Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2010-2011
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques-SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 1 - Durée 3h
(11 Avril 2011)

Exercice 1. (Questions de Cours)

1) Donner la définition d'une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2) Montrer que si f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonctions $\lambda f + \mu g$ est encore Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
3) Enoncer la première formule de la moyenne.

Exercice 2.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer, à partir de la définition, que si φ une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction $\psi : x \longmapsto \psi(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$ et que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \psi(x)\,\mathrm{d}\,x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

2) En déduire que si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est Riemann-intégrable sur $[\lambda a, \lambda b]$ et que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\,\mathrm{d}\,x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Exercice 3.

Démontrer que si $f : [a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction Riemann-intégrable, alors la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1+f}}$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann- intégrable. On se propose de démontrer que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) \mathrm{d}x = 0.$$

1) Démontrer le résultat lorsque f est constante, puis lorsque f est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
2) En déduire le cas général.

Exercice 5.

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit a un réel fixé de $[0, 1[$. En utilisant la première formule de la moyenne, montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^a f(x^n)\,\mathrm{d}x = af(0).$$

Exercice 6.

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$0 \leq f(x) \leq K \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,+\infty[.$$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $\quad F(x) = e^{-Kx} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

1) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $F'(x) \leq 0$, $\forall x \in [0,+\infty[$.

2) En déduire que $f = 0$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 7.

On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1) Montrer que tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)|^2 \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

(Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $t \longmapsto f'(t)$ et $t \longmapsto 1$ sur l'intervalle $[a,x]$).

2) En déduire que

$$\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Département de Mathématiques
Filière: Mathématiques-SMA-S2

Corrigé du Contrôle 1 du module d'Analyse II-SMA- S2- Avril 2011

(Pr. My Hicham LALAOUI RHALI)

Exercice 1

1) Une fonction φ est dite en escalier sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, s'il existe une subdivision $(d) = (x_0 = a, \cdots, x_n = b)$ de $[a,b]$, dite associée (ou adaptée) à φ sur $[a,b]$, telle que $\varphi(x) = \alpha_k = \text{cte}, \forall x \in]x_{k-1}, x_k[, k = 1, \dots, n$.

2) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et soient (Φ'_n, Ψ'_n) et (Φ''_n, Ψ''_n) deux couples de suites de fonctions associées respectivement à f et g sur $[a,b]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Posons : $\Phi_n = \lambda \Phi'_n + \mu \Phi''_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Psi_n = |\lambda| \Psi'_n + |\mu| \Psi''_n$$

Il est facile de voir que $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$. De plus, pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|(\lambda f + \mu g)(x) - \Phi_n(x)| &= |\lambda(f(x) - \Phi'_n(x)) + \mu(g(x) - \Phi''_n(x))| \\
&\leq |\lambda||f(x) - \Phi'_n(x)| + |\mu||g(x) - \Phi''_n(x)| \\
&\leq |\lambda| \Psi'_n(x) + |\mu| \Psi''_n(x) = \Psi_n(x)
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \Psi_n(x)\,dx = |\lambda| \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi'_n(x)\,dx + |\mu| \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi''_n(x)\,dx$$

$$= 0 + 0 = 0$$

D'où $(\Phi_n, \Psi_n)_n$ est une suite associée à $(\lambda f + \mu g)$ sur $[a,b]$. Ainsi, la fonction $(\lambda f + \mu g)$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. ②

3) Soient f et g deux fonctions numériques Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ telles que $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Posons $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Alors il existe $\alpha \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \alpha \int_a^b g(x)\, dx$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Exercice 2.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si φ est en escalier sur $[a,b]$, alors il existe une subdivision $(d) = (x_0 = a, \dots, x_n = b)$ de $[a,b]$ telle que $\varphi(x) = \alpha_k = \text{cte}$, $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \dots, n$.

Posons $y_k = \lambda x_k$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Comme $x_{k-1} < x_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et puisque $\lambda > 0$, on obtient $y_{k-1} = \lambda x_{k-1} < \lambda x_k = y_k$.

$(D) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ étant alors une suite finie et strictement croissante de points de $[\lambda a, \lambda b]$, de 1er terme $y_0 = \lambda x_0 = \lambda a$ et de dernier terme $y_n = \lambda x_n = \lambda b$, donc (D) est une subdivision de $[\lambda a, \lambda b]$, de plus, si $x \in]y_{k-1}, y_k[=]\lambda x_{k-1}, \lambda x_k[$, alors $\frac{x}{\lambda} \in]x_{k-1}, x_k[$ ce qui entraine donc que

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \alpha_k = cte, \ \forall x \in]y_{k-1}, y_k[, \ k=1, \dots n.$$

Ainsi ψ est une fonction en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$ et on a:

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \cdot \alpha_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k - \lambda x_{k-1}) \cdot \alpha_k$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \alpha_k$$

$$= \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

2) f étant Riemann-intégrable sur $[a,b]$ donc f est bornée sur $[a,b]$ ce qui implique que g est bornée sur $[\lambda a, \lambda b]$. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant:

$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx = 0$

Pour tout $x \in [\lambda a, \lambda b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad \Psi_n(x) = \psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

D'après 1), $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ sont bien deux suites de fonctions en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$. De plus, si $x \in [\lambda a, \lambda b]$, alors $\frac{x}{\lambda} \in [a,b]$ et donc

$$\Phi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = g(x) \leq \psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \Psi_n(x), \quad \forall x \in [\lambda a, \lambda b], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

et $\int_{\lambda a}^{\lambda b}(\Psi_n(x)-\Phi_n(x))\,dx=\int_{\lambda a}^{\lambda b}\left(\psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)-\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)dx$ (4)

$$=\lambda\int_a^b(\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,dx,\ \text{(d'après 1)}$$

ce qui entraine alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b}(\Psi_n(x)-\Phi_n(x))\,dx=\lambda\lim_{n\to+\infty}\int_a^b(\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,dx=0.$$

Le critère 1 nous permet donc de conclure que la fonction $g: x\longmapsto g(x)=f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est Riemann-intégrable sur $[\lambda a,\lambda b]$ et que :

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b}g(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b}\Phi_n(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b}\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx$$

$$=\lambda\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\,dx\ ,\ \text{(d'après 1)}$$

$$=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice 3

$f\geqslant 0$ sur $[a,b]$ ce qui entraine que $0\leq\frac{1}{\sqrt{1+f}}\leq 1$ sur $[a,b]$ et donc $\frac{1}{\sqrt{1+f}}$ est bornée sur $[a,b]$.

f étant Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe alors $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi_n\leq f\leq\psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$

et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b(\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,dx=0.$

Comme $0 \leq f$ sur $[a,b]$, alors les suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ peuvent être choisies telles que
$$0 \leq \varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ , sur } [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N},$$
ce qui entraine alors que
$$1 \leq \sqrt{1+\varphi_n} \leq \sqrt{1+f} \leq \sqrt{1+\psi_n}$$
et donc que
$$\frac{1}{\sqrt{1+\psi_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+f}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n}} \leq 1 \text{ sur } [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
D'autre part,
$$0 \leq \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1+\psi_n(x)}} \right) dx = \int_a^b \frac{(\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx}{\sqrt{1+\varphi_n(x)} \cdot \sqrt{1+\psi_n(x)} \left(\sqrt{1+\varphi_n(x)} + \sqrt{1+\psi_n(x)}\right)}$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \text{ , } (*)$$
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx = 0$, alors il vient des inégalités $(*)$ que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1+\psi_n(x)}} \right) dx = 0$.

Finalement, $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\psi_n}}\right)_n$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n}}\right)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ satisfaisant
$\frac{1}{\sqrt{1+\psi_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+f}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n}}$ sur $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et
$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_n(x)}} - \frac{1}{\sqrt{1+\psi_n(x)}} \right) dx = 0$. On déduit alors du critère 1 d'intégrabilité que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+f}}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable.

1) (i) Si $f = c = $ cte sur $[a,b]$, alors pour tout $\lambda > 0$

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\, dx \right| = |c| \left| \int_a^b \sin(\lambda x)\, dx \right|$$

$$= \frac{|c|}{\lambda} \left| \cos(\lambda a) - \cos(\lambda b) \right| \leq 2\frac{|c|}{\lambda}$$

Comme $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2\frac{|c|}{\lambda} = 0$, alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0$.

(ii) Si f est en escalier sur $[a,b]$, il existe alors $(d) = (x_0 = a, \dots, x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\varphi(x) = \alpha_K = $ cte, $\forall x \in]x_{K-1}, x_K[$, $K = 1, \dots, n$.

Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\, dx = \sum_{K=1}^{n} \int_{x_{K-1}}^{x_K} f(x) \sin(\lambda x)\, dx$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \int_{x_{K-1}}^{x_K} \alpha_K \cdot \sin(\lambda x)\, dx$$

D'après (i) on a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_{x_{K-1}}^{x_K} \alpha_K \sin(\lambda x)\, dx = 0$, $\forall K \in \{1, \dots, n\}$

ce qui entraine alors que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\, dx = \sum_{K=1}^{n} \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{x_{K-1}}^{x_K} \alpha_K \sin(\lambda x)\, dx = 0.$$

2) Supposons maintenant que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors d'après le critère 3, il existe φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ satisfaisant :

$|f-\varphi|<\psi$ sur $[a,b]$ et $\int_a^b \psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$. ⑦

Pour tout $\lambda>0$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,|\sin(\lambda x)|\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \psi(x)\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|$$

Comme φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors il vient de 1) que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$.

Il existe alors $A>0$ tel que pour $\lambda > A$, on ait

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\lambda > A$, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Finalement,

$\forall \varepsilon>0, \exists A>0$ tel que pour $\lambda>A$, on ait $\left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| < \varepsilon$

D'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$.

<u>Exercice 5</u> Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit a un réel fixé de $[0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto f(x^n)$ est continue, donc Riemann intégrable sur $[0,a]$ et la fonction $x \longmapsto 1$ est positive et Riemann-intégrable sur $[0,a]$ (car continue). Il vient alors de la 1ère formule de la moyenne qu'il existe un point $c \in [0,a]$ tel que

$$\int_0^a f(x^n)\,dx = f(c^n)\int_0^a dx = a.f(c^n).$$

Comme $0 \leq c \leq a < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} c^n = 0$

et par continuité de f sur $[0,a]$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a f(x^n)\,dx = a \lim_{n \to +\infty} f(c^n) = a.f(0).$$

<u>Exercice 6</u> Soit f une fonction numérique continue sur $[0,+\infty[$ telle qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$0 \leq f(x) \leq K\int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0,+\infty[.$$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $F(x) = e^{-Kx}\int_0^x f(t)\,dt$.

(i) f étant continue sur $[0,+\infty[$, donc la fonction $G: x \longmapsto G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, c'est à dire que G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a : $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in [0,+\infty[$.

Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto e^{-Kx}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, d'où F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$F'(x) = -Ke^{-Kx}\int_0^x f(t)\,dt + e^{-Kx}f(x)$$

$$= e^{-Kx}\left(f(x) - K\int_0^x f(t)\,dt\right), \quad \forall x \in [0,+\infty[.$$

(ii) Par hypothèse on a : $f(x) \leq K\int_0^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[0,+\infty[$, Comme de plus la fonction $x \longmapsto e^{-Kx}$ est positive sur $[0,+\infty[$, alors on obtient :

$$F'(x) = e^{-Kx}\left(f(x) - K\int_0^x f(t)\,dt\right) \leq 0,\ \forall x\in[0,+\infty[.$$

2) $F'(x) \leq 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$, donc F est une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$, on déduit alors que

$F(x) \leq F(0) = 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$.

D'autre part, puisque $f \geq 0$ sur $[0,+\infty[$, alors

$F(x) \geq 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$.

Ainsi $F(x) = 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$, ce qui implique que $\int_0^x f(t)\,dt = 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$.

Finalement, $0 \leq f(x) \leq K\int_0^x f(t)\,dt = 0$, $\forall x\in[0,+\infty[$

D'où $f = 0$ sur $[0,+\infty[$.

<u>Exercice 7</u>. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1) Soit $x\in[a,b]$.

Les fonctions $t \longmapsto f'(t)$ et $t \longmapsto 1$ sont continues donc Riemann-intégrables sur $[a,x]$. On déduit alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\left|\int_a^x f'(t)\times 1\,dt\right|^2 \leq \left(\int_a^x 1^2.dt\right)\left(\int_a^x |f'(t)|^2 dt\right)$$

$$\leq (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2 dt$$

Puisque la fonction $t \longmapsto |f'(t)|^2$ est positive sur $[a,b]$, (10)
alors :
$$\int_a^b |f'(t)|^2 dt = \int_a^x |f'(t)|^2 dt + \int_x^b |f'(t)|^2 dt \geqslant \int_a^x |f'(t)|^2 dt.$$

Il s'en suit alors que :
$$\left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|^2 \leqslant (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2 dt \leqslant (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

et comme $f(a)=0$, il vient alors que
$$|f(x)-f(a)|^2 = |f(x)|^2 \leqslant (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

2) En intégrant l'inégalité précédente entre a et b, on obtient
$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \int_a^b |f'(t)|^2 dt \cdot \int_a^b (x-a)\,dx$$

c'est à dire que
$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b \cdot \int_a^b |f'(t)|^2 dt$$
$$\leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

D'où l'inégalité cherchée.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2009-2010
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques (SMA)-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 1 - Durée 3h
(09 avril 2010)

Exercice 1.

1) Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $\lambda\varphi$, $|\varphi|$, $\varphi+\psi$, $\sup(\varphi,\psi)$ et $\inf(\varphi,\psi)$ sont encore en escalier sur $[a,b]$.
2) Montrer que toute fonction croissante $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 2.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et soit g une fonction définie sur un intervalle $[c,d]$ telle que $f([a,b]) \subset [c,d]$.
Montrer que si g est lipschitzienne sur $[c,d]$, alors la fonction composée $(g \circ f)$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 3.

Soient $f,\ g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives et continues. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$f(x) \leq K + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0,+\infty[.$$

1) On pose $\varphi(x) = K + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\psi(x) = \varphi(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
Montrer que ψ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\psi'(x) \leq 0, \quad \forall x \geq 0$.
2) En déduire que pour tout $x \geq 0$

$$f(x) \leq K\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 4.

On considère deux fonctions f et g Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédaires à la fonction F définie par $F(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \ \forall x \in [a,b]$).

Exercice 5.

Etant donnée une fonction f de classe C^n sur un intervalle $[a, b]$, où n est un entier naturel non nul, on pose

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_1 et I_2.

2) Montrer que

$$I_n = I_{n-1} - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

3) En déduire l'expression de I_n en fonction des valeurs de f aux points a et b et de ses dérivées succéssives au point a, puis conclure.

Exercice 6.

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à une primitive F de f sur $[a, b]$, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) - \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)\right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{6},$$

où $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$.

Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques -SMA-S2

Corrigé du Contrôle 1 du module d'Analyse II-SMA-S2 - Avril 2010

(Pr. My Hicham LALAOUI RHALI)

Exercice 1

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Soit $(d) = (x_0 = a, \dots, x_n = b)$ une subdivision associée à φ sur $[a,b]$ et soit $\alpha_K = \varphi(x) = \text{cte}$, $\forall x \in]x_{K-1}, x_K[$, $K = 1, \dots, n$. Alors :

$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\alpha_K = \omega_K = \text{cte}$, $\forall x \in]x_{K-1}, x_K[$, $K = 1, \dots, n$. D'où $(\lambda\varphi)$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.

De même,

$|\varphi|(x) = |\varphi(x)| = |\alpha_K| = \delta_K = \text{cte}$, $\forall x \in]x_{K-1}, x_K[$, $K = 1, \dots, n$. Donc $|\varphi|$ est en escalier sur $[a,b]$.

b) Soient (d) et (d') deux subdivisions associées respéctivement à φ et ψ sur $[a,b]$.

Posons $(d'') = (d) \cup (d') = (x''_0 = a, x''_1, \dots, x''_p = b)$ la subdivision réunion de (d) et (d').

(d'') étant à la fois plus fine que (d) et (d'), donc (d'') est associée à la fois à φ et à ψ sur $[a,b]$, il existe alors des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$ telles que $\varphi(x) = \alpha_K$ et $\psi(x) = \beta_K$, $\forall x \in]x''_{K-1}, x''_K[$, $K = 1, \dots, p$.

Il vient alors que :

$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)=\alpha_k+\beta_k=\gamma_k=\text{cte},\ \forall x\in]x''_{k-1},x''_k[,$ $k=1,\dots,p$. D'où $(\varphi+\psi)$ est en escalier sur $[a,b]$.

c) Le fait que les fonctions $\sup(\varphi,\psi)$ et $\inf(\varphi,\psi)$ sont en escalier sur $[a,b]$, découle des questions précédentes et des égalités :

$$\sup(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}\left(\varphi+\psi+|\varphi-\psi|\right) \quad \text{et}$$

$$\inf(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}\left(\varphi+\psi-|\varphi-\psi|\right).$$

2) f étant croissante sur $[a,b]$, donc

$$f(a)\leq f(x)\leq f(b),\ \forall x\in[a,b]$$

d'où f est bornée sur $[a,b]$.

Désignons par $(d)=(x_0=a,x_1,\dots,x_n=b)$ la subdivision régulière de $[a,b]$, ie : $x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$, $k=0,\dots,n$.

Posons $\begin{cases}\varphi_n(x)=f(x_{k-1}) & ,\ \forall x\in[x_{k-1},x_k[,\\ \psi_n(x)=f(x_k) & \quad k=1,\dots,n.\\ \varphi_n(b)=\psi_n(b)=f(b)\end{cases}$

φ_n et ψ_n sont bien deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, de plus et comme f est croissante sur $[a,b]$, alors :

$$\varphi_n(x)=f(x_{k-1})\leq f(x)\leq f(x_k)=\psi_n(x),$$

$\forall x\in[x_{k-1},x_k[,\quad k=1,\dots,n.$

de plus, $\varphi_n(b) \leq f(b) \leq \psi_n(b)$

D'où $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'autre part,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = 0$$

Ainsi f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 2.

g étant lipschitzienne sur $[c,d]$, il existe alors une constant K positive telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in [c,d].$$

g est donc continue sur $[c,d]$, donc bornée sur $[c,d]$ ce qui entraîne alors que $(g\circ f)$ est bornée sur $[a,b]$.

Comme f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors il existe $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant:

$$|f - \Phi_n| \leq \Psi_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi_n(x)dx = 0$$

Comme $c \leq f \leq d$, alors $(\Phi_n)_n$ peut être choisie telle que $c \leq \Phi_n \leq d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$|(g\circ f)(x) - (g\circ\Phi_n)(x)| \leq K|f(x) - \Phi_n(x)|$$
$$\leq K\,\Psi_n(x).$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b K.\Psi_n(x)dx = K \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b \Psi_n(x)dx = 0$,

d'où $(g\circ\Phi_n, K.\Psi_n)_n$ est une suite associée à $(g\circ f)$ sur $[a,b]$. Ainsi $(g\circ f)$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a : $\int_a^b (g\circ f)(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b (g\circ\Phi_n)(x)dx$.

<u>Exercice 3</u> Soient $f, g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives et continues. On suppose qu'il existe une constante $K>0$ telle que :

$$f(x) \leq K + \int_0^x f(t)g(t)\,dt, \quad \forall x\in[0,+\infty[.$$

1) On pose :

$$\varphi(x) = K + \int_0^x f(t)g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \varphi(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right)$$

f et g étant continues sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a : $F'(x) = f(x)g(x)$, $\forall x\in[0,+\infty[$

de même, la fonction $G : x \longmapsto G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a : $G'(x) = g(x)$ $\forall x\in[0,+\infty[$. On déduit alors que ψ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \varphi'(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right) - \varphi(x)g(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right)\\ &= f(x)g(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right) - \varphi(x)g(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right)\\ &= (f(x)-\varphi(x))\,g(x)\exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right), \ \forall x\in[0,+\infty[\end{aligned}$$

Comme $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in [0,+\infty[$ et que g est positive sur $[0,+\infty[$, on déduit que :

$$\psi'(x) = (f(x) - \varphi(x)) \cdot g(x) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right) \leq 0, \ \forall x \geq 0$$

2) $\psi'(x) \leq 0$, $\forall x \geq 0$, donc ψ est décroissante sur $[0,+\infty[$ ce qui entraine alors que

$$\psi(x) \leq \psi(0), \ \forall x \geq 0$$

c'est à dire que :

$$\varphi(x) \exp\left(-\int_0^x g(t)\,dt\right) \leq \psi(0) = K$$

D'où,

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq K \exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right), \ \forall x \geq 0.$$

<u>Exercice 4</u>. On considère deux fonctions f et g Riemann-intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est monotone sur $[a,b]$ et que g est positive sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose :

$$F(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

f et g étant Riemann-intégrables sur $[a,b]$, donc les fonctions $x \longmapsto \int_a^x g(t)\,dt$ et $x \longmapsto \int_x^b g(t)\,dt$ sont continues sur $[a,b]$, ce qui entraine alors que F est continue sur $[a,b]$.

- Supposons que f est croissante sur $[a,b]$, alors

$$f(a) \leq f(t) \leq f(b), \ \forall t \in [a,b]$$

et comme g est positive sur $[a,b]$, il vient que

$$f(a)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(b)g(t), \ \forall t \in [a,b]$$

ce qui entraine alors que

$$F(a) = f(b)\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt \geq 0$$ et que

$$F(b) = f(a)\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq 0.$$

Finalement, F est une fonction continue sur $[a,b]$, de plus $F(a)\cdot F(b) \leq 0$, on déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un point $c\in[a,b]$ tel que $F(c)=0$, c'est à dire qu'il existe un point $c\in[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt.$$

- Même démonstration dans le cas où f est décroissante sur $[a,b]$.

<u>Exercice 5</u>. Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle $[a,b]$, où n est un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)\,dx.$$

1) La fonction $x \longmapsto (b-x)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x)$ est continue, donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$, donc I_n est bien définie.

(i) $$I_1 = \int_a^b (b-x)^0 f'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx$$
$$= f(b) - f(a).$$

(ii) $I_2 = \int_a^b (b-x) f''(x)\,dx$

$$\underset{\text{parties}}{\overset{\text{par}}{=}} \left[(b-x)f'(x)\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= -(b-a)f'(a) + I_1$$

$$= -(b-a)f'(a) + f(b) - f(a).$$

2) Par une simple intégration par parties, on obtient:

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(\left[(b-x)^{n-1} \cdot f^{(n-1)}(x)\right]_a^b + (n-1)\int_a^b (b-x)^{n-2} \cdot f^{(n-1)}(x)\,dx \right)$$

$$= -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-x)^{n-2} f^{(n-1)}(x)\,dx$$

$$= I_{n-1} - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

D'où la formule cherchée.

3) D'après 2/ on a:

$$I_n = I_{n-1} - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$I_{n-1} = I_{n-2} - \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a)$$

$$\vdots$$

$$I_3 = I_2 - \frac{(b-a)^2}{2} f''(a)$$

$$I_2 = I_1 - (b-a) f'(a).$$

En sommant terme à terme les égalités, on obtient:

$$I_n = -\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(a) - \cdots - \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + I_1 \quad ⑧$$

$$= I_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

$$= f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

C'est à dire que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I_n$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

On obtient alors la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 6. Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on pose, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Comme f est continue sur $[a,b]$, alors la fonction F est une primitive de f sur $[a,b]$, c'est à dire que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

f étant de classe C^2 sur $[a,b]$, donc F est de classe C^3 sur $[a,b]$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à F sur $[a,b]$ entraine alors que :

$$F(b) = F(a) + \frac{(b-a)}{1!}F'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}F''(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} F^{(3)}(x)\,dx$$

c'est à dire que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \frac{(b-a)}{1!}f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f''(x)\,dx$$

Ce qui entraine alors que :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{(b-a)}{1!}f(a) - \frac{(b-a)^2}{2}f'(a) \right|$$

$$= \left| \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f''(x)\,dx \right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}\,dx$$

$$\leq \frac{M_2}{2}\left[-\frac{(b-x)^3}{3}\right]_a^b$$

$$\leq M_2 \frac{(b-a)^3}{6}.$$

D'où l'inégalité cherchée.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2011-2012
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques-SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 2 - Durée 3h
(06 Juin 2012)

Exercice 1. 1,5

Montrer, à partir de la définition, que l'intégrale généralisée

1,5
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$$

est convergente et la calculer.

Exercice 2. 4,5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}.$$

1 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est convergente.

1,5 2) Calculer I_1.

1 3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{(3n-4)}{(3n-3)} I_{n-1}$.

1 4) En déduire que $I_n = \dfrac{(3n-4)\times(3n-7)\times\ldots\times 5\times 2}{(3n-3)\times(3n-6)\times\ldots\times 6\times 3}\cdot\left(\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right)$, $\forall n \geq 2$.

Exercice 3 . 4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. On pose
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

1 1) Justifier pourquoi F est bornée sur $[a, +\infty[$.

Notons $M = \sup_{x\in[a,+\infty[} |F(x)|$ et soit α un réel strictement positif.

1,5 2) Montrer que pour tous $X, Y \in [a, +\infty[$ tels que $Y > X$, on ait
$$\left|\int_X^Y \frac{f(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2M}{X^\alpha}.$$

1,5 3) En déduire que l'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
est convergente.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant

$$f'(x)f(-x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$g(x) = f(x)f(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1 — 1) Montrer qu'il existe une constante réelle non nulle C telle que $g(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$.
0,5 — 2) En déduire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par f.
1 — 3) Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire alors f.

Exercice 5. 3,5

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante $\Delta' = m-1$ 0,5

$m>1$ 0,5 + 0,5 $\quad y'' - 2my' + (m^2 - m + 1)y = e^{mx}$ $\quad y_0 = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$

où m est un paramètre réel.

$m=1$ 0,5 + 0,5 $\quad m<1$ 0,5 + 0,5

Exercice 6.

On considère la courbe plane f définie par les équations paramétriques

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \qquad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

2 — 1) Dresser le tableau de variations de f et étudier les branches infinies. $y=x$ 0,5
1 — 2) Déterminer la nature du point $M(x(1), y(1))$. 1re esp
3) Tracer le support Γ de f. (Oy) 0,5

1

Corrigé du Contrôle 2 d'Analyse II
SMA-S_2- Juin 2012

Exercice 1.

Le problème se pose en $+\infty$. La fonction $x \mapsto \frac{\text{Arctg}(x)}{1+x^2}$ étant continue, donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$. (0,5)

$\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\text{Arctg}(x)}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \text{Arctg}'(x)\text{Arctg}(x)\,dx$

$= \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\frac{\text{Arctg}^2(x)}{2}\right]_0^t = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\text{Arctg}^2(t)}{2} = \frac{\pi^2}{8}$ qui (1) est finie, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctg}(x)}{1+x^2}\,dx$ est convergente et vaut $\frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 2

1) Le problème se pose en $+\infty$ (0,5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{(1+x^3)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^n}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{3n}}$ sont positives et localement intégrables sur $[1, +\infty[$ (car continues), de plus elles sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. Comme $3n > 1$, alors l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ est convergente. Il vient du critère d'équivalence que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ est aussi convergente. (0,5)

Ainsi $I_n = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}}_{\text{convergente}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}}_{\text{convergente}}$ est convergente

2) En utilisant la factorisation $1+x^3=(1+x)(x^2-x+1)$ et par une simple intégration par parties, on obtient ③

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3(1+x)}+\frac{1}{3}\,\frac{(-x+2)}{(x^2-x+1)}$$ 0,5pt

Pour tout $t>0$, on a:

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x^3}=\frac13\int_0^t\frac{dx}{1+x}-\frac16\int_0^t\frac{(2x-1)}{(x^2-x+1)}+\frac12\int_0^t\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\left[\frac13\ln(1+x)-\frac13\ln\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)\right]_0^t+\frac12\int_0^t\frac{dx}{(x-\frac12)^2+\frac34}$$

$$=\left[\frac13\ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)\right]_0^t+\frac{1}{\sqrt3}\int_0^t\frac{\frac{2}{\sqrt3}dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac12)\right)^2}$$

$$=\left[\frac13\ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt3}\right)\right]_0^t$$ 0,5p

$$=\frac13\ln\left(\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}}\right)+\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt3}\right)+\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)$$

comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{1+1/t}{\sqrt{1-\frac1t+\frac1{t^2}}}\right)=$

et $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt3}\right)=\frac{\pi}{2}$, alors

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{\sqrt3}\times\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi\sqrt3}{9}$$ 0,5

D'où $I_1=\frac{2\pi\sqrt3}{9}$.

3) Soit $n\geq 2$. Pour tout $t>0$ et en procédant par une intégration par parties et en posant $f'=1$ et $f=x$ et $g=(1+x^3)^{1-n}$ donc $g'=3(1-n)x^2(1+x^3)^{-n}$, on obtient

$$\int_0^t\frac{dx}{(1+x^3)^{n-1}}=\left[\frac{x}{(1+x^3)^{n-1}}\right]_0^t+3(n-1)\int_0^t\frac{x^3dx}{(1+x^3)^n}$$

$$=\frac{t}{(1+t^3)^{n-1}}+(3n-3)\int_0^t\frac{(x^3+1-1)dx}{(1+x^3)^n}$$

$$=\frac{t}{(1+t^3)^{n-1}}+(3n-3)\int_0^t\frac{dx}{(1+x^3)^{n-1}}-(3n-3)\int_0^t\frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

Par passage à la limite quand t tend vers $+\infty$, et comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{(1+t^3)^{n-1}}=0$, il vient que

$$I_{n-1}=0+(3n-3)I_{n-1}-(3n-3)I_n$$ 1pt

D'où $I_n=\frac{(3n-4)}{(3n-3)}\cdot I_{n-1}$, $\forall n\geq 2$.

$|a+b|\leq|a|+|b|$

4) D'après 3/ on a:

$$I_n=\frac{(3n-4)}{(3n-3)}\cdot I_{n-1}$$

$$I_{n-1}=\frac{[3(n-1)-4]}{(3(n-1)-3)}\cdot I_{n-2}=\frac{(3n-7)}{(3n-6)}\cdot I_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$I_3=\frac{(3\times3-4)}{(3\times3-3)}\cdot I_2=\frac56\cdot I_2$$ 1pt

$$I_2=\frac{(3\times2-4)}{(3\times2-3)}\cdot I_1=\frac23\cdot I_1$$

En multipliant terme à terme les égalités, on obtient:

$$I_n=\frac{(3n-4)(3n-7)\times\cdots\times5\times2}{(3n-3)(3n-6)\times\cdots\times6\times3}\cdot I_1$$

$$=\frac{(3n-4)(3n-7)\times\cdots\times5\times2}{(3n-3)(3n-6)\times\cdots\times6\times3}\cdot\left(\frac{2\pi\sqrt3}{9}\right)$$

Exercice 3

1) F est continue sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\int_a^{+\infty}f(x)dx$ est finie donc F est bornée sur $[a,+\infty[$. 1p

2) Notons $M = \sup_{x\in[a,+\infty[} |F(x)|$ et soit $\alpha>0$.

Soient $X, Y \in [a,+\infty[$ tels que $Y > X$. Comme F est une primitive de f sur $[a,+\infty[$, alors par une simple intégration par parties on obtient :

$$\left|\int_X^Y \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx\right| = \left|\left[\frac{F(x)}{x^\alpha}\right]_X^Y + \alpha\int_X^Y \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx\right|$$

$$\leq M\left(\frac{1}{Y^\alpha}+\frac{1}{X^\alpha}\right) + \alpha M\int_X^Y x^{-\alpha-1}\,dx$$

$$\leq M\left(\frac{1}{Y^\alpha}+\frac{1}{X^\alpha}\right) + M\left[-x^{-\alpha}\right]_X^Y \quad (1,5$$

$$\leq M\left(\frac{1}{Y^\alpha}+\frac{1}{X^\alpha}\right) + M\left(-\frac{1}{Y^\alpha}+\frac{1}{X^\alpha}\right) = \frac{2M}{X^\alpha}$$

3) Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\lim_{X\to+\infty} \frac{2M}{X^\alpha} = 0$, il existe $A>0$ tel que pour $X, \cancel{Y} \in [a,+\infty[$ vérifiant $X>A$, on ait :

$$\frac{2M}{X^\alpha} < \varepsilon.$$

Donc, pour $X, Y \in [a,+\infty[$ vérifiant $Y>X>A$, on a :

$$\left|\int_X^Y \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx\right| \leq \frac{2M}{X^\alpha} < \varepsilon. \quad (1,5pt)$$

Finalement,

$\forall \varepsilon>0, \exists A>0, \quad \forall X, Y \in [a,+\infty[, \; Y>X>A \Rightarrow \left|\int_X^Y \frac{f(x)}{x^\alpha}dx\right| < \varepsilon$

Le critère de Cauchy nous permet donc de conclure que $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$ est convergente pour tout $\alpha>0$.

Exercice 4

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 1 - 1 = 0$$

donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $g(x) = C$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (1p

Mais comme $f'(x)f(-x) = 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ alors $f'(x)\neq 0$ et $f(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, ce qui entraîne alors que $g(x) = C \neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2) D'après 1/ $\quad f(-x) = \frac{C}{f(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

En reportant dans l'équation $f'(x)f(-x) = 1$, il vient que $f'(x)\times\frac{C}{f(x)} = 1$

L'équation différentielle du 1er ordre satisfaite par f s'écrit donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{C}. \quad (0,5pt)$$

3) En intégrant l'équation obtenue, on obtient

$$\ln|f(x)| = \frac{x}{C} + \lambda \quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}$$

c.à.d que : $|f(x)| = e^{\lambda}\cdot e^{x/C}$, donc

$$f(x) = K e^{x/C} \quad \text{où } K\in\mathbb{R}^* \quad (1p$$

De l'égalité $f'(x)f(-x) = 1$, on déduit que

$\frac{K}{C}e^{x/C}\cdot K e^{-x/C} = 1$ c'est à dire que

$\frac{K^2}{C} = 1$, d'où $C = K^2$

Ainsi les solutions sont données par

$$f(x) = K e^{x/K^2}, \quad \text{où } K\in\mathbb{R}^*.$$

Exercice 5. $y'' - 2my' + (m^2 - m + 1)y = e^{mx}$, (E)

$y'' - 2my' + (m^2 - m + 1)y = 0$, (E_0)

$\varphi(r) = r^2 - 2mr + (m^2 - m + 1) = 0$

$\Delta' = m^2 - (m^2 - m + 1) = m - 1$ 0,5pt

__1er cas.__ Si $m > 1$, l'équation $\varphi(r) = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = m + \sqrt{m-1}$ et $r_2 = m - \sqrt{m-1}$ et la solution générale de (E_0) s'écrit :

$$y_0 = \lambda_1 e^{(m+\sqrt{m-1})x} + \lambda_2 e^{(m-\sqrt{m-1})x}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$ 0,5pt

on a $f(x) = e^{mx}$ et comme $\varphi(m) \neq 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = ae^{mx}$. En reportant dans (E), on obtient $a(1-m) = 1$, d'où $a = \frac{1}{1-m}$ et $y_p = \frac{e^{mx}}{1-m}$. 0,5pt

La solution générale de (E) s'écrit donc.

$$y = y_0 + y_p = \lambda_1 e^{(m+\sqrt{m-1})x} + \lambda_2 e^{(m-\sqrt{m-1})x} + \frac{e^{mx}}{1-m}$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

__2ème cas.__ Si $m = 1$, dans ce cas l'équation $\varphi(r) = 0$ admet une racine double $r_1 = r_2 = r = 1$ et donc la solution générale de (E_0) s'écrit :

$$y_0 = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^x, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$ 0,5pt

on a : $f(x) = e^x$ et 1 est une racine double de l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$, donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = ax^2e^x$, où $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans (E), on obtient : $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$ et $y_p = \frac{x^2e^x}{2}$ 0,5pt

La solution générale de (E) s'écrit dans ce cas

$$y = y_0 + y_p = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^x + \frac{x^2}{2}e^x, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

__3ème cas.__ Si $m < 1$, l'équation $\varphi(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = m + i\sqrt{1-m}$ et $r_2 = m - i\sqrt{1-m}$ et la solution générale de (E_0) s'écrit :

$$y_0 = e^{mx}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{1-m}\cdot x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{1-m}\cdot x)\right] \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$ 0,5pt

on a $f(x) = e^{mx}$ et $\varphi(m \pm i\cdot 0) \neq 0$, donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = ae^{mx}$. Un calcul similaire au cas $m > 1$ donne $a = \frac{1}{1-m}$ et $y_p = \frac{e^{mx}}{1-m}$. 0,5pt

La solution générale de (E) ~~s'écrit~~ :

$$y = y_0 + y_p = e^{mx}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{1-m}\cdot x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{1-m}\cdot x)\right] + \frac{e^{mx}}{1-m}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}$, $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$

1) $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = +\infty$, $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = +\infty$

$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t^2(1 + 2/t^4)}{t^2(1 + 1/t^4)} = 1$, de plus

$\lim_{t \to \pm\infty} (y(t) - x(t)) = 0$, donc la droite d'équation $\boxed{y = x}$ est une asymptote à la courbe Γ de f au voisinage de $\pm\infty$. 0,5pt

$\lim_{t \to 0^-} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \to 0^+} x(t) = +\infty$

$\lim_{t \to 0^-} y(t) = \lim_{t \to 0^+} y(t) = +\infty$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3+1}{t(t^2+2)} = \pm\infty$, donc la courbe Γ (8)
de f admet une branche parabolique de direction l'axe (oy) quand t tend vers 0^- et 0^+. (0,5)

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t^3-1)}{t^2}$, $\quad y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2(t^4-1)}{t^3}$

$x'(t) = 0 \iff t = 1$

$y'(t) = 0 \iff t = 1$ ou $t = -1$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

(2pt)

2) $f'(1) = (0,0)$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3}$, $\quad y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4}$

$f''(1) = (6,8) \neq (0,0)$ donc $p = 2$.

$x'''(t) = -\frac{12}{t^4}$, $\quad y'''(t) = -\frac{24}{t^5}$

$f'''(1) = (-12, -24)$, de plus

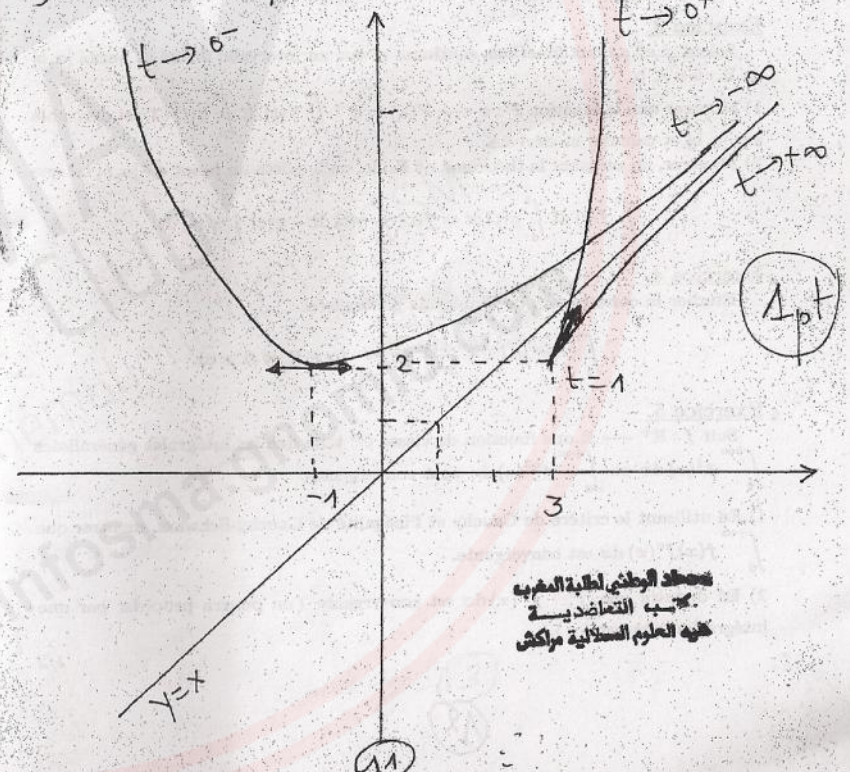
$\det(f''(1), f'''(1)) = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 8 & -24 \end{vmatrix} = -48 \neq 0$, donc $q = 3$.

(10)

on a alors $p = 2$ qui est pair et $q = 3$ est impair, (9)
donc $M(1) = (3,2)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce de la courbe Γ de f et Γ admet en ce point une tangente parallèle au vecteur $f''(1) = (6,8)$ c'est à dire de pente $\frac{4}{3}$. (1)

$f'(-1) = (-4,0) \neq (0,0)$, donc la courbe Γ admet au point $M(-1) = (-1,2)$ une tangente parallèle au vecteur $f'(-1) = (-4,0)$, c'est à dire une tangente horizontale.

3) courbe Γ de f.



(1pt)

(11)

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année universitaire 12/13
Filière SMA-S2
Analyse II

Contrôle 1
Durée : 3 heures

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1 1- Montrer que :

$$\ln(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1 2- En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Calculer les primitives suivantes :

1 $a) \displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$ 2 $b) \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}dx$ 1,5 $c) \displaystyle\int \cos^4 x \sin^4 x \, dx.$

Exercice 3 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}dt.$$

0,5 1- Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
1 2- Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
1 3- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
1+1 4- On prolonge f en 0 par continuité. Montrer que f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
1 5- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Exercice 4 :
1 1- Enoncer le critère 2 d'intérgabilité au sens de Riemann.
1 2- Enoncer le critère 3 d'intérgabilité au sens de Riemann.

3- Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que :

$$\varepsilon_n=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\longrightarrow 0,\quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

0,5 *a*) Montrer que
$$\forall x\in[a,b]\qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)=f(x).$$

1 *b*) Montrer que f est bornée sur $[a,b]$.

0,5 *c*) En utilisant le critère 3, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x\in[a,b]\quad |f_n(x)-\varphi_n(x)|\le\psi_n(x)\quad\text{et}\quad \int_a^b\psi_n(x)dx\le\frac{1}{n}.$$

1 *d*) En utilisant le critère 2, montrer alors que f est intégrable sur $[a,b]$ et que :

+1 $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

4- **Application:** pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ soit la fonction

$$f_n:\ \begin{array}{l}[0,1]\longmapsto\mathbb{R}\\ x\longmapsto x^n(1-x)^n.\end{array}$$

1 *a*- Montrer que :
$$\forall x\in[0,1]\qquad x(1-x)\le\frac{1}{4}.$$

1 *b*- En déduire la valeur de :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx.$$

SMA - S2

Contrôle 1

2012 - 2013

Ex 1 : $S_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

1) $\ln(S_n) = \frac{1}{n}\left[\ln((2n)!) - \ln(n!) - n\ln n\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - n\ln n\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\ln n + \ln(1+\frac{k}{n})\right) - n\ln n\right]$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k/n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\ln(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ où $f(x) = \ln(1+x)$.

Comme f est cont sur $[0,1]$ alors :

$\lim_{n\to+\infty} \ln(S_n) = \int_0^1 f(x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

Ex 2 :

a) $\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{(\cos x)(1+\cos x)}$ $\quad \begin{pmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{pmatrix}$

$= -\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right) dt$

$= \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + C$

intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi, (2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\,dx$ $\left(I =]-\infty,0[\text{ ou }]0,+\infty[\right)$.

- On pose $y = \sqrt[3]{1+x^3}$, donc $x = (y^3-1)^{1/3}$

et $dx = y^2(y^3-1)^{-2/3}\,dy$. Par suite :

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\,dx = \int \frac{y^3}{y^3-1}\,dy = \int \left(1 + \frac{1}{y^3-1}\right)dy$$

$$= y + \int \frac{dy}{y^3-1}$$

- $F(y) = \frac{1}{y^3-1} = \frac{1}{(y-1)(y^2+y+1)}$

$$= \frac{1/3}{y-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{y^2+y+1}\right)$$

- $\int F(y)\,dy = \frac{1}{3}\ln(|y-1|) - \frac{1}{3}\int \frac{y+2}{y^2+y+1}\,dy$

$$= \frac{1}{3}\ln(|y-1|) - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2y+1) + 3/2}{y^2+y+1}\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\ln(|y-1|) - \frac{1}{6}\ln(y^2+y+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+y+1}$$

1

$$\int \frac{dy}{y^2+y+1} = \int \frac{dy}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dy}{\frac{4}{3}(y+\frac{1}{2})^2+1}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{Arc tg}\, t + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{Arc tg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

$t = \frac{2}{\sqrt{3}}(y+\frac{1}{2})$

$= \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$

$dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dy$

nc $\int F(y)\,dy = \frac{1}{3}\ln(|y-1|) - \frac{1}{6}\ln(y^2+y+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

Il en résulte :

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\,dx = \sqrt[3]{1+x^3} + \frac{1}{3}\ln\left(\left|\sqrt[3]{1+x^3}-1\right|\right) - \frac{1}{6}\ln\left(\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^3}+1\right)$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

c) $\int \cos^4 x \sin^4 x\,dx \qquad (I = \mathbb{R}).$

$$\int \cos^4 x \sin^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int \sin^4(2x)\,dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(1-2\cos(4x)+\cos^2(4x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(1-2\cos(4x)+\frac{1+\cos(8x)}{2}\right)dx$$

1,5

$$= \frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(8x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{16}\sin(8x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin(4x) + \frac{1}{8}\sin(8x)\right) + C.$$

Ex3 : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt.$

1) La fct $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est cont sur $]0,+\infty[$, donc elle est integ sur $[x, 2x]$ $\forall x > 0$.

Par suite f est déf sur $]0,+\infty[$.

2) Soit la fct $x \mapsto F(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t}\, dt$.
Comme la fct $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ est cont sur $]0,+\infty[$ alors F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a :

1 $$F'(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \forall x > 0.$$

D'autre part on a : $f(x) = F(2x) - F(x) \quad \forall x > 0$

Donc f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3) Soit $x > 0$. La fct $t \mapsto \cos t$ est cont sur $[x, 2x]$ et la fct $t \mapsto \frac{1}{t}$ est cont positive sur $[x,2x]$, donc, d'après la $1^{ère}$ formule de la moyenne,

1 $\exists\, c_x \in [x, 2x]$ t.q :

$$f(x) = (\cos(c_x)) \cdot \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = (\ln 2) \cos(c_x).$$

Comme $x \leq c_x \leq 2x$ alors $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln 2$.

4) On pose : $f(0) = \ln 2$. Donc f ainsi prolongée est cont sur $[0,+\infty[$.

Comme ds 3), pr tout $x > 0$ $\exists\, c_x \in [x, 2x]$

t.q $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{(\cos(c_x) - 1)\ln 2}{x}$$

1 $$= \left(\frac{c_x}{x}\right) \cdot \left(\frac{\cos(c_x) - 1}{c_x}\right) \ln 2.$$

Comme $c_x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ alors $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(c_x) - 1}{c_x} = \sin 0 = 0$

De plus on a $1 \leq \frac{c_x}{x} \leq 2 \quad \forall x > 0$, donc

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Par suite f est der à dte de 0 et on a $f'_d(0) = 0$.

(5)

D'autre part on a :

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\cos(2x) - \cos x}{x} \quad \forall x > 0.$$

Il en résulte

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - 2x^2) - (1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{3}{2}x + o(x)\right) = 0 = f'_d(0).$$

Donc f' est cont à dte de 0. Comme f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (d'après 2)) alors f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

5) Une integ par parties donne :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin x}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \forall x > 0.$$

Donc $|f(x)| \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} dt = \frac{5}{2x} \quad \forall x > 0.$

On en déduit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Ex 4 :

1) voir cours.

2) voir cours. dérivable ⇒ continue.

6

3) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ integ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q :

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

a) on a : $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

0,5 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$.

b) $\varepsilon_n \to 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}^*$ t.q $\varepsilon_N \leq 1$

Donc pr tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)|$$
$$\leq \varepsilon_N + |f_N(x)|$$
$$\leq 1 + |f_N(x)|$$

1 Comme f_N est integ sur $[a,b]$ alors elle est bornée, donc $\exists \alpha > 0$ t.q :

$$|f_N(x)| \leq \alpha \quad \forall x \in [a,b].$$

Par suite on a :

$$|f(x)| \leq 1 + \alpha \quad \forall x \in [a,b].$$

Donc f est bornée.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est integ sur $[a,b]$, donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et en utilisant le critère 3, $\exists$ φ_n et ψ_n 2 fcts en

0,5 escalier sur $[a,b]$ t.q :

$$|f_n - \varphi_n| \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n}$$

d) D'après c), $\exists (\varphi_n)$ et (ψ_n) 2 suites de fcts en escalier sur $[a,b]$ t.q :

- $|f_n - \varphi_n| \leq \psi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,
- $\int_a^b \psi_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n}$ " .

Donc $|f - \varphi_n| \leq |f - f_n| + |f_n - \varphi_n|$

$\leq \psi_n + \varepsilon_n = \Psi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

De plus Ψ_n est en escalier sur $[a,b]$ et on a :

$$0 \leq \int_a^b \Psi_n(x)\,dx = \int_a^b \psi_n(x)\,dx + \varepsilon_n (b-a)$$

$$\leq \frac{1}{n} + \varepsilon_n (b-a).$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \Psi_n(x)\,dx = 0$;

Par suite f est intégrable sur $[a,b]$, d'après le critère 2.

D'autre part on a :

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_a^b \varepsilon_n\,dx = \varepsilon_n (b-a).$$

Comme $\varepsilon_n \to 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

0

4) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$x \longmapsto x^n (1-x)^n$

a) $\varphi(x) = x(1-x)$ $\qquad \varphi'(x) = 1 - 2x$

x	0		$1/2$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

1

Donc $\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq x(1-x) \leq 1/4$.

b) D'après a), on a ;

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq x^n (1-x)^n \leq \frac{1}{4^n}.$$

Donc $\varepsilon_n = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1 La suite (f_n) vérifie les cond de 3) avec $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

Par suite on a, d'après 3) d) ;

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx = \int_0^1 0 \, . \, dx = 0 .$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2011-2012
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques -SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle de rattrapage
Durée 3h - (18 Juin 2012)

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Justifier pourquoi la fonction $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ est Riemann-intégrable sur $[0, n]$, où E désigne la fonction partie entière, puis calculer $\int_0^n \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et soit g une fonction définie sur un intervalle $[c, d]$ telle que $f([a, b]) \subset [c, d]$.
Montrer que si g est lipschitzienne sur $[c, d]$, alors la fonction composée $(g \circ f)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 3.

Soient f et g deux fonctions continues et sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, où $a < b$.

1) Montrer que la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t - g(c) \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

Etudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x^\beta}\right) \mathrm{d}x \,, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0).$$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} f''^2(x)\,\mathrm{d}x$ sont convergentes.

1) En utilisant le critère de Cauchy et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2) En déduire que $\int_0^{+\infty} f'^2(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente (on pourra procéder par une intégration par parties).

12

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t - x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.
2) Ecrire l'équation différentielle du second ordre satisfaite par f, puis la résoudre.
3) En déduire alors que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra calculer $f(0)$ et $f'(0)$).

Exercice 7.

Soit f la courbe plane définie par les équations paramétriques

$$x(t) = \frac{1}{t(t-4)} \,, \qquad y(t) = t - \frac{1}{t}.$$

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) Etudier les branches infinies et déterminer les asymptotes à la courbe de f.
3) Tracer le support Γ de f.

8 13

Corrigé du Contrôle de rattrapage du module d'Analyse II - SMA-S_2

Juin 2012

(1)

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la subdivision régulière $(d) = (x_0 = 0, \dots, x_n = n)$ de l'intervalle $[0,n]$ i.e., $x_k = 0 + k\frac{(n-0)}{n} = k$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Alors, par définition de E, on a :

$E(x) = k-1 = \alpha_k = cte$, $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[$, $k=1, \dots$ (0,5)

Donc la fonction partie entière E est en escalier sur $[0,n]$, donc Riemann-intégrable sur $[0,n]$ et on a :

$$\int_0^n E(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$ (1p)

Exercice 2.

La fonction g étant Lipschitzienne sur $[c,d]$, donc il existe une constante positive K telle que :

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in [c,d].$$

g est donc continue sur $[c,d]$, donc bornée sur $[c,d]$ ce qui entraine alors que $(g \circ f)$ est bornée sur $[a,b]$. Comme f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors il existe $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant (0,5)

$|f - \Phi_n| \leq \Psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b \Psi_n(x)dx$

Comme $c \leq f \leq d$, alors $(\Phi_n)_n$ peut être choisie telle que $c \leq \Phi_n \leq d$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (0,5)

Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ \Phi_n)(x)| \leq K|f(x) - \Phi_n(x)| \leq K \cdot \Psi_n(x)$$

de plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b K \cdot \Psi_n(x)dx = K \lim \int_a^b \Psi_n(x)dx = 0$

Ainsi $(g \circ \Phi_n, K \cdot \Psi_n)$ est une suite associée à $(g \circ f)$ sur $[a,b]$, d'où $(g \circ f)$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a : $\int_a^b (g \circ f)(x)dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b (g \circ \Phi_n)(x)dx$

Exercice 3 (3pts)

1) Comme f est continue sur $[a,b]$, alors les fonctions $H : x \longmapsto H(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $K : x \longmapsto K(x) = \int_x^b g(t)dt$ sont dérivables sur $[a,b]$ et on a : $H'(x) = f(x)$ et $K'(x) = -g(x)$, pour tout $x \in [a,b]$. Comme de plus la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $[a,b]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$F'(x) = -e^{-x}H(x)G(x) + e^{-x}\left(H'(x)G(x) + H(x)G'(x)\right)$$

$$= e^{-x}\left(f(x)\int_x^b g(t)dt - g(x)\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt\right)$$

2) La fonction F étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$, de plus, $F(a) = F(b) = 0$, il vient du théorème de Rolle qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^c f(t)dt \int_c^b g(t)dt = f(c)\int_c^b g(t)dt - g(c)\int_a^c f(t)dt$$

D'où le résultat cherché.

Exercice 4 $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right)$, ($\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta>0$)

Le problème se pose en $+\infty$. 0,5 pt

on a : $x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$

Les fonctions $x\longmapsto x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right)$ et $x\longmapsto \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ sont positives et localement intégrables sur $[1,+\infty[$ (car continues), de plus elles sont équivalentes au voisinage de $+\infty$. On déduit alors du critère d'équivalence que : 0,5

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right) \text{ est convergente} \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\beta-\alpha}} \text{ est convergente}$$ 0,5 pt

$$\iff \beta-\alpha>1$$ (Critère de Riemann au voisinage de $+\infty$)

Conclusion Pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta>0$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right)dx$ est convergente si et seulement si $\beta-\alpha>1$.

Exercice 5 4,5 pts

1) Soient $X, Y\in[0,+\infty[$ tels que $Y>X$. Les fonctions f et f'' sont continues, donc Riemann-intégrables sur $[X,Y]$, il vient alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\left|\int_X^Y f(x)f''(x)\,dx\right| \leq \left(\int_X^Y f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_X^Y f''^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$ 1 pt

Soit $\varepsilon>0$. Comme $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f''^2(x)\,dx$ sont convergentes, alors d'après le critère de Cauchy, il existe $A_1>0$ tel que pour $Y>X>A_1$, on ait $\int_X^Y f^2(x)\,dx < \varepsilon$ et il existe $A_2>0$ tel que

pour $Y>X>A_2$, on ait : $\int_X^Y f''^2(x)\,dx<\varepsilon$

Donc pour $Y>X>A=\sup(A_1,A_2)$, on a :

$$\left|\int_X^Y f(x)f''(x)\,dx\right| \leq \left(\int_X^Y f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_X^Y f''(x)\,dx\right)^{1/2}$$ 1,5

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

Le critère de Cauchy nous permet donc de conclure que $\int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$ est convergente.

2) Soit $X>0$. Alors par une simple intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^X f'^2(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_0^X - \int_0^X f(x)f''(x)\,dx$$ 0,5

$$= f(X)f'(X) - f(0)f'(0) - \int_0^X f(x)f''(x)\,dx, \quad (*)$$

Par l'absurde, supposons que $\int_0^{+\infty} f'^2(x)\,dx$ est divergente alors comme $f'^2\geq 0$ sur $[0,+\infty[$, alors

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f'^2(x)\,dx = +\infty.$$ 0,5

Comme $\int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$ est convergente, alors on déduit de l'égalité $(*)$ que $\lim_{X\to+\infty} f(X)f'(X)=+\infty$

or $\int_0^X f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^X \left(f^2(x)\right)'dx$

$$= \frac{1}{2}f^2(X) - \frac{1}{2}f^2(0).$$

ce qui entraîne alors que

$$f^2(X) = 2\int_0^X f(x)f'(x)\,dx + f^2(0), \quad (**)$$ 0,5 pt

Mais, puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$, alors il vient de l'égalité (**) que $\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = +\infty$ ce qui contredit le fait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ est convergente. Ainsi $\int_0^{+\infty} f'^2(x)\,dx$ est convergente. (5) (0,5)

Exercice 6 (3,5pts)

Soit f une fonction continue sur IR vérifiant

$$f(x) = \int_0^x t f(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

1) Les fonctions $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto t f(t)$ sont continues sur IR, donc les fonctions $F: x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G: x \longmapsto G(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$ sont dérivables sur IR et on a : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = x f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (0,5)

La fonction f est donc dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur IR et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = G'(x) - F(x) - xF'(x)$$
$$= x f(x) - \int_0^x f(t)\,dt - x f(x) = -\int_0^x f(t)\,dt \quad (0,5)$$

Par les mêmes arguments que précédement, la fonction f' est aussi dérivable sur IR et on a :

$$f''(x) = (f')'(x) = \left(-\int_0^x f(t)\,dt\right)' = -F'(x) = -f(x).$$

donc f est deux fois dérivable sur IR et comme de plus $f'' = -f$ est continue, alors f est de classe C^2 sur IR (0,5)

2) L'équation différentielle du second ordre satisfaite par f s'écrit donc

$$f''(x) + f(x) = 0, \quad (E)$$ (0,5pt)

L'équation caractéristique associée à (E) est :

$$\varphi(r) = r^2 + 1 = 0$$

qui admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = i$ et $r_2 = -i$.

La solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit donc :

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x), \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$ (0,5)

3) En remarquant que $f(0) = 0 = f'(0)$, on obtient $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$, d'où $f = 0$ sur IR. (1pt)

Exercice (4,5pts)

$$x(t) = \frac{1}{t(t-4)}, \quad y(t) = t - \frac{1}{t}$$

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,4\} =]-\infty,0[\cup]0,4[\cup]4,+\infty[$.

$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$,

donc la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote à la courbe Γ de f au voisinage de $\pm\infty$. (0,5pt)

7

$\lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = +\infty$

$\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = -\infty$, de plus

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to 0} (t^2-1)(t-4) = 4$ et

$\lim\limits_{t\to 0} (y(t) - 4x(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(t^2-4t-1)}{t-4} = \dfrac{1}{4}$,

donc la droite d'equation $y = 4x + \frac{1}{4}$ est une asymptote à la courbe Γ de f au voisinage de t 0,5pt

$\lim\limits_{t\to 4^-} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 4^-} y(t) = \dfrac{15}{4}$

$\lim\limits_{t\to 4^+} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 4^+} y(t) = \dfrac{15}{4}$,

donc la droite d'équation $y = \frac{15}{4}$ est une asymptote à la courbe Γ de f au voisinage de 4. 0,5pt

Pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{0,4\}$, on a:

$x'(t) = -\dfrac{2t+4}{t^2(t-4)^2}$, $y'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2}$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 2$

$y'(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0,4\}$

$x(2) = -\dfrac{1}{4}$, $y(2) = \dfrac{3}{4}$

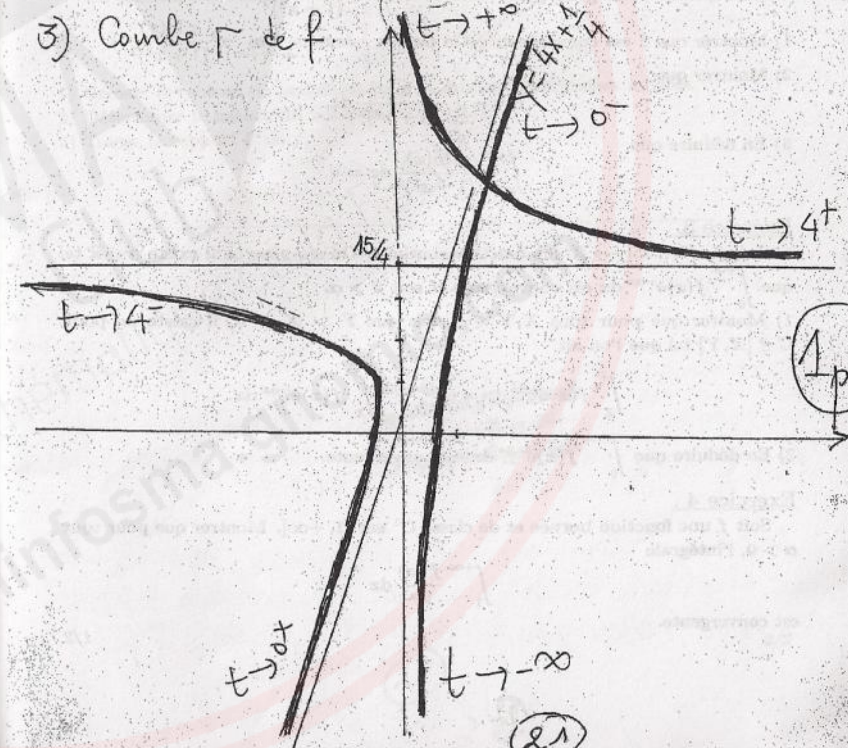
$y(4) = \dfrac{15}{4}$

Tableau de variation.

t	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\nearrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	||	$+$		$+$	||	$+$	

2pt

3) Courbe Γ de f.



1pt

(1)

Université Cadi-Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Année universitaire 12-13
Filière SMA Semestre 2
Module Maths Analyse II

Contrôle rattrapage
Durée 3H

Il sera particulièrement tenu compte de la rédaction, de la présentation, et de la précision de l'argumentation.

Exercice 1 (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \neq 1$. On définit la fonction f par: $f(t) = \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)$.

(1) 1. Déterminer le domaine de définition de f.

(0,5) 2. Justifier pourquoi f est intégrable sur $[0, \pi]$.

3. On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule suivante:

$$x^{2n} - 1 = \left(x^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

(1) a. On suppose que $|x| > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

converge vers $2\ln(|x|)$.

(1)+(0,5) b. En déduire la valeur de $\int_0^1 \ln\left(x^2 - 2x\cos t\pi + 1\right) dt$, puis celle de $\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta$.

(1) c. On suppose maintenant que $|x| < 1$ et $x \neq 0$. En posant $y = 1/x$, calculer $\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta$.

Exercice 2 (2 pts)

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes:

(1) 1. $\int_0^1 x^{-3/2} e^x \, dx$ (1) 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sin(1/3x) \, dx$

Exercice 3 (4 pts)

On se propose d'étudier la nature de l'intégrale généralisée :

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) - 1\right) dt.$$

(1) 1. Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

(1) 2. Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$.

(1) 3. Montrer que $\exp\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) - 1 = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{t} + o\left(\frac{\sin^2(t)}{t}\right)$.

(1) 4. En déduire la nature de I.

(2)

Exercice 4 (5 pts)

1. Soit f une fonction de classe C^1 et strictement croissante de $[a, b]$sur $[f(a), f(b)]$. Notons f^{-1} sa fonction réciproque. En utilisant un chagement de variable, montrer que :

(1,5)

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(t)dt$$

2. On suppose maintenant seulement que f est continue et strictement croissante de $[a, b]$sur $[f(a), f(b)]$. f^{-1} désigne toujours sa fonction réciproque. On désigne par $(d_n) = (x_0 = a, ..., x_n = b)$ la subdivision régulière de$[a, b]$, *i.e.* $x_k = a + k\dfrac{(b-a)}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. On pose $y_k = f(x_k)$.

(0,5) a. Montrer que $(D_n) = (y_0 = f(a), \ldots, y_n = f(b))$ est une subdivision de $[f(a), f(b)]$.

b. Montrer que $\delta(D_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, où $\delta(D_n)$ est le pas de (D_n).

(1) (On pourra utiliser la continuité uniforme de f sur $[a, b]$)

c. Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) + (y_k - y_{k-1}) f^{-1}(y_{k-1}).$$

(1) Calculer S_n en fonction de a, b et f.

d. En déduire que:

(1)

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 5 (4 pts)

Intégrer l'équation différentielle suivante selon les valeurs du paramètre réel m:

$$y'' - 2my' + (m^2 + 1)y = xe^{mx}. \quad (E_m)$$

$$y'' - 2my' + (m^2+1)y = 0 \quad (E_m^0)$$

— $\varphi_m(r) = r^2 - 2mr + (m^2+1) = 0$

(1) $r_1 = m + i$ et $r_2 = m - i$

— Sol. gén. de (E_m^0): $y = e^{mx}(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)$

(1,5) — $\varphi_m(m) = 1 \neq 0$, $y_p = (ax+b)e^{mx} \to a = 1$ et $b = 0$

— ... $e^{m}(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x) + x e^{mx}$

(i)

2012/2013

SMA - S_2 - Analyse

Contrôle de Rattrapage.

Ex 1

1) $x^2 - 2x\cos t + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ car $\Delta' = \cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$

sauf pour $t = 0$ ou $t = \pi$, on a: $x^2 - 2\cos t + 1 = (x-1)^2$ ou $(x+1)^2$.

donc $\cancel{D_f = \mathbb{R}}$.

2) f est ~~continue sur~~ $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, \pi]$,

donc intégrable sur $[0, \pi]$.

3) a)

$$\ln(x^{2n} - 1) = \ln(x^2 - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

$$\Rightarrow n \ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right) = \ln(x^2 - 1) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \ln x^2 + \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(x^2 - 1) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + \right.$$

$$\Rightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\ln|x|.$$

b) $t \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos t\pi + 1)$ est continue donc intégrable

sur $[0, 1] \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=\cdot}^{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \ln\left(x^2 - 2x\cos t\pi +\right.$

Or $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x \cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \longrightarrow 2 \ln|x|$

donc $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(x^2 - 2x \cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) - \frac{1}{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\pi + 1\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^1 \ln\left(x^2 - 2x\cos t\pi + 1\right) dt = 2\ln|x|}$$

Posons $\theta = t\pi$, alors $\int_0^1 \ln\left(x^2 - 2x\cos t\pi + 1\right) dt = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) \frac{d\theta}{\pi}$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta = 2\pi \ln|x|}$$

c) $|x| <$ et $x \neq 0$. $y = \frac{1}{x}$

$$\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\cos\theta + 1\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \ln \frac{1}{y^2}\left[y - 2y\cos\theta + 1\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\ln x^2 + \ln\left(y^2 - 2y\cos\theta + 1\right)\right] d\theta$$

$$= \pi \ln x^2 + \pi \ln y^2 = \pi \ln x^2 - \pi \ln x^2 = 0.$$

Finalement $\boxed{\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right) d\theta = 0}$

3

Ex 2

1 - $x^{-3/2} e^{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$ $\left(3/2 > 1\right) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{-3/2} e^{x}\,dx$ $\underline{\underline{\text{div.}}}$

2 - $\left| \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sin 1/3x \right| \leq \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{x^{1/2}}$

$1/2 < 1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ cv $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sin\frac{1}{3x}\,dx$ $\underline{\underline{\text{Cv}}}$

Ex 3

1 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ ~~Converge d'après~~ Abel (à justifier)

2 - $\dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2t}(1 - \cos 2t) = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{\cos 2t}{2t}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt$ div et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}\,dt$ cv ($\underline{\text{Abel}}$), donc

~~$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge~~.

3 - $\exp u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \Rightarrow$ le résultat.

4 - ~~I diverge~~ car $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2 t}{t} + o\left(\dfrac{\sin^2 t}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2 t}{t}$

Ex 4

1 - $u = f^{-1}(t) \iff t = f(u)$ et $dt = f'(u)\,du$

alors $$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = \int_a^b u\, f'(u)\,du = \Big[u f(u)\Big]_a^b - \int_a^b f(u)\,du$$

$$= b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(u)\,du$$

2 - (a) $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ et ~~f st~~ $\nearrow$

$\Rightarrow \quad y_0 = f(a) < y_1 < \dots < y_n = f(b)$.

$\Rightarrow$ (D_n) est une subdivision de $[f(a), f(b)]$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. f étant unif^t continue sur $[a,b]$

donc $\exists \eta > 0 \ / \quad |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq$

Or $\forall k = 1, \dots, n \qquad x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\exists N \in \mathbb{N} \ / \quad \forall n \geq N \quad 1/n \leq \eta$

alors $\underline{\forall n \geq N} \qquad \forall k = 1, \dots, n \qquad |x_k - x_{k-1}| = \frac{1}{n} < \eta$

$\Rightarrow \quad |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \delta(D_n) \leq \varepsilon$.

(c)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) + (y_k - y_{k-1}) f^{-1}(y_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_k) + f(x_k) x_{k-1} - f(x_{k-1}) x_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k f(x_k) - x_{k-1} f(x_{k-1}) \right]$$

$$= b f(b) - a f(a).$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) f^{-1}(y_{k-1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$$

alors

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,dt = b f(b) - a f(a)$$

Ex5

$$y'' - 2my' + (m^2+1)y = x e^{mx} \qquad (E_m)$$

$$y'' - 2m y' + (m^2+1) y = 0 \qquad (E_m^0)$$

Eq. caractéristique : $\varphi_m(r) = r^2 - 2mr + (m^2+1) = 0$

a deux solutions complexes :

$r_1 = m+i$ et $r_2 = m-i$

* La solution générale de (E_m^0) :

$$y = e^{mx}\left(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

* $\varphi_m(m) = m^2 - 2m^2 + m^2 + 1 = 1 \neq 0$

On cherche y_p sous la forme $y_p = (ax+b)e^{mx}$

On trouve $a = 1$ et $b = 0$.

* La solution générale de (E_m) est :

$$y = e^{mx}\left(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x\right) + x e^{mx}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2010-2011
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques-SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 2 - Durée 3h
(10 juin 2011)

Exercice 1.

Montrer, à partir de la définition, que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx\,, \quad (a>0)$$

est convergente et la calculer.

Exercice 2.

On considère l'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$.

1) Montrer que I est convergente (On pourra calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$).

2) Montrer que

$$I = -\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

3) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx = 0.$$

Exercice 3.

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x}\,dx$ est convergente et soit $\beta > \alpha$.

1) Montrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}$ tels que $Y > X > 0$, il existe un point $C \in [X, Y]$ tel que l'on ait

$$\int_X^Y f(x)e^{-\beta x}\,dx = e^{-(\beta-\alpha)X}\int_X^C f(x)e^{-\alpha x}\,dx.$$

2) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\beta x}\,dx$ est convergente.

Exercice 4 .

Soit f une fonction bornée et de classe C^1 sur $[1,+\infty[$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{f'(x)}{x^\alpha}\,dx$$

est convergente.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et vérifiant

$$xf(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt\,, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

On pose
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) Ecrire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par F.

2) Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire alors l'expression de f.

Exercice 6.

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y'' - 2(m+2)y' + m^2y = e^{(m+2)x}$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 7.

On considère la courbe plane f définie par les équations paramétriques

$$x(t) = -t - \frac{1}{t}\,, \qquad y(t) = t + \frac{1}{2t^2}.$$

1) Dresser le tableau de variations de f et étudier les branches infinies.

2) Déterminer la nature du point $M(x(1), y(1))$.

3) Tracer le support Γ de f.

23

Exercice 1

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln(1-e^{-x})\right]_a^t$$ 1pt

$$= -\ln(1-e^{-a})$$ qui est finie donc 0,5pt

$\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx$ est convergente et vaut $-\ln(1-e^{-a})$.

Exercice 2

1) $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}=0$ et comme $\alpha=2>1$, on déduit du critère de $x^\alpha f(x)$ que I est convergente. 1pt

2) En posant $t=\frac{1}{x}$ on obtient que $I=-\int_0^1\frac{x\ln(x)\,dx}{(1+x^2)^2}$ 1

3) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx=\int_0^1\frac{x\ln(x)\,dx}{(1+x^2)^2}+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx=-I+I=0$ 0,5p

Exercice 3

1) Soient $X,Y\in\mathbb{R}$ tels que $Y>X>0$. La fonction $x\mapsto e^{-(\beta-\alpha)x}$ étant continue donc Riemann intégrable sur $[X,Y]$, de plus elle est positive et décroissante sur $[X,Y]$ et la fonction $x\mapsto e^{-\alpha x}f(x)$ est Riemann intégrable sur $[X,Y]$ (car continue). On déduit de la 2ème formule de la moyenne qu'il existe un point $c\in[X,Y]$ tel que : 0,5

$$\int_X^Y f(x)e^{-\beta x}\,dx=\int_X^Y e^{-(\beta-\alpha)x}f(x)e^{-\alpha x}\,dx=e^{-(\beta-\alpha)X}\int_X^c f(x)e^{-\alpha x}\,dx$$ 1p

2) Soit $\varepsilon>0$. Comme $\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\alpha x}\,dx$ est convergente, alors d'après le critère de Cauchy, il existe $A>0$ tel que pour $c>X>A$, on ait $\left|\int_X^c f(x)e^{-\alpha x}\,dx\right|<\varepsilon$.

..., $X>A$, on a :

$$\left|\int_X^Y f(x)e^{-\beta x}\,dx\right|\le\left|\int_X^c f(x)e^{-\alpha x}\,dx\right|<\varepsilon$$ 2pts

Le critère de Cauchy nous permet donc de conclure que $\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\beta x}\,dx$ est convergente.

Exercice 4

Soit $\alpha>0$ et soit $t>1$.

Par une simple intégration par parties on a :

$$\int_1^t\frac{f'(x)}{x^\alpha}\,dx=\left[\frac{f(x)}{x^\alpha}\right]_1^t+\alpha\int_1^t\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$$ 1pt

$$=\frac{f(t)}{t^\alpha}-1+\alpha\int_1^t\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

Comme f est bornée et $\alpha>0$, alors $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}=0$ 1p

et $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi $\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.

Remarque : On pourra aussi utiliser le critère de Cauchy pour montrer la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{f'(x)}{x^\alpha}\,dx$.

Exercice 5

1) f étant continue sur $\mathbb{R}^*_+$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et on a : $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^*_+$

L'équation $xf(x)=2\int_0^x f(t)\,dt$ s'écrit donc 1pt

$$xF'(x)=2F(x)$$

qui est une équation différentielle du 1er ordre à variables séparées dont la solution est : $F(x)=Kx^2$, où $K\in\mathbb{R}$ 1pt

En dérivant on obtient que

$$f(x)=F'(x)=2Kx=Cx,\ \text{où } C\in\mathbb{R}.$$ 0,5p

Exercice : $y'' - 2(m+2)y' + m^2 y = e^{(m+2)x}$; (E) (4)

$$y'' - 2(m+2)y' + m^2 y = 0 \quad ; \quad (E_0)$$

$$\varphi(r) = r^2 - 2(m+2)r + m^2 = 0 . \quad 0,5\,pt$$

$$\Delta' = (m+2)^2 - m^2 = 4(m+1).$$

1er cas Si $m > -1$, $\varphi(r) = 0$ admet 2 racines réelles $r_1 = (m+2) - 2\sqrt{m+1}$ et $r_2 = (m+2) + 2\sqrt{m+1}$ et la solution générale de (E_0) s'écrit : 0,5 pt

$$y_0 = \lambda_1 e^{(m+2-2\sqrt{m+1})x} + \lambda_2 e^{(m+2+2\sqrt{m+1})x}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

On a $f(x) = e^{(m+2)x}$ et comme $\varphi(m+2) \neq 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = a e^{(m+2)x}$. En reportant dans (E) on obtient $a = \dfrac{-1}{4(m+1)}$ et donc

$$y_p = -\frac{e^{(m+2)x}}{4(m+1)} \quad 0,5\,pt$$

La solution générale de (E) s'écrit dans ce cas :

$$y = y_0 + y_p = \lambda_1 e^{(m+2-2\sqrt{m+1})x} + \lambda_2 e^{(m+2+2\sqrt{m+1})x} - \frac{e^{(m+2)x}}{4(m+1)}$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2ème cas Si $m = -1$, $\varphi(r) = 0$ admet une racine double $r = 1$ et la solution générale de (E_0) s'écrit

$$y_0 = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^x, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad 0,5\,pt$$

On a $f(x) = e^x$ et 1 est une racine double de l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$, donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = a x^2 e^x$, où $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans (E), on obtient $a = \frac{1}{2}$ et

$$y_p = \frac{x^2 e^x}{2}. \quad 0,5\,pt$$

La solution générale de (E) s'écrit dans ce cas

$$y = y_0 + y_p = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^x + \frac{x^2 e^x}{2} \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3ème cas Si $m < -1$, l'équation $\varphi(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = (m+2) - 2i\sqrt{-m-1}$ et $r_2 = (m+2) + 2i\sqrt{-m-1}$ et la solution générale de (E_0) s'écrit :

$$y_0 = e^{(m+2)x}\left[\lambda_1 \cos(2\sqrt{-m-1}\cdot x) + \lambda_2 \sin(2\sqrt{-m-1}\cdot x)\right], \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad 0,5\,pt$$

Comme $f(x) = e^{(m+2)x}$ et $\varphi(m+2) \neq 0$, alors on cherche y_p sous la forme $y_p = a e^{(m+2)x}$. Un calcul similaire au cas $m > -1$ donne $y_p = -\dfrac{e^{(m+2)x}}{4(m+1)}$ 0,5 pt

La solution générale de (E) s'écrit

$$y = y_0 + y_p = e^{(m+2)x}\left[\lambda_1 \cos(2\sqrt{-m-1}\cdot x) + \lambda_2 \sin(2\sqrt{-m-1}\cdot x)\right] - \frac{e^{(m+2)x}}{4(m+1)}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 7 $x(t) = -t - \dfrac{1}{t}$, $y(t) = t + \dfrac{1}{2t^2}$

1) $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$

$\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim \dfrac{2t^3 + 1}{-2t(t^2+1)} = -1$, de plus $\lim\limits_{t \to \pm\infty} (y(t) + x(t)) = 0$

donc la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe Γ de f au voisinage de $\pm\infty$. 0,5 pt

$\lim\limits_{t \to 0^-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to 0^+} x(t) = -\infty$

$\lim\limits_{t \to 0^-} y(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to 0^+} y(t) = +\infty$, de plus

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, donc la courbe Γ de f admet une branche parabolique de direction l'axe (oy) quand t tend vers 0^- et 0^+. 0,5 pt

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ on a :

$x'(t) = -1 + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{(1-t^2)}{t^2}$ et $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^3} = \dfrac{t^3 - 1}{t^3}$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2pt

$f'(1)=(0,0)$, $x''(t)=-\frac{2}{t^3}$, $y''(t)=\frac{3}{t^4}$

$f''(1)=(-2,3)\neq(0,0)$ donc $p=2$

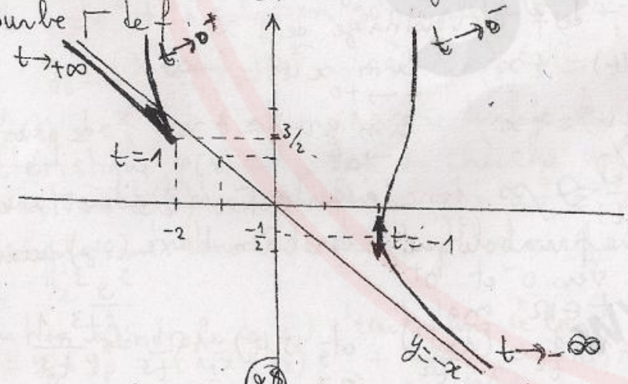
$x'''(t)=\frac{6}{t^4}$, $y'''(t)=-\frac{12}{t^5}$

$f'''(1)=(6,-12)$ et $\det(f''(1), f'''(1)) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ 0,5

donc $p=2$ pair et $q=3$ impair ce qui entraine alors que le point $M(1)=(-2,3/2)$ st un point de rebroussement de 1ere espèce de la courbe Γ de f et Γ admet en ce point une tangente parallèle à $f''(1)=(-2,3)$ c'est à dire de pente $-3/2$.

$f'(-1)=(0,2)\neq(0,0)$ donc la courbe Γ admet au point $M(-1)=(2,-1/2)$ une tangente verticale

3) Courbe Γ de f :



1pt

Université Cadi-Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Année universitaire 12-13
Filière SMA Semestre 2
Module Maths Analyse II

Contrôle 2
Durée 3H

Il sera particulièrement tenu compte de la rédaction, de la présentation, et de la précision de l'argumentation.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes:

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{t}\right) dt, \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^5+1)\sqrt{t}} dt, \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1} dt.$$

Exercice 2

Soit Γ la fonction réelle définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.

(2) Démontrer que, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$.

(3) En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Soit $a > 0$. On considère l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt.$

(1) Montrer que I est convergente.

(2) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $X > 0$, on définit :

$$I_{\varepsilon,X} = \int_\varepsilon^X \frac{\ln t}{t^2+a^2} dt.$$

A l'aide du changement de variable $t = a^2/x$, montrer que:

$$I_{\varepsilon,X} = -2\frac{\ln a}{a}\arctan(a/X) + 2\frac{\ln a}{a}\arctan(a/\varepsilon) + \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/X} \frac{\ln t}{t^2+a^2} dt.$$

(3) En déduire la valeur de I.

Ex1

1 - $1 - \cos\frac{1}{t} \geq 0$ et $1-\cos\frac{1}{t} \sim \frac{1}{2t^2}$

donc $\int_2^{+\infty} (1 - \cos 1/t)\, dt$ cv

2 - $\frac{t^5}{(t^5+1)\sqrt{t}} \sim \frac{t^5}{t^5 \times \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^5+1)\sqrt{t}}\, dt$ di

3 - $\frac{\ln t}{t^2+1} \leq 0$ et $\frac{\ln t}{t^2+1} \sim \ln t$

Comme $\int_0^1 \ln t\, dt$ cv, alors $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\, dt$ cv

Ex 2 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$. $t^{x-1} e^{-t} \geq 0$.

1- * $t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Donc $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \, dt$ cv $\Leftrightarrow 1-x < 1$

$\Leftrightarrow x > 0$.

* $t^2 \times t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ cv

c/ $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ cv $\Leftrightarrow x > 0$.

donc $D_\Gamma =]0, +\infty[$.

2- $\int_u^v t^{x+1-1} e^{-t} \, dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_u^v + x \int_u^v t^{x-1} e^{-t} \, dt$

soit $\int_u^v t^x e^{-t} \, dt = -v^x e^{-v} + u^x e^{-u} + x \int_u^v t^{x-1} e^{-t} \, dt$

On fait tendre u vers 0 et v vers $+\infty$:

$$\Gamma(x+1) = x \, \Gamma(x).$$

3- $\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1)$

$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots \times 2 \times \Gamma(1)$

... $\Gamma(1) = \int^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

Ex3 $\quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt, \quad a>0 \qquad I_{\varepsilon,X} = \int_\varepsilon^X \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt.$

1- En 0 : $\frac{\ln t}{t^2+a^2} \sim \frac{\ln t}{a^2}$ et $\int_0^1 \ln t\,dt$ cv.

En $+\infty$: $\frac{\ln t}{t^2+a^2} \sim \frac{\ln t}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ cv (Bert

2- $t = \frac{a^2}{x}$ donne

$$I_{\varepsilon,X} = -2\frac{\ln a}{a}\arctan\frac{a}{X} + 2\frac{\ln a}{a}\arctan\frac{a}{\varepsilon} + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln t}{t^2+a^2}$$

3- $\varepsilon \to 0$ et $X \to +\infty$ donc

$$I = -2\frac{\ln a}{a}\times 0 + 2\frac{\ln a}{a}\times\frac{\pi}{2} + \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$$

soit $\quad I = \pi\frac{\ln a}{a} - I$

soit $\quad I = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln a}{a}.$

Ex4 $\quad y'' + 2y' + 4y = x e^{x} \quad (E)$

1- $\quad y'' + 2y' + 4y = 0 \quad (E_0)$.

équation caractéristique : $\varphi(r) = r^2 + 2r + 4 = 0$ a deux solutions complexes $r_1 = -1 - \sqrt{3}\, i$

$r_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

La solution générale de (E_0) est :

$$y = e^{-x}\left(\alpha \cos\sqrt{3}\,x + \beta \sin\sqrt{3}\,x\right) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2- Le second membre $f(x) = x\, e^{x}$ avec $\varphi(1) \neq 0$

On cherche une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p = (ax+b)\, e^{x}.$$

On trouve ~~[illegible]~~ et ~~[illegible]~~.

$$\boxed{a = 1/7 \qquad b = -\frac{4}{49}}$$

La solution générale de (E) est alors :

$$y = e^{-x}\left[\alpha \cos\sqrt{3}\,x + \beta \sin\sqrt{3}\,x\right] + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^{x}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4- * $h(0)=1 \iff \alpha - \frac{4}{49} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{53}{49}$

* $h'(0)=0 \Rightarrow$ $\beta = \frac{50}{49\sqrt{3}}$

Donc $h(x) = e^{-x}\left[\frac{53}{49}\cos\sqrt{3}x + \frac{50}{49\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right] + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)$

5- (a) On pose $t = e^{x}$ et alors $f(t) = g(\ln t)$

donc $f'(t) = \frac{1}{t} g'(\ln t)$

et $f''(t) = \frac{1}{t^2} g''(\ln t) - \frac{1}{t^2} g'(\ln t)$

f solution de $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4 f(t) = t \ln t$

si et seulement si

$$g''(\ln t) + 2 g'(\ln t) + 4 g(\ln t) = t \ln t$$

C.a.d. $g''(x) + 2 g'(x) + 4 g(x) = x e^{x}$

C.a.d. g solution de (E).

(b) $g(x) = e^{-x}\left[\alpha \cos\sqrt{3}x + \beta \sin\sqrt{3}x\right] + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{12}\right)$

d'où $f(t) = g(\ln t) = \frac{1}{t}\left[\alpha \cos\sqrt{3}\ln t + \beta \sin\sqrt{3}\ln t\right]$

$+ \left(\frac{1}{6}\ln t - \frac{4}{10}\right) t$.

Ex 5 $\begin{cases} x(t) = 2t - 1/t^2 \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$ $D_f = \mathbb{R}^*$

$\rightarrow$ $x'(t) = 2 + 2/t^3$ et $y'(t) = 2 + 2t$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	

2- * $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = +\infty$

et $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$ $x = 0$ branche parabolique q $t \to -\infty$

* De même $x = 0$ branche parabolique quand $t \to$.

* $\lim\limits_{t\to 0^\pm} x(t) = -\infty$ et $y(0) = 0$, donc $y = 0$ asymptote quand $t \to 0^\pm$.

3-. $t = -1$ $\quad M(-1) = (-3, -1)$ points stationnaire.

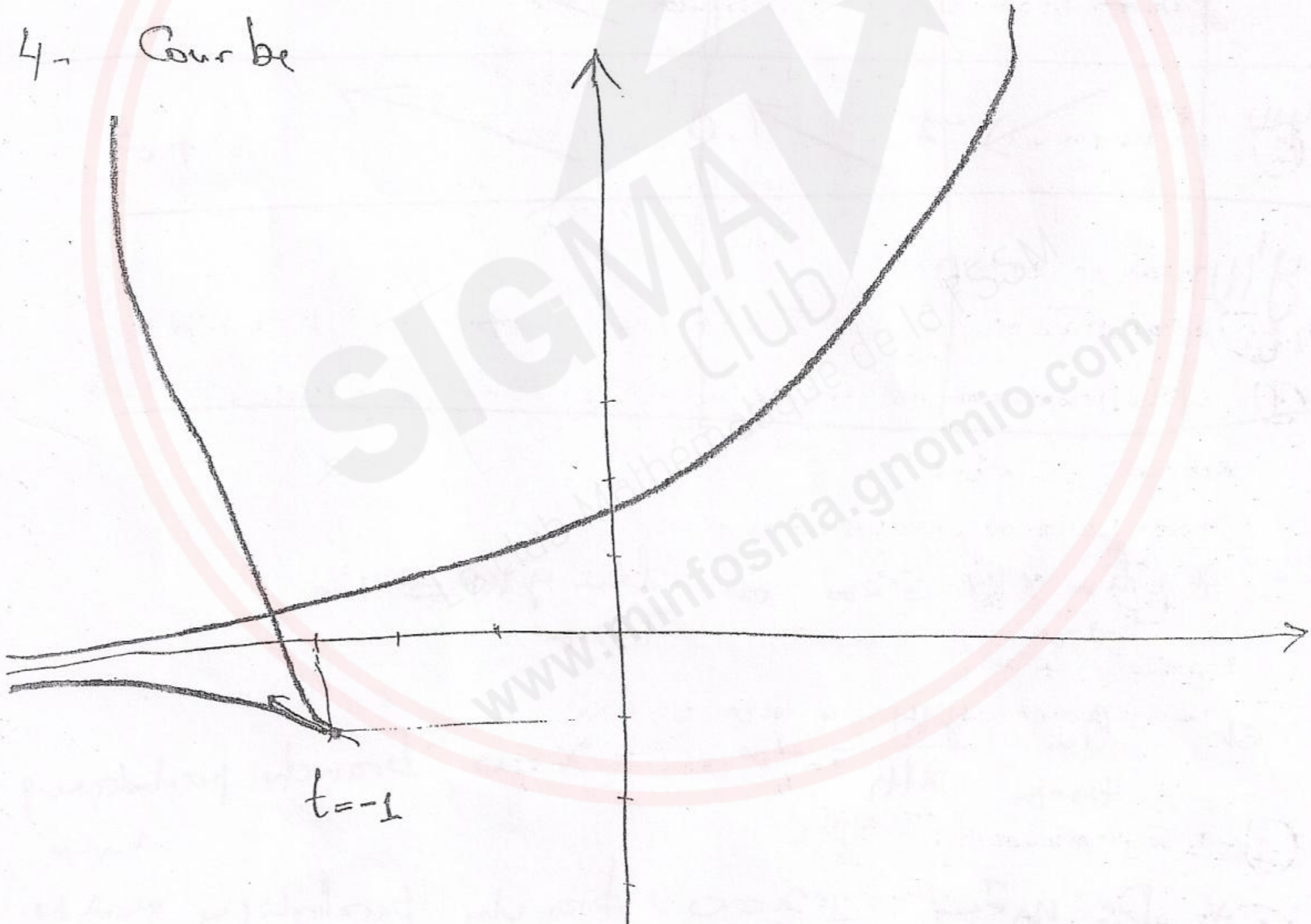
$$(x''(-1), y''(-1)) = (-6, 2)$$

$$(x'''(-1), y'''(-1)) = (-24, 0)$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -24 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +48 \neq 0 \quad (p = 2 \text{ et } q = 3)$$

donc $M(-1)$ est un point de rebroussement de première espèce.

4- Courbe



Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2011-2012
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques-SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 1 - Durée 3h
(18 Avril 2012)

Exercice 1. (Questions de Cours)

1) Enoncer le premier critère d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2) Montrer que toute fonction croissante $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
3) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Exercice 2.

1) Soit $h \in \mathbb{R}$. Montrer, à partir de la définition, que si φ une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction $\psi : x \longmapsto \psi(x) = \varphi(x+h)$ est en escalier sur $[a-h, b-h]$ et que

$$\int_{a-h}^{b-h} \psi(x) \mathrm{d}\, x = \int_a^b \varphi(x) \mathrm{d}\, x.$$

2) En déduire que si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f(x+h)$ est Riemann-intégrable sur $[a-h, b-h]$ et que

$$\int_{a-h}^{b-h} g(x) \mathrm{d}\, x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x.$$

Exercice 3.

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite reglée si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mid f(x) - \varphi(x) \mid < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

1) Démontrer que toute fonction reglée sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
2) En déduire que toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4.

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant la première formule de la moyenne, calculer

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) \, \mathrm{d}\, t.$$

Exercice 5.

Montrer que si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et non identiquement nulle telle que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$, alors $f = 1$ sur $[0,1]$.

Exercice 6.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) > 0$, $\forall x \in [0,1]$.
On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t \ , \ \forall x \in [0,1].$$

1) Montrer que F est bijective de $[0,1]$ sur $[0,A]$, où $A = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, on pose: $x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$, où F^{-1} désigne la fonction réciproque de F.
Montrer que $(d) = (x_0, x_1, ..., x_n)$ est une subdivision de $[0,1]$ et que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \ , \ \forall k \in \{0,1,...,n-1\}.$$

3) Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \frac{1}{A}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}\,x.$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2011-2012
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques-SMA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle 2 - Durée 3h
(06 Juin 2012)

Exercice 1.

Montrer, à partir de la définition, que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

est convergente et la calculer.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est convergente.

2) Calculer I_1.

3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{(3n-4)}{(3n-3)} I_{n-1}$.

4) En déduire que $I_n = \dfrac{(3n-4) \times (3n-7) \times \ldots \times 5 \times 2}{(3n-3) \times (3n-6) \times \ldots \times 6 \times 3} \cdot \left(\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} \right)$, $\forall n \geq 2$.

I_3 I_2

Exercice 3 .

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [a, +\infty[.$$

1) Justifier pourquoi F est bornée sur $[a, +\infty[$.

Notons $M = \displaystyle\sup_{x \in [a,+\infty[} |F(x)|$ et soit α un réel strictement positif.

2) Montrer que pour tous $X, Y \in [a, +\infty[$ tels que $Y > X$, on ait

$$\left| \int_X^Y \frac{f(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{2M}{X^\alpha}.$$

3) En déduire que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

est convergente.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant

$$f'(x)f(-x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$g(x) = f(x)f(-x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer qu'il existe une constante réelle non nulle C telle que $g(x) = C\,, \forall x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par f.
3) Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire alors f.

Exercice 5.

Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y'' - 2my' + (m^2 - m + 1)y = e^{mx}$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 6.

On considère la courbe plane f définie par les équations paramétriques

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}\ , \qquad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

1) Dresser le tableau de variations de f et étudier les branches infinies.
2) Déterminer la nature du point $M(x(1), y(1))$.
3) Tracer le support Γ de f.

Corrigé du contôle de rattrapage : Analyse II

Questions de Cours :

1. **Énoncer la première formule de la moyenne.**
   Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a,b]$. Si on note
   $$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$
   alors, il existe $\alpha \in [m,M]$ tel que
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx.$$
   Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

2. **Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 et donner $F'(x)$ pour $x \in [a,b]$.**
   Soit $x_0 \in [a,b]$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors si on applique la première formule de la moyenne, on peut trouver un point $c_x \in [x_0,x]$ tel que
   $$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt \\ &= f(c_x)\int_{x_0}^x dt = (x-x_0)\,f(c_x) \end{aligned}$$
   Donc
   $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(c_x).$$
   D'où
   $$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = |f(c_x) - f(x_0)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0\,.$$
   Ainsi que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in [a,b]$. Par continuité de f, on en déduit que F est de classe C^1 .
   Autrement dit, on peut utiliser la définition de la continuité de f pour montrer que F est dérivable en x_0.

Exercice 1.

1. **En appliquant la première formule de la moyenne, montrer qu'il existe un point θ de $[0,\pi]$ tel que** $g(\theta) = 0$.
   Les fonctions g et $t \mapsto \sin t$ sont continues sur $[0,\pi]$ et de plus $\sin t \geq 0$, $\forall t \in [0,\pi]$. En appliquant la première formule de la moyenne, on obtient qu'il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que
   $$\int_0^\pi g(t)\sin t dt = g(\theta)\int_0^\pi \sin t dt = g(\theta)\,[-\cos]_0^\pi = 2g(\theta) = 0.$$
   Ce qui implique que $\exists\theta \in [0,\pi]$ tel que $g(\theta) = 0$.

2. **Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un point θ de $]0,\pi[$ tel que $g(\theta)=0$.**
La fonction $t\mapsto g(t)\sin t$ est continue sur $[0,\pi]$, alors elle admet une primitive F continue sur $[0,\pi]$ et qui vérifie
$$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} g(t)\sin t dt=0.$$
D'aprés Théorème de Rolle, il existe $\theta\in]0,\pi[$ tel que $F'(\theta)=0$.
Donc
$$g(\theta)\sin(\theta)=0.$$
On en déduit que $g(\theta)=0$, car $\sin(\theta)\neq 0,\ \forall\theta\in]0,\pi[$.

Exercice 2.
On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. **Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.**
Si $x>0$, alors la fonction $t\mapsto\dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue, donc intégrable sur $[x,2x]$.
De même si $x<0$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue et intégrable sur $[x,2x]$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$, d'où f est définie sur $\mathbb{R}$ car $f(0)=1$.
2. **Montrer que f est paire.**

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a
$$f(-x)=-\frac{1}{x}\int_{-x}^{-2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt.$$
On effectue le changement de variable suivant $u=-t\Rightarrow du=-dt$. L'intégrale d'origine devient
$$f(-x)=\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\arctan(-u)}{-u}du.$$
Puisque la fonction $t\mapsto\arctan(t)$ est impaire, alors $f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$, donc f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. **Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.**
Posons $g(t)=\dfrac{\arctan(t)}{t}$. La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$, alors elle admet une primitive G continue et dérivable sur $[x,2x]$ avec $G'(x)=g(x)$ telle que
$$f(x)=\frac{1}{x}\left[\int_0^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt-\int_0^{x}\frac{\arctan(t)}{t}dt\right]=\frac{1}{x}\left[G(2x)-G(x)\right].$$
Comme G est continue sur $]0,+\infty[$, alors f est continue sur $]0,+\infty[$ comme sommeet produit des fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
4. **La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?**
On a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{G(2x)-G(x)}{x}\\ \text{(Hôpital)}&=\lim_{x\to0^+}(2g(2x)-g(x))=1.\end{aligned}$$
Car la fonction g est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to0}g(2x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan(x)}{x}=1$.
Or $f(0)=1$, alors f est continue en 0.
5. **Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.**
On a
$$f(x)=\frac{1}{x}\left[G(2x)-G(x)\right].$$

Puisque G est une primitive de g qu'est donc dérivable sur $]0,+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et somme des fonctions dérivable sur $]0,+\infty[$. **Donner l équation différentielle d'ordre** 1 **vérifiée par f.** On a

$$xf(x) = G(2x) - G(x).$$

Donc

$$(xf(x))' = (G(2x) - G(x))' = 2g(2x) - g(x).$$

Ce qui implique

$$f(x) + xf'(x) = 2 \times \frac{\arctan(2x)}{2x} - \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$

D'où f vérifie l'équation différentielle suivante

$$x^2 f'(x) + xf(x) = \arctan(2x) - \arctan(x).$$

6. **Vérifier que pour tout** $x > 0$, $f(x) - 1 = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t}dt$**.**
   Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}dt - 1 = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}dt - \frac{1}{x}\int_x^{2x} dt \\ &= \frac{1}{x}\int_x^{2x} \left(\frac{\arctan(t)}{t} - 1\right)dt = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t}dt. \end{aligned}$$

7. **Montrer, pour tout** $x > 0$**, qu'il existe un point** c **de** $[x, 2x]$ **tel que :** $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{(\arctan(c) - c)}{c}$.
   D'aprés la question 6), on a

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t}dt.$$

   Notons $h(t) = \dfrac{\arctan(t) - t}{t}$ et $l(t) = 1$. Les deux fonctions h et l sont continues sur $[x, 2x]$ et de plus $l(t) \geq 0$. En appliquant le théorème de la première formule de la moyenne, on obtient qu'il existe un point $c \in [x, 2x]$ tel que

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\arctan(c) - c}{c}\int_x^{2x} dt = \frac{1}{x} \times \frac{\arctan(c) - c}{c}.$$

8. **En déduire que f est dérivable à droite en** 0 **et donner** $f'_d(0)$**.**
   On a

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{f(x) - 1}{x}\right| \leq \frac{1}{x}\left|\frac{\arctan(c) - c}{c}\right| \leq \frac{1}{x} \times \frac{c^2}{3} = \frac{c}{x} \times \frac{c}{3} \leq \frac{c}{3},$$

   car $c \in [x, 2x]$. Quand $x \to 0^+$, alors $c \to 0^+$, d'où

$$\lim_{x \to 0^+}\left|\frac{f(x) - 1}{x}\right| = 0.$$

   Et on conclut que f est dérivable en 0 et $f'_d(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 2e^x + 2\sin 2x.$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée $y'' - 3y' + 2y = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. La solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On va successivement chercher une solution particulière de $(E_1)\quad y''-3y'+2y=2e^x$ puis de $(E_2)\quad y''-3y'+2y=2\sin 2x$.

• **Solution de l'équation** (E_1) **:**
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=axe^x$, car 1 est racine de l'équation caractéristique. Il vient alors

$$y_p''(x)-3y_p'(x)+2y_p(x)=-ae^x=2e^x.$$

On en déduit que $a=-2$. Donc $y_p(x)=-2xe^x$ est une solution particulière de l'équation (E_1).
• **Solution de l'équation** (E_2) **:**
Le second membre est de la forme $2\sin 2x$. On cherchera donc une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$, car $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. Alors on a

$$\begin{cases} y_p(x) &= a\cos 2x+b\sin 2x \\ y_p'(x) &= -2a\sin 2x+2b\cos 2x \\ y_p''(x) &= -4a\cos 2x-4b\sin 2x. \end{cases}$$

En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus, on en déduit le système

$$\begin{cases} 6a-2b &= 2 \\ 6b+2a &= 0. \end{cases}$$

On obtient donc $a=\dfrac{3}{10}$ et $b=\dfrac{-1}{10}$. On conclut que $y_p(x)=\dfrac{3}{10}\cos 2x-\dfrac{1}{10}\sin 2x$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2).
Finalement, d'aprés le principe de superposition, La forme générale des solutions de l'équation initiale (E) est

$$y(x)=\lambda_1 e^x+\lambda_2 e^{2x}-2xe^x+\frac{3}{10}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x;\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

Corrigé du contôle : Analyse II (Juin 2015)

Questions de Cours :*(3 points)*

1. **Donner la définition d'une fonction Riemann intégrable.**
   Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. f est dite Riemann intégrable sur $[a,b]$ ssi

$$\underline{\sup I_-(f) = \inf I_+(f)},$$

où

$$I_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi[a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \varphi \leq f \right\},$$

et

$$I_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx,\ \psi[a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } f \leq \psi \right\}$$

2. **Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.**
   Comme la fonction f est Riemann intégrable et bornée sur $[a,b]$, alors il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M$. Soit $x_0 \in [a,b]$, par la relation de Chasles, on a $\forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \\ &\leq \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^x |f(t)|dt & \text{si } x \geq x_0 \\ \displaystyle\int_x^{x_0} |f(t)|dt & \text{si } x \leq x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } x \to x_0.$$

   Ce qui implique que F est continue en x_0.

Exercice 1. *(8 points)*

A) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. On se propose de montrer que la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est Riemann intégrable et que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

1. **Démontrer le résultat si f est continue sur $[a,b]$.**
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et on pose $t = a+b-x$ avec $dt = -dx$. La fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est bien définie et continue sur $[a,b]$, donc est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a+b-x)dx &= -\int_b^a f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

2. a- **Soit $(d) = (x_0 = a, ..., x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$. On pose $y_k = a + b - x_{n-k}$ pour $k = 0, ..., n$. Montrer que $(d') = (y_0, ..., y_n)$ est une subdivision de $[a, b]$.** On a

$$\begin{aligned} y_0 &= a + b - x_n = a + b - b = a \\ y_n &= a + b - x_0 = a + b - a = b, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= (a + b - x_{n-k}) - (a + b - x_{n-k+1}) \\ &= x_{n-k+1} - x_{n-k} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc (d') est une subdivision de $[a, b]$.

b- **Montrer que si φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ de subdivision associée (d), alors $x \mapsto \varphi(a + b - x)$ est en escalier sur $[a, b]$ de subdivision associée (d') et que**

$$\int_a^b \varphi(a + b - x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et soit $(d) = (x_0 = a, ..., x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ associer à φ telle que $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[\ \ \varphi(x) = \alpha_k, \ k = 1, \cdots, n$. On veut montrer que la fonction $x \longmapsto \varphi(a + b - x)$ est en escalier sur $[a, b]$ de subdivision associée (d').
Alors, pour tout $x \in]y_{k-1}, y_k[$ on a

$$\begin{aligned} a + b - x_{n-k} = y_{k-1} < x < y_k = a + b - x_{n-k+1} \\ x_{n-k+1} < a + b - x < x_{n-k}, \end{aligned}$$

donc

$$\varphi(a + b - x) = \alpha_{n-k},$$

d'où le résultat.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(a + b - x)dx &= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\alpha_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_{n-k+1} - x_{n-k})\alpha_{n-k} \\ &= \sum_{k'=1}^{n} (x_{k'} - x_{k'-1})\alpha_{k'} \\ &= \int_a^b \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

3. **En utilisant le Critère 2, en déduire le cas général.**

La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors d'aprés le Critère 2, il existe deux suites de fonctions (φ_n) et (ψ_n) en escalier sur $[a, b]$ telles que $|f - \varphi_n| \leq \psi_n$ et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = 0$.
Donc

$$|f(a + b - x) - \varphi_n(a + b - x)| \leq \psi_n(a + b - x),$$

et

$$\int_a^b \psi_n(a + b - x)dx = \int_a^b \psi_n(x)dx \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

D'où la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est R-intégrale. D'autre part

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(a+b-x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$
$$= \int_a^b f(x)dx.$$

B) Application :

1- Calculer $\quad I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ est continue R-intégrable sur $[0,\pi]$. Donc on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx \\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I. \end{aligned}$$

D'oú

$$\begin{aligned} 2I &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\int_0^\pi \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\left[\arctan(\cos x)\right]_0^\pi = 2\pi\arctan(1) \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\; I = \dfrac{\pi^2}{4}.$

2- Calculer $\quad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx.$

La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est continue R-intégrable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. On a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx - J. \end{aligned}$$

Donc $\; 2J = \frac{\pi}{4}\ln 2$. Ce qui donne $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

Exercice 2 *(2.5 points)***.**

Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive. En considérant la subdivision régulière de $[0,1]$ et les points $\left(x_k = \frac{k}{n}\right)_{1\leq k\geq n}$, on a les formules suivantes :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

et

$$\int_0^1 \ln(f(x))dx = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

En utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \ln x$, on montre ainsi que :

$$\begin{aligned}\ln(S_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = S'_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(S_n) \geq S'_n.$$

On en déduit par passage à la limite que

$$\ln\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \geq \int_0^1 \ln(f(x))dx.$$

Exercice 3. *(2 points)*

Notons $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $g(t) = t^{-\frac{3}{2}}$. Les deux fonctions sont continues sur $]0,\infty[$ telle que $g > 0$ sur $]0,\infty[$. D'apres la formule de la moyenne, il existe $c \in [x, x+\sqrt{x}]$ tel que

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\int_x^{x+\sqrt{x}} t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{-2}{\sqrt{1+c^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_x^{x+\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right).\end{aligned}$$

a. Quand $x \to +\infty$, alors $c \to +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$

b.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} H(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})} = +\infty.\end{aligned}$$

Puisque $c \to 0^+$ lorsque $x \to 0^+$

Exercice 4 (*4.5 points*)**.**

1. **Déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante** $(E_1)\ 2y'' - 2y' - 4y = 2e^{3t}$, **puis déterminer l'unique solution** y **de** (E_1) **vérifiant** $y(0) = y'(0) = 1$**.**

   Il est clair que

   $$(E_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'' - y' - 2y = e^{3t}.$$

   On commence par résoudre l'équation homogène $y" - y' - 2y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 2,\ r_2 = -1$. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

   $$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t},$$

obtenues lorsque $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Le second membre est de la forme e^{kt} avec $k = 3$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme $y_p(t) = ae^{3t}$ puisque $k = 3$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a donc

$$y_p''(t) - y_p'(t) - 2y_p(t) = 4ae^{3t}.$$

Pour que y_p soit solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - y' - 2y = e^{3t}$, il faut donc que $a = \frac{1}{4}$.
La fonction $y_p(t) = \dfrac{1}{4}e^{3t}$ est donc solution particulière de (E_1).

La forme générale des solutions de (E_1) est

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soit y une solution de (E_1). Les conditions $y(0) = y'(0) = 1$ sont réalisées ssi

$$c_1 = \frac{1}{3} \text{ et } c_2 = \frac{5}{12}.$$

2. **Résoudre l'équation différentielle suivante** (E_2) $\qquad y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$.
Tout d'abord on commence par résoudre l'équation homogène $y" + 4y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$. Elle admet deux racines complexes distinctes $r_1 = 2i,\ r_2 = -2i$. La forme générale des solutions de l'équation homogène est alors :

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t); c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On recherche une solution particulière de l'équation complète (E_2) en supposant c_1 et c_2 en fonction de t,

$$y(t) = c_1(t) \cos(2t) + c_2(t) \sin(2t).$$

Dérivons deux fois y et reportons ces valeurs dans l'équation (E_2). Si on impose la condition supplémentaire $c_1'(t) \cos(2t) + c_2'(t) \sin(2t) = 0$, alors on obtient le système linéaire à deux équations et deux inconnue

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos(2t) + c_2'(t) \sin(2t) & = 0 \\ -2c_1'(t) \sin(2t) + 2c_2'(t) \cos(2t) & = \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases}$$

Ce système admet une solution et une seule car son déterminant est toujours différent de zéro, on obtient

$$c_1'(t) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \text{ et } c_2'(t) = \frac{1}{2}.$$

En intégrant, on trouve

$$c_1(t) = \frac{1}{4} \ln|\cos(2t)| \text{ et } c_2(t) = \frac{t}{2}.$$

La solution particulière de l'équation (E_2) est :

$$y_p(t) = \frac{1}{4} \ln|\cos(2t)| \cos(2t) + t \sin(2t),$$

et par superposition des solutions, la solution générale de l'équation différentielle (E_2) est donc donnée par

$$y(t) = (\frac{1}{4} \ln|\cos(2t)| + c_1) \cos(2t) + (t + c_2) \sin(2t);\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 14/15
Filière SMA-S2
Analyse II

Contôle : Analyse II (Juin 2015)
(Durée : 2 heures)

NB : *Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.*

Questions de Cours : (*3 points*)

1. Donner la définition d'une fonction Riemann intégrable.
2. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.

Exercice 1 (*8 points*). A) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. On se propose de montrer que la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est Riemann intégrable et que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

1. Démontrer le résultat si f est continue sur $[a,b]$.
2. a- Soit $(d) = (x_0 = a, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $y_k = a+b-x_{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Montrer que $(d') = (y_0, \ldots, y_n)$ est une subdivision de $[a,b]$.
   b- Montrer que si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ de subdivision associée (d), alors $x \mapsto \varphi(a+b-x)$ est en escalier sur $[a,b]$ de subdivision associée (d') et que $\int_a^b \varphi(a+b-x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$.
3. En utilisant le Critère 2, en déduire le cas général.

B) Application : Calculer $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx$. (On rappelle la formule : $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$).

Exercice 2 (*2.5 points*). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive. En utilisant les sommes de Riemann et la concavité de la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(f(x))dx \leq \ln(\int_0^1 f(x)dx).$$

(On rappelle qu'une fonction g définie sur un intervalle I est concave si et seulement si $g\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n t_i g(a_i)$ pour tout $a_i \in I$ et pour tout $t_i \in [0,1]$, vérifiant $\sum_{i=1}^n t_i = 1$).

Exercice 3 (*2 points*). On pose $H(x) = \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t^2}}$. Déterminer les limites suivantes :

a- $\lim_{x\to+\infty} H(x)$.
b- $\lim_{x\to 0^+} H(x)$.

Exercice 4 (*4.5 points*). 1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad 2y'' - 2y' - 4y = 2e^{3t},$$

puis déterminer l'unique solution y de (E_1) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E_2) \qquad y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2t}.$$

be^{-3u}

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 14/15
Filière SMA-S2
Analyse II

Contôle de Rattrapage : Analyse II
Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.*

Questions de Cours : (*3 points*).

1. Énoncer la première formule de la moyenne.
2. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 et donner $F'(x)$ pour $x \in [a,b]$.

Exercice 1 (*3 points*).

Soit g une fonction continue sur $[0,\pi]$ telle que $\int_0^\pi g(t)\sin t dt = 0$.

1. En appliquant la première formule de la moyenne, montrer qu'il existe un point θ de $[0,\pi]$ tel que $g(\theta) = 0$.
2. Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un point θ de $]0,\pi[$ tel que $g(\theta) = 0$.

Exercice 2 (*10 points*).

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t}dt, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?
5. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner 1 équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
6. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) - 1 = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t}dt$.
7. Montrer, pour tout $x > 0$, qu'il existe un point c de $[x, 2x]$ tel que :
$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{x}\frac{(\arctan(c) - c)}{c}.$$
8. En déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$. (On ademettera que $|\arctan(t) - t| \leq \frac{t^3}{3}$, pour tout $t > 0$).

Exercice 3 (*4 points*).

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 2e^x + 2\sin 2x.$$

Fin.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 14/15
Filière SMA-S2
Analyse II

Corrigé du contôle : Analyse II (Juin 2015)

Questions de Cours : *(3 points)*

1. **Donner la définition d'une fonction Riemann intégrable.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. f est dite Riemann intégrable sur $[a,b]$ ssi

$$\underline{\sup I_-(f) = \inf I_+(f)},$$

où

$$I_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi[a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \varphi \leq f \right\},$$

et

$$I_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx,\ \psi[a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } f \leq \psi \right\}$$

2. **Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur $[a,b]$.**
Comme la fonction f est Riemann intégrable et bornée sur $[a,b]$, alors il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M$. Soit $x_0 \in [a,b]$, par la relation de Chasles, on a $\forall x \in [a,b]$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right|$$
$$\leq \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^x |f(t)|dt & \text{si } x \geq x_0 \\ \displaystyle\int_x^{x_0} |f(t)|dt & \text{si } x \leq x_0. \end{cases}$$

Donc

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } x \to x_0.$$

Ce qui implique que F est continue en x_0.

Exercice 1. *(8 points)*
A) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. On se propose de montrer que la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est Riemann intégrable et que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

1. **Démontrer le résultat si f est continue sur $[a,b]$.**
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et on pose $t = a+b-x$ avec $dt = -dx$. La fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est bien définie et continue sur $[a,b]$, donc est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et on obtient

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(t)dt$$
$$= \int_a^b f(t)dt$$

2. a- **Soit $(d)=(x_0=a,.........,x_n=b)$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $y_k=a+b-x_{n-k}$ pour $k=0,...,n$. Montrer que $(d')=(y_0,.........,y_n)$ est une subdivision de $[a,b]$.** On a

$$y_0 = a+b-x_n = a+b-b = a$$
$$y_n = a+b-x_0 = a+b-a = b,$$

et

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= (a+b-x_{n-k}) - (a+b-x_{n-k+1}) \\ &= x_{n-k+1} - x_{n-k} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc (d') est une subdivision de $[a,b]$.

b- **Montrer que si φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ de subdivision associée (d), alors $x \mapsto \varphi(a+b-x)$ est en escalier sur $[a,b]$ de subdivision associée (d') et que**

$$\int_a^b \varphi(a+b-x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et soit $(d)=(x_0=a,.........,x_n=b)$ une subdivision de $[a,b]$ associer à φ telle que $\forall x \in]x_{k-1},x_k[\ \ \varphi(x)=\alpha_k, \ k=1,\cdots,n$. On veut montrer que la fonction $x \longmapsto \varphi(a+b-x)$ est en escalier sur $[a,b]$ de subdivision associée (d').
Alors, pour tout $x \in]y_{k-1},y_k[$ on a

$$a+b-x_{n-k} = y_{k-1} < x < y_k = a+b-x_{n-k+1}$$
$$x_{n-k+1} < a+b-x < x_{n-k},$$

donc

$$\varphi(a+b-x) = \alpha_{n-k},$$

d'où le résultat.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(a+b-x)dx &= \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})\alpha_{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_{n-k+1} - x_{n-k})\alpha_{n-k} \\ &= \sum_{k'=1}^{n}(x_{k'} - x_{k'-1})\alpha_{k'} \\ &= \int_a^b \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

3. **En utilisant le Critère 2, en déduire le cas général.**

La fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann intégrable, alors d'aprés le Critère 2, il existe deux suites de fonctions (φ_n) et (ψ_n) en escalier sur $[a,b]$ telles que $|f-\varphi_n| \leq \psi_n$ et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = 0$.
Donc

$$|f(a+b-x) - \varphi_n(a+b-x)| \leq \psi_n(a+b-x),$$

et

$$\int_a^b \psi_n(a+b-x)dx = \int_a^b \psi_n(x)dx \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

D'où la fonction $x \mapsto f(a+b-x)$ est R-intégrale. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_a^b f(a+b-x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(a+b-x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx\\ &= \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

B) Application :

1- Calculer $\quad I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ est continue R-intégrable sur $[0,\pi]$. Donc on a

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx\\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I.\end{aligned}$$

D'oú

$$\begin{aligned}2I &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\int_0^\pi \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\pi\left[\arctan(\cos x)\right]_0^\pi = 2\pi\arctan(1)\\ &= \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\; I = \dfrac{\pi^2}{4}.$

2- Calculer $\quad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx.$

La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est continue R-intégrable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. On a

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\Big(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\Big)\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx - J.\end{aligned}$$

Donc $\; 2J = \frac{\pi}{4}\ln 2$. Ce qui donne $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

Exercice 2 *(2.5 points)***.**

Soit la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et strictement positive. En considérant la subdivision régulière de $[0,1]$ et les points $\big(x_k = \frac{k}{n}\big)_{1\le k\ge n}$, on a les formules suivantes :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

et

$$\int_0^1 \ln(f(x))dx = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

En utilisant la concavité de la fonction $x \mapsto \ln x$, on montre ainsi que :

$$\begin{aligned}\ln(S_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\ &= \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = S'_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(S_n) \geq S'_n.$$

On en déduit par passage à la limite que

$$\ln(\int_0^1 f(x)dx) \geq \int_0^1 \ln(f(x))dx.$$

Exercice 3. *(2 points)*

Notons $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $g(t) = t^{-\frac{3}{2}}$. Les deux fonctions sont continues sur $]0, \infty[$ telle que $g > 0$ sur $]0, \infty[$. D'apres la formule de la moyenne, il existe $c \in [x, x + \sqrt{x}]$ tel que

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t^2}}dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\int_x^{x+\sqrt{x}} t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{-2}{\sqrt{1+c^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_x^{x+\sqrt{x}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right).\end{aligned}$$

a. Quand $x \to +\infty$, alors $c \to +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$

b.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} H(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+c^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+c^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})} = +\infty.\end{aligned}$$

Puisque $c \to 0^+$ lorsque $x \to 0^+$

Exercice 4 (*4.5 points*)**.**

1. **Déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante** $(E_1)\ 2y'' - 2y' - 4y = 2e^{3t}$, **puis déterminer l'unique solution** y **de** (E_1) **vérifiant** $y(0) = y'(0) = 1$**.**

   Il est clair que

   $$(E_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'' - y' - 2y = e^{3t}.$$

   On commence par résoudre l'équation homogène $y" - y' - 2y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

   $$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t},$$

obtenues lorsque $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Le second membre est de la forme e^{kt} avec $k = 3$. On cherchera une solution de l'équation sous la forme $y_p(t) = ae^{3t}$ puisque $k = 3$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a donc

$$y_p''(t) - y_p'(t) - 2y_p(t) = 4ae^{3t}.$$

Pour que y_p soit solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - y' - 2y = e^{3t}$, il faut donc que $a = \frac{1}{4}$.
La fonction $y_p(t) = \dfrac{1}{4}e^{3t}$ est donc solution particulière de (E_1).

La forme générale des solutions de (E_1) est

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Soit y une solution de (E_1). Les conditions $y(0) = y'(0) = 1$ sont réalisées ssi

$$c_1 = \frac{1}{3} \text{ et } \ c_2 = \frac{5}{12}.$$

2. **Résoudre l'équation différentielle suivante** (E_2) $\qquad y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$.
Tout d'abord on commence par résoudre l'équation homogène $y" + 4y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$. Elle admet deux racines complexes distinctes $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. La forme générale des solutions de l'équation homogène est alors :

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t); c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On recherche une solution particulière de l'équation complète (E_2) en supposant c_1 et c_2 en fonction de t,

$$y(t) = c_1(t)\cos(2t) + c_2(t)\sin(2t).$$

Dérivons deux fois y et reportons ces valeurs dans l'équation (E_2). Si on impose la condition supplémentaire $c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t) = 0$, alors on obtient le système linéaire à deux équations et deux inconnue

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t) & = 0 \\ -2c_1'(t)\sin(2t) + 2c_2'(t)\cos(2t) & = \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases}$$

Ce système admet une solution et une seule car son déterminant est toujours différent de zéro, on obtient

$$c_1'(t) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \text{ et } c_2'(t) = \frac{1}{2}.$$

En intégrant, on trouve

$$c_1(t) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| \text{ et } c_2(t) = \frac{t}{2}.$$

La solution particulière de l'équation (E_2) est :

$$y_p(t) = \frac{1}{4}\ln|\cos(2t)|\cos(2t) + t\sin(2t),$$

et par superposition des solutions, la solution générale de l'équation différentielle (E_2) est donc donnée par

$$y(t) = (\frac{1}{4}\ln|\cos(2t)| + c_1)\cos(2t) + (t + c_2)\sin(2t); \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Corrigé du contôle de rattrapage : Analyse II

Questions de Cours :

1. **Énoncer la première formule de la moyenne.**
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a,b]$. Si on note

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

alors, il existe $\alpha \in [m,M]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

2. **Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 et donner $F'(x)$ pour $x \in [a,b]$.**
Soit $x_0 \in [a,b]$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, alors si on applique la première formule de la moyenne, on peut trouver un point $c_x \in [x_0,x]$ tel que

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt \\ &= f(c_x)\int_{x_0}^x dt = (x-x_0)\, f(c_x) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(c_x).$$

D'où

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = |f(c_x) - f(x_0)| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ainsi que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in [a,b]$. Par continuité de f, on en déduit que F est de classe C^1 .
Autrement dit, on peut utiliser la définition de la continuité de f pour montrer que F est dérivable en x_0.

Exercice 1.

1. **En appliquant la première formule de la moyenne, montrer qu'il existe un point θ de $[0,\pi]$ tel que $g(\theta) = 0$.**
Les fonctions g et $t \mapsto \sin t$ sont continues sur $[0,\pi]$ et de plus $\sin t \geq 0,\ \forall t \in [0,\pi]$. En appliquant la première formule de la moyenne, on obtient qu'il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que

$$\int_0^\pi g(t)\sin t dt = g(\theta)\int_0^\pi \sin t dt = g(\theta)\,[-\cos]_0^\pi = 2g(\theta) = 0.$$

Ce qui implique que $\exists\theta \in [0,\pi]$ tel que $g(\theta) = 0$.

2. **Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, qu'il existe un point θ de $]0,\pi[$ tel que $g(\theta)=0$.**
La fonction $t \mapsto g(t)\sin t$ est continue sur $[0,\pi]$, alors elle admet une primitive F continue sur $[0,\pi]$ et qui vérifie
$$F(\pi)-F(0)=\int_0^{\pi} g(t)\sin t dt = 0.$$
D'aprés Théorème de Rolle, il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $F'(\theta)=0$.
Donc
$$g(\theta)\sin(\theta)=0.$$
On en déduit que $g(\theta)=0$, car $\sin(\theta)\neq 0,\ \forall \theta \in]0,\pi[$.

Exercice 2.
On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

1. **Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.**
Si $x>0$, alors la fonction $t\mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue, donc intégrable sur $[x,2x]$.
De même si $x<0$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue et intégrable sur $[x,2x]$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$, d'où f est définie sur $\mathbb{R}$ car $f(0)=1$.
2. **Montrer que f est paire.**

   Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a
$$f(-x)=-\frac{1}{x}\int_{-x}^{-2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt.$$
On effectue le changement de variable suivant $u=-t \Rightarrow du=-dt$. L'intégrale d'origine devient
$$f(-x)=\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\arctan(-u)}{-u}du.$$
Puisque la fonction $t\mapsto \arctan(t)$ est impaire, alors $f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$, donc f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. **Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.**
Posons $g(t)=\dfrac{\arctan(t)}{t}$. La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$, alors elle admet une primitive G continue et dérivable sur $[x,2x]$ avec $G'(x)=g(x)$ telle que
$$f(x)=\frac{1}{x}\left[\int_0^{2x}\frac{\arctan(t)}{t}dt-\int_0^{x}\frac{\arctan(t)}{t}dt\right]=\frac{1}{x}\left[G(2x)-G(x)\right].$$
Comme G est continue sur $]0,+\infty[$, alors f est continue sur $]0,+\infty[$ comme sommeet produit des fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
4. **La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?**
On a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{G(2x)-G(x)}{x}\\ \text{(Hôpital)} &= \lim_{x\to 0^+}\left(2g(2x)-g(x)\right)=1.\end{aligned}$$
Car la fonction g est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} g(2x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}=1$.
Or $f(0)=1$, alors f est continue en 0.
5. **Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.**
On a
$$f(x)=\frac{1}{x}\left[G(2x)-G(x)\right].$$

Puisque G est une primitive de g qu'est donc dérivable sur $]0,+\infty[$, alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et somme des fonctions dérivable sur $]0,+\infty[$. **Donner l équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.** On a

$$xf(x) = G(2x) - G(x).$$

Donc

$$(xf(x))' = (G(2x) - G(x))' = 2g(2x) - g(x).$$

Ce qui implique

$$f(x) + xf'(x) = 2 \times \frac{\arctan(2x)}{2x} - \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}.$$

D'où f vérifie l'équation différentielle suivante

$$x^2 f'(x) + xf(x) = \arctan(2x) - \arctan(x).$$

6. **Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) - 1 = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t} dt$.**

   Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - 1 &= \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} dt - 1 = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} dt - \frac{1}{x}\int_x^{2x} dt \\ &= \frac{1}{x}\int_x^{2x} \left(\frac{\arctan(t)}{t} - 1\right) dt = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t} dt. \end{aligned}$$

7. **Montrer, pour tout $x > 0$, qu'il existe un point c de $[x, 2x]$ tel que : $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{(\arctan(c) - c)}{c}$.**

   D'aprés la question 6), on a

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{\arctan(t) - t}{t} dt.$$

   Notons $h(t) = \dfrac{\arctan(t) - t}{t}$ et $l(t) = 1$. Les deux fonctions h et l sont continues sur $[x, 2x]$ et de plus $l(t) \geq 0$. En appliquant le théorème de la première formule de la moyenne, on obtient qu'il existe un point $c \in [x, 2x]$ tel que

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{x^2} \times \frac{\arctan(c) - c}{c}\int_x^{2x} dt = \frac{1}{x} \times \frac{\arctan(c) - c}{c}.$$

8. **En déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner $f'_d(0)$.**

   On a

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{f(x) - 1}{x}\right| \leq \frac{1}{x}\left|\frac{\arctan(c) - c}{c}\right| \leq \frac{1}{x} \times \frac{c^2}{3} = \frac{c}{x} \times \frac{c}{3} \leq \frac{c}{3},$$

   car $c \in [x, 2x]$. Quand $x \to 0^+$, alors $c \to 0^+$, d'où

$$\lim_{x \to 0^+}\left|\frac{f(x) - 1}{x}\right| = 0.$$

   Et on conclut que f est dérivable en 0 et $f'_d(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = 2e^x + 2\sin 2x$.

On commence par résoudre l'équation différentielle homogène associée $y'' - 3y' + 2y = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. La solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}, \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On va successivement chercher une solution particulière de $(E_1)\quad y''-3y'+2y=2e^x$ puis de $(E_2)\quad y''-3y'+2y=2\sin 2x$.

• **Solution de l'équation** (E_1) **:**
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=axe^x$, car 1 est racine de l'équation caractéristique. Il vient alors
$$y_p''(x)-3y_p'(x)+2y_p(x)=-ae^x=2e^x.$$
On en déduit que $a=-2$. Donc $y_p(x)=-2xe^x$ est une solution particulière de l'équation (E_1).
• **Solution de l'équation** (E_2) **:**
Le second membre est de la forme $2\sin 2x$. On cherchera donc une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$, car $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. Alors on a

$$\begin{cases} y_p(x) & = a\cos 2x+b\sin 2x \\ y_p'(x) & = -2a\sin 2x+2b\cos 2x \\ y_p''(x) & = -4a\cos 2x-4b\sin 2x. \end{cases}$$

En identifiant les coefficients du sinus et du cosinus, on en déduit le système

$$\begin{cases} 6a-2b & =2 \\ 6b+2a & =0. \end{cases}$$

On obtient donc $a=\dfrac{3}{10}$ et $b=\dfrac{-1}{10}$. On conclut que $y_p(x)=\dfrac{3}{10}\cos 2x-\dfrac{1}{10}\sin 2x$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2).
Finalement, d'aprés le principe de superposition, La forme générale des solutions de l'équation initiale (E) est

$$y(x)=\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}-2xe^x+\frac{3}{10}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x;\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 15/16
Filière SMA-S2
Analyse II

Le candidat doit inscrire, ci-dessous, toutes les informations demandées.

Nom :	Prénom :	Note
Numéro de table :	Numéro apogée :	

Contôle : Analyse II (06 Juin 2016)
(Durée : 2 heures)

Exercice 1 **(Questions de Cours)**

1) Enoncer et démontrer la première formule de la moyenne.

* Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables, avec $g \geq 0$

$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

alors $\exists\, \alpha \in [m, M] \,/\, \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \alpha \int_a^b g(t)\,dt$

De plus si f est continue sur $[a,b]$, alors $\exists\, c \in [a,b] \,/\, \alpha = f(c)$

* Preuve : $m \leq f(t) \leq M \Rightarrow m\, g(t) \leq f(t) g(t) \leq M\, g(t)$

$\Rightarrow m \int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M \int_a^b g(t)\,dt$

– Si $\int_a^b g(t)\,dt = 0$, c'est évident.

– Si $\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$, on divise par ce dernier

* L'existence de $c \in [a,b] \,/\, \alpha = f(c)$ découle du thm des valeurs intermédiaires.

2) Application : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \mapsto 0^+} \frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} f(t)dt$

$$\int_{\sin x}^{x} f(t)\,dt = f(c_x) \int_{\sin x}^{x} dt, \quad c_x \in [\sin x, x]$$

d'où $\frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} f(t)\,dt = f(c_x) \frac{(x - \sin x)}{x^3}$

$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ et $c_x \to 0$ quand $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} \int_{\sin x}^{x} f(t)\,dt = f(0)/6$$

b) $\lim_{x \mapsto 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt.$

$$\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_x^{2x} f(t) \cdot 1/t\,dt = f(c_x) \cdot \int_x^{2x} 1/t\,dt$$

$(c_x \in [x, 2x])$

d'où $\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(c_x) [\ln t]_x^{2x} = f(c_x) \cdot \ln 2$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} f(0) \cdot \ln 2$$

Exercice 2 Soit $x \neq 0$. On pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}dt$$

1) Montrer que F est une fonction paire.

$$F(-x) = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}dt \underset{u=-t}{=} \frac{1}{x}\int_0^{x} \frac{e^{-u^2}}{1+u^2}du$$

$$= F(x)$$

2) Montrer que $\forall\, x > 0,\ 0 \leq F(x) \leq \dfrac{Arctan(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x)$.

$$0 \leq \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{\text{Arctan}\, x}{x} \leq \frac{\pi}{2x}$$

$$0 \leq F(x) \leq \frac{\pi}{2x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.$$

3) Calculer $\lim_{x \mapsto 0^+} F(x)$.

$1^{ère}$ formule de la moyenne $\Rightarrow \exists c_x \in [0, x]$

$$\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt = e^{-c_x^2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = e^{-c_x^2} \operatorname{Arctan} x$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = e^{-c_x^2} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$$

$$x \to 0^+ \Rightarrow c_x \to 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} F(x) = 1$$

4) Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt\right)'$$

$$= -\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = -\frac{1}{x} F(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x F'(x) + F(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} \quad (E)$$

Nom :	Prénom :	Note
Numéro de table :	Numéro apogée :	

Exercice 3

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)}$.

$t = tg\frac{x}{2} \longrightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2}{1+t^2} d$

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2} \frac{2}{1+t^2} dt = 1$

2) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$) telle que $\forall x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$. Exprimer $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

$u = a+b-x \longrightarrow$

$I = \displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx = -\int_b^a (a+b-u) f(a+b-u)\, d$

$= (a+b)\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - I$

$\Longrightarrow I = \dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$

3) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin(x)}$.

$a=0$, $b=\pi$ et $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ vérifie

$f(\pi - x) = f(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$

donc $J = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

avec $u = \pi/2 - x$, on a

$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = - \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{dx}{1+\sin(\pi/2 - x)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} = 2$

Finalement $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 4y = xe^x$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

(E_0) : $y'' + 2y' + 4y = 0$

$\varphi(r) = r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 - \sqrt{3}\, i$

et $r_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$

$y_0 = e^{-x} (\alpha \cos\sqrt{3}x + \beta \sin\sqrt{3}x)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

Le second membre $f(x) = x e^{x}$ avec $\varphi(1) \neq 0$

y_p sous la forme $y_p = (ax+b)e^{x}$

On trouve $a = \frac{1}{7}$ et $b = -\frac{4}{49}$

$$y = e^{-x}(\alpha \cos\sqrt{3}x + \beta \sin\sqrt{3}x) + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^{x}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) Déterminer l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

$y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{53}{49}$ et $\beta = \frac{50}{49\sqrt{3}}$

$$y = e^{-x}\left(\frac{53}{49}\cos\sqrt{3}x + \frac{50}{49\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right) + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)$$

4) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

a) On pose $g(x) = f(e^x)$. Donner l'équation différentielle vérifiée par g.

On pose $t = e^x$ et alors $f(t) = g(\ln t)$

donc $f'(t) = \frac{1}{t} g'(\ln t)$

et $f''(t) = \frac{1}{t^2} g''(\ln t) - \frac{1}{t^2} g'(\ln t)$

f solution de : $t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4 f(t) = t \ln t$

ssi $g''(\ln t) + 2 g'(\ln t) + 4 g(\ln t) = t \ln t$

c.a.d $g''(x) + 2 g'(x) + 4 g(x) = x e^x$

c.a.d g solution de (E)

b) En déduire une expression de f.

$$g(x) = e^{-x}\left(\alpha \cos\sqrt{3}\, x + \beta \sin\sqrt{3}\, x\right) + \left(\frac{1}{7} x - \frac{4}{49}\right) e^x$$

d'où

$$f(t) = g(\ln t) = \frac{1}{t}\left(\alpha \cos(\sqrt{3} \ln t) + \beta \sin(\sqrt{3} \ln t)\right) + \left(\frac{1}{7} \ln t - \frac{4}{49}\right) t$$