Analyse 1

Exercices avec Corrigés

1ere année MI

- Chapitre 1: Les nombres réels
- Chapitre 2: Les suites
- Chapitre 3: Limites et Fonctions continues
- Chapitre 4: Fonctions usuelles
- Chapitre 5: Courbes paramétrées

www.mathonec.com

Université	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: On donne les nombres entiers $A = 132$ et $B = 67$ en base 10.

1. Écrire ces deux nombres en base 2, puis en base 5.
2. Effectuer la somme $A + B$ en base 2, puis en base 5. Vérifier les résultats en exprimant $A + B$ en base 10.
3. (Facultatif) Refaire le même travail en remplaçant l'addition par la multiplication.

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ les équations suivantes :

$$\overline{1x3}^{x} = \overline{23}^{5} \qquad , \qquad \overline{x2}^{2x} = \overline{x6}^{7}$$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{Z}$, respectivement dans $\mathbb{Z}^2$, les équations :

$$x^3 - 5x^2 + 8 = 0 \qquad , \qquad 2x - 3y = 5$$

Indication : utiliser la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4: Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1. La somme (resp. le produit) d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
2. La somme (resp. le produit) de deux irrationnels est irrationnelle.

Exercice 5: Établir les résultats suivants ($[x]$ désigne la partie entière de x):

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$
2. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } \; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 6: Déterminer, si elles existent, les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants (discuter suivant les valeurs des paramètres) :

$$A = \left\{ (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \big/ k, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad , \qquad B_{\alpha,\beta} = \left\{ x^2 - x + 1 \big/ x \in [\alpha, \beta] \right\}$$

Exercice 7: Soient A, B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$. Montrer aussi que $\sup A = \inf B$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad , \exists b \in B \quad$ tels que $\quad b - a \leq \varepsilon$.

Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\left|2x^2 - 1\right| \leq |x + 1|$$

Exercice 1: On donne les nombres entiers $A = 132$ et $B = 67$ en base 10.

1. Écrire ces deux nombres en base 2, puis en base 5.
2. Effectuer la somme $A + B$ en base 2, puis en base 5. Vérifier les résultats en exprimant $A + B$ en base 10.
3. (Facultatif) Refaire le même travail en remplaçant l'addition par la multiplication.

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ les équations suivantes :

$$\overline{1x3}^{x} = \overline{23}^{5} \quad , \quad \overline{x2}^{2x} = \overline{x6}^{7}$$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{Z}$, respectivement dans $\mathbb{Z}^2$, les équations :

$$x^3 - 5x^2 + 8 = 0 \quad , \quad 2x - 3y = 5$$

Indication : utiliser la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4: Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1. La somme (resp. le produit) d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
2. La somme (resp. le produit) de deux irrationnels est irrationnelle.

Exercice 5: Établir les résultats suivants ($[x]$ désigne la partie entière de x):

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$
2. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 6: Déterminer, si elles existent, les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants (discuter suivant les valeurs des paramètres) :

$$A = \left\{(-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} / k, n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B_{\alpha,\beta} = \left\{x^2 - x + 1 / x \in [\alpha, \beta]\right\}$$

Exercice 7: Soient A, B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$. Montrer aussi que $\sup A = \inf B$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad , \exists b \in B$ tels que $b - a \leq \varepsilon$.

Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|2x^2 - 1| \leq |x + 1|$$

T.D n°1

Exercice 1

1) $\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 66 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 33 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 33 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 16 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 8 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

Donc $132 = \overline{10000100}^{2}$

$\begin{array}{r|l} 132 & 5 \\ \hline 32 & 26 \\ \boxed{2} & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 26 & 5 \\ \hline \boxed{1} & 5 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 5 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

Donc $132 = \overline{1012}^{5}$

$\begin{array}{r|l} 67 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 33 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 33 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 16 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 8 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 4 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$

Donc,

$67 = \overline{1000011}^{2}$

$\begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 13 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline \boxed{3} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 0 \end{array}$

Donc

$67 = \overline{232}^{5}$

2) En base 2 : $A+B = \overline{10000100}^2 + \overline{1000011}^2$

$$
\begin{array}{r}
\overline{10000100}^2 \\
+ \quad \overline{1000011}^2 \\
\hline
\overline{11000111}^2
\end{array}
$$

or en base 10 : $A+B = 132+67 = 199$

Vérifions : $\overline{11000111}^2 = 1+2+2^2+0.2^3+0.2^4+0.2^5+1.2^6+1.2^7$

$= 1+2+4+64+128$

$= 199$

En base 5 : $A+B = \overline{1012}^5 + \overline{232}^5$

$$
\begin{array}{r}
\overline{1012}^5 \\
+ \quad \overline{232}^5 \\
\hline
\overline{1244}^5
\end{array}
$$

Vérifions : $\overline{1244}^5 = 4+4\times5+2\times5^2+1\times5^3$

$= 4+20+50+125 = 199.$

3) En base 2 : $A\times B = \overline{10000100}^2 \times \overline{1000011}^2$

$$
\begin{array}{r}
10000100 \\
\times \quad 1000011 \\
\hline
\overline{10000100}^2 \\
\overline{10000100}^2 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\overline{10000100}^2 \\
\hline
\overline{10001010001100}^2
\end{array}
$$

En base 10 : $A\times B = 132 \times 67$

$$
\begin{array}{r}
132 \\
\times \quad 67 \\
\hline
924 \\
792 \\
\hline
8844
\end{array}
$$

Vérifions : $\overline{10001010001100}^2 = 0+0.2+1.2^2+1.2^3+\dots+1.2^7+0.2^8+1.2^9+\dots+1.2^{13}$

$= 4+8+128+512+8192$

$= 652+8192 = 8844.$

En base 5 : $A \times B = \overline{1012}^5$

$$
\begin{array}{r}
\overline{232}^5 \\
\times \quad \\
\hline
\overline{2024}^5 \\
\overline{3041}^5 \\
\overline{2024}^5 \\
\hline
\overline{240334}^5
\end{array}
$$

Vérifions, $\overline{240334}^5 = 4 + 3\times5 + 3\times5^2 + 0.5^3 + 4\times5^4 + 2\times5^5$

$= 4 + 15 + 75 + 4\times625 + 2\times3125$

$= \underbrace{4+15+75} + 2500 + 6250$

$= 94 + 2500 + 6250$

$= 94 + 8750$

$= 8844$

Exercice 2 Résolvons dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$.

a) $\overline{1x3}^x = \overline{23}^5$

Equation incohérente, donc pas de solution.

Le nombre est écrit en base x, et x figure dans son écriture. impossible.

Seuls les nombres inférieurs à x doivent figurer dans l'écriture.

b) $\overline{x2}^{2x} = \overline{x6}^7$ $\quad x < 2x$ trivial et $x < 7$.

Donc

$2 + x \times 2x = 6 + x \times 7$

Par suite $2 + 2x^2 = 6 + 7x \iff 2x^2 - 7x - 4 = 0$

$\Delta = 49 + 32 = 81 = 9^2$

$x_1 = \dfrac{7-9}{4} = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$x_2 = \dfrac{7+9}{4} = 4 \in \mathbb{N}$ et $4 < 7$.

Donc $x = 4$ est solution de l'équation donnée

ou tout simplement puisque résolution dans $\mathbb{N}$:

$2x^2 - 7x - 4 = 0 \iff 2x^2 - 7x = 4$

$\iff x(2x-7) = 4$

$\Rightarrow x$ divise $4 \Rightarrow x \in \{1,2,4\}$

$x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = -9 \neq 0$

Donc $x = 1$ ne convient pas

$x = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = -10 \neq 0$

Donc $x = 2$ ne convient pas.

$x = 4 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0$

Donc $x = 4$ est la solution de l'éq. donnée

Exercice 3 : Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$:

a) $x^3 - 5x^2 + 8 = 0$.

$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 = -8$

$\Leftrightarrow x^2(x-5) = -8$.

Donc x^2 divise -8 et $x^2 > 0$

Par suite : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$ ou $x^2 = 4$ ou $x^2 = 8$

c-à-d : $\begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{8} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{8} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

x	-1	1	2	-2
x^3-5x^2+8	2 $\neq 0$	4 $\neq 0$	-4 $\neq 0$	-10 $\neq 0$.

L'équation $x^3 - 5x^2 + 8 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b) $2x - 3y = 5$

$2x = 3y + 5$

$= 3y + 3 + 2$

$= 3(y+1) + 2$

Donc le reste de la division de $2x$ par 3 est 2.

D'où $2x = 3p + 2$ c-à-d. $3p = 2x - 2 = 2(x-1)$

3 ne divise pas 2 donc 3 divise $x-1$ c-à-d. $x - 1 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$

soit : $x = 3k+1$

Or $2x = 3y + 5$. Donc $6k + 2 = 3y + 5 = 3(y+1) + 2$

Finalement, $6k = 3(y+1)$ c-à-d. $y + 1 = 2k$ d'où $y = 2k - 1$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ 2x - 3y = 5\} = \{(3k+1,\ 2k-1),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4.

1) La somme (ou le produit) d'un nombre rationnel r_1 et d'un nombre irrationnel i_1 est-elle (est-il) un nombre irrationnel ?

Faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que i_1+r_1 soit un nombre rationnel r_2 et que $i_1 \cdot r_1$ soit aussi un nombre rationnel r_3.

$i_1+r_1=r_2 \iff \underbrace{i_1}_{\notin \mathbb{Q}} = \underbrace{\underbrace{r_2}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{r_1}_{\mathbb{Q}}}_{\in \mathbb{Q}}$

Absurde. Donc i_1+r_1 est irrationnel

$i_1 \cdot r_1 = r_3$

Si $r_1=0$, $i_1 r_1 = 0 \in \mathbb{Q}$

Si $r_1 \neq 0$, $\underbrace{i_1}_{\notin \mathbb{Q}} = \left(\dfrac{r_3 \in \mathbb{Q}}{r_1 \in \mathbb{Q}}\right) \in \mathbb{Q}$

Absurde

Donc $i_1 r_1$ est irrationnel.

2) La somme (ou le produit) de 2 nombres irrationnels i_1 et i_2 est-elle (est-il) un nombre irrationnel ?

Considérons les cas suivants :

$i_1 = 3-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$i_2 = 3+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ } d'après la 1ère question.
$i_3 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$i_1+i_2 = 6 \in \mathbb{Q}$ et $i_1 \cdot i_2 = 9-2 = 7 \in \mathbb{Q}$

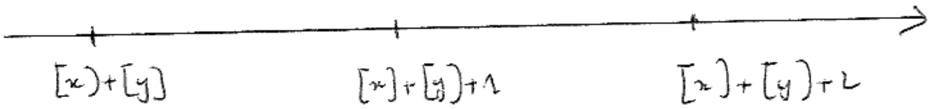
$i_2+i_3 = \underbrace{\underbrace{3}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{2\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}}}_{\notin \mathbb{Q}}$ et $i_2 \cdot i_3 = \underbrace{\underbrace{3\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} + \underbrace{2}_{\in \mathbb{Q}}}_{\notin \mathbb{Q}}$

Donc on ne peut rien conclure ni pour la somme ni pour le produit de 2 nombres irrationnels.

Exercice 5 : 1) Montrons que $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $[x]+[y] \leqslant [x+y] \leqslant [x]+[y]+1$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{c} [x] \leqslant x < [x]+1 \\ [y] \leqslant y < [y]+1 \\ \hline \underbrace{[x]+[y]}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x+y < \underbrace{[x]+[y]+2}_{\in \mathbb{Z}.} \end{array} \quad (*)$$



$$(*) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} [x]+[y] \leqslant x+y < [x]+[y]+1 \\ \quad \text{ou} \\ [x]+[y]+1 \leqslant x+y < [x]+[y]+2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [x+y] = [x]+[y] \\ \quad \text{ou} \\ [x+y] = [x]+[y]+1 \end{array} \right.$$

Par suite $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $[x]+[y] \leqslant [x+y] \leqslant [x]+[y]+1$

2) Montrons que : $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

i) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $[x] = x$ et $[\underbrace{-x}_{\in \mathbb{Z}}] = -x$. Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $[x]+[-x] = x - x = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $[x] < x < [x]+1$ et $-[x]-1 < -x < -[x]$ donc $[-x] = -[x]-1$

2 nbres entiers consécutifs.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $[x]+[-x] = [x]-[x]-1 = -1$ cqfd.

Exercice 6. Déterminons, si elles existent, inf A, inf B, sup A et sup B, dans les cas suivants :

$$A = \left\{ (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \,/\, k,n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad B_{\alpha,\beta} = \left\{ x^2 - x + 1 \,/\, x \in [\alpha,\beta] \right\}$$

$$(-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -1 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est impair et } n \text{ est impair} \\ -1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est impair et } n \text{ est pair} \\ 1 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est pair et } n \text{ est impair} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est pair et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Il est clair que $A \neq \emptyset$

Donc

$$A = \underbrace{\left\{-1 - \frac{1}{2k+2}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{-1 + \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_2} \cup \underbrace{\left\{1 - \frac{1}{2k+2}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_3} \cup \underbrace{\left\{1 + \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ 2 \leq 2k+2 \\ 0 < \frac{1}{2k+2} \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2k+2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ -\frac{3}{2} \leq -1 - \frac{1}{2k+2} < -1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2k+2} < 0$$

Donc A_1 est minoré par $-\frac{3}{2}$, majoré par -1

et A_3 " " " $\frac{1}{2}$, majoré par 0

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2k+1 \\ 0 < \frac{1}{2k+1} \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ -1 < -1 + \frac{1}{2k+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad 1 < 1 + \frac{1}{2k+1} \leq 2$$

Donc A_2 est minoré par -1, majoré par 0

et A_4 " " " 1, majoré par 2.

Finalement, A est minoré par $-\frac{3}{2}$, majoré par 2, donc $\inf A$ et $\sup A$ existent

De plus : $-\frac{3}{2} = (-1)^1 + \frac{(-1)^1}{1+1} = (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $k=1$ et $n=1$

Donc $-\frac{3}{2} \in A$.

$2 = (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $k=0$ et $n=0$ donc $2 \in A$

$\left(-\frac{3}{2} \in A \Rightarrow A \neq \emptyset\right)$

$-\frac{3}{2}$ minore A et $-\frac{3}{2} \in A$. Donc $\inf A = -\frac{3}{2}$

2 majore A et $2 \in A$. Donc $\sup A = 2$.

Soit $B_{\alpha,\beta} = \{x^2 - x + 1 \ , \ x \in [\alpha, \beta]\}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$x \in [\alpha, \beta] \iff \alpha \leqslant x \leqslant \beta \iff \alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2}$

<u>1er cas</u> : Si $\beta - \frac{1}{2} \leqslant 0$ c.à.d. $\beta \leqslant \frac{1}{2}$.

Comme $\alpha < \beta$, on a $\alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2} \leqslant 0$

D'où $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2$ ($\geqslant 0$ trivial)

Par suite $\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

soit $\underbrace{\beta^2 - \beta + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}} \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant \underbrace{\alpha^2 - \alpha + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}}$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$

Finalement si $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ alors $B_{\alpha,\beta}$ est borné donc $\inf B_{\alpha,\beta}$ et $\sup B_{\alpha,\beta}$ existent.

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2 - \beta + 1 \text{ minore } B_{\alpha,\beta} \text{ et } \beta^2 - \beta + 1 \in B_{\alpha,\beta} \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ majore } B_{\alpha,\beta} \text{ et } \alpha^2 - \alpha + 1 \in B_{\alpha,\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta} = \beta^2 - \beta + 1 \text{ et } \sup B_{\alpha,\beta} = \alpha^2 - \alpha + 1$$

<u>2ème cas</u> : Si $\alpha - \frac{1}{2} \geqslant 0$ c.à.d $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$

Comme $\alpha < \beta$, on a $0 \leqslant \alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2}$

D'où $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

c.à.d : $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\underbrace{\alpha^2 - \alpha + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}} \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant \underbrace{\beta^2 - \beta + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}}$

Finalement si $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, alors $B_{\alpha,\beta}$ est bornée donc $\inf B_{\alpha,\beta}$ et $\sup B_{\alpha,\beta}$ existent

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ minore } B_{\alpha,\beta} \text{ et } \alpha^2 - \alpha + 1 \in B_{\alpha,\beta} \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \beta^2 - \beta + 1 \text{ majore } B_{\alpha,\beta} \text{ et } \beta^2 - \beta + 1 \in B_{\alpha,\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta} = \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ et } \sup B_{\alpha,\beta} = \beta^2 - \beta + 1$$

3ème cas : Si $\alpha-\frac{1}{2}<0$ et $\beta-\frac{1}{2}>0$ c-à-d $\alpha<\frac{1}{2}<\beta$ ou encore $\frac{1}{2}\in]\alpha,\beta[$

$x=\frac{1}{2}\in]\alpha,\beta[$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$ d'où $B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset$

On a déjà noté que $\forall x\in[\alpha,\beta] \iff \alpha-\frac{1}{2}\leq x-\frac{1}{2}\leq\beta-\frac{1}{2}$

De plus $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $x^2-x+1=\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

Donc $\frac{3}{4}$ minore $B_{\alpha,\beta}$.

Par suite $\left.\begin{array}{l} B_{\alpha,\beta} \text{ minoré} \\ B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta}$ existe

Par ailleurs, il est clair que pour $x=\frac{1}{2}$, $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

Donc $\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$

Finalement $\inf B_{\alpha,\beta}=\frac{3}{4}$.

Il reste à déterminer $\sup B_{\alpha,\beta}$

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\underbrace{\alpha-\frac{1}{2}}_{<0}\leq x-\frac{1}{2}\leq\underbrace{\beta-\frac{1}{2}}_{>0} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\max\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2,\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$$\Rightarrow x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\leq\max\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2,\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{3}{4}=\begin{cases}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\geq\left|\alpha-\frac{1}{2}\right| \\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\leq\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|\end{cases}$$

Or $\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$ et $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$.

Donc $\begin{cases} B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset \\ B_{\alpha,\beta} \text{ majoré par } \underbrace{\beta^2-\beta+1 \text{ ou } \alpha^2-\alpha+1} \end{cases}$ soit $\sup B_{\alpha,\beta}$ existe

c-à-d $\begin{cases} B_{\alpha,\beta} \text{ majoré par } \max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right) \\ \max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right)\in B_{\alpha,\beta}\end{cases} \Rightarrow \sup B_{\alpha,\beta}=\max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right)$

$$=\begin{cases}\beta^2-\beta+1 & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\geq-\alpha+\frac{1}{2} \\ \alpha^2-\alpha+1 & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\leq-\alpha+\frac{1}{2}\end{cases}$$

Exercice 7 $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

a) Montrons que Sup A et inf A existent.

Soit $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall a \in A, \ a \leq b_0 \\ \text{et} \\ \forall b \in B, \ b \geq a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \text{ majoré par } b_0 \\ \text{et} \\ B \text{ minoré par } a_0 \end{array}\right.$$

A est donc non vide et majoré. Par suite Sup A existe

B " " " " minoré. " inf A existe

b) Montrons que $\text{Sup} A \leq \inf B$.

Soit b quelconque dans B.

$\forall a \in A, a \leq b$ c-à-d. b majore A.

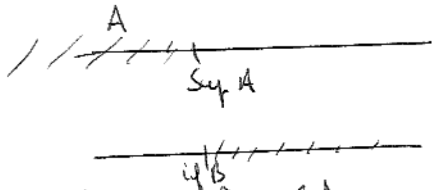
Or Sup A est le plus petit majorant de A. Donc $\forall b \in B, \text{Sup} A \leq b$.

D'où Sup A minore B.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sup } A \text{ minore } B \\ \inf A \text{ plus grand minorant de } B \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sup} A \leq \inf B$$

c) Montrons que $\text{Sup} A = \inf B \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < \varepsilon$

"$\Rightarrow$" $\text{Sup} A = \inf B$



$\forall a \in A, a \leq \text{Sup} A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, a_0 \geq \text{Sup} A - \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, -a_0 < -\text{Sup} A + \varepsilon$ (α)

$\forall b \in B, b \geq \inf B$

$\forall \varepsilon > 0, \exists b_0 \in B, b_0 \leq \inf B + \varepsilon$ (β)

(α) et $(\beta) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 \leq \inf B - \text{Sup} A + 2\varepsilon$

$\inf B = \text{Sup} A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 \leq 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0 \iff 2\varepsilon > 0$.

En posant $2\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, on obtient $\forall \bar{\varepsilon} > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 < \bar{\varepsilon}$

c-à-d. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < \varepsilon$

" $\Leftarrow$ " Il reste à montrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \varepsilon \implies \sup A = \inf B$.

c-à-d $\sup A \neq \inf B \implies \exists \varepsilon_0 > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \varepsilon_0$

Supposons $\sup A \neq \inf B$.

On a déjà montré que $\sup A \leq \inf B$.

Donc $\sup A \neq \inf B \implies \sup A < \inf B \iff \inf B - \sup A > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \forall a \in A, \ a \leq \sup A \ \text{ c-à-d. } -a \geq -\sup A \\ \forall b \in B, \ b \geq \inf B \end{array}\right\} \implies \forall a \in A, \forall b \in B, b - a \geq \inf B - \sup A > 0$$

Or, $\inf B - \sup A > \dfrac{\inf B - \sup A}{2}$ $\left(\dfrac{\inf B - \sup A}{2018} \ !!! \right)$

$\implies \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \dfrac{\inf B - \sup A}{2} > 0$

Donc $\exists \underbrace{\varepsilon_0}_{= \frac{\inf B - \sup A}{2}} > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \varepsilon_0$

<u>Exercice 8</u> Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x^2 - 1| \leq |x+1|$ c-à-d $|2x^2-1| - |x+1| \leq 0$

$2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = +\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
Signe de $2x^2-1$	+	0	−	0	+

$x + 1 = 0 \iff x = -1$

x		-1	
Signe de $x+1$	−	0	+

<u>Exercice 8 :</u> Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x^2-1| \leq |x+1|$

Simplifions d'abord l'écriture des expressions $|2x^2-1|$ et $|x+1|$

$2x^2-1=0 \iff x^2=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^2-1$	+	0	−	0	+

$x+1=0 \iff x=-1$

x		-1	
$x+1$	−	0	+

x	$-\infty$ -1	-1 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x+1$	− 0	+	+	+
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$ 0	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$2x^2-1$	+	+ 0	− 0	+
$\lvert 2x^2-1\rvert$	$2x^2-1$	$2x^2-1$ 0	$-2x^2+1$ 0	$2x^2-1$
$\lvert 2x^2-1\rvert \leq \lvert x+1\rvert$	$2x^2+x\leq 0$	$2x^2-x-2\leq 0$	$2x^2+x\geq 0$	$2x^2-x-2\leq 0$

a) $2x^2+x=0 \iff x(2x+1)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

x		$-\frac{1}{2}$		0	
$2x^2+x$ sur $\mathbb{R}$	+	0	−	0	+

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^2+x$	+				+	0	−	0	+		

$2x^2+x$ sur $]-\infty,-1] \cup \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$S_1=\{x\in\,]-\infty,-1)\ ,\ 2x^2+x\leq 0\}=\emptyset$

$S_2=\left\{x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ 2x^2+x\geq 0\right\}=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

b) $2x^2-x-2=0$; $\Delta=1+16=17$; $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

x		x_1		x_2	
$2x^2-x-2$ sur $\mathbb{R}$	+	0	−	0	+

x	-1		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2-x-2$		+	0	−				−	0	+

$2x^2-x-2$ sur $\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

$S_3\left\{x\in\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[\ ,\ 2x^2-x-2\leq 0\right\}=\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$

<u>Conclusion :</u> $\{x\in\mathbb{R},\ |2x^2-1|\leq|x+1|\}=S_1\cup S_2\cup S_3$

$=\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[0,\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$

Université -	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°2

Exercice 1: On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. En posant $x_n = u_n - a$, déterminer la constante a pour que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique. Calculer alors u_n en fonctions de n.
2. Généraliser enfin au cas où $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$.

Exercice 2: En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0.$$

Exercice 3: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 4: Soit a un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$
Montrer que cette suite est croissante. En supposant qu'elle est majorée, déterminer sa limite (possible). Discuter enfin suivant les valeurs de a l'existence de la limite.

Exercice 5: On donne la suite : $\begin{cases} y_0 = \dfrac{11}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{y_n - \dfrac{7}{4}} \end{cases}$ Montrer que cette suite est bien définie. En supposant qu'elle converge, déterminer sa limite possible L. Montrer qu'elle est majorée par L. Étudier enfin sa monotonie, puis conclure.

Exercice 6: On définit, pour $n \geq 1$, les deux suites :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad , \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (on ne cherchera pas à déterminer leur limite commune). En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 7: Montrer par récurrence sur p que
$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p+1}$. En déduire que la suite définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est de Cauchy.

Exercice 8: Est-il vrai qu'une suite réelle croissante ayant une sous-suite convergente, est, elle même, convergente ? Si oui, l'hypothèse "croissante" est-elle vraiment nécessaire?

Exercice 1: On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. En posant $x_n = u_n - a$, déterminer la constante a pour que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique. Calculer alors u_n en fonctions de n.

2. Généraliser enfin au cas où $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$.

Exercice 2: En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0.$$

Exercice 3: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls, telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 4: Soit a un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$
Montrer que cette suite est croissante. En supposant qu'elle est majorée, déterminer sa limite (possible). Discuter enfin suivant les valeurs de a l'existence de la limite.

Exercice 5: On donne la suite : $\begin{cases} y_0 = \dfrac{11}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{y_n - \dfrac{7}{4}} \end{cases}$ Montrer que cette suite est bien définie. En supposant qu'elle converge, déterminer sa limite possible L. Montrer qu'elle est majorée par L. Étudier enfin sa monotonie, puis conclure.

Exercice 6: On définit, pour $n \geq 1$, les deux suites :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad , \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (on ne cherchera pas à déterminer leur limite commune). En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 7: Montrer par récurrence sur p que
$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}$. En déduire que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est de Cauchy.

Exercice 8: Est-il vrai qu'une suite réelle croissante ayant une sous-suite convergente, est, elle même, convergente ? Si oui, l'hypothèse "croissante" est-elle vraiment nécessaire?

1ère Année M.I – Semestre 1 – 2018/2019.

Module : "Analyse 1" – Série de T.D N° 2.

Corrigé.

Exercice 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1°/ Posons $x_n = u_n - a$. Alors $x_{n+1} = u_{n+1} - a = 2u_n + 1 - a = 2(x_n + a) + 1 - a$
d'où $x_{n+1} = 2x_n + a + 1$. D'où (x_n) sera géométrique si $a + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$
Dans ce cas $x_{n+1} = 2x_n \Rightarrow x_n = 2^n \cdot x_0 = 2^n(u_0 - (-1)) = 2^n$ et donc

$$\boxed{u_n = 2^n - 1}.$$

2°/ Généralisation : $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$ (w_0 donné). Posons $y_n = w_n - b$,
$\Rightarrow y_{n+1} = w_{n+1} - b = \alpha w_n + \beta - b = \alpha(y_n + b) + \beta - b = \alpha y_n + (\alpha - 1)b + \beta$

Donc si $(\alpha - 1)b + \beta = 0$ alors (y_n) sera géométrique.

1er cas : $\boxed{\alpha \neq 1}$ on aura $\boxed{b = \frac{\beta}{1-\alpha}}$, $y_{n+1} = \alpha y_n$ et

$$y_n = \alpha^n y_0 = \alpha^n\left(w_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) \text{ d'où}$$

$$w_n = y_n + b = \alpha^n\left(w_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

ou encore $$\boxed{w_n = \alpha^n w_0 + \beta\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}$$

2ème cas : $\boxed{\alpha = 1}$ Dans ce cas, par translation on ne peut pas obtenir (y_n) géométrique. Mais, puisque la question est le calcul de l'expression de w_n en fonction de n, il est possible de le faire car (w_n) est arithmétique de raison β : $\boxed{w_n = w_0 + n\beta}$.

Exercice 3 : L'hypothèse est $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$ càd $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \varepsilon$.
Prenons $\varepsilon \leq 1$. Alors à partir du rang N_ε, la suite $|u_n|$ est décroissante.
Elle est manifestement minorée par 0 ($\forall n, |u_n| \geq 0$). Donc $(|u_n|)$ est convergente vers $l \geq 0$.
Si on avait $l \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{l}{l} = 1$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$.
Donc forcément $l = 0$ (cqfd).

Exercice 3 : On a $0 \leq \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \leq \dfrac{2}{2\sqrt{n^2-1}}$, $\forall n \geq 2$.

Si $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \leq \varepsilon$ alors $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} \leq \varepsilon$. Ainsi il faut prendre n tq

$\sqrt{n^2-1} \geq 1/\varepsilon \Rightarrow n^2 \geq 1 + 1/\varepsilon^2 \Rightarrow n \geq \sqrt{1+1/\varepsilon^2}$. Il suffit que

$\boxed{N(\varepsilon) = \left[\sqrt{1+1/\varepsilon^2}\right] + 1}$ pour que $n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 4 : $a \in \mathbb{R}$ fixé. $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$

* (u_n) est croissante : en effet, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{1}{4} - u_n = (u_n - 1/2)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
* La limite possible : Si (u_n) était majorée, elle serait convergente car elle est croissante. Notons l sa limite. On aura $l = l^2 + 1/4$ $\Rightarrow (l - 1/2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{l = 1/2}$.
* Discussions : Pour que ce qui précède fonctionne, il faut voir dans quel cas (sur a) la suite est majorée. Maintenant nous avons un candidat majorant qui est $1/2$. Peut-on montrer que $u_n \leq 1/2$ $\forall n$. Une démonstration par récurrence se ferait ainsi : $u_n \leq 1/2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 1/2$; or pour avoir u_{n+1} il faut élever u_n au carré. Mais $u_n \leq 1/2 \Rightarrow u_n^2 \leq 1/4$ est vrai si $u_n \geq 0$. Ceci commence à être vrai pour $n \geq 1$ seulement. Donc la récurrence commence à $n=1$ et non $n=0$. $u_1 = a^2 + 1/4 \leq 1/2 \Leftrightarrow a^2 \leq 1/4$ et donc $\boxed{-\frac{1}{2} \leq a \leq 1/2}$. En définitive :
  * Si $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: alors (u_n) est majorée par $1/2$ et sera convergente, sa limite est $l = 1/2$.
  * Si $a \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: alors $u_1 > 1/2$ et comme (u_n) est croissante elle ne peut pas être majorée (le seul majorant est $1/2$!) donc (u_n) est divergente. $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty\right)$.

Rque : * Si $a = -1/2$, $u_1 = 1/2 = u_n$ $\forall n \geq 1$

* Si $a = 1/2$, $u_n = 1/2$ $\forall n \geq 0$.

Exercice 5 :
$$\begin{cases} y_0 = 11/4 \\ y_{n+1} = 5/2 + \sqrt{y_n - 7/4} \end{cases}$$
(y_n) est bien définie

si et ssi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 7/4$. Montrons-le par récurrence. On a déjà $y_0 = \frac{11}{4} > 7/4$. Si maintenant $y_n \geq 7/4 \Rightarrow y_n - 7/4 \geq 0 \Rightarrow y_{n+1} \geq \frac{5}{2} > \frac{7}{4}$.

Supposons à présent que (y_n) converge vers L. Alors
$$L = \frac{5}{2} + \sqrt{L - \frac{7}{4}} \Rightarrow \left(L - \frac{5}{2}\right)^2 = L - \frac{7}{4}$$
$$\Rightarrow L^2 - 6L + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 2 \\ \text{ou} \\ L = 4 \end{cases}$$

Laquelle des deux valeurs choisir ? Calculons quelques termes.

$y_0 = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} > 2$ et $y_0 < 4$.

$y_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{7}{4}} = \frac{5}{2} + 1 = 2 + \frac{3}{2} > 2$ et $y_1 < 4$.

$y_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{7}{4}} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}} = 2 + \frac{1+\sqrt{7}}{2} > 2$ et $y_2 < 4$.

On demande de montrer que $y_n \leq L$, la seule possibilité est $L = 4$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq 4$. C'est vrai pour $n=0$.

Si $y_n \leq 4 \Rightarrow y_n - \frac{7}{4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{y_n - \frac{7}{4}} \leq 3/2 \Rightarrow y_{n+1} \leq \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$.

Reste la monotonie. On a $y_{n+1} - y_n = \frac{5}{2} + \sqrt{y_n - \frac{7}{4}} - y_n = \left(\frac{5}{2} - y_n\right) + \sqrt{y_n - 7/4}$
$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{-(y_n^2 - 6y_n + 8)}{\sqrt{y_n - \frac{7}{4}} + (y_n - 5/2)} = \frac{-(y_n - 2)(y_n - 4)}{\sqrt{y_n - \frac{7}{4}} + (y_n - 5/2)} \quad (*)$$

Essayons de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 5/2$. Pour $n=0$, $y_0 = \frac{11}{4} > \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. Comme $y_n \geq 7/4 \Rightarrow y_{n+1} - \frac{5}{2} = \sqrt{y_n - 7/4} \geq 0 \Rightarrow y_{n+1} \geq 5/2$.

Donc le dénominateur de $(*)$ est positif. De plus $\frac{5}{2} \leq y_n \leq 4$ implique que $(y_n - 2)(y_n - 4) \leq 0$ d'où $y_{n+1} - y_n \geq 0$ c.à.d (y_n) est croissante.

Comme elle est majorée par 4, elle sera convergente et sa limite est
$$\boxed{L = 4}.$$

Exercice 6 : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$; $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$, $n \geq 1$

1°/ (u_n) et (v_n) sont adjacents :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{2n+3-2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = \frac{4n^2+8n+1}{(2n+3+2\sqrt{n+2})\sqrt{n+1}} > 0$$

donc croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{-4n^2-1}{(2\sqrt{n}+2n+1)\sqrt{n+1}} \leq 0$$

donc décroissante.

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

(cqfd)

2°/ Comme elles sont adjacents donc elles sont convergents et vers la même limite L (qu'on ne cherche pas à calculer).

Donc $v_n - L = \theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc

$$v_n = L + \theta_n \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} = L + \theta_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2 + \frac{L}{\sqrt{n}} + \frac{\theta_n}{\sqrt{n}}$$

alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 2}$.

Exercice 7 : Il s'agit de montrer que : (récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$)

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \ \underbrace{\left\{\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1}\right\}}_{A(p)}$$

Si $p=1$: $A(1)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$ vraie car

$n(n+2) = n^2+2n < n^2+2n+1 = (n+1)^2$.

Supposons que nous avons montré jusqu'à p. Alors

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p+1)^2}}_{\text{Voir } A(p) \text{ pour } n \to n+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+2}$$

$$< \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+p+2}$$

$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+2}$$

$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$.

Posons à présent $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$. Alors

$$u_{n+p} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}.$$

Donc si $n \geq N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ et p qcq on aura $|u_{n+p} - u_n| = u_{n+p} - u_n < \varepsilon$.

càd (u_n) est de Cauchy. (Donc convergente).

Exercice 8 : Soit (u_n) une suite croissante. Soit $v_k = u_{\varphi(k)}$ une sous-suite ($\varphi(\cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est le "procédé" d'extraction, strictement croissant).

Il est clair que (v_k) est aussi croissante. Comme elle converge par hypothèse, sa limite est $L = \sup_k v_k$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k \leq L$.

Soit $n \geq \varphi(0)$, un entier quelconque. $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\varphi(k) > n$

donc $u_n \leq u_{\varphi(k)} = v_k \leq L$, càd (u_n) est majorée aussi par L, donc convergente. Sa limite est L, elle aussi, car sinon la limite de (v_k) ne serait pas L.

L'hypothèse "(u_n) croissante" est vraiment nécessaire, car la convergence d'une (seule) sous-suite n'implique pas la convergence de toute la suite, il suffit de penser à $u_n = (-1)^n$ qui n'a pas de limite, alors que $v_k = u_{2k} = 1$ converge vers 1.

Université	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°3

Exercice 1: Déterminer les domaines de définition des fonctions réelles suivantes :
$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3-1}}$, $g(x) = \ln(1-2\cos x)$, $h(x) = \ln\left(\dfrac{2-|x|}{|x|-1}\right)$

Exercice 2: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ décroissante. Montrer alors que f est décroissante. Que peut-on dire dans le cas $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ toutes deux décroissantes ?
(Indication : se rappeler que la monotonie d'une fonction g est liée au signe du rapport $\dfrac{g(x)-g(x')}{x-x'}$)

Exercice 3: En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} = 1/2 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3/2$$

(Indication: pour la deuxième on pourra utiliser le changement $x = t^3$)

Exercice 4: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Exercice 5: On définit une fonction réelle f par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ \sqrt{x^2+\lambda x} & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$

Déterminer les valeurs du paramètre λ pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Étudier dans ce cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en discutant suivant les valeurs de λ.

Exercice 6: Montrer que la fonction définie par $g(x) = \sin x \sin(1/x)$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$. Ce résultat reste-t-il vrai si on remplaçait le sinus par le cosinus ?

Exercice 7: Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application telle que $\forall x, x' \in [a,b]$
$|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$. Montrer que f est continue, puis qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Application : $f(x) = \cos x$ dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 8: Soit $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une application continue telle que
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que g admet un maximum. Montrer ensuite à travers un contre-exemple que le résultat n'est plus vrai si on ne fait pas l'hypothèse de continuité.

1ère Année M.I - Semestre 1 - 2018/2019.

Module : "Analyse I" - Fiche de T.D N° 3.

Corrigé.

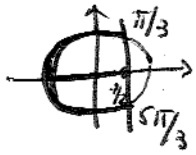
Exercice 1 : a/ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3-1}}$, $\mathcal{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, \dfrac{x^2-1}{x^3-1}\geq 0 \text{ et } x^3-1\neq 0\right\}$

Signe de x^2-1 : $\begin{array}{ccccc} & -1 & & 1 & \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array}$; signe de x^3-1 : $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ - & 0 & + \end{array}$

d'où $\mathcal{D}_f=[-1,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

b/ $g(x)=\ln(1-2\cos x)$, $\mathcal{D}_g=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 1-2\cos x>0\}$

$1-2\cos x>0 \iff \cos x<1/2$



; $\mathcal{D}_g=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right[$

c/ $h(x)=\ln\left(\dfrac{2-|x|}{|x|-1}\right)$, $\mathcal{D}_h=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, \dfrac{2-|x|}{|x|-1}>0 \text{ et } |x|\neq 1\right\}$

$\dfrac{2-|x|}{|x|-1}>0 \iff (2-|x|)(|x|-1)>0 \iff 1<|x|<2$ d'où

$\mathcal{D}_h=]-2,-1[\,\cup\,]1,2[$

Exercice 2 : Il est préférable de travailler avec $(x-x')[g(x)-g(x')]$, au lieu du rapport pour éviter les éventuelles divisions par 0. Donc croissante par exemple s'énonce : $\operatorname{sign}\{(x-x')[g(x)-g(x')]\}\geq 0$.

Posons $u=f\circ f$ et $w=f\circ f\circ f$. On a :

$$\operatorname{sign}\{(x-x')[f(x)-f(x')]\}=\operatorname{sign}\{(x-x')[f(x)-f(x')]\underbrace{[w(x)-w(x')]^2}_{\geq 0\ \forall x,x'}\}$$

$$=\operatorname{sign}\{\underbrace{(x-x')[w(x)-w(x')]}_{\leq 0}\cdot\underbrace{[f(x)-f(x')][(f\circ f)(f(x))-(f\circ f)(f(x'))]}_{\geq 0}\}.$$

≤ 0 cqfd.

Si maintenant u et w sont décroissants, on aura d'après le calcul précédent que f est croissante, or ceci implique que $f\circ f$ est croissante aussi, ce qui contredit l'hypothèse $u=f\circ f$ décroissante. Donc soit $f\circ f=c^{st}$, sinon on ne peut pas avoir u et w décroissantes !

Exercice 3 :

* $$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2x+2-\sqrt{x^2+x+1}-1}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{(2x+1)-\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=\frac{3x(x+1)}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\left[(2x+1)+\sqrt{x^2+x+1}\right]}\leq \frac{3}{2}x(x+1)\times 2 \text{ si } |x|\leq 1/4$$

$$\leq \frac{15}{4}x \quad (\text{avec } |x|\leq 1/4)$$

Si $\boxed{\delta(\varepsilon)=\min\left(1/4,\ \frac{4\varepsilon}{15}\right)}$ alors $|x|\leq\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}-\frac{1}{2}\right|\leq\varepsilon$,

* En posant $x=t^3$ on aura :

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{t^{3/2}-1}{t-1} \text{ et donc } \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-3/2=\frac{t^{3/2}-1}{t-1}-\frac{3}{2}=\frac{2t^{3/2}-3t+1}{2(t-1)}$$

$$=\frac{\cancel{(\sqrt{t}-1)}(2t-\sqrt{t}-1)}{2\cancel{(\sqrt{t}-1)}(\sqrt{t}+1)}=\frac{(\sqrt{t}-1)(2\sqrt{t}+1)}{2(\sqrt{t}+1)}$$

donc $\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{|\sqrt{t}-1|(2\sqrt{t}+1)}{2(\sqrt{t}+1)}\leq|\sqrt{t}-1|(\sqrt{t}+1/2)$ car t est voisin de 1.

On vérifie facilement que $|\sqrt{t}-1|\leq\sqrt{|t-1|}$. Puis si $\frac{1}{2}\leq t\leq 3/2\Rightarrow\sqrt{t}+\frac{1}{2}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\leq 3/2$

D'où $\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}-3/2\right|\leq\frac{3}{2}\sqrt{|t-1|}$, il suffit de prendre $\delta(\varepsilon)=\frac{4}{9}\varepsilon^2$.

Exercice 4 :

$$\frac{x\sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}}=\frac{2x(\sin x)(\cos x)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{1-\cos x}=\frac{2x(\sin x)(\cos x)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{2\sin^2(x/2)}$$

$$=4\,\frac{\overbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2}_{\to 1}}\,\underbrace{(\cos x)}_{\to 1}\,\underbrace{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}_{\to 1}.$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}}=8}$

Pour la deuxième $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}$$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = 1/2}$

Exercice 5 :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(1-x) & \text{si } x \leq 1/2 \\ \sqrt{x^2+\lambda x} & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

1°/ Pour $x \leq 1/2$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ est bien définie. Pour $x > 1/2$ il faut que $x^2+\lambda x \geq 0$, càd $x \in \mathbb{R} \setminus]-\lambda, 0[$ ou $x \in \mathbb{R} -]0, -\lambda[$

$(\lambda > 0)$: $+$ $-\lambda$ $-$ 0 $+$

$(\lambda < 0)$: $+$ 0 $-$ $-\lambda$ $+$

Donc si $\lambda \geq 0$, f est bien définie sur $]1/2, +\infty[$, mais si $\lambda < 0$ alors il faut que $-\lambda \leq 1/2 \iff \lambda \geq -1/2$. En définitive f est définie sur tout $\mathbb{R}$ si et ssi $\boxed{\lambda \geq -1/2}$.

2°/ Il est clair sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$, la fonction f est parfaitement définie et continue. Reste à discuter la continuité au pt $1/2$. On a $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Aussi $\lim_{\substack{x\to 1/2 \\ <}} f(x) = \dfrac{1}{1-1/2} = 2 = f(1/2)$ (continuité à gauche).

$\lim_{\substack{x\to 1/2 \\ >}} f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4} = 4 \Rightarrow \lambda = \left(4-1/4\right)\times 2 = 8-\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

Donc si $\boxed{\lambda = \frac{15}{2}}$ $(\geq -1/2)$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Sinon elle est seulement continue sur $\mathbb{R} - \{1/2\}$.

Exercice 6 : . $g(x) = (\sin x)\sin(1/x)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On a $|g(x)| = |\sin x|\,|\sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin x|$, donc $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Ainsi g admet un prolongement par continuité au pt 0 donné par

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} (\sin x)\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

. Si on remplace le sinus par le cosinus on a :

$$f(x) = (\cos x)(\cos 1/x).$$

Or $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos 1/x$ qui n'existe pas. Donc f n'est pas prolongeable par continuité au pt 0.

Exercice 7 : $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ tq $\forall x, x' \in [a,b]$ $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$.

f est manifestement continue en appliquant la définition avec $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Considérons $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$, g est continue.

De plus $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc $g(a) \cdot g(b) \leq 0$

d'où $\exists\, \alpha \in [a,b]$ tq $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$.

Application : $f(x) = \cos x$ sur $[0, \pi/2]$, $f : [0, \pi/2] \longrightarrow [0,1] \subset [0, \pi/2]$.

On a $\cos x - \cos x' = -2\sin\left(\frac{x+x'}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)$

et $|\cos x - \cos x'| = 2\left|\sin\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-x'}{2}\right)\right| \leq |x - x'|$

car $|\sin u| \leq 1$ et $|\sin u| \leq |u|$.

Donc il existe $\alpha \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos \alpha = \alpha$.

Exercice 8 : 1°/ Soit $g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ continue, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Pour montrer que $\sup_{[0,+\infty[} g(x)$ existe, il suffit de montrer que g est majorée i.e, $\exists A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \geq 0 \quad g(x) \leq A$.

Faisons un raisonnement par l'absurde, supposons le contraire.

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geq 0$ tq $g(x_n) \geq n$.

Ceci implique immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$.

* Si (x_n) possède une s/suite $x_{n_k} \longrightarrow +\infty$, alors $\lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k}) = 0$ d'après les hypothèses, d'où une contradiction.

* Sinon, (x_n) est majorée, càd $\exists B > 0$ tq $x_n \in [0, B]$. D'après le thm de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possède une s/suite (x'_{n_k}) convergente i.e, $\exists \ell : \lim_{k\to+\infty} x'_{n_k} = \ell \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} g(x'_{n_k}) = g(\ell)$ (g continue)

or $\lim_{k\to+\infty} g(x'_{n_k}) = +\infty$, encore une contradiction.

2°/ Le raisonnement précédent ne marche pas si g n'est pas continue. Un contre-exemple simple est donné par $g(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $[0,+\infty[$

On a bien $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, mais $\lim_{x\to1} g(x) = \infty$, à cause de la discontinuité en $x_0 = 1$, implique que g n'est pas bornée.

Exercice 1: Soient a, b, c des paramètres réels. On considère les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x - x^2[x^2]}$$

Étudier la dérivabilité de ces deux fonctions sur leurs domaines respectifs.

Exercice 2: Calculer la dérivée d'ordre n de chacune des fonctions suivantes :

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad , \qquad M(x) = xe^{ax}$$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln dans l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0,1[$ avec $f'(x) \neq 0$ sur $]0,1[$ et $f(0) = 0$. On veut montrer que f ne change pas de signe.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0,1]$, montrer que $f(1) \neq 0$.
2. Supposons que $f(1) > 0$ et qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer alors qu'il existe $x_1 \in]0,1[$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis dans $[0, x_1]$, montrer qu'on aboutit à une contradiction avec les hypothèses, puis conclure.
4. Refaire le même travail avec $f(1) < 0$.(Facultatif)

Exercice 5: A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \geq 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 6: Étudier puis tracer le graphe de la fonction donnée par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$$

Exercice 1: Soient a, b, c des paramètres réels. On considère les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x - x^2[x^2]}$$

Étudier la dérivabilité de ces deux fonctions sur leurs domaines respectifs.

Exercice 2: Calculer la dérivée d'ordre n de chacune des fonctions suivantes :

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad , \qquad M(x) = xe^{ax}$$

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln dans l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

En déduire que la suite

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4: Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, 1[$ avec $f'(x) \neq 0$ sur $]0, 1[$ et $f(0) = 0$. On veut montrer que f ne change pas de signe.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0, 1]$, montrer que $f(1) \neq 0$.
2. Supposons que $f(1) > 0$ et qu'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer alors qu'il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que $f(x_1) = 0$.
3. En appliquant de nouveau le théorème des accroissements finis dans $[0, x_1]$, montrer qu'on aboutit à une contradiction avec les hypothèses, puis conclure.
4. Refaire le même travail avec $f(1) < 0$.(Facultatif)

Exercice 5: A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que $\forall x \geq 0$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Exercice 6: Étudier puis tracer le graphe de la fonction donnée par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$$

Exercice 1 : 1) a, b, c paramètres réels

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{*-}$, $f'(x)=e^x$

f " sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$, $f'(x)=2ax+b$.

f est-elle dérivable en 0 ?

A gauche,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{e^x-e^0}{x-0}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{e^x-1}{x}=1$$ donc f est dérivable à gauche de 0 et $f'_g(0)=1$

A droite :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{ax^2+bx+c-1}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} ax+b+\frac{c-1}{x}=\begin{cases} b & \text{si } c=1 \\ \infty & \text{si } c\neq 1\end{cases}$$

Donc f est dérivable à droite de 0 si $c=1$ et $f'_g(0)=b$.

Finalement : f dérivable en 0 ssi $\begin{cases} c=1 \\ \text{et} \\ f'_d(0)=f'_g(0)\end{cases}$ c-à-d $\begin{cases} c=1 \\ \text{et} \\ b=1\end{cases}$

2) $g(x)=\sqrt{x-x^2[x^2]}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R},\ x-x^2[x^2]\geq 0\}$

$x-x^2[x^2]\geq 0 \iff x\geq \underbrace{x^2[x^2]\geq 0}_{x^2\geq 0,\ [x^2]\geq 0} \Rightarrow x\geq 0$. Donc $D_g\subset[0,+\infty[$

Soit $x \geq 0$.

$x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq [x^2] = m$.

$x - x^2[x^2] \geq 0 \Leftrightarrow x - x^2 m \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - mx) \geq 0$

Signe de $x - x^2 m$

$-mx^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(-mx + 1) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}}$ Attention ! m est peut-être nul

1er cas : $m = 0$

$m = 0 \Leftrightarrow [x^2] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 1 \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq x < 1$

Dans ce cas $x - x^2[x^2] = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

2ème cas, $m \neq 0 \underset{\substack{m = [x^2] \geq 0 \\ m \in \mathbb{N}}}{\Leftrightarrow} m \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \{1, 2, 3, ..\} = \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ 1 \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \leq 1 \\ \text{et} \\ 1 \leq x \end{cases}$ (1)

$-mx^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{m} \end{cases}$

x		0		$1/m$	
Signe de $-mx^2+x$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x - x^2[x^2] \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \leq 1$ (2)

$\left.\begin{matrix} (1) \\ \text{et} \\ (2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \\ \text{et} \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$

Dans ce cas $x^2 - x^2[x^2] = 0$.

Conclusion, $x - x^2[x^2] \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

Donc $D_g = [0, 1]$

$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

g est-elle dérivable sur $[0, 1)$?

Soit $x_0 \in [0, 1[$. $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x_0}} & \text{si } x_0\neq 0\\ +\infty & \text{si } x_0=0\end{cases}$$

3/10

Donc g est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[$, $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

g est-elle dérivable à gauche de $x_0=1$?

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{\sqrt{x}-1}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}}=-\infty$$

$x-1$: $-$ | 1 | $+$

Donc g n'est pas dérivable à gauche de 1.

Exercice 2 : 1) $R(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

$D_R=\{x\in\mathbb{R},\ cx+d\neq 0\}$

$cx+d=0 \iff cx=-d$

i) Si $c=0$ et $d=0$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $cx+d=0$ et $D_R=\emptyset$

ii) Si $c=0$ et $d\neq 0$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $cx+d=d\neq 0$, $D_R=\mathbb{R}$

et $R(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$. D'où $\forall x\in\mathbb{R}$, $R'(x)=\frac{a}{d}$

$R''(x)=0$,

c.à.d. $\forall n\geq 2$, $R^{(n)}(x)=0$

iii) Si $c\neq 0$, alors $cx+d=0 \iff x=-\frac{d}{c}$ d'où $D_R=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$, $R'(x)=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$R''(x)=(ad-bc)\frac{-2c(cx+d)}{(cx+d)^4}$$

$$=-2c(ad-bc)\frac{1}{(cx+d)^3}$$

$$R^{(3)}(x)=-2c(ad-bc)\frac{-3c(cx+d)^2}{(cx+d)^6}$$

$$=2.3.c^2(ad-bc)\frac{1}{(cx+d)^4}$$

$$R^{(4)}(x) = 2.3.c^2(ad-bc)\ \frac{-4c(cx+d)^3}{(cx+d)^8}$$

$$= -2.3.4\ c^3(ad-bc)\ \frac{1}{(cx+d)^5}$$

Formule de récurrence: $\overbrace{R^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n!\, c^{n-1}\ (ad-bc)\ \frac{1}{(cx+d)^{n+1}}}^{P(n)}$

i) Pour $n=1$, $R^{(1)}(x) = R'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$P(1)$ est vérifiée.

ii) Supposons $P(n)$ vraie pour n fixé.

iii) Montrons que $P(n+1)$ reste vraie

$$R^{(n+1)}(x) = \left(R^{(n)}\right)'(x) = (-1)^{n+1} n!\ c^{n-1}\ (ad-bc)\ \frac{-(n+1)c\,(cx+d)^n}{(cx+d)^{2n+2}}$$

$$= (-1)^{n+2}(n+1)!\ c^n\ (ad-bc)\ \frac{1}{(cx+d)^{n+2}}$$ cqfd.

iv) $\forall n \geq 1$, $R^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n!\ c^{n-1}(ad-bc)\ \frac{1}{(cx+d)^{n+1}}$

2) $M(x) = x e^{ax}$

$D_M = \mathbb{R}$. i) $a=0 \Rightarrow M(x) = x \Rightarrow M'(x) = 1 \Rightarrow \forall n \geq 2,\ M^{(n)}(x) = 0$

ii) $a \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $M'(x) = e^{ax} + ax\,e^{ax}$

$= (1+ax)\,e^{ax}$

$M''(x) = a\,e^{ax} + a(1+ax)\,e^{ax}$

$= (a^2x + 2a)\,e^{ax}$

$M^{(3)}(x) = a^2 e^{ax} + a(a^2x + 2a)\,e^{ax}$

$= (a^3x + 3a^2)\,e^{ax}$

<u>Formule de récurrence</u>, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1})\, e^{ax}$.

i) Pour $n=1$, $M'(x) = (ax+1)e^{ax}$.

ii) Supposons que pour n fixé, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1})\, e^{ax}$

iii) Montrons que $M^{(n+1)}(x) = (a^{n+1} x + (n+1) a^n)\, e^{ax}$.

$$M^{(n+1)}(x) = (M^{(n)})'(x) = a^n e^{ax} + a(a^n x + n a^{n-1}) e^{ax}$$

$$= (a^{n+1} x + (n+1) a^n)\, e^{ax}$$

iv) $\forall\, n \geq 1$, $M^{(n)}(x) = (a^n x + n a^{n-1})\, e^{ax}$.

<u>Exercice 3</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Appliquons le théorème des accroissements finis à : $f : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \ln x$.

f est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$, et $\forall\, x \in]n, n+1[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

Donc : $\exists\, c \in]n, n+1[$, $f'(c) = \dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$

$\Leftrightarrow \exists\, c_n \in]n, n+1[$, $\dfrac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln n$

Or $n < c < n+1$

donc $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n}$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n} \qquad (*)$$

Montrons que $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$> \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

$2n+1 < 2n+2$

$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. (1)

D'autre part, d'après la question précédente,

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$$

$$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n-1} < \ln(2n-1) - \ln(2n-2)$$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+n} < \ln(2n) - \ln(2n-1)$$

$$u_n < \ln(2n) - \ln n = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge

D'autre part : $(*) \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

Donc
$$\ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$$

$$\ln(n+3) - \ln(n+2) < \frac{1}{n+2}$$

$$\ln(n+4) - \ln(n+3) < \frac{1}{n+3}$$

$$\vdots$$

$$\ln(2n+1) - \ln(2n) < \frac{1}{2n}$$

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < u_n$$

Finalement,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < u_n < \ln 2$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \ln 2$

$\Rightarrow \ln 2 \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \ln 2$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$

Exercice 4 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue
dérivable sur $]0,1[$

$f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$.

1) En utilisant le th. des accroissements finis, montrons que $f(1) \neq 0$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,1] \\ \text{dérivable sur }]0,1[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]0,1[, \ f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \underset{f(0)=0}{=} f(1)$

or $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$ et $c \in]0,1[$, donc $f'(c) \neq 0$ c-à-d $f(1) \neq 0$.

2) $\left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ \exists x_0 \in]0,1[, \ f(x_0) < 0 \\ f \text{ continue sur } [x_0,1] \subset [0,1] \end{array}\right\}$

En vertu du th. des valeurs intermédiaires, $\exists x_1 \in]x_0,1[, \ f(x_1) = 0$

Donc $\exists x_1 \in]0,1[, \ f(x_1) = 0$.

3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0,x_1] \\ \text{dérivable sur }]0,x_1[\end{array}\right\} \underset{\text{Th. des A.F}}{\Rightarrow} \exists c_0 \in]0,x_1[, \ f'(c) = \frac{f(x_1)-f(0)}{x-0}$

$= \frac{f(x_1)}{x} = 0$

Absurde car $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$

Conclusion. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1[, \ f'(x) \neq 0$, ne change pas de signe

Exercice 5 : Montrer que $\forall x \geq 0$, $\underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{(*)}$

1°/ Si $x = 0$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x^3)} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0$

donc $(*)$ est triviale

2°/ Si $x > 0$, posons $f : [0,x] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto f(t) = \ln(1+t)$

$f \in C^2([0,x])$, $\forall t \in [0,x]$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$ $\qquad f''(0) = -1$

De plus $\forall t \in [0,x]$, $f^{(3)}(t) = \frac{2(1+t)}{(1+t)^4} = \frac{2}{(1+t)^3}$ donc f'' dérivable sur $]0,x[$

Les hypothèses nécessaires à la formule de Taylor-Lagrange sont vérifiées, par suite $\exists c \in]0,x[$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(c)$

c-à-d. $\exists c \in]0,x[$, $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \frac{2}{(1+c)^3}$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

$0 < c < x$

$1 < (1+c)^3 < (1+x)^3$

$\frac{1}{(1+x)^3} < \frac{1}{(1+c)^3} < 1$

$\frac{x^3}{3(1+x)^3} < \frac{x^3}{3(1+c)^3} < \frac{x^3}{3}$ d'où $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 6. Etude et graphe de f telle que : $f(x) = \left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$

$D_f = \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \left(1+\frac{1}{|-x|}\right)^{|-x|} = \left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|} = f(x)$

f est donc paire, il suffit de l'étudier sur $]0,+\infty[$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = e^{x(\ln(x+1)-\ln x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x+1) - x\ln x}$$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x+1) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x=\frac{1}{X}}{=} \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^1 = e$. Par suite la droite d'éq. $y=e$ est asymptote à C_f, courbe représentative de f.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\,\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$f'(x)$ est de même signe que $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \quad g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-x-1+x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)^2} < 0$ car $x > 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\ln\big(\underbrace{1+\tfrac{1}{x}}_{\to +\infty}\big)}_{\to +\infty} - \underbrace{\dfrac{1}{x+1}}_{\to 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\ln\big(\underbrace{1+\tfrac{1}{x}}_{\to 1}\big)}_{0} - \underbrace{\dfrac{1}{x+1}}_{\to 0} = 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0$

g continue sur $]0,+\infty[$, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

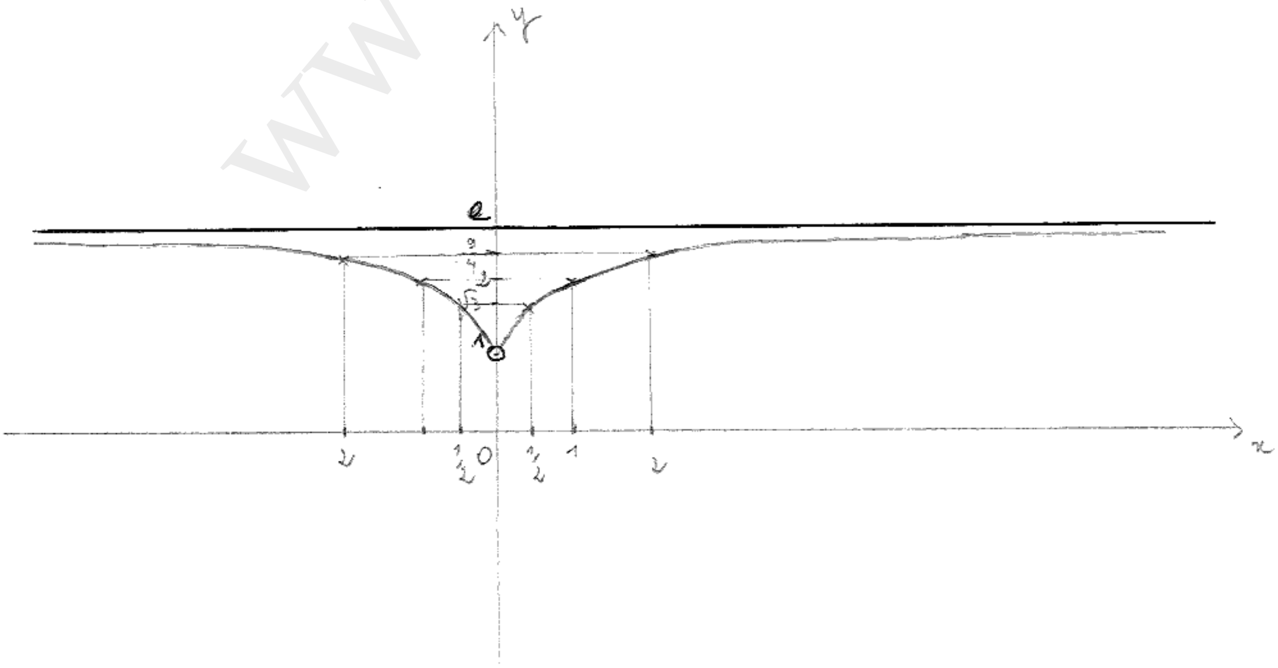
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$.

En effet si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$ alors $\exists x_0 \in]0,+\infty[$, telle que g serait croissante sur $]x_0,+\infty[$,

ce qui est absurde.

g décroit de $+\infty$ à 0^+ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) > 0$ et, par suite $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) > 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow e$



Exercice 1: Étudier la fonction

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right)$$

puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 2: (Transformation d'expression)

1. On considère l'expression $C(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que

$$C(x) = A_1\cos(x+\phi_1) = A_2\sin(x+\phi_2).$$

2. Considérons à présent la version hyperbolique $H(x) = a\cosh x + b\sinh x$ avec $|a| \neq |b|$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que, ou bien $H(x) = A_1\cosh(x+\phi_1)$, ou bien $H(x) = A_2\sinh(x+\phi_2)$.

Exercice 3: Montrer que

$$1 + \cosh x + \cosh 2x + \cdots + \cosh nx = \frac{1}{2} + \frac{\cosh nx - \cosh(n+1)x}{2(1-\cosh x)}$$

Exercice 4: Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a $\sin(2t) = \dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$. Montrer que $2\arctan(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire enfin que $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{3}{5})$.

Exercice 5: Étudier la fonction $g(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, puis tracer son graphe. A l'aide de la dérivée de g trouver une autre expression (plus simple) de g.

Exercice 6: En passant aux dérivées, établir que

$$\arcsin(\tanh x) = \arctan(\sinh x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7: Résoudre l'équation

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8: On considère le polynôme $P(t) = 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1$. A l'aide d'une racine évidente, factoriser complètement ce polynôme. On donne la fonction

$$F(x) = argsh\left(3x + 4x^3\right).$$

En passant à sa dérivée et en utilisant la première question, donner une expression plus simple de $F(x)$.

Un	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°5

Exercice 1: Étudier la fonction

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right)$$

puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 2: (Transformation d'expression)

1. On considère l'expression $C(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que

$$C(x) = A_1\cos(x+\phi_1) = A_2\sin(x+\phi_2).$$

2. Considérons à présent la version hyperbolique $H(x) = a\cosh x + b\sinh x$ avec $|a| \neq |b|$. Montrer qu'il existe A_1, ϕ_1, A_2, ϕ_2 tels que, ou bien $H(x) = A_1\cosh(x+\phi_1)$, ou bien $H(x) = A_2\sinh(x+\phi_2)$.

Exercice 3: Montrer que

$$1 + \cosh x + \cosh 2x + \cdots + \cosh nx = \frac{1}{2} + \frac{\cosh nx - \cosh(n+1)x}{2(1-\cosh x)}$$

Exercice 4: Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ on a $\sin(2t) = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$. Montrer que $2\arctan(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En déduire enfin que $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{3}{5})$.

Exercice 5: Étudier la fonction $g(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, puis tracer son graphe. A l'aide de la dérivée de g trouver une autre expression (plus simple) de g.

Exercice 6: En passant aux dérivées, établir que

$$\arcsin(\tanh x) = \arctan(\sinh x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7: Résoudre l'équation

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8: On considère le polynôme $P(t) = 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1$. A l'aide d'une racine évidente, factoriser complètement ce polynôme. On donne la fonction

$$F(x) = argsh\left(3x + 4x^3\right).$$

En passant à sa dérivée et en utilisant la première question, donner une expression plus simple de $F(x)$.

T.D n° 5.

Exercice 1 : Etude et graphe de f telle que $f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \geq 0 \text{ et } x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0\}$.

$x^2 - 1 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0 \iff x^2 > \sqrt{x^2-1}$

$\iff x^4 > \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 \iff x^4 > x^2 - 1 \iff x^4 - x^2 + 1 > 0$

$\underset{X = x^2}{\iff}\ X^2 - X + 1 > 0 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3$

donc $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$

ou encore (autre méthode)

$\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^2-1}\right)}{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + \sqrt{x^2-1}}$

$= \dfrac{x^2\overbrace{(x^2-1)}^{\geq 0} + 1 \geq 1}{\underbrace{x^2 + \sqrt{x^2+1}}_{> 0}}$

Donc $\forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$

Par suite $D_f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

$\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ et $f(-x) = \ln\left((-x)^2 - \sqrt{(-x)^2-1}\right) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right) = f(x)$

f est donc paire, il suffit de l'étudier sur $[1,+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln\left(\underset{\downarrow 1}{x^2} - \underset{\downarrow 0}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\underset{\downarrow +\infty}{x^2} - \underset{\downarrow +\infty}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\underset{\downarrow +\infty}{x}\left(\underset{\downarrow +\infty}{x} - \underset{\downarrow 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\right)\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}\right)\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0} + \dfrac{\overbrace{\ln\left(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}\right)}^{\to 0}}{\underset{\to +\infty}{x}} = 0$

Donc la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $x'ox$

$\forall x \in]1,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - \sqrt{x^2-1}}$.

f non dérivable en 1 car $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ non dérivable en 1.

$\forall x \in]1,+\infty[,\ x^2 - \sqrt{x^2-1} > 0$. Donc $f'(x)$ est de même signe que $2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = x\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$x \geq 1$ donc $f'(x)$ est de même signe que $2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$2 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\left(2\sqrt{x^2-1} - 1\right)\left(2\sqrt{x^2-1} + 1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2\sqrt{x^2-1} + 1\right)} = \dfrac{4x^2 - 4 - 1}{\sqrt{x^2-1}\left(2\sqrt{x^2-1} + 1\right)} = \dfrac{4x^2 - 5}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{>0}\underbrace{\left(2\sqrt{x^2-1} + 1\right)}_{>0}}$

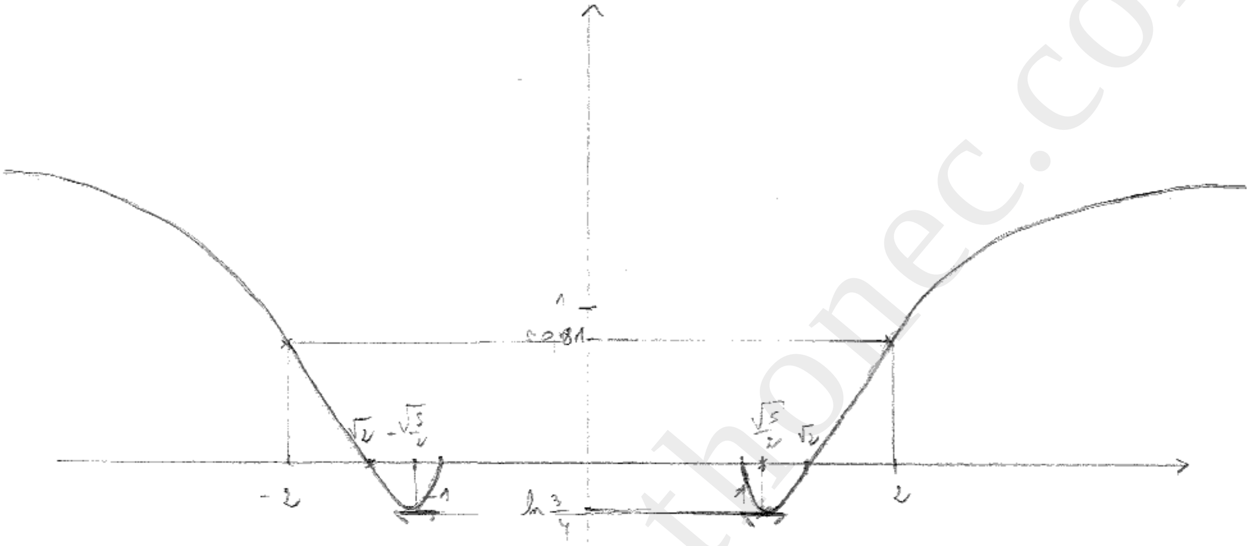
$4x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

x	0		1		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		
Signe de $f'(x)$				$-$	0	$+$	

x	1		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \ln\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}28.$$

$f(x) = 0 \iff \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2-1}\right) = 0$
$\iff x^2 - \sqrt{x^2-1} = 1$
$\iff x^2 - 1 = \sqrt{x^2-1}$
$\iff \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$ car $x \geq 1$



<u>Exercice 2</u> : 1) $C(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $a^2+b^2 \neq 0$.

<u>1ère méthode (longue!!)</u>

i) Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $C(x) = b\sin x = b\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
$= A_1\cos(x+\Phi_1) = A_2\sin(x+\Phi_2)$

avec $A_1 = A_2 = b$, $\Phi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\Phi_2 = 0$.

ii) Si $a \neq 0$ et $b = 0$, $C(x) = a\cos x = a\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$= A_1\cos(x+\Phi_1) = A_2\sin(x+\Phi_2)$

avec $A_1 = A_2 = a$, $\Phi_1 = 0$ et $\Phi_2 = \frac{\pi}{2}$

iii) Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, posons $R = \sqrt{a^2+b^2}$

$$C(x) = R\left(\frac{a}{R}\cos x + \frac{b}{R}\sin x\right)$$

$|a| = \sqrt{a^2} \underset{b\neq 0}{<} \sqrt{a^2+b^2}$ et $|b| = \sqrt{b^2} \underset{a\neq 0}{<} \sqrt{a^2+b^2}$

d'où $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ et $\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$

c-à-d $-1 < \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$ et $-1 < \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$

En posant $A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $B = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on voit que $A^2+B^2=1$

Donc $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos\alpha = A$ et $\sin\alpha = B$

Par suite $C(x) = a\cos x + b\sin x$

$$= R\,(A\cos x + B\sin x)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Finalement. $C(x) = a\cos x + b\sin x$

$= A_1\cos(x+\phi_1)$ avec $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\phi_1 = -\alpha$ où α est tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

De même que $C(x) = A_2\sin(x+\phi_2)$ avec $A_2 = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\phi_2 = \frac{\pi}{2}-\alpha$ où α est tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

<u>Attention !</u> On n'a pas nécessairement $\alpha = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

En effet. si $a=1$ et $b=-1$, $\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

alors que $\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

2ème méthode $\quad C(x) = a\cos x + b\sin x.$

$A_1\cos(x+\phi_1) = A_1(\cos x\cos\phi_1 - \sin x\sin\phi_1)$

$= A_1\cos\phi_1\cos x - A_1\sin\phi_1\sin x.$

$C(x) = A_1\cos(x+\phi_1) \Leftrightarrow a\cos x + b\sin x = A_1\cos\phi_1\cos x - A_1\sin\phi_1\sin x$

Par identification : $\left\{\begin{array}{l} a = A_1\cos\phi_1 \\ \quad \text{et} \\ b = -A_1\sin\phi_1 \end{array}\right.$

Donc $a^2+b^2 = A_1^2\cos^2\phi_1 + A_1^2\sin^2\phi_1 = A_1^2(\cos^2\phi_1+\sin^2\phi_1) = A_1^2$

Par suite $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ ou $A_1 = -\sqrt{a^2+b^2}$

Si $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ alors $\cos\phi_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\phi_1 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Si $A_1 = -\sqrt{a^2+b^2}$ alors $\cos\phi_1 = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\phi_1 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\forall a\in\mathbb{R}^*, \forall b\in\mathbb{R}^*, \quad a^2+b^2 > a^2$ et $a^2+b^2 > b^2 \quad \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} > |a|$ et $\sqrt{a^2+b^2} > |b|$

$\underset{a^2+b^2\neq 0}{\xRightarrow{}} \underbrace{\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\alpha} < 1$ et $\underbrace{\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\beta} < 1.$

De plus $\alpha^2+\beta^2 = 1$ donc $\exists\, \phi_1\in\mathbb{R}$, $\cos\phi_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (resp $\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$) et $\sin\phi_1 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (resp. $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

Donc $\exists\, \phi_1, A_1 \in\mathbb{R}$, $a\cos x + b\sin x = A_1\cos(x+\phi_1)$

2) $H(x) = a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x$ avec $|a|\neq|b|$ c-à-d $a^2-b^2\neq 0.$

2-1 $\quad A_1\mathrm{ch}(x+\phi_1) = A_1\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,\phi_1 + A_1\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,\phi_1$

$H(x) = A_1\mathrm{ch}(x+\phi_1) \Leftrightarrow a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x = A_1\mathrm{ch}\,\phi_1\,\mathrm{ch}\,x + A_1\mathrm{sh}\,\phi_1\,\mathrm{sh}\,x$

Par identification $\left\{\begin{array}{l} a = A_1\mathrm{ch}\,\phi_1 \\ b = A_1\mathrm{sh}\,\phi_1 \end{array}\right.$

Ainsi $a^2-b^2 = A_1^2(ch^2\phi_1 - sh^2\phi_1)$

$= A_1^2$

i) Si $a^2-b^2<0$ alors $\underbrace{A_1^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{a^2-b^2}_{<0}$ et $\forall\, \phi_1, A_1 \in \mathbb{R}$, $a\,ch\,x + b\,sh\,x \neq A_1\,ch(x+\phi_1)$

ii) Si $a^2-b^2>0$ alors $A_1 = \sqrt{a^2-b^2}$ ou $A_1 = -\sqrt{a^2-b^2}$.

Mais $a = A_1 ch\,\phi_1$ et $ch\,\phi_1 \geq 1 > 0$. Donc A_1 est de même signe que a.

Par suite : $a>0 \Rightarrow A_1 = \sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow \begin{cases} ch\,\phi_1 = \dfrac{a}{A_1} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} & (\geq 1 \text{ facile à vérifier!}) \\ sh\,\phi_1 = \dfrac{b}{A_1} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{cases}$

$a<0 \Rightarrow A_1 = -\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow \begin{cases} ch\,\phi_1 = \dfrac{a}{A_1} = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2-b^2}} & (\geq 1 \text{ facile à vérifier!}) \\ sh\,\phi_1 = \dfrac{b}{A_1} = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{cases}$

(Remarque : si $a=0$ $(b\neq 0)$ alors $a^2-b^2 = -b^2 < 0$ donc voir cas 2.1. i))

<u>2.2.</u> $A_2\, sh(x+\phi_2) = A_2\, sh\,\phi_2\, ch\,x + A_2\, ch\,\phi_2\, sh\,x$

$H(x) = A_2\, sh(x+\phi_2) \iff a\,ch\,x + b\,sh\,x = A_2\, sh\,\phi_2\, ch\,x + A_2\, ch\,\phi_2\, sh\,x$

<u>Par identification</u> $\begin{cases} a = A_2\, sh\,\phi_2 \\ b = A_2\, ch\,\phi_2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - a^2 = A_2^2$

i) Si $b^2-a^2<0$ alors $\underbrace{A_2^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{b^2-a^2}_{<0}$ et $\forall\, \phi_2, A_2 \in \mathbb{R}$, $a\,ch\,x + b\,sh\,x \neq A_2\, sh(x+\phi_2)$

ii) Si $b^2-a^2>0$ alors $A_2 = \sqrt{b^2-a^2}$ ou $A_2 = -\sqrt{b^2-a^2}$

Mais $b = A_2 ch\,\phi_2$ et $ch\,\phi_2 \geq 1 > 0$. Donc A_2 est de même signe que b.

Par suite $b>0 \Rightarrow A_2 = \sqrt{b^2-a^2} \Rightarrow \begin{cases} ch\,\phi_2 = \dfrac{b}{A_2} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2-a^2}} & (\geq 1) \\ sh\,\phi_2 = \dfrac{a}{A_2} = \dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases}$

$b<0 \Rightarrow A_2 = -\sqrt{b^2-a^2} \Rightarrow \begin{cases} ch\,\phi_2 = \dfrac{b}{A_2} = \dfrac{-b}{\sqrt{b^2-a^2}} & (\geq 1) \\ sh\,\phi_2 = \dfrac{a}{A_2} = \dfrac{-a}{\sqrt{b^2-a^2}} \end{cases}$

$\left(b=0 \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow b^2-a^2=-a^2<0 \text{ donc voir } 2.1.\ i) \right)$

<u>Finalement</u> : $|a|\neq|b| \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2>0 \\ \text{ou bien} \\ b^2-a^2>0 \end{cases}$

$\exists A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2$ tels que

$$\begin{cases} a^2-b^2>0 \Rightarrow H(x)=a\,ch x+b\,sh x = A_1 ch(x+\Phi_1) \neq A_2 sh(x+\Phi_2) \\ a^2-b^2<0 \Rightarrow H(x)= a\,ch x+b\,sh x = A_2 sh(x+\Phi_2) \neq A_1 ch(x+\Phi_1) \end{cases}$$

c-à-d. $\exists A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2$ tels que $H(x)=A_1 ch(x+\Phi_1)$ ou bien $H(x)=A_2 sh(x+\Phi_2)$

<u>Exercice 3</u> : Montrons que :

$$\underbrace{\underset{ch\,0x}{1} + ch x + ch 2x + \dots + ch nx}_{A_n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{ch nx - ch(n+1)x}{2(1-ch x)}}_{B_n}$$

<u>1ère méthode</u> : Raisonnement par récurrence.

i) Pour $n=0$, $\frac{1}{2}+\frac{ch\,0x - ch(0+1)x}{2(1-ch x)} = \frac{1}{2}+\frac{1-ch x}{2(1-ch x)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(ou encore : pour $n=1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{ch x - ch 2x}{2(1-ch x)} = \frac{1}{2}+\frac{ch x - ch^2x - sh^2 x}{2(1-ch x)} \quad \text{car } ch 2x = ch^2x+sh^2x$$

$$\underset{ch^2x - sh^2x = 1}{=} \frac{1}{2}+\frac{ch x - ch^2x + 1 - ch^2x}{2(1-ch x)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{ch x(1-ch x) + (1-ch x)(1+ch x)}{2(1-ch x)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{ch x + 1 + ch x}{2}$$

$$= 1 + ch x \ )$$

ii) Supposons $A_n = B_n$ pour n fixé.

iii) Montrons que $A_{n+1} = B_{n+1}$.

$$A_{n+1} = 1 + \operatorname{ch}x + \operatorname{ch}2x + \dots + \operatorname{ch}nx + \operatorname{ch}(n+1)x = A_n + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= B_n + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}nx - \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)} + \operatorname{ch}(n+1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}nx - \operatorname{ch}(n+1)x + 2\operatorname{ch}(n+1)x - 2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}nx + \operatorname{ch}(n+1)x - 2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

or : $\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta = \dfrac{\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \operatorname{ch}(\alpha-\beta)}{2}$

Donc $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}(n+1)x = \dfrac{\operatorname{ch}(x+nx+x) + \operatorname{ch}(nx+x-x)}{2} = \dfrac{\operatorname{ch}(n+2)x + \operatorname{ch}nx}{2}$

et $$A_n + \operatorname{ch}(n+1)x = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}nx + \operatorname{ch}(n+1)x - \operatorname{ch}(n+2)x - \operatorname{ch}nx}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch}(n+1)x - \operatorname{ch}(n+2)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

$$= B_{n+1}$$

Par suite : $A_{n+1} = B_{n+1}$

iv) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + \operatorname{ch}x + \operatorname{ch}2x + \dots + \operatorname{ch}nx = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{ch}nx - \operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$

<u>2ème méthode</u> : Calcul direct :

$$1 + \operatorname{ch}x + \operatorname{ch}2x + \dots + \operatorname{ch}nx = 1 + \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} + \dots + \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}$$

$$= \frac{1+e^{x}+e^{2x}+\dots+e^{nx} + 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx}}{2}$$

$$1+e^{x}+e^{2x}+\dots+e^{nx} = (e^{x})^0+(e^{x})^1+(e^{x})^2+\dots+(e^{x})^n$$
$$= \frac{1-(e^{x})^{n+1}}{1-e^{x}} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^{x}}$$

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\dots+e^{-nx} = \frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{1-e^{-x}} = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

Donc $1+\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}2x+\dots+\operatorname{ch}nx = \dfrac{1-e^{(n+1)x}}{2(1-e^{x})} + \dfrac{1-e^{-(n+1)x}}{2(1-e^{-x})}$

$$= \frac{(1-e^{-x})(1-e^{(n+1)x}) + (1-e^{x})(1-e^{-(n+1)x})}{2(1-e^{x})(1-e^{-x})}$$

$$= \frac{1-e^{(n+1)x}-e^{-x}+e^{nx}+1-e^{-(n+1)x}-e^{x}+e^{-nx}}{2(1-e^{-x}-e^{x}+1)}$$

$$= \frac{2-e^{-x}-e^{x}-e^{(n+1)x}-e^{-(n+1)x}+e^{nx}+e^{-nx}}{2(2-e^{-x}-e^{x})}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}-\dfrac{e^{(n+1)x}+e^{-(n+1)x}}{2}}{2\left(1-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{ch}nx-\operatorname{ch}(n+1)x}{2(1-\operatorname{ch}x)}$$

<u>Exercice 4</u>: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \dfrac{\frac{2\sin t}{\cos t}}{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \dfrac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t} = 2\sin t\cos t$

$= \sin 2t$

Montrons que: $2\arctan\frac{1}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Posons $\arctan\frac{1}{3} = X$. $X \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \iff \tan X = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 0 < \tan X \leqslant \frac{1}{3} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < X < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < 2X < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff 0 < 2\arctan\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\arctan\frac{1}{3} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Par suite : $\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \dfrac{2\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1+\tan^2\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}$

$$= \frac{2/3}{1+\frac{1}{3^2}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3^2}{1+3^2} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{3}{5}$$

Donc $\arcsin\left(\sin\left(\underbrace{2\arctan\frac{1}{3}}_{\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\right)\right) = \arcsin\frac{3}{5}$

c-à-d. $2\arctan\frac{1}{3} = \arcsin\frac{3}{5}$

$\left(\text{car } \arcsin(\sin\alpha) = \alpha \text{ si } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Exercice 5 : $g(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} / -1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 1-x^2 \leqslant 1+x^2 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \geq x^2-1 \iff \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$

$\iff \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ et $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = g(x)$

g est paire, il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arccos\Big(\underbrace{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} -1}\Big) = \arccos(-1) = \pi$

Donc la droite d'équation $y=\pi$ est asymptote à C_g, courbe représentative de g

$g(0) = \arccos 1 = 0$

$g'(x) = ?$

Posons $u(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$u^2(x) = 1 \iff u(x) = 1$ ou $u(x) = -1 \iff 1-x^2 = 1+x^2$ ou $\underbrace{1-x^2 = -1-x^2}_{\text{impossible}}$

$\iff x = 0$

$\forall x \in\ ]0,+\infty[\ ,\ g'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$u'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

Donc $g'(x) = \dfrac{\overset{>0}{4x}}{\underbrace{(1+x^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}_{>0}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$

$= \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}} = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^4}}$

$$g'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)\,2x} \quad \text{car } x > 0$$

$$= \frac{2}{1+x^2}$$

g est-elle dérivable à droite de 0 ?

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 0}{x} \quad \text{f.i } \frac{0}{0}$$

$\forall x \in]0,+\infty[$, g continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$.

D'après le th. des accroissements finis, $\exists c \in]0,x[$, $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} g'(c)$

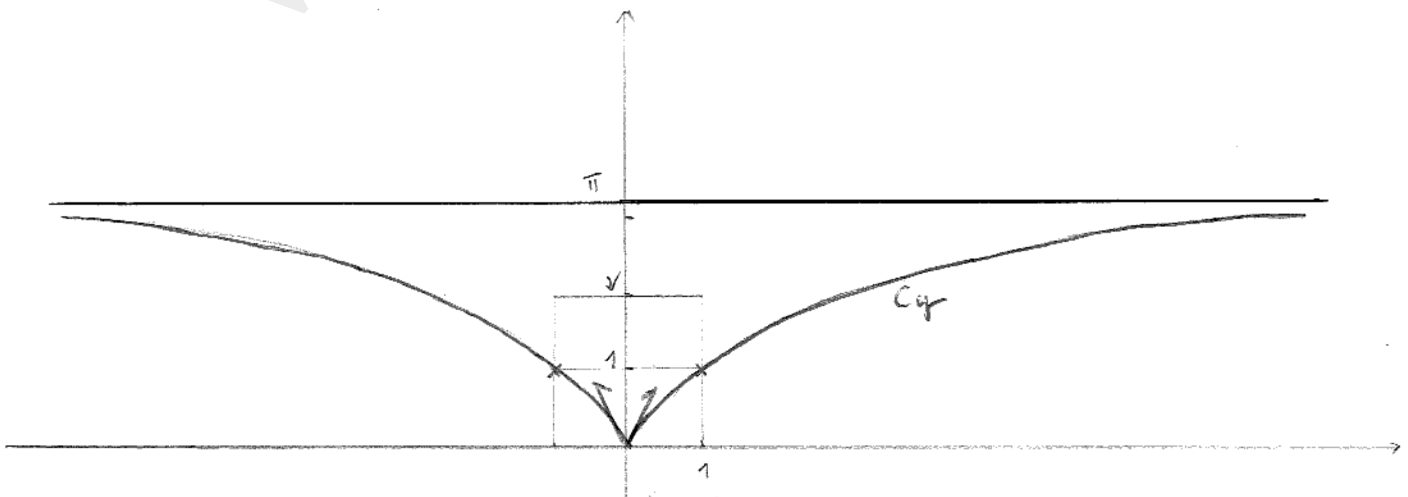
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+c^2} \quad \text{car } c \in]0,x[$$

$$\overset{0<c<x}{=} \lim_{c\to 0^+} \frac{2}{1+c^2} \quad (\text{car } x \to 0^+ \Rightarrow c \to 0^+$$

$$= 2$$

Donc $g'_d(0) = 2$. Finalement, on peut écrire : $\begin{cases} \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \\ \text{et} \\ g'_d(0) = 2 \end{cases}$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$0 \nearrow$	π



$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow \forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x + C$ 12/

En particulier pour $x=1$, on a : $g(1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 + C$ c-à-d $\arccos 0 = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 + C$

Donc $\frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{4} + C$ soit $C = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x$

Finalement : $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x$
et
$g(0) = 0$

Donc $\forall x \in [0,+\infty[\,,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x$

Par ailleurs : $\forall x \in]-\infty,0]\,,\ \exists y \in [0,+\infty[\,,\ x = -y$ d'où $g(x) = g(-y) \overset{g \text{ paire}}{=} g(y)$

$\overset{y>0}{=} 2\,\mathrm{Arctan}\,y$

$= 2\,\mathrm{Arctan}(-x)$

$= 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$

<u>Conclusion</u>. $\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x \\ \forall x \in \mathbb{R}^-,\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x| \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,|x|$

<u>Exercice 6</u> : Posons $g(x) = \arcsin(\tanh x)$ et $h(x) = \arctan(\sinh x)$

$\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ $\quad \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $\quad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh x \in]-1,1[\subset [-1,1]$ et $\sinh x \in \mathbb{R}$.

$D_g = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \tanh x \leq 1\} = \mathbb{R}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R},\ \sinh x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{\tanh' x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh x \in]-1,1[$ donc $1-\tanh^2 x \neq 0)$

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}}}$

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x \ \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x > 0$

$= \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = \frac{sh'(x)}{1+sh^2x} = \frac{ch\,x}{ch^2x} = \frac{1}{ch\,x}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = h'(x)$. Par suite $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(x) + C$ où C est une constante

En particulier pour $x = 0$, on obtient $g(0) = h(0) + C$

c-à-d. $C = g(0) - h(0)$

$= \arcsin(\tanh 0) - \arctan(\sinh 0)$

$= \arcsin(0) - \arctan 0$

$= 0$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(x)$

<u>Exercice 7.</u> Résolvons l'équation : $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$.

$$\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan 2x)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan 2x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 2x}{1 - x \cdot 2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$\Delta = 9 + 8 = 17$.

$x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$ ou $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$

$x_1 < 0 \Rightarrow 2x_1 < 0 \Rightarrow \arctan x_1 < 0$ et $\arctan 2x_1 < 0$

$\Rightarrow \arctan x_1 + \arctan 2x_1 < 0$

$\Rightarrow \arctan x_1 + \arctan 2x_1 \neq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x_1$ n'est pas solution de l'équation donnée.

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow 0 < x_2 < \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < 2x_2 < 1$

$\Rightarrow 0 < \arctan \underbrace{x_2}_{<1} + \arctan \underbrace{2x_2}_{<1} < \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (arctan $\nearrow$)

$\Rightarrow \arctan x_2 + \arctan 2x_2 = \arctan\Big(\underbrace{\tan\big(\overbrace{\arctan x_2 + \arctan 2x_2}^{\in]0, \frac{\pi}{2}[}\big)}_{=1}\Big)$

$\Rightarrow \arctan x_2 + \arctan 2x_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc x_2 est la seule solution de l'équation donnée.

Exercice 8 $\quad P(t) = 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1$

$P(-1) = -16 + 24 - 9 + 1 = 0$

$P(t) = (t+1)\, Q(t)$

$$\begin{array}{l|l} 16t^3 + 24t^2 + 9t + 1 & t+1 \\ \cline{2-2} 16t^3 + 16t^2 & 16t^2 + 8t + 1 \\ \cline{1-1} \quad 8t^2 + 9t + 1 & \\ \quad 8t^2 + 8t & \\ \cline{1-1} \qquad t+1 & \\ \qquad t+1 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

$P(t) = (t+1)(16t^2 + 8t + 1)$

$= (t+1)(4t+1)^2$

$F(x) = \operatorname{argsh}(3x + 4x^3)$ $\left(\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$F'(x) = \frac{3 + 12x^2}{\sqrt{1 + (3x+4x^3)^2}}$$

$$= \frac{3 + 12x^2}{\sqrt{1 + 9x^2 + 24x^4 + 16x^6}}$$

$$= \frac{3(1+4x^2)}{\sqrt{(x^2+1)(4x^2+1)^2}}$$

$$= \frac{3(1+4x^2)}{(1+4x^2)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow F(x) = 3 \operatorname{Argsh} x + C$$

$$\Rightarrow F(0) = 3 \operatorname{Argsh} 0 + C$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Argsh} 0 = 3 \operatorname{Argsh} 0 + C$$

$$\Leftrightarrow C = -2 \operatorname{Argsh} 0 = 0.$$

Donc $\boxed{F(x) = 3 \operatorname{Argsh} x}$