Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

SMPC-S1
M3-E1 : Analyse

Série d'exercices 1

Exercice 1 *1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.*

2. *Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,*
3. *En déduire qu' entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.*
4. *Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.*

Exercice 2 *Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les dévelopements décimaux périodiques sont donnés par :*

$3,14\overset{\frown}{14}\ldots$; $0,9\overset{\frown}{99}\ldots$; $3,149\overset{\frown}{9}\ldots$

Exercice 3 *Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que :*

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad et \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 4 *Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.*

Exercice 5 *Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :*

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}\ , \quad]0, 1[\cap \mathbb{Q}\ , \quad \mathbb{N}\ , \quad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 6 *Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a + b}.$$

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = n \cdot f(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = q \cdot f(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x \cdot f(1)$ *si f est croissante.*

Correction 1 *1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.*

De la même façon si $r \cdot x \in \mathbb{Q}$ alors $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. Méthode "classique". *Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Autre méthode. *Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble suivant :*

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{N}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$ qui est non vide car $q \in \mathcal{N}$. On peut alors prendre le plus petit élément de $\mathcal{N}$: $n_0 = \min \mathcal{N}$. En particulier $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Définissons maintenant n_1 de la façon suivante : $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$. Il se trouve que n_1 appartient aussi à $\mathcal{N}$ car d'une part $n_1 \in \mathbb{N}$ (car n_0 et $n_0 \cdot \sqrt{2}$ sont des entiers) et d'autre part $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que n_1 est plus petit que n_0. Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ alors $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$ et est non nul.

Bilan : nous avons trouvé $n_1 \in \mathcal{N}$ strictement plus petit que $n_0 = \min \mathcal{N}$. Ceci fournit une contradiction. Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

3. *Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$. D'une part $x \in]r, r'[$ (car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$) et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right) \notin \mathbb{Q}$ donc $x \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.*

4. $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

Correction 2 *On multiplie avec 10^p avec p bien choisit, puis on fait la differnce pour obtenir un entier.*

Correction 3 *Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geqslant y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$. De même si $x \leqslant y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.*

Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max\big(\max(x, y), z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction 4 *$(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup A = +\infty$). D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.*

Correction 5 *1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.*

2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. *Les majorants :* $[1,+\infty[$. *Les minorants :* $]-\infty,0]$. *La borne supérieure :* 1. *La borne inférieure :* 0. *Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.*
3. $\mathbb{N}$. *Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants :* $]-\infty,0]$. *La borne inférieure :* 0. *Le plus petit élément :* 0.
4. $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. *Les majorants :* $[\frac{5}{4},+\infty[$. *Les minorants :* $]-\infty,-1]$. *La borne supérieure :* $\frac{5}{4}$. *La borne inférieure :* -1. *Le plus grand élément :* $\frac{5}{4}$. *Pas de plus petit élément.*

Correction 6

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$. *Évaluons la différence* $2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ *:*

$$2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction 7

1. *Calculons d'abord* $f(0)$. *Nous savons* $f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$, *donc* $f(0)=0$. *Montrons le résultat demandé par récurrence : pour* $n=1$, *nous avons bien* $f(1)=1\times f(1)$. *Si* $f(n)=nf(1)$ *alors* $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$.
2. $0=f(0)=f(-1+1)=f(-1)+f(1)$. *Donc* $f(-1)=-f(1)$. *Puis comme ci-dessus* $f(-n)=nf(-1)=-nf(1)$.
3. *Soit* $q=\frac{a}{b}$. *Alors* $f(a)=f(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\cdots+\frac{a}{b})=f(\frac{a}{b})+\cdots+f(\frac{a}{b})$ *(b termes dans ces sommes). Donc* $f(a)=bf(\frac{a}{b})$. *Soit* $af(1)=bf(\frac{a}{b})$. *Ce qui s'écrit aussi* $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(1)$.
4. *Fixons* $x\in\mathbb{R}$. *Soit* (α_i) *une suite croissante de rationnels qui tend vers* x. *Soit* (β_i) *une suite décroissante de rationnels qui tend vers* x *:*

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \cdots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i$ *et que* f *est croissante nous avons* $f(\alpha_i) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_i)$. *D'après la question précédent cette inéquation devient :* $\alpha_i f(1) \leqslant f(x) \leqslant \beta_i f(1)$. *Comme* (α_i) *et* (β_i) *tendent vers* x. *Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite :* $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$. *Soit* $f(x)=xf(1)$.

Série d'exercices 2

Exercice 1 *Les suites suivantes sont-elle majorées, minorées ? monotones ? :*

1. $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$, $\quad u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$, $\quad u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = n^2+1$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)}$

Exercice 2 *On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$.*
En utilisant le fait que $\frac{1}{n^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, donner un encadrement de u_n. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 *Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que (u_n) est croissante et majorée.*
2. *Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif ℓ qui vérifie $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et calculer ℓ.*
3. *On suppose maintenant $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que v_n est croissante non bornée.*

Exercice 4 *Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 5)$ $\forall n \geqslant 0$. Montrer que u_n diverge. (On montrera que $u_{n+1} \geqslant ku_n$ pour un certain $k > 1$.*

Exercice 5 *Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?*

1. *Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.*
2. *Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?*
3. *La somme de deux suites converge si et seulement si les deux suites convergent.*

Exercice 6 *Une méthode ancienne (attribuée à Platon) permettait d'extraire la racine carrée d'un nombre par un procédé itératif. Pour calculer la racine carrée d'un nombre k construit la suite réccurente $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+k}{u_n+1}$. On suppose dans notre cas $k = 2$.*

1. *Montrer que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n*
2. *Vérifier que $V_n = u_{2n}$ et $W_n = u_{2n+1}$ monotone*
3. *En déduire que v_n et w_n convergent toute les deux vers $\sqrt{2}$*
4. *donner $\sqrt{2}$ a 4 chiffre après la virgule.*

Exercice 7 *Dans l exercice préc"dent on au vu calculer $\sqrt{2}$; On donne deux autre suites récurrente dont on admet la convergence $v_0 = 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \frac{1}{v_n}$ et $w_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n\frac{(x_n^2+6)}{3x_n^2+2}$.*

1. *Montrer que v_n et x_n converge vers $\sqrt{2}$*
2. *en calculant v_2 et x_2 laquelle des deux suites vous semble la plus efficace.*

Correction 1 *1.* $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ *croissante bornée*

2. $u_n = (-1)^n$ *bornée non monotone*

3. $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$, u_n *altèrne un nombre fini de valeurs : bornée non monotone*

4. $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *bornée decroissante*

5. $u_n = n^2+1$, *croissante non bornée*

6. $u_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)}$ *borné non monotone (elle est toutefois decroissante a partir de* $n=2$*)*
$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2-(-1)^n(n+2)} - \frac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)} = \frac{n^2+(-1)^n(n+1)-((n+1)^2-(-1)^n(n+2))}{((n+1)^2-(-1)^n(n+2))(n^2+(-1)^n(n+1))}$
$= \frac{n^2-(n+1)^2-(-1)^n)}{((n+1)^2-(-1)^n(n+2))(n^2+(-1)^n(n+1))} \leqslant 0$ *pour* $n \geqslant 2$

Correction 2 $\frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ *pour* $n \geqslant 2$. *Donc* u_n *converge vers zéro.*

Correction 3 $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, *et on a* $u_0 = 1 \leqslant u_1 = \sqrt{2}$ *et par induction si* $u_{n-1} \leqslant u_n$ *on aura*$u_n = \sqrt{1+u_{n-1}} \leqslant \sqrt{1+u_n} = u_{n+1}$, *donc* (u_n) *est croissante et majorée.*

2. (u_n) *est croissante et majorée, donc que* (u_n) *converge vers le nombre réel positif* ℓ *qui vérifie* $l = \sqrt{1+l}$ *et par suite* $\ell^2-\ell-1=0$. *On résoud l' équation pour avoir* $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. La croissance s obtient de la même manière,par contre si on suppose qu elle est majorée, on aura croissante majorée, donc convergente vers l *satisfaisant* $l = \sqrt{1+l^2}$ *et donc* $\ell^2-\ell+1=0$ *impossible.*

Correction 4 *On a* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(u_n^2-3u_n+5) = \dfrac{1}{2}u_n(u_n-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}) \geqslant \dfrac{11}{8}u_n$

Correction 5 *1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang. Faux* $u_n = \frac{exp(-1)^n}{n}$

2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Vrais (cours)
Réciproque Faux $u_n = \frac{1}{n}$

3. La somme de deux suites converge si et seulement si les deux suites convergent. Faux $u_n = n$ *et* $v_n = \frac{1}{n} - n$

Correction 6 *On pose* $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, *alors* f *est décroissante, on ecrit* $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$ *si on veut eviter la dérivée.*

1. par induction $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ *on aura* $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ *ce qui donne* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

2. v_n *et* w_n *verifient* $v_{n+1} = fof(v_n)$ *et* $w_{n+1} = fof(w_n)$ *et comme* fof *croissante, implique que* u_{2n} *et* u_{2n+1} *sont monotones*

3. les deux suiteS sont monotones bornées, donc convergente vers l_1 *et* l_2 *respectivement. On résoud* $l_1 = f(l_2$ *et* $l_2 = f(l_1$ *pour trouver* $l_1 = l_2 = \sqrt{2}$.

Correction 7 *1. On passe a la limite dans la formule de* x_n *et de* v_n *pour montrer que* $l = \sqrt{2}$

2. par la calculatrice $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980$. *On a* $v_1 = 1.5, v_2 = 1.41, v_2 = 1,41421$ *et* $x_1 = 1.41 x_2 = 1,414213, x_3 = 1,414213562373095048$

Série d'exercices 3

Exercice 1 *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ *b)* $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ *c)* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ *f)* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ *h)* $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 2 1. *Démontrer que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1.$

2. *Soient* m, n *des entiers positifs. Étudier* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}.$
3. *Démontrer que* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \frac{1}{2}.$

Exercice 3 1. *Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en* $+\infty$.

2. *Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en* $+\infty$.

Exercice 4 *Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur* $\mathbb{R}$ *?*

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}\ ;\ \ ¿\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 5 *Soit* f *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $[a,b]$ *telle que pour tout* x *et* x' $(x \neq x')$ *de* $[a,b]$ *on ait :* $|f(x)-f(x')| < |x-x'|$.

1. *Montrer que* f *est continue sur* $[a,b]$.
2. *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une et une seule solution dans* $[a,b]$. *(On pourra introduire la fonction :* $x \mapsto g(x) = f(x) - x$*).*

Exercice 6 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) = f(b)$. *Montrer que la fonction* $g(t) = f(t+\frac{b-a}{2}) - f(t)$ *s'annule en au moins un point de* $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Application : *une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.*

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\lim_{-\infty} f = -\infty$ *et* $\lim_{+\infty} f = +\infty$. *Montrer que* f *s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.*

Exercice 8 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue, telle que pour chaque* $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. *Montrer que* $f = 1$ *ou* $f = -1$.

Correction 1 *1.* $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. *Si* $x > 0$ *cette expression vaut* $x+2$ *donc la limite à droite en* $x=0$ *est* $+2$. *Si* $x<0$ *l'expression vaut* -2 *donc la limite à gauche en* $x=0$ *est* -2. *Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en* $x=0$.

2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ *pour* $x<0$. *Donc la limite quand* $x \to -\infty$ *est* $-\infty$.

3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, *lorsque* $x \to 2$ *cette expression tend vers* 4.

4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. *Lorsque* $x \to \pi$ *la limite est donc* 2.

5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. *Lorsque* $x \to 0$ *la limite vaut* $\frac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. *Lorsque* $x \to +\infty$, *la limite vaut* 0.

7. *Nous avons l'égalité* $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. *Pour* $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ *cela donne :*

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \to 0$, *alors* $a \to 1$ *et la limite cherchée est* $\frac{1}{3}$.
Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f *dérivable en* a *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ *ayant* $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ *cela donne en* $a=0$ *:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. *Donc si* $x \to 1$ *la limite de* $\frac{x^n-1}{x-1}$ *est* n. *Donc la limite de* $\frac{x-1}{x^n-1}$ *en* 1 *est* $\frac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ *et* $a=1$. *Alors* $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *tend vers* $f'(1) = n$.

Correction 2 *Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :*

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons
$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}} = 1.$$
Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$.

Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- *Si $m > n$ alors x^{m-n}, et donc $f(x)$, tendent vers 0.*
- *Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.*
- *Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n-m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n-m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n-m > 0$ impair f* n'a pas de limite en 0 *car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.*

Correction 3 1. *Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+np) = f(x).$$
Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \to +\infty$ alors $f(x_n) \to \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite (y_n) : $y_n \to +\infty$ donc $f(y_n) \to \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons*
$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
F est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$
De plus par la définition de ℓ :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant \ell.$$
Les deux propriétés précédentes s'écrivent :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ.

Correction 4 1. *La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.*
$$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$
Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. *h est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.*
$$h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$
Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction 5 *1. Pour toute suite x_n qui tend vers x, on a* $|f(x_n) - f(x)| < |x_n - x'| \to 0$.

2. On utilise le théorème des valeurs intermidiaires pour la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$*).*

Correction 6 *1.* $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ *et* $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2})$*. Comme* $f(a) = f(b)$ *alors nous obtenons que* $g(a) = -g(\frac{a+b}{2})$*. Donc ou bien* $g(a) \leqslant 0$ *et* $g(\frac{a+b}{2}) \geqslant 0$ *ou bien* $g(a) \geqslant 0$ *et* $g(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et* $\frac{a+b}{2}$*.*

2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t) = d(t) - 4t$. Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. Appliquons la question précédente avec $a = 0$, $b = 1$. Il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$. Donc $d(c + \frac{1}{2}) - d(c) = 4(c + \frac{1}{2}) - 4c = 2$. Donc entre c et $c + \frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction 7 *Il existe $x < 0$ tel que $f(x) < 0$ et $y > 0$ tel que $f(y) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$. Donc f s'annule. Les polynômes de degré impair vérifient les propriétés des limites, donc s'annulent. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.*

Correction 8 *Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1. Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.*

Série d'exercices 4

Exercice 1 *Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad si\ x \neq 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \quad si\ x \neq 0 \quad ; \quad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad si\ x \neq 1 \quad ; \quad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 *Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*

$$f(x) = \sqrt{x} \quad si\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad et \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad si\ x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 *Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :*

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 4 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.*

Exercice 5 *Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montr que*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 6 *Soient x et y réels avec $0 < x < y$.*

1. *Montrer que*

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. *On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par*

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 7 *Soit f_1, f_2 et f_2 les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{1-}$ et $f_2(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$*

1. *Calculer $f_1^{(n)}(0)$ et $f_2^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire les formules de taylor de f_1 et de f_2 l'ordre 6.*

2. *Déduire la formule de Taylor de f_3 a l'ordre 6.*

Exercice 8 *En appliquant la regle de l Hospital plusieurs fois, déterminer la limite en 0 de*

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

Exercice 9

1. *Développement limité en zéro de* $\ln(cos(x))$ *(à l'ordre 6).*
2. *Développement limité en zéro de* $\cos x . \ln(1+x)$ *à l'ordre* 4.
3. *Développement limité en* 1 *à l'ordre* 3 *de* $f(x) = \sqrt{x}$.
4. *Développement limité en* 1 *à l'ordre* 3 *de* $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
5. *Développement limité à l'ordre* 3 *en* $\frac{\pi}{3}$ *de* $h(x) = \ln(\sin x)$.

Exercice 10 *Donner un développement limité à l'ordre* 2 *de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ *en* 0*. En déduire un développement à l'ordre* 2 *en* $+\infty$*. Calculer un développement à l'ordre* 1 *en* $-\infty$.

Exercice 11 *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 12 *Étudier la position du graphe de l'application* $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ *par rapport à sa tangente en* 0 *et* 1.

Correction 1 1. *La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$. En effet $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x \mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".*

Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}.$$

Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos(1/x)| \leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.

2. *Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x=0$ est :*

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. *La fonction f_3 s'écrit :*

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

- *Donc pour $x \geqslant 1$ on a $f_3(x)=x$; pour $0 \leqslant x < 1$ on a $f_3(x)=-x$; pour $x<0$ on a $f_3(x)=x$.*
- *La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Attention ! La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.*
- *La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to1+} f_3(x)=+1$ et $\lim_{x\to1-} f_3(x)=-1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.*
- *La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x>0$ est*

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x<0$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 2 *La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le seul problème est en $x=1$.*

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x=1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to1^-}\sqrt{x}=+1$ et à droite $\lim_{x\to1^+} ax^2+bx+1 = a+b+1$. Donc $a+b+1=1$. Autrement dit $b=-a$.

Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0,1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$. Donc $f_g'(1)=\frac{1}{2}$.

Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x>1$. Or

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ax^2+bx+1-1}{x-1} = \frac{ax^2-ax}{x-1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax.$$

Donc f est dérivable à droite et $f_d'(1)=a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a=\frac{1}{2}$.

Le seul couple (a,b) que rend f dérivable sur $]0,+\infty[$ est $(a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2})$.

Correction 3 *1. Selon que* $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ *alors* $f^{(n)}(x)$ *vaut respectivement* $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

2. *La dérivée de* $\sin^2 x$ *est* $2\sin x \cos x = \sin 2x$. *Et donc les dérivées suivantes seront :* $2\cos 2x, -4\sin$ *Et selon que* $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, *alors* $g^{(n)}(x)$ *vaut respectivement* $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.

3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ *et on dérive...*

Correction 4 *Pour simplifier nous supposons* $x > 0$.

1. *Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit* $f(x) = e^x - 1 - x$. *Alors il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. *Soit* $f(x) = (e^c - 1)x$. *Soit maintenant* $g(x) = e^x - 1$ *alors, par le théorème des accroissements finis sur* $[0, c]$ *il existe* $d \in]0, c[$ *tel que* $g(c) - g(0) = g'(d)(c - 0)$, *soit* $e^c - 1 = e^d c$. *Donc* $e^x - 1 - x = f(x) = (e^c - 1)x = e^d cx$. *Comme* $d \leqslant c \leqslant x$, *alors* $e^x - 1 - x \leqslant e^x x^2$.
   Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.

2. *Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant* $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. *Nous avons* $f(0) = 0$, $x > 0$ *étant fixé, nous choisissons* k *tel que* $f(x) = 0$, *(un tel* k *existe car* $e^x - 1 - x > 0$ *et* $x^2 > 0$*). Comme* $f(0) = 0 = f(x)$ *alors par Rolle il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Mais* $f'(t) = e^t - t - kt$, *donc* $f'(0) = 0$. *Maintenant* $f'(0) = 0 = f'(c)$ *donc il existe (par Rolle toujours !)* $d \in]0, c[$ *tel que* $f''(d) = 0$. *Or* $f''(t) = e^t - k$, *donc* $f''(d) = 0$ *donne* $k = e^d$. *Ainsi* $f(x) = 0$ *devient* $e^x - 1 - x = e^d\frac{x^2}{2}$. *Comme* $d \leqslant x$ *alors* $e^x - 1 - x \leqslant e^x\frac{x^2}{2}$.

Correction 5 *Le théorème des accroissements finis donne :* $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n + 1 - n) = \frac{1}{c_n}$, *avec* $c_n \in [n, n+1]$. *Or* $c_n \geqslant n$ *donc* $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{c_n}$. *Donc :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique et $\ln 1 = 0$. *Donc* $S_n \geqslant \ln(n+1)$, *donc* $S_n \to +\infty$.

Correction 6 *1. Soit* $g(t) = \ln t$. *Appliquons le théorème des accroissements finis sur* $[x, y]$. *Il existe* $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$. *Soit* $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$. *Donc* $\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{c}$. *Or* $x < c < y$ *donc* $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. *Ce qui donne les inégalités recherchées.*

2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. *Et* $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x+(1-\alpha)y)^2}$. *Comme* f'' *est négative alors* f' *est décroissante sur* $[0, 1]$. *Or* $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ *d'après la première question et de même* $f'(1) < 0$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $c \in [x, y]$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Maintenant* f' *est positive sur* $[0, c]$ *et négative sur* $[c, 1]$. *Donc* f *est croissante sur* $[0, c]$ *et décroissante sur* $[c, 1]$. *Or* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 0$ *donc pour tout* $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$. *Cela prouve l'inégalité demandée.*

3. *Géométriquement nous avons prouvé que la fonction* $\ln$ *est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de* $(x, f(x))$ *à* $(y, f(y))$ *est sous la courbe d'équation* $y = f(x)$.

Correction 7 *Soit* f_1, f_2 *et* f_2 *les applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x}$ *et* $f_2(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

1. *On a* $f_1(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x}$ *et par conséquent :* $f_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{1-x}^{-n-1}$ *ce qui donne*

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^6 o(x)$$

On obtient de meme $f_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^6 o(x)$

2. $f_3(x) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ *et la formule de Taylor en découle*

Correction 8 *En appliquant la regle de l Hospital 3 fois, on trouve*
$$\lim x \to 0 \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} = \lim x \to 0 \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{1 + \tan^2 x - \frac{1}{\sqrt{1-x2}}} = \cdots = -1.$$

Correction 9 *1.*

2. $\ln(\cos x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right)$.
3. *Simple produit de DL cosx et DL(ln(1 + x)*
4. *Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x = 1$)*

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$).
On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons $h = x - 1$ (et donc $x = h + 1$). On applique la formule du dl de $\sqrt{1+h}$ autour de $h = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \quad \textit{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

5. *La première méthode consiste à calculer $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :*

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

(avec $e = \exp(1)$).

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x) = \exp x$ en $x = 1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ et donc $k^{(n)}(1) = e$:

$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le dl $g(x) = h(\sqrt{x})$ en $x = 1$ on écrit d'abord :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son dl obtenu dans la première question.

6. *Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$ (et donc $x = \frac{\pi}{3} + u$). Alors*

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

On connaît les dl de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u = 0$ (car on cherche un dl autour de $x = \frac{\pi}{3}$) donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a + v)$ en $v = 0$ on se ramène au dl de $\ln(1 + v)$ ainsi :

$$\ln(a + v) = \ln\left(a(1 + \frac{v}{a})\right) = \ln a + \ln(1 + \frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \textit{on effectue le dl du } \ln \textit{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ et $h'''(1)$.

Correction 10 *1. Dl de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \qquad car\ \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= (1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4)} \qquad on\ pose\ u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times \frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times (1-u+u^2+o(u^2)) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times (1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})^2+o(x^2)) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \times (1-\frac{x}{2}+o(x^2)) \\
&= \frac{1}{2}(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

2. En $+\infty$ on va poser $h = \frac{1}{x}$ et se ramener à un dl en $h = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de f dont on a déjà calculé le dl en $h = 0$: $f(h) = \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)$. Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

3. Attention cela ne fonctionne plus du tout en $-\infty$. Dans le calcul de la deuxième question on était on voisinage de $+\infty$ et nous avons considéré que x était positif. En $-\infty$ il faut faire attention au signe, par exemple $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

Ainsi toujours en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})} \\
&= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)} \\
&= -\frac{1}{h}\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1-\frac{1}{2}h+o(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
&= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
&= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h) \\
&= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Ainsi un développement (asymptotique) de f en $-\infty$ est

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

On en déduit par exemple que $f(x)$ se comporte essentiellement comme la fonction $-x$ en $-\infty$ et en particulier $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Correction 11 1. *On a*

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4) \quad \text{et} \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2}-\cos x = \left(1+x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

Ainsi $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}+o(1)$ (où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

2. *On sait que*

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x)-\sin x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

donc
$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = -\frac{x}{2}+o(x)$$
et ainsi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = 0.$$

3. *Sachant*
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$
et
$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$
alors
$$\begin{aligned}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}\\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\\ &= \frac{1}{6}+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Correction 12 *Commençons en $x=0$, le dl de $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 2 est*
$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+o(x^2) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$
Par identification avec $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ cela entraîne donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (et $f''(0)=1$). L'équation de la tangente est donc $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=x$.

La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de $f(x)-y(x)$ où $y(x)$ est l'équation de la tangente.
$$f(x)-y(x) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ -\ x = \frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

Ainsi pour x suffisamment proche de 0, $f(x)-y(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}x^2$ et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0.

Même étude en $x=1$.
Il s'agit donc de faire le dl de $f(x)$ en $x=1$. On pose $x=1+h$ (de sorte que $h=x-1$ est proche

e 0) :

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x+x^2) &= \ln\left(1+(1+h)+(1+h)^2\right)\\
&= \ln\left(3+3h+h^2\right)\\
&= \ln\left(3(1+h+\frac{h^2}{3})\right)\\
&= \ln 3 + \ln\left(1+h+\frac{h^2}{3}\right)\\
&= \ln 3 + (h+\frac{h^2}{3}) - \frac{(h+\frac{h^2}{3})^2}{2} + o((h+\frac{h^2}{3})^2)\\
&= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\\
&= \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2)\\
&= \ln 3 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

La tangente en $x=1$ est d'équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ et est donc donnée par le dl à l'ordre : c'est $y=(x-1)+\ln 3$. Et la différence $f(x)-\left(\ln 3+(x-1)\right) = -\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)$ est négative our x proche de 1. Donc, dans un voisinage de 1, le graphe de f est en-dessous de la tangente en $=1$.