Exercice 1 : Parmi les équations différentielles suivantes, déterminer celles qui peuvent s'écrire facilement sous la forme $y' = f(x, y)$. Reconnaître ensuite celles qui sont à variables séparables ou homogènes. Trouver enfin, les solutions générales de ces dernières.

$$(1+x^2)(y+y')-xy^2 = x+1\ ,\ xe^{y'}+yy' = x\ ,\ (1-x^2)y'-1 = y^2\ ,\ x^2(y'-1)+y(y-x) = 0.$$

Exercice 2 : Déterminer les solutions générales des équations linéaires avec second membres suivantes :

$$y' + y = xe^{-x} \qquad , \qquad xy' - y = x^3.$$

Exercice 3 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} (1+x)y' - 2y = \ln(1+x),\ x > -1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} (\sin x)y' - (\cos x)y + 1 = 0,\ x \in]0, \pi[\\ y(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation de Bernoulli

$$xy' + y - xy^3 = 0.$$

2. Résoudre l'équation de Riccati

$$x^2(y' + y^2) = xy - 1$$

sachant qu'elle admet la solution particulière $y_0(x) = \frac{1}{x}$.

T.D n° 3

Exercice 1.

1°/a) $(1+x^2)(y+y')-xy^2=x+1$ (E1) $\Leftrightarrow (1+x^2)(y+y')=xy^2+x+1$

$$\Leftrightarrow y+y'=\frac{xy^2+x+1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow y'=\underbrace{\frac{xy^2+x+1}{1+x^2}-y}_{f_1(x,y)}=\frac{xy^2+x+1-y-x^2y}{1+x^2}$$

b/ $xe^{y'}+yy'=x$ (E2)

$$xe^{y'}=x-yy'$$

$$e^{y'}=\frac{x-yy'}{x}$$

$$y'=\ln\frac{x-yy'}{x}.$$

On ne peut pas écrire facilement (E2) sous la forme $y'=f(x,y)$

c/ $(1-x^2)y'-1=y^2$ (E3)

$$(1-x^2)y'=y^2+1$$

$$y'=\frac{y^2+1}{1-x^2}=f_2(x,y)$$

d/ $x^2y'-x^2=y(x-y)$ (E4)

$$x^2y'=y(x-y)+x^2$$

$$y'=\frac{y(x-y)+x^2}{x^2}=f_3(x,y)$$

2°/ a) $y'=\underbrace{\frac{xy^2+x+1-y-x^2y}{1+x^2}}_{f_1(x,y)}$ n'est ni à variables séparables, ni homogène.

En effet:

$$f_1(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^3xy^2+\lambda x+1-\lambda y-\lambda^3x^2y}{1+\lambda^2x^2}\neq f(x,y)$$

b) $xe^{y'}+yy'=x \quad (E_2)$

On ne peut même pas écrire (E_2) sous la forme $y'=f(x,y)$.

(E_2) n'est ni à variables séparables, ni homogène.

c) $y'=\dfrac{y^2+1}{1-x^2}=f_2(x,y) \quad (E_3)$

$(E_3) \iff \dfrac{y'}{y^2+1}=\dfrac{1}{1-x^2}$ donc (E_3) est à variables séparables.

$$\iff \int\frac{dy}{y^2+1}=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)} \quad (E'_3)$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$$

$$=\frac{A+\cancel{Ax}+B-\cancel{Bx}}{1-x^2}$$

$$=\frac{(A-B)x+A+B}{1-x^2}$$

$$\begin{cases}A-B=0\\A+B=1\end{cases} \iff \begin{cases}A=B\\2A=1\end{cases} \iff A=B=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

$$(E'_3) \iff \int\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$\iff \operatorname{Arctan} y=\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

$$\iff \operatorname{Arctan} y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

$$\iff \operatorname{Arctan} y=\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}+C$$

$$\iff y=\tan\left(\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}+C\right)$$

Rmq: $(\operatorname{Argth})'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, cette relation pourrait aussi être utilisée pour résoudre (E'_3)

d) $y' = \dfrac{y(x-y)+x^2}{x^2} = f_3(x,y)$ $\quad (E_4)$

$$f_3(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y(\lambda x - \lambda y) + \lambda^2 x^2}{\lambda^2 x^2}$$

$$= \frac{\lambda^2 y(x-y) + \lambda^2 x^2}{\lambda^2 x^2}$$

$$= \frac{y(x-y)+x^2}{x^2} = f_3(x,y)$$

Donc (E_4) est homogène

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2}\, y(x-y)+x^2}{\frac{1}{x^2}\, x^2} = \frac{y}{x}\left(1-\frac{y}{x}\right)+1$$

Posons $z = \dfrac{y}{x}$. (E_4) s'écrit $y' = z - z^2 + 1$ $\quad (*)$

$z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$ et (E_4) s'écrit $z + xz' = z - z^2 + 1$

c-à-d $\quad xz' = 1 - z^2 \quad (E_5)$

i) $z = 1$ $\quad z=-1$ sont solutions triviales de E_5 c.à.d. $y = x$ et $y = -x$ sont sol. de (E_4)

ii) Si $z \neq 1$ et $z \neq -1$ alors $1 - z^2 \neq 0$ et $(E_5) \Leftrightarrow \dfrac{z'}{1-z^2} = \dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dz}{1-z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\underset{\text{Voir (c)}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|z+1| - \frac{1}{2}\ln|z-1| = \ln|x| + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2\ln|x| + C \qquad \text{avec } C = 2C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \ln x^2 + C$$

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = x^2 e^c$$

$$\frac{z+1}{z-1} = \pm e^c x^2 = K x^2 \quad \text{avec} \quad K = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$$

Mais $z=-1$ est aussi sol. de (E_3). Donc on peut écrire $\frac{z+1}{z-1} = Kx^2$ avec $K \in \mathbb{R}$

Par suite $z+1 = Kx^2(z-1) \Rightarrow z - Kx^2 z = -Kx^2 - 1$

$$\Leftrightarrow z(1-Kx^2) = -1 - Kx^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{Kx^2+1}{Kx^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{Kx^2+1}{Kx^2-1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{Kx^3+x}{Kx^2-1} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

Conclusion : $y = \frac{Kx^3+x}{Kx^2-1}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $y = x$ sont les solutions cherchées

($K=0$ donne la sol. triviale $y=-x$)

Exercice 2 :

a) $y' + y = x e^{-x}$

Solution générale y_0 de l'E.S.S.M. : $y'+y=0$

$y'+y=0 \Leftrightarrow y' = -y$.

i) $y=0$ est solution triviale de l'E.S.S.M.

ii) $y \neq 0$. L'E.S.S.M s'écrit $\frac{y'}{y} = -1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -x + C \Leftrightarrow |y| = e^{-x+C} = e^c . e^{-x} \Leftrightarrow y = \pm e^c e^{-x} = K . e^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}^*$, $K = \pm e^c$

Mais $y=0$ est aussi solution de l'E.S.S.M. Donc $y_0 = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$ est la sol. générale de l'E.S.S.M.

<u>Recherche d'une solution particulière y_1 de l'E.A.S.N</u>

<u>Méthode de variation de la constante.</u>

$y = K(x)\,e^{-x}$

$y' = K'(x)\,e^{-x} - K(x)\,e^{-x}$

$y' + y = x\,e^{-x} \iff K'(x)e^{-x} - \cancel{K(x)e^{-x}} + \cancel{K(x)e^{-x}} = x\,e^{-x}$

$\iff K'(x)\,e^{-x} = x\,e^{-x}$

$\iff K'(x) = x \iff K(x) = \frac{1}{2}x^2$

Donc $y_1 = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de l'E.A.S.N.

<u>Finalement:</u> $y = y_0 + y_1$

$= K e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\,e^{-x}$

$= \left(K + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$, est la solution générale de l'équation donnée.

b) $xy' - y = x^3$

<u>Recherche de la solution générale y_0 de l'E.S.S.N. $xy' - y = 0$</u>

$xy' - y = 0$

i) $y = 0$ est une sol. triviale

ii) Si $y \neq 0$, l'E.S.S.N. s'écrit $xy' = y \iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$

$\iff \ln|y| = \ln|x| + c$

$\iff |y| = e^c.|x|$

$\iff y = \pm e^c x = Kx$ avec $K = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$

Mais $y = 0$ est aussi solution donc $y_0 = Kx$ avec $K \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'E.S.S.N.

<u>Recherche d'une solution particulière y_1 de l'E.A.S.N.</u>

<u>Méthode de variation de la constante.</u>

$y = K(x)\,x$.

$y' = K'(x).x + K(x)$

L'E.A.S.A s'écrit : $K'(x)x^2 + xK(x) - K(x)x = x^3$

$\Leftrightarrow \quad K'(x)x^2 = x^3$

$\Leftrightarrow \quad K'(x) = x \quad \Rightarrow \quad K(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc $y_1 = K(x).x = \frac{x^3}{2}$ est une solution particulière de l'E.A.S.A.

Finalement: $y = y_0 + y_1$

$= Kx + \frac{x^2}{2}$ est la solution générale de l'éq. donnée.

Exercice 3. Résolvons les problèmes de Cauchy suivants.

a) $(P_1) \begin{cases} (1+x)y' - 2y = \ln(1+x) & x > -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

i) Solution générale de l'E.S.S.A.

$(1+x)y' - 2y = 0$

* $y = 0$ est solution triviale de l'E.S.S.A.

** Si $y \neq 0$, l'E.S.S.A s'écrit. $\frac{y'}{y} = \frac{2}{1+x}$

$\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{1}{1+x}\, dx$

$\Leftrightarrow \quad \ln|y| \underset{x>-1}{=} 2\ln(1+x) + C$

$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \ln(1+x)^2 + C$

$\Leftrightarrow \quad |y| = (1+x)^2 . e^C$

$\Leftrightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^C}_{K} (1+x)^2 = K(1+x)^2$ avec $K \in \mathbb{R}^*$

Mais $y = 0$ est aussi solution de l'E.S.S.A. donc $y_0 = K(1+x)^2$ avec $K \in \mathbb{R}$

est la solution générale de l'E.S.S.A.

ii) <u>Recherche d'une solution particulière yp de l'E.A.S.1.</u>

$y = K(x)(1+x)^2$

$y'(x) = K'(x)(1+x)^2 + 2K(x)(1+x)$

l'E.A.S.1 s'écrit :

$K'(x)(1+x)^3 + \cancel{2K(x)(1+x)^2} - \cancel{2K(x)(1+x)^2} = \ln(1+x)$

$\Rightarrow K'(x)(1+x)^3 = \ln(1+x)$

$\Rightarrow K'(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^3}$

$I = \displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^3}\,dx = ?$

$u(x) = \ln(1+x)$ $\qquad u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}$ $\qquad v(x) = \dfrac{1}{-3+1}(1+x)^{-3+1} = -\dfrac{1}{2(1+x)^2}$

$$I = -\frac{\ln(1+x)}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{-\ln(1+x)}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\int (1+x)^{-3}\,dx$$

$$= \frac{-\ln(1+x)}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{-3+1}(1+x)^{-3+1} + C$$

$$= -\frac{\ln(1+x)}{2(1+x)^2} - \frac{1}{4(1+x)^2} + C$$

$$= \frac{-2\ln(1+x) - 1}{4(1+x)^2} + C$$

Donc $K(x) = \dfrac{-2\ln(1+x) - 1}{4(1+x)^2}$ et $y_p = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}$ est une solution particulière de l'E.A.S 1.

<u>Finalement</u> : $y = y_0 + y_p$

$= K(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$ est la solution générale de l'

$y(0) = 0 \iff K - \frac{1}{4} = 0 \iff K = \frac{1}{4} \implies y = \frac{1}{4}(1+x)^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x)$

est la solution générale du p^b. de Cauchy (P_1)

b) $(P_2)\begin{cases} (\sin x)y' - (\cos x)y + 1 = 0 & x \in]0,\pi[\\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

<u>Solution générale de l'E.S.S.N.</u> $(\sin x)y' - (\cos x)y = 0$

i) $y = 0$ est solution triviale de l'E.S.S.N.

ii) Si $y \neq 0$, l'E.S.S.N s'écrit, $\frac{y'}{y} = \frac{x}{\sin x}$

$\iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\iff \ln|y| = \ln(\sin x) + C$ car $x \in]0,\pi[\implies \sin x > 0$.

$\iff y = \pm e^C \sin x$

$= K \sin x$ avec $\underset{\pm e^C}{\overset{\shortparallel}{K}} \in \mathbb{R}^*$

Mais $y = 0$ est aussi solution de l'E.S.S.N. Donc $y_0 = K\sin x$ avec $K \in \mathbb{R}$

est la solution générale de l'E.S.S.N.

<u>Recherche d'une solution particulière de l'E.A.S.N.</u>

<u>Méthode de variation de la constante</u>

$y = K(x)\sin x \implies y' = K'(x)\sin x + K(x)\cos x$

L'E.A.S.N s'écrit : $K'(x)\sin^2 x + \cancel{K(x)\sin x\cos x} - \cancel{K(x)\sin x\cos x} = -1$

$\iff K'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \implies K(x) = \text{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \implies y_p = K(x)\sin x = \cos x$

Finalement $y = y_0 + y_p = K\sin x + \cos x$ est la solution générale de l'E.A.S.N.

Mais $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff K\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = 1 \iff K\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\iff K\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$

$\iff K + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \iff K = \sqrt{2} - 1$

Conclusion $y = (\sqrt{2}-1)\sin x + \cos x$ est la solution du problème de Cauchy (P_2)

Exercice 4 : 1) Résolvons l'équation de Bernoulli $xy' + y' - xy^3 = 0$ (E_B)

i) $y = 0$ sol. triviale de (E_B)

ii) Si $y \neq 0$, (E_B) s'écrit $\frac{xy'}{y^3} + \frac{y}{y^3} - x = 0 \iff x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x$ (E_{B_1})

Posons $u = \frac{1}{y^2}$

$u = \frac{1}{y^2} \Rightarrow u' = -\frac{2yy'}{y^4} = -\frac{2y'}{y^3} \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{u'}{2}$

(E_{B_1}) s'écrit : $-\frac{x}{2}u' + u = x$ qui est une éq. différentielle linéaire du 1er ordre.

Recherche de la solution générale u_0 de l'E.S.S.N : $-\frac{x}{2}u' + u = 0$

$u = 0$ est une sol. triviale.

Si $u \neq 0$, l'E.S.S.N s'écrit : $\frac{x}{2}u' = u \iff \frac{u'}{u} = \frac{2}{x} \iff \ln|u| = 2\ln|x| + c$

$\iff \ln|u| = \ln x^2 + c \iff |u| = e^c.x^2 \iff u = \pm e^c.x^2 = K.x^2$ avec $K = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$.

Mais $u = 0$ est aussi sol. de l'E.S.S.N donc $u_0 = Kx^2$ avec $K \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'E.S.S.N.

Recherche d'une solution particulière u_p de l'E.A.S.N $-\frac{x}{2}u' + u = x$

Variation de la constante : $u = K(x)x^2 \Rightarrow u' = K'(x)x^2 + 2xK(x)$

L'E.A.S.N s'écrit $-\frac{K'(x).x^3}{2} - \cancel{x^2K(x)} + \cancel{K(x)x^2} = x$

$\iff K'(x) = \frac{-2x}{x^3} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow K(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow u_p(x) = K(x)x^2 = \frac{2}{x}.x^2 = 2x$ est une solution particulière de l'E.A.S.N.

Finalement : $u = u_0 + u_p = Kx^2 + 2x$ avec $K \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'E.A.S.N en u

D'où $y^2 = \frac{1}{u} = \frac{1}{Kx^2+2x}$ avec nécessairement $Kx^2+2x > 0$.

$K=0 \Rightarrow [2x>0 \iff x>0]$

$Kx^2+2x=0 \iff x(Kx+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-\frac{2}{K}$

$K<0$: $-$ 0 $+$ $-\frac{2}{K}$ $-$ $\rightarrow$ Kx^2+2x

$K>0$: $+$ $-\frac{2}{K}$ $-$ 0 $+$ $\rightarrow$ Kx^2+2x

Donc
$$y = \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{Kx^2+2x}} & \text{sur }]0, -\frac{2}{K}[\text{ si } K<0 \\ & \text{sur }]-\infty, -\frac{2}{K}[\text{ ou }]0,+\infty[\text{ si } K>0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{sur }]0,+\infty[\\ 0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

sont les solutions de (E_B)

2) <u>Résolvons l'éq. de Riccati</u> : $x^2(y'+y^2) = xy - 1$ sachant que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière.

Posons $z = y - y_0$ c-à-d. $y = z + y_0 = z + \frac{1}{x}$. $x \neq 0$.

Dans ce cas, $y' = z' - \frac{1}{x^2}$

$y^2 = \left(z+\frac{1}{x}\right)^2 = z^2 + \frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}$ $\Bigg\} \Rightarrow y'+y^2 = z' + \frac{2}{x}z + z^2$

L'éq. de Riccati s'écrit : $x^2z' + 2xz + x^2z^2 = xz$ soit $x^2z' + xz + x^2z^2 = 0$

$\underset{x\neq 0}{\iff}$ $xz' + z + xz^2 = 0$ (E) qui est une équation de Bernoulli

$z=0$ est une solution triviale (qui correspond à $y=y_0$)

Si $z\neq 0$, (E) $\iff x\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} + x = 0 \iff x\frac{z'}{z} + \frac{1}{z} = -x$ (E_2)

Posons $u = \frac{1}{z}$ d'où $u' = -\frac{z'}{z^2}$ et $(E_2) \iff xu' - u = x$ (E_3)

Sol. g^{le} de l'E.S.S.1 $xu' - u = 0$ (E_4)

i) $u = 0$ sol. triviale

ii) Si $u \neq 0$, $xu' - u = 0 \Rightarrow xu' = u \Leftrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|u| = \ln|x| + C$

$\Leftrightarrow u = \pm e^{c} x = Kx$ avec $K \in \mathbb{R}^*$

Mais comme $u = 0$ est aussi sol. de l'E.S.S.1 alors $u_1 = Kx$ avec $K \in \mathbb{R}$

est la sol. g^{le} de (E_4).

Sol. particulière de l'E.A.S.1 $xu' - u = x$. Variation de la constante.

$u = K(x)x \Rightarrow u' = K'(x)x + K(x)$

$xu' - u = x \Rightarrow K'(x)x^2 + K(x)x - K(x)x = x \Leftrightarrow K'(x)x^2 = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow K(x) = \ln|x| \Rightarrow u_0 = x\ln|x|$ solution particulière de l'E.A.S.1 (E_3)

Par suite $u = u_1 + u_0 = Kx + x\ln|x|$ est la solution générale de (E_3)

D'où $z = \frac{1}{u} = \frac{1}{Kx + x\ln|x|}$ et $y = z + y_p = \frac{1}{Kx + x\ln|x|} + \frac{1}{x}$

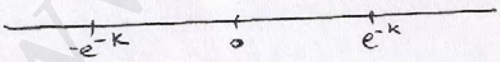
Finalement:

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow y = y_p = \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{*-} \text{ ou sur } \mathbb{R}^{*+} \\ z \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{Kx + x\ln|x|} + \frac{1}{x} \end{array}\right\} \text{solutions de l'éq. de Riccati donnée.}$$

$Kx + x\ln|x| = 0 \Leftrightarrow x(K + \ln|x|) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln|x| = -K$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $|x| = e^{-K}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm e^{-K}$



$y = \frac{1}{Kx + x\ln|x|} + \frac{1}{x}$ alors solution sur $]-\infty, -e^{-K}[$ (ou sur) $]-e^{-K}, 0[$ (ou sur) $]0, e^{-K}[$ (ou sur) $]e^{-K}, +\infty[$

Eq. de Bernoulli. $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 0$ éq. diff. linéaire

$\alpha = 1$ " " "

$\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ $\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = b(x)$ Poser $u = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ ... on obtient une éq. diff. linéaire du 1er ordre

Eq. de Riccati: $y' + a(x)y = B(x)y^2 + C(x)$

Poser $z = y - y_p$ où y_p sol. particulière. On obtient une éq. de Bernoulli avec $\alpha = 2$