Exercices du Cours d'Analyse 1

Filière SMIA

Suites numériques et Fonctions

Mme S. AMRAOUI

2019 / 2020

Table des matières

Première partie

Enoncés des exercices

Chapitre 1
NOMBRES RÉELS

Exercice 1.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $x + y \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $xy \notin \mathbb{Q}$.

3. La somme de deux nombres irrationnels est -il toujours un nombre irrationnel ?

Même question pour le produit.

4. Soient x et y deux rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 2. Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$?

1.$[0, 3[$, 2. $\{0\} \cup]1, 2]$, 3. $\mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$, 4. $\left\{x; \exists n \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{n}\right\}$ et 5. $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$.

Exercice 3. Soit $I = \left\{x \in \mathbb{R}^* ;\ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\right\}$.

1. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $-2 < x + \frac{1}{2x}$.

2. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{2x} \leq 2$.

3. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

4. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 4 . Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

Comparer $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$ et $\sup B$.

Exercice 5 .

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées

1. Montrer que $A \cup B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée
2. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A; \inf B)$.
4. Application : Quelles sont les bornes inférieure et supérieure de $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

3. Montrer que si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $\max(\inf A; \inf B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$ et
$\max(\inf A; \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$.

Exercice 6.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée et on note $M = supA$. On suppose que $M \notin A$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.

Exercice 8.

Soit x,y des réels. Montrer que
1. $x \leq y \Rightarrow \ E(x) \leq E(y)$.
2. $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
3.$\forall a \in \mathbb{Z}, E(x+a) = E(x) + a$.
4. $E(x) + E(x+y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $i = 1, ..., n;\ \ x_i \in [-1, 1]$ tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$.

Montrer que $|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq E\left(\frac{n^2}{4}\right)$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 11.

Montrer que l'ensemble $\left\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier la convergence de la suite (w_n) définie par $w_n = \max(u_n, v_n)$.

Exercice 2.

1. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

2. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3.

1. Soit (u_n) la suite de terme général u_n, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{E\left(\sqrt{n}\right)}{n}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Soit (v_n) la suite de terme général v_n, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \dfrac{\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)^2}{n}$.

Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. Montrer que la suite (u_n) de terme général u_n définie par :

$u_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times ... \times (3n+3)}$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5.

I. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général u_n défini pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

II. On considère la suite (v_n) de nombres réels définie par
$v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.
1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est convergente et que sa limite l vérifie $\dfrac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Exercice 6. Déterminer si elle existent les limites des suites suivantes

1. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$,
2. $u_n u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,
3. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$,
4. $u_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$,
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, k!$,
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k^2}$.

Exercice 7.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies

2. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a,b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b

3.Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$.

4. Montrer que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 8.

Soit(u_n) une suite réelle.

Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :
(u_{2n}), (u_{3n}), (u_{6n}), $(u_{3.2n})$, $(u_{3.2n+1})$,(u_{2^n}), $(u_{2^{n+1}})$.

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de(u_n).

Exercice 9.

Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(E(u_n))$ est-elle convergente ?

Exercice 10.

Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.
Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite
En déduire que (u_n) converge.

Exercice 11.

Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(\frac{n\pi}{3})$?

Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 12.

Soit (u_n) une suite bornée de nombre réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \inf\{u_p; p \geq n\}$ et $y_n = \sup\{u_p; p \geq n\}$.

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bien définies ?
2. Déterminer les suites (x_n) et (y_n) dans les cas suivants :

a. $u_n = (-1)^n$, b. $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Chapitre 3
CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Exercice 1 . Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(\ln x)}{x}$,

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} E\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 6. $\lim\limits_{x\to 0} x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que f admet comme limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Démontrer que f admet pour limite l en $-\infty$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Montrer que f n'est continue en aucun point.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 2. $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$.

Exercice 6. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.
2. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 7. Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes. (On pourra utiliser le théorème de la valeur intermédiaire)

Exercice 8.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrons que la fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$.

1. Montrer que f est 2π-périodique (c'est-à-dire que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et calculer $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 11. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intevalle, que l'on déterminera. Montrer que la bijection réciproque, est continue et dérivable sur cet intervalle.

Exercice 12.

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 13.

1. Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

2. En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{p=n+1}^{kn} \dfrac{1}{p}$.

Exercice 14.

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Exercice 15. Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hospital après avoir vérifié sa validité :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}};\ \lim_{x\to -\infty}\frac{2ch^2x-sh\,(2x)}{x-\ln\,(chx)-\ln\,(2)} \text{ et } \lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 16. Etablir les relations

$$\begin{aligned}
\arccos\,(x)+\arcsin\,(x) &= \frac{\pi}{2};\ \arctan\,(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad x\neq 0;\\
\cos\,(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \sin\,(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et}\\
\sin\,(2\ \arcsin x) &= 2x\sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Corrigé des exercices

Chapitre 4

NOMBRES RÉELS

Exercice 1.

1. Montrons que si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $x + y \notin \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde : Si $z = x + y \in \mathbb{Q}$, alors par différence de deux nombres rationnels $y = z - x \in \mathbb{Q}$

Or y est irrationnel donc $x + y \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrons que si $x \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ et $y \notin \mathbb{Q}$, alors que $xy \notin \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ et $y \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde : Si $z = xy \in \mathbb{Q}$, alors par quotient de deux nombres rationnels $y = \frac{z}{x} \in \mathbb{Q}$

Or y est irrationnel $xy \notin \mathbb{Q}$.

3. La somme et le produit de deux nombres irrationnels ne sont pas toujours un nombre irrationnel.

Exemple : $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $y = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ alors que $x + y = 0 \in \mathbb{Q}$ et $xy = -2 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2.

1. Les majorants de $A = [0, 3[$ sont $[3, +\infty[$ et ses minorants sont $]-\infty, 0]$, donc sa borne supérieure est 3, sa borne inférieure est 0, $3 \notin A$, donc A n'a pas de plus grand élément, $0 \in A$, donc son plus petit élément est 0.

2. Les majorants de $B = \{0\} \cup [1, 2]$ sont $[2, +\infty[$ et ses minorants sont $]-\infty, 0]$, donc sa borne supérieure est 2, sa borne inférieure est 0, $2 \in A$, donc B a pour plus grand élément, $0 \in B$, donc son plus petit élément est 0.

3. Les majorants de $C = \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ sont $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et ses minorants sont $]-\infty, 0]$, donc sa borne supérieure est $\frac{1}{3}$, sa borne inférieure est 0, son plus grand élément est $\frac{1}{3}$ et son plus petit élément est 0.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

Ainsi, $C = \left\{ \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est minoré par 0 et majoré par 1. De plus, $1 \in C$, dont 1 est un majorant de C qui est élément de C. C'est donc sa borne supérieure et aussi son plus grand élèment. Enfin, prouvons que 0 est la borne inférieure de C. Pour cela, on remarque que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Comme 0 est un minorant de C, ceci prouve que 0 est la borne inférieure de C.

5. On a $x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ et $D = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\right\}$ n'est rien d'autre que l'intervalle $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$. C'est un intervalle borné, dont la borne inférieure est $-\sqrt{2}$ et dont la borne supérieure est $\sqrt{2}$. $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ n'appartiennent pas à D, donc D n'a ni plus grand élèment, ni plus petit élèment.

Exercice 3.

Soit $I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* ; \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}$.

1. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $-2 < x + \frac{1}{2x}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-2 < x + \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

2. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{2x} \leq 2$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-2 < x + \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

3. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

$$
\begin{aligned}
I &= \left\{ x \in \mathbb{R}^* ; \ -2 < x + \frac{1}{2x} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^* ; x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\} \\
&= \left(\left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right) \cup \left]0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\\
&= \left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left]0, +\infty\right[
\end{aligned}
$$

4. Les majorants de I sont $[0, +\infty[$, les minorants sont $\left]-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, la borne supérieure est 0, la borne inférieure est $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \notin I$, donc I n'a pas de plus grand élément, $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \in I$, donc c'est le plus petit élément de I.

Exercice 4. A et B sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ donc les bornes sup et inf considérées existent.

Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \leq \sup B$, donc $\sup B$ majore A. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on a $\sup A \leq \sup B$.

Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $\inf B \leq a$, donc $\inf B$ minore A. Comme $\inf B$ est le plus grand des majorants de B, on a $\inf B \leq \inf A$.

Enfin, puisque $A \neq \emptyset$,$\inf A \leq \sup A$.

En conclusion On a $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exercice 5 .

1. $A \cup B \neq \emptyset$, car $A \subset A \cup B$. Si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, d'où $\min(\inf A; \inf B). \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$. Ainsi $A \cup B$ est borné.

2.**Montrons que** $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

D'après l'exercice 4 et puisque $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

On vient de prouver $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$.

Montrons que $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$: soit $M = \max(\sup A, \sup B)$.

Pour $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leq \sup A \leq M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leq \sup B \leq M$; donc quelque soit $x \in A \cup B$, $x \leq M$ donc M est un majorant de $A \cup B$, donc $\sup(A \cup B) \leq M$.

3. **Montrons que** $\inf(A \cup B) = \min(\inf A; \inf B)$.

D'après l'exercice 4 et puisque $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\inf A \geq \inf(A \cup B)$ et $\inf B \geq \inf(A \cup B)$.

On vient de prouver $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Montrons que $\inf(A \cup B) \geq \min(\inf A, \inf B)$: soit $m = \min(\inf A, \inf B)$.

Pour $x \in A \cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \geq \inf A \geq m$, ou soit $x \in B$ et alors $x \geq \inf B \geq M$; donc quelque soit $x \in A \cup B$, $x \leq m$ donc m est un minorant de $A \cup B$, donc $\inf(A \cup B) \geq m$.

4. Application : Quelles sont les bornes inférieure et supérieure de $E = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n , n \in \mathbb{N}^* \right\}$

On a $E = A \cup B$ avec $A = \left\{ \dfrac{1}{2n} + 1, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $B = \left\{ \dfrac{1}{2n+1} - 1, n \in \mathbb{N} \right\}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < \dfrac{1}{2n} + 1 \leq \dfrac{5}{4}$, d'où $\inf A = 1$ et $\sup A = \dfrac{5}{4}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < \dfrac{1}{2n+1} + 1 \leq 2$, d'où $\inf B = 1$ et $\sup B = 2$.

Ainsi $\sup E = \max(\sup A, \sup B) = \max(\frac{5}{4}, 2) = 2$ et $\inf E = \min(\inf A, \inf B) =$ 1.

5. **Montrons que** $\max(\inf A; \inf B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$ **si** $A \cap B \neq \varnothing$**.**

D'après l'exercice 4 et puisque $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a $\inf A \leq \sup(A \cap B)$ et $\inf B \leq \sup(A \cap B)$. Donc $\max(\inf A; \inf B) \leq \sup(A \cap B)$.

De même $\sup(A \cap B) \leq \sup A$ et $\sup(A \cap B) \leq \sup B$, d'où $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$.

Montrons que $\max(\inf A; \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$.

D'après l'exercice 4et puisque $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a
$\inf A \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup A$.

et $\inf B \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \sup B$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf A \leq \inf(A \cap B) \\ \inf B \leq \inf(A \cap B) \end{array} \right. \Rightarrow \max(\inf A; \inf B) \leq \inf(A \cap B).$$

De même $\left\{ \begin{array}{l} \inf(A \cap B) \leq \sup A \\ \inf(A \cap B) \leq \sup B \end{array} \right. \Rightarrow \inf(A \cap B) \leq \min(\sup A; \sup B)$.

Exercice 6.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée et on note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A.

On raisonne par l'absurde, et on suppose que $]M - \varepsilon, M[\cap A$ est fini. Soit $\{a_1, \ldots, a_p\} =]M - \varepsilon, M[$. Posons $a = \max(a_1, \ldots, a_p)$. Alors $a < M$. On pose $\alpha = M - a$. On a $\alpha > 0$, donc il existe $a_{p+1} \in A$ tel que $M - \alpha < a_{p+1} \leq M$. On a même $a_{p+1} < M$ car $M \notin A$. De plus, $a_{p+1} > M - \alpha = a \geq M - \varepsilon$. On en déduit que $a_{p+1} \in]M - \varepsilon, M[$ et que $a_{p+1} \neq a_i$, $i = 1, \ldots, p$. Ceci contredit l'hypothèse initiale.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.

Calculons $S = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On trouve

$$S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} (-1)^k \sqrt{3}^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} \left(1 + (-1)^k\right) \sqrt{3}^k.$$

Maintenant, si $k = 2p$ est pair, alors $\left(1 + (-1)^k\right) \sqrt{3}^k = 2.3^p$ est un entier pair, et si k est impair, $\left(1 + (-1)^k\right) \sqrt{3}^k = 0$. On en déduit que S est bien un entier pair, comme somme d'entiers pairs. De plus, on a $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ et donc $0 < \left(2 - \sqrt{3}\right)^n < 1$. On en déduit que $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n < S < 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$

D'où $S - 1 \leq \left(2 + \sqrt{3}\right)^n < S$

ce qui prouve que la partie entière de $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$ est $S - 1$. C'est donc un entier impair.

Exercice 8.

1. Montrons que $x \leq y \Rightarrow \ E(x) \leq E(y)$

$x \leq y \Rightarrow E(x) \leq x \leq y.$

Donc $E(x)$ est un entier relatif inférieur ou égal à y, Comme $E(y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à y, on a donc $E(x) \leq E(y)$.

2. Montrons que : $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$

Des inégalités $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $E(y) \leq y < E(y) + 1$, on en déduit $E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$

Or $E(x+y)$ est le plus grand entier n tel que $n \leq a+b$. Puisque $E(x)+E(y) \leq x + y$, on en déduit qu $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$. De même, $E(x + y) + 1$ est le plus petit entier m tel que $m > a + b$. Puisque $E(x) + E(y) + 2 > E(x + y)$, on en déduit $E(x) + E(y) + 2 \geq E(x + y) + 1$, ce qui est l'autre inégalité demandée.

3. Montrons que $\forall x \in \ \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, E(x + a) = E(x) + a.$

On traite d'abords le cas $a = 1$

$E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow E(x) + 1 \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$

Donc $E(x + 1) = E(x) + 1$

Si $a \in \mathbb{N}, E(x+a) = E(x+(a-1))+1 = E(x+(a-2))+2 = ... = E(x)+a.$

Si $a < 0, E(x) = E((x + a) - a) = E(x + a)$ (puisque $-a > 0$)

4. Montrons que $\quad E(x) + E(x + y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y).$

Écrivons $x = m + s$ et $y = n + t$ avec $m, n \in Z$ et $s, t \in [0, 1[$. Si $s + t < 1$, alors

$E(x) + E(x + y) + E(y) = n + (n + m) + m = 2n + 2m.$

Puisque $2n \leq E(2x)$ et $2m \leq E(2y)$, le résultat est démontré.

Si $s + t \geq 1$ (et dans ce cas $s + t < 2$), on a

$E(x) + E(x + y) + E(y) = n + (n + m + 1) + m = 2n + 2m + 1.$

Mais alors, on a ou bien $s \in [1/2, 1[$, ou bien$t \in [1/2, 1[$ (il est aussi possible que s et t soient dans $[\frac{1}{2}, 1[$). Supposons par exemple que $s \in [1/2, 1[$. Alors $2x = 2n + 2s = (2n + 1) + (2s - 1)$ où $2s - 1 \in [0, 1[$. Ainsi, $E(2x) = 2n + 1$ et comme

$E(2y) \geq 2m$, le résultat est démontré. La démonstration est exactement similaire si on suppose que $t \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 9

On a

$(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n) + (x_2 + ... + x_n) + (x_3 + ... + x_n) + ... + (x_{n-1} + x_n) + x_n$,

D'où $|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq |x_1 + x_2 + ... + x_n| + |x_2 + ... + x_n| + |x_3 + ... + x_n| + ... + |x_{n-1} + x_n| + |x_n|$.

Or $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ et donc $x_2 + ... + x_n = -x_1$, $x_3 + ... + x_n = -x_1 - x_2$, ...,

$|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \quad \leq 0 + |x_1| + |x_1 + x_2| + |x_1 + x_2 + x_3| + ... + |x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}|$.

1^{er} cas. Si $n = 2p$, alors $\dfrac{n^2}{4} = p^2$ et donc $E\left(\dfrac{n^2}{4}\right) = p^2$.

$|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq |x_1 + x_2 + ... + x_{2p}| + |x_2 + ... + x_{2p}| + ... + |x_p + ... + x_{2p}| + |x_{p+1} + ... + x_{2p}| + ... + |x_{2p-1} + x_{2p}| + |x_{2p}|$

Or $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ et donc $x_2 + ... + x_n = -x_1$, $x_3 + ... + x_n = -x_1 - x_2$, ...,

ainsi et puisque $x_i \in [-1, 1]$,

$|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq 1 + 2 + 3 + ... + (p-1) + p + (p-1) + ... + 2 + 1$

D'où, $|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq 2\dfrac{p(p-1)}{2} + p = p^2 = E\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.

$2^{ème}$ cas. Si $n = 2p + 1$, alors $\dfrac{n^2}{4} = p^2 + p + \dfrac{1}{4}$ et donc $E\left(\dfrac{n^2}{4}\right) = p^2 + p$.

$|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \quad \leq \ |x_1 + x_2 + ... + x_{2p+1}| + |x_2 + ... + x_{2p+1}| + ... + |x_{p+1} + ... + x_{2p+1}| + |x_{p+2} + ... + x_{2p+1}| + ... + |x_{2p+1}|$

Or $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ et donc $x_2 + ... + x_n = -x_1$, $x_3 + ... + x_n = -x_1 - x_2$, ...,

ainsi et puisque $x_i \in [-1, 1]$,

$|x_p + ... + x_{2p}| \leq 1 + 2 + 3 + ... + (p-1) + p + p + (p-1) + ... + 2 + 1$

D'où, $|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq 2\dfrac{p(p+1)}{2} = p^2 + p = E\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.

Dans tous les cas, on a montré que

$|x_1 + 2x_2 + ... + nx_n| \leq E\left(\dfrac{n^2}{4}\right)$.

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Montrons que : $E(\dfrac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

On a

$$\begin{aligned}
E(x) &\leq x < E(x) + 1 \Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x) + n \\
&\Rightarrow nE(x) \leq nx < nE(x) + n \Rightarrow nE(x) \leq E(nx) < nE(x) + n \\
&\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1
\end{aligned}$$

Donc

$$E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).$$

Exercice 11. Montreons que l'ensemble $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$

et donc tel que $x < r^3 < x + \varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$. On a montré que

$\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Chapitre 5

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = l'$

On sait que $\max(a,b) = \dfrac{1}{2}\left((a+b) + |a-b|\right)$

donc $\max(u_n, v_n) = \dfrac{1}{2}\left((u_n+v_n) + |u_n - u_n|\right) \to \dfrac{1}{2}\left((l+l') + |l-l'|\right) = \max(l,l')$.

Exercice 2.

1. Montrons qu'une suite d'entiers (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Si (u_n) est stationnaire, il est clair que cette suite converge.

Réciproquement, supposons que (u_n) est une suite d'entiers convergente et notons l sa limite. Montrons que $l \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $l \notin \mathbb{Z}$ alors $E(l) < l < E(l)+1$ donc à partir d'un certain rang $E(l) < u_n < E(l)+1$.Ce qui est en contradiction avec $u_n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $l \in \mathbb{Z}$.

Puisque $u_n \to l$ et $l-1 < l < l+1$, à partir d'un certain rang $l-1 < u_n < l+1$.

Or $u_n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = l$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}^+$ et soit $E = \{n \in \mathbb{N},\, u_n < A\}$. L'ensemble E est fini car il contient au plus $E(A)+1$ éléments. Par suite il possède un plus grand élément N et alors $\forall n \geq N+1$, $u_n \notin A$, donc $u_n \geq A$. Par suite $u_n \to +\infty$.

Exercice 3.

1. Soit (u_n) la suite de terme général u_n, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{E(\sqrt{n})}{n}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$

Donc $\left(E(\sqrt{n})\right)^2 \leq n < \left(E(\sqrt{n})+1\right)^2$

D'où $\dfrac{1}{\left(E(\sqrt{n})+1\right)^2} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\left(E(\sqrt{n})\right)^2}$

On multiplie ces dernières inégalités par $E(\sqrt{n}) > 0$, car $n \geq 1$, on obtient alors :

$$\frac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n})+1)^2} < \frac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{1}{E(\sqrt{n})}$$

Or $\sqrt{n}-1 < E(\sqrt{n})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\sqrt{n}) = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(\sqrt{n})}{(E(\sqrt{n})+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{E(\sqrt{n})} = 0$.D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(\sqrt{n})}{n} = 0$.

2 2. Soit (v_n) la suite de terme général v_n, définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = \dfrac{(E(\sqrt{n}))^2}{n}$.

Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

2. On multiplie par $(E(\sqrt{n}))^2$ les inégalités $\dfrac{1}{(E(\sqrt{n})+1)^2} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{(E(\sqrt{n}))^2}$, on obtient

$$\frac{(E(\sqrt{n}))^2}{(E(\sqrt{n})+1)^2} < \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} \leq 1$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(E(\sqrt{n}))^2}{(E(\sqrt{n})+1)^2} = 1$.D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(E(\sqrt{n}))^2}{n} = 1$.

Exercice 4.

Montrer que la suite (u_n) de terme général u_n définie par :

$u_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times ... \times (3n+3)}$

est convergente et déterminer sa limite.

Il est que clair que $u_n > 0$, la suite estdonc minorée, de plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+3}{3n+6} < \dfrac{2n+4}{3n+6} = \dfrac{2}{3} < 1$.

La suite est donc décroissante .

Donc la suite de terme général u_n est décroissante et minorée donc elle converge. Soit l sa limite

On a $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{2n+3}{3n+6}$. La limite vérifie donc $l = \dfrac{2}{3}l$. Ainsi $l = 0$.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite de nombres réels dont le terme général u_n est défini pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

1. **Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas une suite de Cauchy.**

On a $u_{2n} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + ... + \dfrac{1}{n+n} > \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Donc pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists\ p = n \geq n, q = 2n \geq n$ et $|u_p - u_q| > \varepsilon$.

La suite n'est donc pas de Cauchy.

2. La suite (u_n) n'est pas de Cauchy donc n'est pas convergente. .

De plus (u_n) est croissante. Si elle était majorée , elle serait convergente donc elle n'est pas majorée. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 6.

1. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1\right)} \end{aligned}$$

D'où (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,

On a $u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to e$.

3. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \dfrac{1-\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n} \to 1$.

4. $u_n = \dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$

On a Pour $n \in N^*$, $0 \le n-1 \le n+(-1)^{n+1} \le n+1$, d'où $\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{n+(-1)^{n+1}} \le \dfrac{1}{n-1}$

Ainsi $\left|\dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}\right| \le \dfrac{1}{n-1} \to 0$.

5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, k! = n! - (n-1)! + (n-2)! + ... + (-1)^n$.

Si n est pair alors $u_n \ge n! - (n-1)!$ et si n est impair alors $u_n \ge n! - (n-1)! - 1$. Puisque $n! - (n-1)! = (n-1)(n-2) \to +\infty$ et $n! - (n-1)! - 1 = (n-1)(n-2) - 1 \to +\infty$, on a $u_n \to +\infty$.

6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

On a $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k^2} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$
Donc $u_n \to 0$.

Exercice 7. *Moyenne arithmico-géometrique :*

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

1. Montrons par récurrence que $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

On a $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$.

Supposons que $a_n > 0$ et $b_n > 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$ et b_{n+1}est bien définie, de plus $b_{n+1} > 0$.

2. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+})^2$ on a $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$, en effet Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+})^2$

$\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$.

On en déduit que $b_n \leq a_n$.

Il en résulte que : $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = |b_n| = b_n$ et $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leq 0$.

De plus $a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$.

Ainsi par récurrence, on a $a_n - b_n \leq \dfrac{a-b}{2^n}$. Or $a_n - b_n \geq 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a-b}{2^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes , on note par $M(a,b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b

3.Si $a = b$,alors les deux suites (a_n) et (b_n) sont constantes égales à a et donc $M(a,a) = a$.

Si $b = 0$,alors la suite (b_n) est constante égales à 0 et donc $M(a,0) = 0$.

e) Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $a'_0 = \lambda a$ et $b'_0 = \lambda b$.

Par récurrence, on montre $a'_n = \lambda a_n$ et $b'_n = \lambda b_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$.

Exercice 8.

Pour chercher les suites extraites de (u_{2n}), il s'agit de trouver toutes les suites pour lesquelles chaque terme est de la forme 2n, c'est-à-dire est pair. (u_{3n})ne convient pas (par exemple, pour $n = 1$, u_3 n'est pas un élément de (u_{2n}). (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}), car chaque entier de la forme $6n$ s'écrit encore $2p$, avec $p = 3n$. Il en est de même de $((u_{3.2n})$

Les suites extraites de (u_{3n}) sont (u_{6n}), $(u_{3.2n})$, $(u_{3.2n+1})$;

Seule la suite $(u_{2^{n+1}})$ est extraite de (u_{2^n})

Posons $v_n = (u_{\varphi(n)})$, et soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante donnant la suite extraite considérée $(v_{\psi(n)})$. On a alors $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$. Or, $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante comme composée d'applications strictement croissante. La suite $(v_{\psi(n)})$ est donc bien extraite de (u_n).

Exercice 9.

Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(E(u_n))$ est-elle convergente ?

Soit $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

On a $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$, d'où $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ et donc (u_n) converge vers 1.

Soit $v_n = E(u_n)$

Ona $v_{2n} = E(u_{2n}) = E\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) = 1$, d'où $v_{2n} \to 1$ et $v_{2n+1} = E(u_{2n+1}) = E\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = 0$, d'où $v_{2n+1} \to 0$.

Ainsi $(E(u_n))$ n'est pas convergente.

Exercice 10.

Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.

Montrons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = l''$.

La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et de (u_{3n}), donc $l = l''$.

De même La suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}), donc $l' = l''$.

Ainsi $l = l' = l''$

Par conséquent (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Montrons alors que (u_n) converge.

Soit $\varepsilon > 0$.Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |u_{2n} - l| < \varepsilon$ et Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$.

donc si $m \in \mathbb{N}$, m est soit pair ou impair,

$m > \max(N, N') \Rightarrow |u_m - l| < \varepsilon$.

Exercice 11.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$? de la suite $\cos(\dfrac{n\pi}{3})$?

La suite $(-1)^n$ ne prend que les valeurs 1 et -1. Il est clair que toute suite extraite ne prenant que l'une de ces deux valeurs ne pourra converger que vers 1 ou vers -1. L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc inclus dans $\{-1, 1\}$. D'autre part, en notant $u_n = (-1)^n$, on a $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 1$. Ainsi, 1 et -1 sont effectivement des valeurs d'adhérence de (u_n).

Pour la suite(v_n) définie par $v_n = \cos(\dfrac{n\pi}{3})$, le même raisonnement prouve que les valeurs d'adhérence sont $\cos(0)$, $\cos(\dfrac{\pi}{3}), \cos(\dfrac{2\pi}{3})$, $\cos(\pi)$, c'est-à-dire 1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ et -1.

2. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

Posons $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = n$. Alors 1 est valeur d'adhérence, et la suite (u_n) est divergente. De plus, 1 est l'unique valeur d'adhérence de (u_n). En effet, considérons $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Si $\varphi(n)$ est un entier impair pour une infinité de termes, alors $(u_{\varphi(n)})$ est divergente. Si, $\varphi(n)$ est pair sauf pour un nombre fini d'entiers n et $(u_{\varphi(n)})$ est stationnaire donc convergente vers 1.

Exercice 12.

Soit (u_n) une suite bornée de nombre réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$x_n = \inf\{u_p; p \geq n\}$ et $y_n = \sup\{u_p; p \geq n\}$.

1. **Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bien définies ?**
Soit $A_n = \{u_p; p \geq n\}$.

$A_n \neq \emptyset$ puisqu'il contient u_n . De plus A_n est borné puisque (u_n) est une suite bornée. Donc (x_n) et (y_n) sont-elles bien définies

2. **Déterminer les suites (x_n) et (y_n) dans les cas suivants :**

a. Pour $u_n = (-1)^n$, on a $A_n = \{-1, 1\}$,donc $x_n = -1$ et $y_n = 1$.

b. Pour $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, la suite (u_n) est croissante, donc A_n est minoré par $1 - \dfrac{1}{n+1}$, et cet élément appartient à A_n. Donc $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

L'ensemble A_n est majoré par 1, et de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $p > n$ tel que $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{1}{p+1} \leq 1$.

Ainsi, $y_n = \sup A_n = 1$.

Chapitre 6

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Exercice 1 .

1. Comme $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$,

2. Par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1} = 0$,

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e$,

4. On a $E\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x} - 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} E\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$,

5. On a $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.

Si $x > 0$, on a alors $1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et si $x < 0, 1 < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 - x$;

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$,

6. Comme $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, on a $x - x^2 < x^2E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet comme limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$,
$\exists A > 0$ tel que $(x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Soit $B = -A$. Alors $x < B \Rightarrow -x > A \Rightarrow |f(-x) - l| < \varepsilon$. Or est une fonction paire, donc $f(-x) = f(x)$.On déduit de ce qui précéde que $\exists B < 0$ tel que $(x < B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$. On a ainsi montré que f admet pour limite l en $-\infty$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Par somme et composé, f est continue sur chaque intervalle $I_k =]k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Etudions la continuité en $a \in \mathbb{Z}$. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a - 1 + \sqrt{a - (a-1)} = a = f(a)$. f est continue en a donc elle est continue à droite et à gauche. Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Montrer que f n'est continue en aucun point.

Puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, on peut trouver pour chaque $a \in \mathbb{R}$ une suite (u_n) de $\mathbb{Q}$ et une suite (v_n) de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telles que $u_n \to a$ et $v_n \to a$. Mais, pour chaque n, on a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$. Les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne convergent pas vers la même limite alors que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers a. Ainsi, f n'est pas continue en a.

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur R ?

1. $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En 0, $|f(x)| = \left|\sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin x|$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Par suite, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. $g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

g est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et on a $g(x) = \frac{x-1}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x}$. Par conséquent $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\frac{1}{2}$. Et donc en posant $g(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1, la fonction g ne peut être prolongée par continuité, car en -1, g n'admet de limite finie.

Exercice 6.

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

1. **Montrons que f est bornée et atteint sa borne supérieure.**

On distingue deux cas : ou bien f est la fonction nulle, dans ce cas il n'y a rien à montrer, ou bien f n'est pas toujours nulle, dans ce cas il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. D'autre part, on sait que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, on trouve qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x \in [0,+\infty[,\ x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \dfrac{f(x_0)}{2}$

Comme f est à valeurs dans $[0,+\infty[$, on obtient : $\forall x \in [A,+\infty[,\ f(x) \leq \dfrac{f(x_0)}{2}$

Donc f est bornée sur l'intervalle $[A,+\infty[$. D'autre part, le théorème des bornes montre que f est bornée sur l'intervalle $[0,A]$, plus précisément il existe des réels $0 \leq m \leq M$ tels que $f([0,A]) = [m,M]$. Il en résulte que f est majorée sur $[0,+\infty[$ par $\max\left(\dfrac{f(x_0)}{2}, M\right)$. Or on constate que $x_0 \in [0,A]$ (sinon la propriété $\forall x \in [A,+\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{f(x_0)}{2}$ serait contredite), donc $M \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$. Il en résulte que f est majorée par M sur $[0,+\infty[$. Or, toujours d'après le théorème de bornes, il existe $c \in [0,A]$ tel que $f(c) = M$, donc f atteint sa borne supérieure.

2. **Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?**

La fonction $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ satisfait les hypothèses de l'énoncé, mais n'atteint pas sa borne inférieure (qui est 0).

Exercice 7.

Montrons que les seules applications continues de R vers Z sont les fonctions constantes.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue.

Par l'absurde : Si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et $f(x) \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 8.

1. Montrons que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $y > x > 0$, $\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 = y + x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq y - x$.
Donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y+x}$.
De même, par symétrie, si $x > y > 0$ $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.
Ainsi $\forall x, y > 0,\ \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|y-x|}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon^2 > 0$.
Pour tout $x, y > 0$, $|y - x| \leq \eta$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon$.
Ainsi la fonction racine carrée est uniformément continue.

2. Montrons que la fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Supposons que la fonction $x \mapsto \ln x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y > 0$, ($|x - y| \leq \eta \Rightarrow$ $|\ln x - \ln y| \leq 1$)
Ainsi si $y = x + \eta$, $\ln\left(\dfrac{x+\eta}{x}\right) \leq 1$.
Or $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{x+\eta}{x}\right) = +\infty$, ce qui est en contradiction avec $\ln\left(\dfrac{x+\eta}{x}\right) \leq 1$.

Exercice 9.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, par hypothèse appliquée à $y = x + 2\pi$,

$$0 \leq |f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin x - \sin(x + 2\pi)| = 0$$

et donc $f(x + 2\pi) = f(x)$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque sin est continue, il existe $\eta \geq 0$ tel que pour $|x - x_0| \leq \eta$, $|\sin x - \sin x_0| \leq \varepsilon$. Or, par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq |\sin x - \sin x_0|$.

Par conséquent, pour $|x - x_0| \leq \eta, |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Par définition de la limite, ceci montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. On veut montrer que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ est un réel. Or on sait que la fonction sin est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$.

Et par l'hypothèse, pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}$,

$$\left|\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}\right| \leq \left|\frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}\right|.$$

Donc par comparaison

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = 0.$$

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie continue telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$
Montrons que f admet un minimum absolu.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \leq A, \forall x \geq B$, $f(x) > M$. Ainsi f est minorée par M sur $]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$. De plus , f admet un minimum sur $[A, B]$ en un point $a \in [A, B]$ car continue sur un segment. f est donc minorée sur R par $\min(M, f(a))$

On choisit M de façon que $f(0) < M$. Soit par exemple $M = f(0) + 1$. On a alors $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.

On a $f(a) < f(0)$ car $0 \in [A, B]$ donc $f(a) < M$.

Pour tout $x \in]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$, on a donc $f(x) > M > f(a)$ et pour tout $x \in [A, B]$, on a $f(x) > f(a)$.

Ainsi f admet un minimum absolu en a.

Exercice 11.

Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

Montrons que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intevalle, que l'on déterminera.

La fonction f est continue. De plus les fonctions $x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $x \mapsto x$ sont strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, La fonction f est donc strictement croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi étant donné que f est continue et strictement croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

Montrons que la bijection réciproque, est continue et dérivable sur l' intervalle $\left[0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left]0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

Etudions la dérivabilité de f^{-1} en 0 :

En posant $x = f^{-1}(h)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} &= \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{\sin x}}{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = 0$ et par suite $\left(f^{-1}\right)'(0) = 0$.

Exercice 12.

Montrons que toute fonction polynôme de R dans R, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Soit $P(x)$ un polynôme de degré impair.

Comme fonction polynomiale, P est continue sur $\mathbb{R}$.

Le degré du polynôme est impair, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution car $0 \in]-\infty, +\infty[$.

Exercice 13.

1. **Montrons que** $\forall x > 0, \frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue et dérivable sur $]0, +\infty[$,on lui applique le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$. Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$

Or $x < c < x+1$ donne $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. D'où $\frac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$
.

2. **Montrons que pour** $k \in N \backslash \{0, 1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

D'après la question 1, on a $\sum_{p=n+1}^{kn}(\ln(p+1)-\ln(p)) < \sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}$ et $\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} < \sum_{p=n+1}^{kn}(\ln(p)-\ln(p-1))$.

Donc $\ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right) < \sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} < \ln(k)$

Par le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p} = \ln(k)$.

Exercice 14.
Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$f_n(x) = \ln(1+x^n) + x - 1$.

1. **Montrons qu'il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.**

La fonction f_n est une fonction continue sur $[0,1]$, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \ln(2) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

2. **Montrons que f_n est strictement croissante sur R^+, en déduire que c_n est unique.**

La fonction f_n est dérivable de dérivée $f_n'(x) = \frac{bx^{n-1}}{1+x^n} + 1 > 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, par conséquent f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,\ln(2)]$, comme $0 \in [-1,\ln(2)]$, f_n admet un unique antécédent du réel 0, c'est à dire il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

Exercice 15. Calcul des limites suivantes :
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{2ch^2x - sh(2x)}{x-\ln(chx)-\ln(2)}$ et $\lim_{x\to 1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

■ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}} = 1
\end{aligned}$$

■ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2ch^2x - sh(2x)}{x-\ln(chx)-\ln(2)}$:
On simplifie d'abord l'expression

$$\begin{aligned}2ch^2x - sh(2x) &= 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\\ &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{2} - \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\\ &= e^{-2x}+1.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x - \ln(chx) - \ln(2) &= x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \ln(2)\\ &= x - \ln\left(e^x+e^{-x}\right) = x - \ln\left(e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right)\\ &= x - \ln\left(e^x\right) - \ln\left(1+e^{-2x}\right) = -\ln\left(1+e^{-2x}\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2ch^2x - sh(2x)}{x-\ln(chx)-\ln(2)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}+1}{-\ln\left(1+e^{-2x}\right)} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{-2x}}{\dfrac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}\\ &= -\lim_{x\to-\infty}1+e^{-2x} = -\infty\end{aligned}$$

■

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x} = 1$$

Exercice 16. Etablir les relations

■ $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

On pose $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$

f est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Ainsi f est constante sur $]-1,1[$, donc sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \arccos 0 + \arcsin(0) = \dfrac{\pi}{2}$,

Par conséquent $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

■ $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{|x|}\dfrac{\pi}{2}$ pour $x \neq 0$.

On pose $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g est définie dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition : $g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. Sachant $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, on obtient : $c_1 = \frac{\pi}{2}$ et $c_2 = -\frac{\pi}{2}$.

■ $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pour rout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

d'où

$$\cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Or $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\cos y \geq 0$ si $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

■ $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Pour rout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sin^2(\arctan x) &= 1 - \cos^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}\end{aligned}$$

D'où $|\sin(\arctan x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

Or $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin y$ et du même signe que y sur$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

■ $\sin(2\ \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Pour rout $x \in [-1,1]$, on a : $\sin(2\ \arcsin x) = 2\sin(\ \arcsin x)\cos(\arcsin x)$

Or $\sin(\ \arcsin x) = x$ et $\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\ \arcsin x) = 1 - x^2$, donc

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Mais $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Ainsi $\sin(2\ \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

.