $a = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \ , |a| \leq \varepsilon)$.
$\Rightarrow)$ immédiat
$\Leftarrow)$ Supposons que $\forall \varepsilon > 0$, $|a| \leq \varepsilon$ et $a \neq 0$.
Pour $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$, on aurait $|a| \leq \dfrac{|a|}{2}$, d'où $a = 0$.
Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
On fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$, on a $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$.
Supposons la propriété établie au rang $n > 1$.
$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$ avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$.
On a bien $3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -1$.
2. Montrer que la partie entière de $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.
On a $a_n - 1 \leq b_n\sqrt{3} < a_n$, donc $2a_n - 1 \leq a_n + b_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n < 2a_n$. Donc $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right) = 2a_n - 1$. C'est donc un entier impair.

Exercice 10.
1. Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, l'encadrement :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

On a :
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
De même
$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Encadrement de la somme $\sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
On écrit $\sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or

$$2\sqrt{2} - 2 < 1 = 2 - 1 \qquad (1)$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{p} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) &= -\sum_{n=2}^{p} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) \\
&= -\left(\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{4}\right) + ... + \left(\sqrt{p} - \sqrt{p+1}\right)\right) \\
&= \sqrt{p+1} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) &= -\sum_{n=2}^{p}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\\ &= -\left(\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+....+\left(\sqrt{p-1}-\sqrt{p}\right)\right)\\ &= \sqrt{p}-1\end{aligned}$$

Ainsi

$$2\sqrt{p+1}-2\sqrt{2}\leq\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{p}-2 \quad (2)$$

On additionnant membre à membre (1) et (2), on obtient

$$2\sqrt{p+1}-2\leq\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{p}-1$$

3. Pour $p=10000$, on a

$$2\sqrt{10001}-2\leq\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{10000}-1$$

Or $2\sqrt{10000}-1=199$ et $2\sqrt{10001}-2=198,0099>198$,
Donc

$$198\leq\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 199$$

et par suite $E\left(\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=198$

Exercice 11.
i) Montrons que $x\leq y\Rightarrow\ E(x)\leq E(y)$
$x\leq y\Rightarrow E(x)\leq x\leq y.$
Donc $E(x)$ est un entier relatif inférieur ou égal à y, Comme $E(y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à y, on a donc $E(x)\leq E(y)$.
$ii)$ $\forall x\in\ \mathbb{R}-\mathbb{Z}, E(-x)=-E(x)-1.$
Soit $f(x)=\ \ E(x)+E(-x)$
On a $f(x+1)=\ \ E(x+1)+E(-x-1)=\ \ E(x)+1+E(-x)-1=f(x).$
Donc la fonction f est périodique de période 1.
Or si $x\in\left]0,1\right[$,on a $f(x)=-1$ et $f(0)=0.$
$iii)$ $\forall x\in\ \mathbb{R},\forall a\in\mathbb{Z}, E(x+a)=E(x)+a.$
On traite d'abords le cas $a=1M$
$E(x)\leq x<E(x)+1\Rightarrow E(x)+1\leq x+1<(E(x)+1)+1$
Donc $E(x+1)=E(x)+1$
Si $a\in\mathbb{N}, E(x+a)=E(x+(a-1))+1=E(x+(a-2))+2=....=E(x)+a.$
Si $a<0, E(x)=E((x+a)-a)=E(x+a)$ (puisque $-a>0$)

Exercice 12
Soit $n\in\mathbb{N}^{*}, x\in\mathbb{R}.$

On a

$$\begin{aligned} E(x) &\leq x < E(x)+1 \Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x)+n \\ &\Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x)+n \Rightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n \\ &\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1 \end{aligned}$$

Donc $E(\dfrac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 13

1. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$E(x)+E(-x) = -1$ si $x \notin Z$et $E(x)+E(-x) = 0$ si $x \in Z$.

Soit $f(x) = E(x)+E(-x)$

On a $f(x+1) = E(x+1)+E(-x-1) = E(x)+1+E(-x)-1 = f(x)$.

Donc la fonction f est périodique de période 1.

Or si $x \in]0,1[$,on a $f(x) = -1$ et $f(0) = 0$.

2. En déduire que si p et q sont deux entiers naturels premier entre eux alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) &= \sum_{k=1}^{q-1} E\left((q-k)\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1} E\left(p-k\frac{p}{q}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} E\left(-k\frac{p}{q}\right)+p = \sum_{k=1}^{q-1}\left(-E\left(k\frac{p}{q}\right)-1\right)+p \\ &= -\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right)+(p-1)(q-1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$2\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = (p-1)(q-1).$$

Exercice 14.

Montrons que l'ensemble $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc $x < r^3 < x+\varepsilon$. On a ainsi montré que l'ensemble $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5 Suites numériques

Exercice 1. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=l'$
On sait que $\max(a,b)=\dfrac{1}{2}\left((a+b)+|a-b|\right)$
donc $\max(u_n,v_n)=\dfrac{1}{2}\left((u_n+v_n)+|u_n-u_n|\right)\to\dfrac{1}{2}\left((l+l')+|l-l'|\right)=\max(l,l')$.

Exercice 2. Montrer qu'une suite d'entiers (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Si (u_n) est stationnaire, il est clair que cette suite converge.
Réciproquement, supposons que (u_n) converge et notons l sa limite. Montrons que $l\in\mathbb{Z}$.
Par l'absurde, si $l\notin\mathbb{Z}$ alors $E(l)<l<E(l)+1$ donc à partir d'un certain rang $E(l)<u_n<E(l)+1$.Ce qui est en contradiction avec $u_n\in\mathbb{Z}$. Ainsi $l\in\mathbb{Z}$.
Puisque $u_n\to l$ et $l-1<l<l+1$, à partir d'un certain rang $l-1<u_n<l+1$.
Or $u_n\in\mathbb{Z}$ et $l\in\mathbb{Z}$ donc $u_n=l$.

Exercice 3.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0$, il existe un entier N tel que $n>N\Rightarrow\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\dfrac{1}{2}$
D'où $n>N\Rightarrow|u_{n+1}|<\dfrac{1}{2}|u_n|$
On a alors par récurrence $\forall n>N$, $|u_{n+1}|<\dfrac{1}{2^{n-N}}|u_N|$
et donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 4.
Soit (u_n) une suite qui tend vers $l\in\overline{\mathbb{R}}$.
1. On suppose que $l=\pm\infty$. Montrer que $(E(u_n))$ tends vers l.
On a $E(u_n)\le u_n<E(u_n)+1$, donc $u_n-1<E(u_n)\le u_n$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-1=+\infty$ et puisque $E(u_n)>u_n-1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}E(u_n)=+\infty$.

De même si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$, puisque $E(u_n)\le u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}E(u_n)=-\infty$.

On suppose dans la suite que $l\in\mathbb{R}$.

2. On suppose que l n'est pas un entier. Montrer que $(E(u_n))$converge vers $E(l)$.
Montrons d'abord que $E(l)<u_n<E(l)+1$ à partir d'un certain rang.
On a $E(l)\le l<E(l)+1$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\ /\ \ (n>N\Rightarrow l-\varepsilon<u_n<l+\varepsilon)$
D'où $\forall\varepsilon>0,\exists N\ /\ \ n>N\Rightarrow E(l)-\varepsilon<u_n<E(l)+1+\varepsilon$
Ainsi $E(l)<u_n<E(l)+1$ à partir d'un certain rang.
Du fait que $E(l)<u_n<E(l)+1$, on a $E(E(l))\le E(u_n)<E(E(l)+1)$
Ainsi $E(l)\le E(u_n)<E(l)+1$
Or $E(u_n)$ étant un entier, donc $E(u_n)=E(l)$, c'est à dire que la suite $(E(u_n))$ est une suite d'entiers stationnaire à partir d'un certain rang, donc $(E(u_n))$ converge (exercice 1).
3. On supposeque $l\in\mathbb{Z}$.

a) On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge n_0\Rightarrow u_n\ge l$.
Dans ce cas $(E(u_n))$ stationne en l; donc elle converge vers l.
b) On suppose qu'il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que $n\ge n_1\Rightarrow u_n<l$.

Dans ce cas $(E(u_n))$ stationne en $l-1$; donc elle converge vers $l-1$.
c) On suppose que a) et b) ne sont pas réalisées, c'est à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \geq N$ et $n_1 \geq N$ tel que $u_{n_0} < l$ et $u_{n_0} \geq l$.
La suite $(E(u_n))$ est divergente puisque elle aura une sous suite qui converge vers l et une sous suite qui converge vers $l-1$.
Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
$\dfrac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(u_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\dfrac{-1}{n+1}\right) = -1$

Exercice 5. Moyenne de Cesaro :
Soient (u_n) une suite réelle et (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{u_1 + ... + u_n}{n}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier naturel N tel que, si $n > N$ alors $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a

$$\begin{aligned}
|v_n - l| &= \left|\frac{(u_1 + ... + u_n) - nl}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\left(|u_1 - l| + |u_2 - l| + ... + |u_n - l|\right)\\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} |u_k - l| + \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - l|\right)\\
&\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N} |u_k - l| + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k - l|$ est une constante, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k - l| = 0$.
Par suite, il existe un entier N' tel que si $n > N'$ alors $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Par suite si $n > \max(N, N')$, alors $|v_n - l| < \varepsilon$
Ainsi si la suite (u_n) converge vers un réel l, la suite (v_n) converge et a pour limite l.
La réciproque est fausse. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| < \dfrac{1}{n}$. Par suite, la suite (v_n) converge et a pour limite 0.
2. Si la suite (u_n) est bornée, il existe un réel M tel que, $|u_n| \leq M$. On a alors $|v_n| \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k| \leq \dfrac{M \times n}{n} = M$.
La réciproque est fausse. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n E\left(\dfrac{n}{2}\right) = \begin{cases} p \text{ si } n = 2p \\ -p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$

La suite (u_n) n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2n}) tend vers $+\infty$. Or, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{n}{2n}$.

3. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) l'est aussi.

Exercice 6

1. Si $l < 1$, on pose $\alpha = \frac{l+1}{2}$, alors $l < \alpha < 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, Pour $\varepsilon < \alpha - l$, il existe N tel que si $n > N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon < \alpha$

On a alors $0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times ... \times \frac{u_{N+1}}{u_N} \times u_N < \alpha^{n-N} u_N$. Comme $\alpha < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n-N} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Si $l > 1$, on pose $\alpha = \frac{l+1}{2}$, alors $1 < \alpha < l$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, Pour $\varepsilon < \alpha + l$, il existe N tel que si $n > N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon > \alpha$

On a alors $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times ... \times \frac{u_{N+1}}{u_N} \times u_N > \alpha^{n-N} u_N$. Comme $\alpha > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n-N} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On prend par exemple $u_n = n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si on prend $u_n = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Si on prend $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 7.

i)

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1\right)} \end{aligned}$$

D'où (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

ii) On a $\ln v_n = \frac{1}{n} \ln n$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln v_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

iii) Dans le produit $n! = \underset{k=1}{\overset{n}{\pi}} k$, il y a au moins $\frac{n}{2}$ termes qui sont supérieurs ou égaus à $\frac{n}{2}$.

Ainsi $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ et $w_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

d) $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n} \to 1$,

e) $u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$

On a Pour $n \in N^*$, $0 \leq n - 1 \leq n + (-1)^{n+1} \leq n + 1$, d'où $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n + (-1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n-1}$

Ainsi $\left|\dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{1}{n-1} \to 0.$

Exercice 8.
Etudier la convergence des suites (u_n) définies par :
i) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
On a l'inégalité $u_{2n} - u_n > \dfrac{1}{2}$. La suite n'est pas de Cauchy, elle ne converge donc pas.
ii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. Donc (u_n)ne converge pas. ,

iii) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.
On a $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{n}{n^2+1}$
Donc $u_n \to 0$

Exercice 9
θ est un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$
On considère les suites définies par :
$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n}$$
$$v_n = 2^{n+1} \tan \frac{\theta}{2^n}$$
Comme $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, on obtient
$u_n = 2^{n+2} \sin \dfrac{\theta}{2^{n+1}} \cos \dfrac{\theta}{2^{n+1}} \leq 2^{n+2} \sin \dfrac{\theta}{2^{n+1}} = u_{n+1}$.
Donc la suite (u_n) est croissante.
Comme $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, on obtient
$$v_n = 2^{n+1} \tan \frac{\theta}{2^n} = 2^{n+2} \frac{\tan \frac{\theta}{2^{n+1}}}{1-\tan^2 \frac{\theta}{2^{n+1}}} \geq v_{n+1}.$$
Donc la suite (v_n) est décroissante.
$$v_n - u_n = 2^{n+1}\left(\sin \frac{\theta}{2^n} - \tan \frac{\theta}{2^n}\right) = 2\theta \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} - \frac{\tan \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\right) \to 0.$$
$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n} = 2\theta \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \to 2\theta$$
La limite comune est 2θ.

Exercice 10. *Moyenne arithmico-géometrique :*
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
1. Montrons par récurrence que $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
On a $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$.
Supposons que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et b_{n+1}est bien définie, de plus $b_{n+1} > 0$.

2. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ on a $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, en effet Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$
$\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$.
On en déduit que $b_n \leq a_n$.
Il en résulte que : $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = |b_n| = b_n$ et $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leq 0$.
De plus $a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$.
Ainsi par récurrence, on a $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$. Or $a_n - b_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a-b}{2^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes , on note par $M(a, b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b
3.Si $a = b$,alors les deux suites (a_n) et (b_n) sont constantes égales à a et donc $M(a, a) = a$.
Si $b = 0$,alors la suite (b_n) est constante égales à 0 et donc $M(a, 0) = 0$.
e) Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $a'_0 = \lambda a$ et $b'_0 = \lambda b$.
Par récurrence, on montre $a'_n = \lambda a_n$ et $b'_n = \lambda b_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 11.
Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.
Montrons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite
Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = l'$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{3n} = l''$.
La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et de (u_{3n}), donc $l = l''$.
De même La suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}), donc $l' = l''$.
Ainsi $l = l' = l''$
Par conséquent (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Montrons que (u_n) converge.
Soit $\varepsilon > 0$.Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |u_{2n} - l| < \varepsilon$ et Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$.
donc si $m \in \mathbb{N}$, m est soit pair ou impair,
$m > \max(N, N') \Rightarrow |u_m - l| < \varepsilon$.

Exercice 12.
Par l'absurde, supposons $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin n = l \in \mathbb{R}$.
On a $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$
D'où $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin 1 \cos n$
En passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos n = 0$.
Or $\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$, on aurait alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos 2n = -1$. Ce qui est absurde, donc la suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$ diverge.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
Montrons que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :
$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1}$. Comme (u_n) est une suite de réels décroissante, $S_{2(n+1)} - S_{2n} \leq 0$.

Donc la suite (S_{2n}) est décroissante. De même $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$, Donc la suite (S_{2n+1}) est décroissante.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -u_{2n+1} = 0$.
Il en résulte que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont la même limite. On en déduit que (S_n) est convergente.

Exercice 14. Soient $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$.
1. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones et adjacentes.
On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante et la suite (v_n) est strictement Décroissante.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n \times n!} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

2. On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$.
On a $u_q < u_{q+1} \leq e \leq v_q < v_{q+1}$.
Il en résulte que $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \times q!}$, Ainsi $q \times q! u_q < pq! < q \times q! u_q + 1$.
Or $pq! \in \mathbb{Z}$ et $q \times q! u_q = q \sum\limits_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$ car la somme apparaît comme une somme d'entiers.
Ce qui est absurde.

Exercice 15.
Soit $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
1. Montrons que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
On a pour tout $n > 0$, $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(n)$.
Or $n \leq x \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$.
Ainsi $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrons que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
Comme pour tout $k > 0$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On en déduit que $\ln(n+1) \leq H_n$ et $H_n - 1 \leq \ln n$. Ainsi $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

3. Déterminons la limite de (H_n).
Puisque $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
4. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante .
$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n + \ln(n) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0$ d'après la première question.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
D'après la question 3, $H_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq \dfrac{1}{n+1} > 0$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

Exercice 16. Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\frac{2n\pi}{q}$.
1. Montrons que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_{n+q} = \cos\frac{2(n+q)\pi}{q} = \cos\left(\frac{2n\pi}{q} + 2\pi\right) = \cos\frac{2n\pi}{q} = u_n$.
2. Calculons u_{nq} et u_{nq+1}.
$u_{nq} = \cos\frac{2nq\pi}{q} = \cos(2n\pi) = 1$ et $u_{nq+1} = \cos\frac{2(nq+1)\pi}{q} = \cos\left(\frac{2\pi}{q} + 2n\pi\right) = u_1$.
Montrons que la suite (u_n) n'a pas de limite.
Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers une limite l. D'une part, la sous-suite (u_{nq}) converge vers l. Comme $u_{nq} = 1$,pour tout n alors $l = 1$. D'autre part la sous-suite (u_{nq+1}) converge aussi vers l, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $l = \cos\frac{2\pi}{q}$. On a ainsi une contradiction car pour $q \geq 2, \cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 17. Soit $a > 0$. On définit la suite (u_n) par $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.
1. Montrons que $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{4u_n^2}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}\frac{u_n^4 - 2au_n^2 + a^2}{u_n^2} = \frac{1}{4}\frac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{u_n^2}. \end{aligned}$$

2. Montrons que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$:
D'après la question 1, $u_n^2 - a = \dfrac{\left(u_{n-1}^2 - a\right)^2}{4u_{n-1}^2} > 0$. Donc $u_n^2 > a$.Comme $u_n > 0$,alors $u_n \geq \sqrt{a}$.
Montrons que la suite (u_n) est décroissante :
Pour cela, on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$$

Or $u_n \geq \sqrt{a}$, donc $\dfrac{a}{u_n^2} \leq 1$ et par suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Comme $u_n > 0$,alors $u_{n+1} \not\leq u_n$.

3. Montrons que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $l \geq 0$.
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, et f est continue , l vérifie $l = f(l)$. La seule solution positive de cette équation est $l = \sqrt{a}$.
Ainsi (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$, on donne une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
Comme

$$u_{n+1}^2 - a = \left(u_{n+1} - \sqrt{a}\right)\left(u_{n+1} + \sqrt{a}\right) = \frac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{4u_n^2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2}{4u_n^2},$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2}{4u_n^2\left(u_{n+1} + \sqrt{a}\right)} = \left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \frac{1}{4\left(u_{n+1} + \sqrt{a}\right)}\left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leq \left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \frac{1}{8\sqrt{a}}\left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2.$$

5. Supposons que $u_1 - \sqrt{a} \leq k$, montrons que pour $n \geq 1$: $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

Par récurence, si $n = 1, u_1 - \sqrt{a} \leq k = 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)$.
Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n. Alors

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2\times 2^{n-1}}.$$

c'est à dire

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

6. Application : Calculons $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.
On a $u_0 = 3$, alors $u_1 = 3,166...$ Comme $3 \leq \sqrt{10} \leq u_1$, $u_1 - \sqrt{10} \leq 0,166$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{10}$ soit inférieure à 10^{-8},il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$.On obtenient ainsi $u_4 = 3,16227766...$
On déduit que $\sqrt{10} = 3,16227766...$ avec une précision de 8 chiffres aprèsla virgule.

Exercice 18. Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ supposée continue et une suite
récurrente (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \quad et \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que (u_n) est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

Si $u_0 < u_1$, Puisque f est croissante, on montre par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$. Ainsi la suite (u_n) est croissante.
Comme f est à valeurs dans $[a,b]$, (u_n) est majorée par b. Donc (u_n) est convergente.
Si $u_0 > u_1$, Puisque f est croissante, on montre par récurrence que $u_n \geq u_{n+1}$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante.
Comme f est à valeurs dans $[a,b]$, (u_n) est minorée par a. Donc (u_n) est convergente.
Notons l la limite de (u_n). Comme f est continue alors $(f(u_n))$tend vers $f(l)$. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient l'égalité $l = f(l)$.
2. Application.
Soit $f(x) = \dfrac{4x+5}{x+3}$, f est continue, dérivable sur $]-3,+\infty[$.
$f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-3,+\infty[$,de plus $f([0,4]) \subset [0,4]$.
Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 2,25$, la suite (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite l. Elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Soit $4x+5 = x(x+3)$ ou encore $x^2 - x - 5 = 0$.
Or $u_n > 0$ pour tout n, donc $l > 0$. La seule solution positive de l'équation est $l = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante . On applique alors la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite (u_{2n}) définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \end{cases}$ est monotone et convergente. De même pour la suite (u_{2n}) définie par $\begin{cases} u_1 \\ u_{2n+1} = f \circ f(u_{2n-1}) \end{cases}$.
4. La fonction f définie par $f(x) = (1-x)^2$ est continue et dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Elle est décroissante sur cet intervalle. Nous avons $u_0 = \dfrac{1}{2}, u_1 = \dfrac{1}{4}, u_2 = \dfrac{9}{16}, u_3 = \left(\dfrac{15}{16}\right)^2 \simeq 0,19$,... Donc la suite (u_{2n}) est croissante et elle est convergente. Soit l sa limite. la suite (u_{2n+1}) est décroissante et elle est convergente. Soit l' sa limite.
Les limites l et l' sont des solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $\left(1-(1-x)^2\right)^2 = x$.
Soit $x^2(2-x)^2 = x$, ou encore $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. On factorise le
polynôme par $x(x-1)$. On obtient alors $x(x-1)(x^2-3x+1) = 0$
$(x^2-3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,38$ ou $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$.
Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \dfrac{1}{2}$, alors (u_{2n}) converge vers $l = 1$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ supérieur à $\dfrac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \dfrac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $l' = 0$ qui est le seul point fixe de $[0,1]$ inférieur à $\dfrac{1}{4}$.

6 Continuité et dérivabilité des fonctions numériques d'une variable réelle

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = xE\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$.
Montrons que f admet une limite en 0 et déterminons cette limite.

Supposons d'abord que $x > 0$.
On a $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$
On pose $n = E\left(\frac{1}{x}\right)$. On a donc $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$
On déduit que $-n - 1 < -\frac{1}{x} \leq -n$ et $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$
Donc $\frac{1}{n+1} - n - 1 < x - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} - n$. Ce qui équivaut à $\frac{-n}{n+1} - n < x - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} - n$.
D'où $E\left(\frac{-n}{n+1} - n\right) \leq E\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq E\left(\frac{1}{n} - n\right)$
Donc $E\left(x - \frac{1}{x}\right) = -n - 1$ ou $-n$, ce qu'on peut écrire : $-n - 1 \leq E\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq -n$.
on a alors $0 \leq n \leq -E\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq n + 1$, or $0 \leq \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$
On multiplie membre à membre ces deux inégalités, on obtient :
$1 \leq -xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{n+1}{n}$, d'où $-\frac{n+1}{n} \leq xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq -1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1$.
Supposons $x < 0$,
On sait que si y n'est pas un entier on a $E(-y) = -E(-y) - 1$
Donc $f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = x\left(-E\left(-x + \frac{1}{x}\right) - 1\right) = -xE\left(-x + \frac{1}{x}\right) - x = f(-x) - x$
Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{y \to 0^+} f(y) = -1$.

Exercice 2 Soit f une fonction croissante définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.
1. Montrons que s'il existe $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f.
Supposons que $f(x) > x$, alors puisque f est croissante
$f^k(x) > f^{k-1}(x) > ... > f(x) > x$
ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$.

2. Montrons que f admet un point fixe.

On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$, On peut construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que $f(a_n) \geq a_n$ et $f(b_n) \leq b_n$.On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.Une fois les termes a_n et b_n déterminés, on introduit $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m) \geq m$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.
Les suites (a_n) et (b_n) ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune l telle que $a_n \leq l \leq b_n$.Comme f est croissante $f(a_n) \leq f(l) \leq f(b_n)$ et donc $a_n \leq f(l) \leq b_n$.Or (a_n) et (b_n) convergent vers l donc par encadrement $f(l) = l$.

Exercice 3 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrons que f est bornée et atteint sa borne supérieure.
On distingue deux cas : ou bien f est la fonction nulle, dans ce cas il n'y a rien à montrer, ou bien f n'est pas toujours nulle, dans ce cas il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. D'autre

part, on sait que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, on trouve qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x \in [0, +\infty[$, $x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$

Comme f est à valeurs dans $[0, +\infty[$, on obtient : $\forall x \in [A, +\infty[,\ f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2}$

Donc f est bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$. D'autre part, le théorème des bornes montre que f est bornée sur l'intervalle $[0, A]$, plus précisément il existe des réels $0 \leq m \leq M$ tels que $f([0, A]) = [m, M]$. Il en résulte que f est majorée sur $[0, +\infty[$ par $\max\left(\frac{f(x_0)}{2}, M\right)$.

Or on constate que $x_0 \in [0, A]$ (sinon la propriété $\forall x \in [A, +\infty[,\ f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2}$ serait contredite), donc $M \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Il en résulte que f est majorée par M sur $[0, +\infty[$. Or, toujours d'après le théorème de bornes, il existe $c \in [0, A]$ tel que $f(c) = M$, donc f atteint sa borne supérieure.

2. La fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ satisfait les hypothèses de l'énoncé, mais n'atteint pas sa borne inférieure (qui est 0).

Exercice 4.

Soit $n = 2k + 1$ le degré de P , alors le terme de plus haut degré de P est de la forme ax^{2k+1} avec $a \neq 0$. On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^{2k+1} = a \times (-\infty)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^{2k+1} = a \times (+\infty)$

Or $a \times (-\infty)$ et $a \times (+\infty)$ sont deux infinis de signes contraires. La fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires prouve que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction P est l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Donc il existe au moins un réel $c \in \mathbb{R}$, tel que $P(c) = 0$.

Exercice 5

1. Considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

Comme f est continue, g l'est aussi. Il est clair par construction de g que notre problème se ramène à montrer l'existence d'un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$. On a $f(a) \in [a, b]$, donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \in [a, b]$, donc $f(b) \leq b$. Donc $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

2. Comme $\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$ et que $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $\cos : [0, 1] \to [0, 1]$.

3. Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto x^2$.

Exercice 6.

On a $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, donc $\left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

En 0 : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ car $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq x$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \text{ si } x\neq0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$

On a $\lim_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ n'existe pas, donc f' n'est pas continue en 0.

Exercice 7.
Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(x)$. On les note par $x_1<x_2<x_3<x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (sur $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ et $[x_3,x_4]$), il existe $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ des racines de $P_n'(x)=nx^{n-1}+a$. On applique deux fois le théorème Rolle sur $[\alpha_1,\alpha_2],[\alpha_2,\alpha_3]$.
On obtient deux racines distinctes pour $P_n''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ qui ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

Exercice 8
1. La fonction $x\mapsto\ln(x)$ étant continue et dérivable sur $]0,+\infty[$,on lui applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$. Il existe $c\in]x,x+1[$ tel que $\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$
Or $x<c<x+1$ donne $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$. D'où $\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$.
2. D'après 1., on a $\sum_{p=n+1}^{kn}(\ln(p+1)-\ln(p))<\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}$ et $\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}<\sum_{p=n+1}^{kn}(\ln(p)-\ln(p-1))$.
Donc $\ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right)<\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}<\ln(k)$
Par le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}=\ln(k)$.

Exercice 9 Soients x et y deux réels avec $0<x<y$.

1. Montrons que $x<\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)}<y$.
La fonction $x\mapsto\ln(x)$ étant continue et dérivable sur $]0,+\infty[$,on lui applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$. Il existe $c\in]x,x+1[$ tel que $\ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$
Or $x<c<x+1$ donne $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$. D'où $\frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}$.

2. En étudiant la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$\alpha\mapsto f(\alpha)=\ln(\alpha x+(1-\alpha)y)-\alpha\ln(x)-(1-\alpha)\ln(y)$, montrer que
$$\alpha\ln(x)+(1-\alpha)\ln(y)<\ln(\alpha x+(1-\alpha)y).$$
Donner une interprétation géométrique.

On a $f'(\alpha)=\frac{x-y}{\alpha x+(1-\alpha)y}-\ln(x)+\ln(y)$, et $f''(\alpha)=-\frac{(x-y)^2}{(\alpha x+(1-\alpha)y)^2}-\ln(x)+\ln(y)$. Comme $f''(\alpha)<0$, f' est décroissante sur $[0,1]$. De plus d'après la première question, on a $f'(0)=\frac{x-y-y(\ln(x)-\ln(y))}{y}>0$ et $f'(0)=\frac{x-y-x(\ln(x)-\ln(y))}{x}<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in[x,y]$ tel que $f'(c)=0$. On a f' est positive sur $[0,c]$ et n égative sur $[c,1]$. Donc f est croissante sur $[0,c]$ et décroissante

sur $[c, 1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) > 0$. Ce qui prouve l'inégalité demandée.
Géométriquement nous avons prouver que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y)))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exercice 10. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a, b]$. Le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un nombre $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Pour cette fonction particulière nous pouvons expliciter ce c. En effet

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(c)(b-a) \Leftrightarrow \alpha\left(b^2 - a^2\right) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a) \\ &\Leftrightarrow (b+a) = 2c \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Géométriquement, le graphe $\mathcal{P}$ de f est une parabole. Si l'on prend deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathcal{P}$ qui passe en $M\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

Exercice 11.
Posons $M = f(0) + 1$.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \leq A, \forall x \geq B$, $f(x) > M$
On a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.
Sur $[A, B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A, B]$ car continue sur un segment.
On a $f(a) < f(0)$ car $0 \in [A, B]$ donc $f(a) < M$.
Pour tout $x \in [A, B]$, on a $f(x) > f(a)$ et pour tout $x \in]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$, $f(x) > M > f(a)$.
Ainsi f admet un minimum absolu en a.

Exercice 12.
La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ étant strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ l'est aussi. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction f étant continue strictement décroissante, elle réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur son image. De plus : $f([-1, +\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(-1) \right] =]0, 1]$.
Il nous reste à déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Pour cela, on se donne $y \in]0, 1]$, et on cherche à déterminer (en fonction de y) l'unique $x \in [-1, +\infty[$ tel que $f(x) = y$. Cette équation s'écrit : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = y$. Comme y est strictement positif, cette équation équivaut à : $x^2 + 2x + 2 = y^2$, c'est-à-dire : $(x+1)^2 = \dfrac{1}{y^2} - 1$. Comme $x + 1$ est positif, on en déduit que $x + 1 = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$. Ainsi : $f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1} - 1$.

Exercice 13.

■ On pose $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$
f est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$
Ainsi f est constante sur $]-1,1[$, donc sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \arccos 0 + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2}$,
Par conséquent $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.
■ On pose $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
g est définie dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ de dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition : $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. Sachant $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, on obtient : $c_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $c_2 = -\dfrac{\pi}{2}$

■ Pour rout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

d'où

$$\cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{1+x^2}$$

Or $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos y \geq 0$ si $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

■ Pour rout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sin^2(\arctan x) &= 1-\cos^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}\\ &= 1-\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}\end{aligned}$$

D'où $|\sin(\arctan x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
Or $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\sin y$ et du même signe que y sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

■ Pour rout $x \in [-1,1]$, on a : $\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)$
Or $\sin(\arcsin x) = x$ et $\cos^2(\arcsin x) = 1-\sin^2(\arcsin x) = 1-x^2$, donc $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$
Mais $\arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
Ainsi $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

.

Exercice 14.

■

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2.$$

■ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2ch^2x-sh\left(2x\right)}{x-\ln\left(chx\right)-\ln\left(2\right)}$:
On simplifie d'abord l'expression

$$\begin{aligned}2ch^2x-sh\left(2x\right)&=2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\\&=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{2}-\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\\&=e^{-2x}+1.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x-\ln\left(chx\right)-\ln\left(2\right)&=x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-\ln\left(2\right)\\&=x-\ln\left(e^x+e^{-x}\right)=x-\ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right)\\&=x-\ln\left(e^x\right)-\ln\left(1+e^{-2x}\right)=-\ln\left(1+e^{-2x}\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2ch^2x-sh\left(2x\right)}{x-\ln\left(chx\right)-\ln\left(2\right)}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}+1}{-\ln\left(1+e^{-2x}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{-2x}}{\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}\\&=-\lim_{x\to-\infty}1+e^{-2x}=-\infty\end{aligned}$$

■

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x}=1$$