Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia - Marrakech

Année Universitaire 2016-2017
Département de Mathématiques
Filière: Mathématiques - SMIA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle final-Durée 2h
(Samedi 10 juin 2017)

Exercice 1. (Questions de cours) (3 points)

1) Rappeler la définition d'une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2) Enoncer le premier critère d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
3) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Exercice 2. (5 points)

Soit $h \in \mathbb{R}$ et soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

1) Montrer, à partir de la définition, que si φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\psi : x \longmapsto \psi(x) = \varphi(x + h)$ est en escalier sur $[a - h, b - h]$ et que

$$\int_{a-h}^{b-h} \psi(x)\mathrm{d}\, x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}\, x.$$

2) En déduire que si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f(x + h)$ est Riemann-intégrable sur $[a - h, b - h]$ et que

$$\int_{a-h}^{b-h} g(x)\mathrm{d}\, x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\, x.$$

Exercice 3. (3 points)

Démontrer que si $f : [a, b] \longrightarrow [1, +\infty[$ est une fonction Riemann-intégrable, alors la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4. (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et vérifiant

$$xf(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) Ecrire l'équation différentielle du premier ordre satisfaite par F.
2) Résoudre l'équation différentielle obtenue et en déduire alors l'expréssion de f.

Exercice 5. (4 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 2(m - 1)y' + m^2 y = \mathrm{e}^{(m-1)x} \quad ,$$

où m est un paramètre réel.

<u>Exercice 6.</u> (2 points)

Calculer la primitive suivante

$$\boldsymbol{I = \int \sin^6(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2016-2017
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques (SMIA)-S2

Corrigé du contrôle final d'Analyse II - juin 2017

Pr. My Hicham LALAOUI RHALI

Exercice 1

1) Une fonction φ est dite en escalier sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, s'il existe une subdivision $(d)=(x_0=a,\dots,x_n=b)$ de $[a,b]$, dite associée à φ sur $[a,b]$, telle que $\varphi(x)=\alpha_k=cte$, $\forall x\in\,]x_{k-1},x_k[$, $k=1,\dots,n$.

2) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant :

$\varphi_n\le f\le\psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b(\psi_n(x)-\varphi_n(x))dx=0$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b\psi_n(x)dx$.

3) Soient f et g deux fonctions numériques Riemann-intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Exercice 2.

1) Soit $h\in\mathbb{R}$ et soient φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $(d)=(x_0=a,\dots,x_n=b)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\varphi(x)=\alpha_k=cte$, $\forall x\in\,]x_{k-1},x_k[$, $k=1,\dots,n$.

Posons $y_k = x_k - h$, $\forall x \in \{0,1,\dots,n\}$.
Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a : $x_{k-1} < x_k$, ce qui entraine que $y_{k-1} = x_{k-1} - h < y_k = x_k - h$.
$(d') = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ étant une suite finie et strictement croissante de points de $[a-h, b-h]$, de 1er terme $y_0 = x_0 - h = a-h$ et de dernier terme $y_n = x_n - h = b-h$, donc (d') est une subdivision de $[a-h, b-h]$. De plus, si $x \in]y_{k-1}, y_k[=]x_{k-1}-h, x_k-h[$ alors $x+h \in]x_{k-1}, x_k[$, ce qui implique que $\psi(x) = \varphi(x+h) = \alpha_k = cte$, $\forall x \in]y_{k-1}, y_k[$, $k=1,\dots,n$. Ainsi, ψ est une fonction en escalier sur $[a-h, b-h]$ et on a:

$$\int_{a-h}^{b-h} \psi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\alpha_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\alpha_k = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

2) Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et donc g est bornée sur $[a-h, b-h]$. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx = 0$.
Pour tout $x \in [a-h, b-h]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$\Phi_n(x) = \varphi_n(x+h)$ et $\Psi_n(x) = \psi_n(x+h)$.

Il vient de 1) que $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ sont bien deux suites de fonctions en escalier sur $[a-h, b-h]$ de plus, pour tout $x \in [a-h, b-h]$, on a : $x+h \in [a,b]$ ce qui entraine que

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(x+h) \leq f(x+h) = g(x) \leq \psi_n(x+h) = \Psi_n(x), \forall n \in \mathbb{N},$$

D'autre part,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a-h}^{b-h} (\Psi_n(x) - \Phi_n(x))dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{a-h}^{b-h} (\psi_n(x+h) - \varphi_n(x+h))dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx \quad \left(\text{d'après } 1)\right)$$

$$= 0$$

Le critère 1 nous permet donc de conclure que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x+h)$ est Riemann-intégrable sur $[a-h, b-h]$ et que

$$\int_{a-h}^{b-h} g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{a-h}^{b-h} \Phi_n(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx, \quad \text{d'après } 1)$$

$$= \int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 3

La fonction $f : [a,b] \longrightarrow [1, +\infty[$ étant Riemann-intégrable, donc il existe $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ et vérifiant $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx = 0$.

Comme $1 \leq f$ sur $[a,b]$, alors $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ peuvent être choisies telles que $1 \leq \varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a,b]$ ce qui entraine alors que

$$1 \leq \sqrt{\varphi_n} \leq \sqrt{f} \leq \sqrt{\psi_n} \quad \text{et donc que}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{f}} \leq \frac{1}{\sqrt{\varphi_n}} \leq 1 \text{ sur } [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de voir que les fonctions $\frac{1}{\sqrt{\psi_n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\varphi_n}}$ sont en escalier sur $[a,b]$,

de plus :

$$0 \leq \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_n}} - \frac{1}{\sqrt{\psi_n}}\right)(x)\, dx = \int_a^b \frac{(\psi_n(x) - \varphi_n(x))}{\sqrt{\varphi_n}\cdot\sqrt{\psi_n}\left(\sqrt{\varphi_n} + \sqrt{\psi_n}\right)}\, dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_n}} - \frac{1}{\sqrt{\psi_n}}\right)(x)\, dx = 0$.

Il vient alors du critère 1 que la fonction $\frac{1}{\sqrt{f}}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 4

1) f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

L'équation $x f(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt$ s'écrit donc

$$xF'(x) = 2F(x), \qquad (E).$$

2) L'équation différentielle obtenue (E) est une équation différentielle du 1er ordre à variables séparées dont la solution est

$$F(x) = Kx^2, \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

En dérivant, on obtient

$$f(x) = F'(x) = 2Kx = C.x, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

$$y'' - 2(m-1)y' + m^2 y = e^{(m-1)x}, \qquad (I)$$

L'équation sans second membre associée est

$$y'' - 2(m-1)y' + m^2 y = 0, \qquad (II)$$

dont l'équation caractéristique est

$$\varphi(r) = r^2 - 2(m-1)r + m^2 = 0.$$

$$\Delta' = (m-1)^2 - m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = 1 - 2m.$$

Trois cas sont possibles :

1er cas : si $m < \frac{1}{2}$, dans ce cas l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = (m-1) - \sqrt{1-2m}$ et $r_2 = (m-1) + \sqrt{1-2m}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'écrit

$$y_0 = \lambda_1 e^{((m-1)-\sqrt{1-2m})x} + \lambda_2 e^{((m-1)+\sqrt{1-2m})x},$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $f(x) = P_0(x) e^{(m-1)x}$, où $P_0(x) = 1$ et $\varphi(m-1) \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de (I) sous la forme $y_p = Q_0(x) e^{(m-1)x}$, où Q_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire, on cherche y_p sous la forme

$$y_p = \lambda e^{(m-1)x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Donc}$$

$$y_p' = \lambda (m-1) e^{(m-1)x} \quad \text{et}$$

$$y_p'' = \lambda (m-1)^2 e^{(m-1)x}.$$

En reportant dans (I), on obtient

$$\lambda \left[m^2 - 2m + 1 - 2m^2 + 4m - 2 + m^2\right] = 1$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda (2m-1) = 1$$

D'où $\lambda = \frac{1}{2m-1}$ et $y_p = \frac{e^{(m-1)x}}{2m-1}$.

La solution générale de (I) s'écrit dans ce cas:

$$y = y_0 + y_p = \lambda_1 e^{((m-1)-\sqrt{1-2m})x} + \lambda_2 e^{((m-1)+\sqrt{1-2m})x} + \frac{e^{(m-1)x}}{2m-1}$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

<u>2ème cas: Si $m = \frac{1}{2}$</u>, alors l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet une racine double $r_1 = r_2 = r = (m-1) = -\frac{1}{2}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'écrit:

$$y_0 = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{-x/2}, \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $f(x) = e^{-x/2} = P_0(x) e^{-x/2}$ où $P_0(x) = 1$ et $-\frac{1}{2}$ est une racine double de l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$, alors on cherche une solution particulière de (I) sous la forme $y_p = x^2 Q_0(x) e^{-x/2}$ où Q_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire, on cherche y_p sous la forme $y_p = \lambda x^2 e^{-x/2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$y_p = \lambda x^2 e^{-x/2}$

$y_p' = \left(2\lambda x - \frac{\lambda x^2}{2}\right)e^{-x/2}$

$y_p'' = \left(2\lambda - 2\lambda x + \frac{\lambda x^2}{4}\right)e^{-x/2}$

En reportant dans (I), on obtient

$2\lambda - 2\lambda x + \frac{\lambda x^2}{4} + 2\lambda x - \frac{\lambda x^2}{2} + \frac{\lambda x^2}{4} = 1$

ce qui entraine que $2\lambda = 1$ et donc $\lambda = \frac{1}{2}$

D'où $y_p = \frac{x^2}{2} e^{-x/2}$.

La solution générale de (I) s'écrit donc

$y = y_0 + y_p = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{-x/2} + \frac{x^2}{2} e^{-x/2}$, où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

<u>3eme cas: Si $m > \frac{1}{2}$</u>, dans ce cas l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = (m-1) - i\sqrt{2m-1}$ et $r_2 = (m-1) + i\sqrt{2m-1}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'écrit

$y_0 = e^{(m-1)x}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{2m-1}\cdot x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{2m-1}\cdot x)\right]$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $f(x) = e^{(m-1)x} = P_0(x) e^{(m-1)x}$, où $P_0(x) = 1$

et $\varphi(m-1) \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de (I) sous la forme $y_p = Q_0(x)e^{(m-1)x}$, où Q_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire sous la forme $y_p = \lambda e^{(m-1)x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un calcul similaire au 1^{er} cas (cas $m < \frac{1}{2}$) entraine que $\lambda = \frac{1}{2m-1}$ et $y_p = \frac{e^{(m-1)x}}{2m-1}$.

Ainsi la solution generale de (I) est

$$y = y_0 + y_p = e^{(m-1)x}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{2m-1}\cdot x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{2m-1}\cdot x)\right] + \frac{e^{(m-1)x}}{2m-1}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Exercice 6</u> $\quad I = \int \sin^6(x)\cos^3(x)\,dx$.

L'exposant de cosinus est égal à 3 qui est impair, donc on pose $t = \sin(x)$ et $dt = \cos(x)dx$.

Il vient alors que

$$I = \int \sin^6(x)\cos^2(x)\,(\cos(x)\,dx)$$

$$= \int t^6(1-t^2)\,dt = \int (t^6 - t^8)\,dt$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\sin^7(x)}{7} - \frac{\sin^9(x)}{9} + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia - Marrakech

Année Universitaire 2017-2018
Département de Mathématiques
Filière: Mathématiques - SMIA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle final-Durée 2h
(Samedi 09 juin 2018)

Exercice 1. (Questions de cours) (3 points)

1) Rappeler la définition d'une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

2) Enoncer le deuxième critère d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

3) Rappeler l'inégalité de Minkowski.

Exercice 2. (5 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

1) Montrer, à partir de la définition, que si φ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\psi : x \longmapsto \psi(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$ et que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \psi(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

2) En déduire que si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est Riemann-intégrable sur $[\lambda a, \lambda b]$ et que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. (3 points)

Démontrer que si $f : [a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction Riemann-intégrable, alors la fonction $\sqrt{1 + f}$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4. (3 points)

Soit f une fonction de classe C^1 et strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et notons par f^{-1} sa fonction réciproque.

1) Montrer que la fonction

$$F : x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$$

est dérivable sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée.

2) En déduire que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. (4 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 2my' + (m^2 - m + 1)y = \mathrm{e}^{mx} \quad ,$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 6. (2 points)

Calculer la primitive suivante

$$I = \int \frac{\mathrm{tg}(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2017-2018
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques (SMIA)-S2

Corrigé du contrôle final
d'Analyse II - juin 2018

Pr. My Hicham LALAOUI RHALI

Exercice 1.

1) Une fonction φ est dite en escalier sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, s'il existe une subdivision $(d) = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ de $[a,b]$, dite associée à φ sur $[a,b]$, telle que $\varphi(x) = \alpha_k = \text{cte}\,, \forall x \in]x_{k-1}, x_k[, k = 1,2,..,n$.

2) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant:

$$(i)\ |f - \Phi_n| \leq \Psi_n\,, \text{ sur } [a,b]\ , \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad (ii) \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b \Psi_n(x)\mathrm{d}\,x = 0.$$

Dans ce cas
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b \Phi_n(x)\mathrm{d}\,x.$$

3) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors
$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}\,x\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}\,x\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}\,x\right]^{1/2}.$$

Exercice 2.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si φ une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors il existe une subdisision $(d) = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ de $[a,b]$ telle que $\varphi(x) = \alpha_k = \text{cte}\,, \forall x \in]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1,2,..,n$.

Posons
$$y_k = \lambda x_k\,, \forall k \in \{0,1,...,n\}.$$

Pour tout $k \in \{1,...,n\}$, on a $x_{k-1} < x_k$, ce qui entraine alors que
$$y_{k-1} = \lambda x_{k-1} < \lambda x_k = y_k.$$

$(D) = (y_0 = \lambda a, y_1, ..., y_n = \lambda b)$ étant une suite finie et strictement croissante de points de $[\lambda a, \lambda b]$, de premier terme $y_0 = \lambda a$ et de dernier terme $y_n = \lambda b$, donc (D) est une subdivision de $[\lambda a, \lambda b]$. De plus, si $x \in]y_{k-1}, y_k[=]\lambda x_{k-1}, \lambda x_k[$, alors $\dfrac{x}{\lambda} \in]x_{k-1}, x_k[$, ce qui implique que $\psi(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = \alpha_k = \text{cte}\,, \forall x \in]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1,2,..,n$. Ainsi, ψ est une fonction en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$ et on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda a}^{\lambda b} \psi(x)\mathrm{d}\,x &= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k - \lambda x_{k-1})\alpha_k \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\alpha_k \\
&= \lambda \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

2) Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et donc g est bornée sur $[\lambda a, \lambda b]$. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant:

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n\,,\ \text{sur}\,[a,b]\,, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b (\varphi_n(x)-\psi_n(x))\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Pour tout $x \in [\lambda a, \lambda b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)) \text{ et } \Psi_n(x) = \psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Il vient de 1) que $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ sont bien deux suites fonctions en escalier sur $[\lambda a, \lambda b]$. De plus, pour tout $x \in [\lambda a, \lambda b]$, on a $\dfrac{x}{\lambda} \in [a,b]$, ce qui entraine que

$$\Phi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = g(x) \leq \psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \Psi_n(x)\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b} (\Psi_n(x)-\Phi_n(x))\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b} \left(\psi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)-\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\lambda\int_a^b (\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,\mathrm{d}\,x\ ,\ \ (\text{d'après } 1)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le critère 1 nous permet donc de conclure que la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est Riemann-intégrable sur $[\lambda a, \lambda b]$ et que

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\mathrm{d}\,x &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\lambda a}^{\lambda b}\Phi_n(x)\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\lambda\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}\,x\ ,\ \ (\text{d'après } 1)) \\
&= \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

La fonction f est positive et bornée sur $[a,b]$ donc $\sqrt{1+f}$ est aussi bornée sur $[a,b]$. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe $(\varphi_n)_n$ et $(\varphi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n\,,\ \text{sur}\,[a,b]\,, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b (\varphi_n(x)-\psi_n(x))\,\mathrm{d}\,x = 0.$$

Comme $1 \leq \sqrt{1+f}$ sur $[a,b]$, alors les suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\varphi_n)_n$ peuvent être choisies telles que

$$1 \leq \sqrt{1+\varphi_n} \leq \sqrt{1+f} \leq \sqrt{1+\psi_n}\,,\ \text{sur}\,[a,b]\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b \left(\sqrt{1+\psi_n(x)}-\sqrt{1+\varphi_n(x)}\right)\mathrm{d}\,x &= \int_a^b \frac{(\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+\psi_n(x)}+\sqrt{1+\varphi_n(x)}} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b (\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,\mathrm{d}\,x\,,\ \ (*).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b(\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,\mathrm{d}\,x = 0$, alors il vient des inégalités $(*)$ que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b\left(\sqrt{1+\psi_n(x)}-\sqrt{1+\varphi_n(x)}\right)\mathrm{d}\,x=0$. Finalement, les suites de fonctions $(\sqrt{1+\varphi_n})_n$ et $(\sqrt{1+\psi_n})_n$ vérifient bien les conditions du critère 1, on déduit alors que la fonction $\sqrt{1+f}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 4.

1) La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[a,b]$, donc bijective de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $[f(a),f(b)]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, alors la fonction $G : x\longmapsto G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $[a,b]$ et on a $G'(x)=f(x)\,,\forall x\in[a,b]$. Par ailleurs, la fonction f^{-1} est continue sur $[f(a),f(b)]$ et f est dérivable sur $[a,b]$, donc la fonction $H : x\longmapsto H(x)=\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}\,t$ est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x\in[a,b]$, $H'(x)=f'(x)f^{-1}(f(x))=xf'(x)$. Ainsi, la fonction F est dérivable sur $[a,b]$, et on a

$$F'(x)=f(x)+f'(x)f^{-1}(f(x))-xf'(x)=0\ ,\forall x\in[a,b].$$

2) On a $F'(x)=0\ ,\forall x\in[a,b]$, ce qui entraine alors que

$$F(x)=cte=F(a)=F(b)\,,\forall x\in[a,b],$$

c'est à dire que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t-bf(b)=-af(a).$$

D'où la formule cherchée.

Exercice 5.

$$y''-2my'+(m^2-m+1)y=\mathrm{e}^{mx}\quad , \qquad\qquad (\mathrm{I})$$

L'équation sans second membre assocée à (I) est

$$y''-2my'+(m^2-m+1)y=0\quad , \qquad\qquad (\mathrm{II}),$$

dont l'équation caractéristique s'ecrit

$$\varphi(r)=r^2-2mr+(m^2-m+1)=0.$$

$\Delta'=m^2-(m^2-m+1)=m-1$.
Trois cas sont possibles.

<u>1er cas: si $m>1$</u>, l'équation caractéristique $\varphi(r)=0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1=m-\sqrt{m-1}$ et $r_2=m+\sqrt{m-1}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0=\lambda_1\mathrm{e}^{\left(m-\sqrt{m-1}\right)x}+\lambda_2\mathrm{e}^{\left(m+\sqrt{m-1}\right)x}\ \text{, où } \lambda_1\,,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

On a $f(x)=\mathrm{e}^{mx}$ et comme $\varphi(m)\neq0$, on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p=\mathrm{e}^{mx}P_0(x)$, où P_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire, on cherche y_p sous la forme $y_p=a\mathrm{e}^{mx}$, où $a\in\mathbb{R}$. En reportant dans (I), on obtient

$$a(1-m)=1\ \text{ d'où }\ a=\frac{1}{1-m}\ \text{ et }\ y_p=\frac{\mathrm{e}^{mx}}{1-m}.$$

La solution générale de l'équation (I) s'écrit donc dans ce cas

$$y = y_0 + y_p = \lambda_1 e^{\left(m-\sqrt{m-1}\right)x} + \lambda_2 e^{\left(m+\sqrt{m-1}\right)x} + \frac{e^{mx}}{1-m}\ \ , \text{ où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>2eme cas: si $m = 1$</u>, l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet une racine double $r_1 = r_2 = r =$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0 = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^x, \ \text{ où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On a $f(x) = e^{mx} = e^x$ et 1 est une racine double de l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$, donc on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p = ax^2e^x$, où $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans (I), on obtient

$$2a = 1\,,\ \text{donc}\ a = \frac{1}{2}\ \text{ et }\ y_p = \frac{x^2e^x}{2}.$$

La solution générale de (I) est donnée, dans ce cas, par

$$y = y_0 + y_p = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^x + \frac{x^2e^x}{2}, \quad \text{où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>3eme cas: si $m < 1$</u>, dans ce cas, l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = m - i\sqrt{1-m}$ et $r_2 = m + i\sqrt{1-m}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0 = e^{mx}\left[\lambda_1\cos(\sqrt{1-m}\,.x) + \lambda_2\sin(\sqrt{1-m}\,.x)\right], \quad \text{où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On a $f(x) = e^{mx}$ et comme $\varphi(m \pm i.0) \neq 0$, on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p = ae^{mx}$, où $a \in \mathbb{R}$. Un calcul similaire au cas $m > 1$ donne

$$a = \frac{1}{1-m}\ \text{ et }\ y_p = \frac{e^{mx}}{1-m}.$$

La solution générale de l'équation (I) s'écrit donc dans ce cas

$$y = y_0 + y_p = e^{mx}\left[\lambda_1\cos(\sqrt{1-m}\,.x) + \lambda_2\sin(\sqrt{1-m}\,.x)\right] + \frac{e^{mx}}{1-m}\ \ , \text{ où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.

Le domaine de définition de I est

$$D(I) = \mathbb{R} \setminus \left(\{\pi + 2k\pi\ ,k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$

Posons

$$\omega(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)\,dx}{1+\cos(x)}.$$

Pour tout $x \in D(I)$, on a $\omega(-x) = \omega(x)$, donc d'après les règles de Bioche, on pose $t = \cos(x)$, donc $dt = -\sin(x)dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin(x)\,dx}{\cos(x)(1+\cos(x))} = \int \frac{-dt}{t(1+t)} = -\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dx \\ &= \ln|1+t| - \ln|t| + C = \ln(1+\cos(x)) - \ln|\cos(x)| + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia - Marrakech

Année Universitaire 2018-2019
Département de Mathématiques
Filière : Mathématiques - SMIA-S2

Module d'Analyse II
Contrôle final - Durée 2h
(Samedi 01 juin 2019)

Exercice 1. (Questions de cours) (3 points)

1) Rappeler la définition d'une subdivision d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
2) Enoncer le premier critère d'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction f sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
3) Rappeler la première formule de la moyenne.

Exercice 2. (4 points)

1) Montrer, à partir de la définition, que si φ est une fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors la fonction $\psi : x \longmapsto \psi(x) = \varphi(-x)$ est en escalier sur $[-b, -a]$ et que
$$\int_{-b}^{-a} \psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$
2) En déduire que si f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $g : x \longmapsto g(x) = f(-x)$ est Riemann-intégrable sur $[-b, -a]$ et que
$$\int_{-b}^{-a} g(x)\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. (4 points)

Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite reglée si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$| f(x) - \varphi(x) | < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$
1) Démontrer que toute fonction reglée sur $[a, b]$ est Riemann- intégrable sur $[a, b]$.
2) En déduire que toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann- intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 4. (3 points)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que
$$0 \leq f(x) \leq K \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \ \ \forall x \in [0, +\infty[.$$
1) Montrer que la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \mathrm{e}^{-Kx} \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2) En déduire que $f(x) = 0, \ \forall x \in [0, +\infty[$.

Exercice 5. (4 points)

Résoudre l'équation différentielle du second ordre
$$y'' - 2(m-2)y' + (m^2 - 3m)y = \mathrm{e}^{(m-2)x} \quad ,$$
où m est un paramètre réel.

Exercice 6. (2 points)

Calculer la primitive suivante

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)\,(2+\sin(x))}.$$

1/2	**1/2**	**1/2**
2/2	**2/2**	**2/2**
1/2	**1/2**	**1/2**
2/2	**2/2**	**2/2**

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Corrigé du contrôle final d'Analyse II - juin 2019

Pr. My Hicham LALAOUI RHALI

Exercice 1.

1) On appelle subdivision d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, toute suite finie $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ et strictement croissante de points de $[a, b]$, de premier terme $x_0 = a$ et de dernier terme $x_n = b$.

2) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant:

$(i)\, \varphi_n \leq f \leq \psi_n$, sur $[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $(ii)\, \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\mathrm{d}x = 0.$

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

3) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ telles que $g(x) \geq 0\, , \forall x \in [a, b]$.

Posons

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Alors il existe $\alpha \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

De plus, si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et soit $(d) = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ une subdivisionde de $[a, b]$ telle que $\varphi(x) = \alpha_k = \text{cte}\, , \forall x \in]x_{k-1}, x_k[, k = 1, 2, .., n.$

Posons

$$y_k = -x_{n-k}\, , \forall k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on a: $x_{n-k} < x_{n-k+1}$, ce qui entraine alors que

$$y_{k-1} = -x_{n-k+1} < y_k = -x_{n-k}.$$

$(D) = (y_0 = -b, y_1, ..., y_n = -a)$ étant une suite finie et strictement croissante de points de $[-b, -a]$, de premier terme $y_0 = -b$ et de dernier terme $y_n = -a$, donc (D) est une subdivision de $[-b, -a]$. De plus, si $x \in]y_{k-1}, y_k[=] - x_{n-k+1}, -x_{n-k}[$, alors $-x \in]x_{n-k}, x_{n-k+1}[$, ce qui implique que $\psi(x) = \varphi(-x) = \alpha_{n-k+1} = \text{cte}\, ,$ $\forall x \in]y_{k-1}, y_k[, k = 1, 2, .., n.$ Ainsi, ψ est une fonction en escalier sur $[-b, -a]$ et on a alors

$$
\begin{aligned}
\int_{-b}^{-a} \psi(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})\alpha_{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_{n-k+1} - x_{n-k})\alpha_{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\alpha_k \\
&= \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

2) Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et donc g est bornée sur $[-b,-a]$. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant:

$$(i)\, \varphi_n \leq f \leq \psi_n\,,\ \text{sur}\,[a,b]\,,\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } (ii) \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pour tout $x \in [-b,-a]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(-x) \text{ et } \Psi_n(x) = \psi_n(-x).$$

Il vient de 1) que $(\Phi_n)_n$ et $(\Psi_n)_n$ sont bien deux suites fonctions en escalier sur $[-b,-a]$. De plus, pour tout $x \in [-b,-a]$, ona: $-x \in [a,b]$, ce qui entraine que

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(-x) \leq f(-x) = g(x) \leq \psi_n(-x) = \Psi_n(x)\,,\forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-b}^{-a} (\Psi_n(x) - \Phi_n(x))\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-b}^{-a} (\psi_n(-x) - \varphi_n(-x))\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\,\mathrm{d}x\ ,\ \ (\text{d'aprèrs}\ \ 1)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Il vient alors du critère 1 que la fonction g est Riemann-intégrable sur $[-b,-a]$ et que

$$
\begin{aligned}
\int_{-b}^{-a} g(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{-b}^{-a} \Phi_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\mathrm{d}x\ ,\ \ (\text{d'aprèrs}\ \ 1)) \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est reglée sur $[a,b]$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\mid f(x) - \varphi(x) \mid < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Posons

$$\Phi(x) = \varphi(x) \text{ et } \Psi(x) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \forall x \in [a,b].$$

Alors Φ et Ψ sont bien deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant

$$| f - \Phi | < \Psi, \quad \text{sur } [a,b] \text{ et } \int_a^b \Psi(x)\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Le critère 3 nous permet donc de conclure que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

2) Il suffit de prouver que toute fonction continue sur $[a,b]$ esr réglée. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Si f est continue sur $[a,b]$, alors elle est uniformément continue sur $[a,b]$ (d'aprés le théorème de Heine), il existe alors $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x, y \in [a,b]$ vérifiant $| x - y | < \eta_\varepsilon$, on ait $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$.
Soit $(d) = (x_0 = a, x_1, ..., x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\delta(d) < \eta_\varepsilon$.
Posons

$$\varphi(x) = f(x_k), \forall x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, ...n.$$

Alors φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, de plus si $x \in [a,b]$, il existe $k \in \{1, 2, ...n\}$ tel que $x \in [x_{k-1}, x_{k-1}]$ et donc $| x - x_k | \leq | x_k - x_{k-1} | < \eta_\varepsilon$, ce qui entraine que $| f(x) - \varphi(x) | = | f(x) - f(x_k) | < \varepsilon$. Ainsi, la fonction f est réglée, donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 4.

1) Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, alors la fonction $G : x \longmapsto G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur sur $[0, +\infty[$ et on a $G'(x) = f(x), \forall x \in [0, +\infty[$. D'autre part, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-Kx}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, il vient alors que la fonction $F : x \longmapsto F(x) = \mathrm{e}^{-Kx} \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$F'(x) = -K\mathrm{e}^{-Kx} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-Kx} f(x) = \mathrm{e}^{-Kx} \left(f(x) - K \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right),$$

pour tout $x \in [0, +\infty[$.

2) Par hypothèse, on a

$$0 \leq f(x) \leq K \int_a^b f(t)\mathrm{d}t), \forall x \in [0, +\infty[, \qquad \text{(E)},$$

ce qui implique alors que

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-Kx} \left(f(x) - K \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right) \leq 0.$$

On déduit alors que F est décroissante sur $[0, +\infty[$, et donc que

$$F(x) \leq F(0) = 0\,, \ \forall x \in [0, +\infty[.$$

Comme de plus $F(x) \geq 0\,, \ \forall x \in [0, +\infty[$, alors $F(x) = 0\,, \ \forall x \in [0, +\infty[$. Il vient alors des inégalités (E) que $f(x) = 0\,, \ \forall x \in [0, +\infty[$.

Exercice 5.

$$y'' - 2(m-2)y' + (m^2 - 3m)y = \mathrm{e}^{(m-2)x} \ , \qquad \text{(I)}$$

L'équation sans second membre assocée à (I) est

$$y'' - 2(m-2)y' + (m^2 - 3m)y = 0 \ , \qquad \text{(II)},$$

dont l'équation caractéristique s'ecrit

$$\varphi(r) = r^2 - 2(m-2)r + (m^2 - 3m) = 0.$$

On a

$$\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 3m) = 4 - m.$$

Trois cas sont possibles.

<u>1er cas: si $m < 4$</u>, l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = (m-2) - \sqrt{4-m}$ et $r_2 = (m-2) + \sqrt{4-m}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0 = \lambda_1 \mathrm{e}^{\left((m-2)-\sqrt{4-m}\right)x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\left((m-2)+\sqrt{4-m}\right)x}\ ,\ \text{où}\ \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On a: $f(x) = \mathrm{e}^{(m-2)x} P_0$ où $P_0(x) = 1$ et comme $\varphi(m-2) \neq 0$, on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p = \mathrm{e}^{(m-2)x} Q_0(x)$, où Q_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire, on cherche y_p sous la forme $y_p = \lambda \mathrm{e}^{(m-2)x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. En reportant dans (I), on obtient

$$\lambda(m-4) = 1\ \ ,\text{d'où}\ \lambda = \frac{1}{m-4}\ \ \text{et}\ \ y_p = \frac{\mathrm{e}^{(m-2)x}}{m-4}.$$

La solution générale de l'équation (I) s'écrit donc dans ce cas

$$y = y_0 + y_p = \lambda_1 \mathrm{e}^{\left((m-2)-\sqrt{4-m}\right)x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\left((m-2)+\sqrt{4-m}\right)x} + \frac{\mathrm{e}^{(m-2)x}}{m-4}\ ,\ \text{où}\ \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>2eme cas: si $m = 4$</u>, l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet une racine double $r_1 = r_2 = r = (m-2) = 2$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0 = (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{2x}\ ,\ \text{où}\ \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On a: $f(x) = \mathrm{e}^{(m-2)x} = \mathrm{e}^{2x} P_0(x)$, où $P_0(x) = 1$ et et 2 est une racine double de l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$, donc on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p = x^2 \mathrm{e}^{2x} Q_0(x)$, où Q_0 est un polynôme de degré 0, c'est à dire, on cherche y_p sous la forme $y_p = a x^2 \mathrm{e}^{2x}$, où $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans (I), on obtient

$$2a = 1\ ,\ \text{donc}\ \ a = \frac{1}{2}\ \ \text{et}\ \ y_p = \frac{x^2 \mathrm{e}^{2x}}{2}.$$

La solution générale de (I) est donnée, dans ce cas, par

$$y = y_0 + y_p = (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{2x} + \frac{x^2 \mathrm{e}^{2x}}{2}\ ,\ \text{où}\ \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>3eme cas: si $m > 4$</u>, dans ce cas, l'équation caractéristique $\varphi(r) = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = (m-2) - i\sqrt{m-4}$ et $r_2 = (m-2) + i\sqrt{m-4}$ et la solution générale de l'équation sans second membre (II) s'ecrit

$$y_0 = \mathrm{e}^{(m-2)x}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{m-4}\,.x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{m-4}\,.x)\right]\ ,\ \text{où}\ \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

On a: $f(x) = \mathrm{e}^{(m-2)x}$ et comme $\varphi(m-2) \neq 0$, on cherche une solution particulère de (I) sous la forme $y_p = \lambda \mathrm{e}^{(m-1)x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Un calcul similaire au cas $m < 4$ donne

$$a = \frac{1}{m-4}\ \ \text{et}\ \ y_p = \frac{\mathrm{e}^{mx}}{m-4}.$$

La solution générale de l'équation (I) s'écrit donc dans ce cas

$$y_0 = \mathrm{e}^{(m-2)x}\left[\lambda_1 \cos(\sqrt{m-4}\,.x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{m-4}\,.x)\right] + \frac{\mathrm{e}^{mx}}{m-4}\ ,\ \text{où } \lambda_1\,,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)\,(1+\sin(x))}.$$

Le domaine de définition de I est

$$D(I) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Posons

$$\omega(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)\,(1+\sin(x))}.$$

Pour tout $x \in D(I)$, on a $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, donc d'après les règles de Bioche, on pose $t = \sin(x)$, donc $\mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x$. On obtient alors

$$I = \int \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\cos(x)\,(1+\sin(x))} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(2+t)}.$$

Par une simple décomposition en éléments simples, on trouve

$$F = \frac{1}{(1-t^2)(2+t)} = \frac{1}{6(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{1}{3(2+t)}.$$

Il vient alors que

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t}$$

$$= \frac{-1}{6}\ln|1-t| + \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{3}\ln|2+t| + C,\ \text{où}\, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{-1}{6}\ln(1-\sin(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin(x)) - \frac{1}{3}\ln(2+\sin(t)) + C,\ \text{où}\, C \in \mathbb{R}.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019/2020
Filière : SMIA-S2
Module d'Analyse II

Contrôle Final - Durée 1h30
(Jeudi 24 Septembre 2020)

Exercice 1 : Questions de Cours

1) Montrer que toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante est Riemann intégrable.

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable et F la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Montrer que F est continue sur $[a,b]$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $\qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$

1) Montrer que f est définie sur $]1,+\infty[$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et donner $f'(x)$ pour $x > 1$.

3) Montrer pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2.$

4) En écrivant $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{t}{t\ln t}$, et en utilisant la formule de la moyenne, calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

5) On prolonge f par continuité en 1, et on note $\widetilde{f}$ ce prolongement. Montrer que, pour tout $x > 1$ on a

$$\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(1) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt.$$

6) En utilisant la formule de la moyenne, déduire que $\widetilde{f}$ est dérivable en 1 et calculer sa dérivée.

7) Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

Exercice 3 :

Calculer les deux primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{2+\sin x}dx.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Module : Analyse II
24 Septembre 2020

Le candidat doit inscrire, ci-dessous, toutes les informations demandées.

Nom : .... Centre d'examen : ....

Prénom : .... Numéro de table : ....

Numéro apogée : ....

20

Contrôle Final - Durée 1h30

NB : *Il sera tenu compte de la présentation, de la lisibilité et de la rédaction. Les calculatrices, les téléphones portables et tous les documents sont interdits.*

Exercice 1 : Questions de Cours

1) Montrer que toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ croissante est Riemann intégrable.

* $\forall x \in [a,b]$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f$ bornée

* Soit $(d) = (x_k)$, $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k = 0, .., n$ la subdivision régulière de $[a,b]$.

On pose $\varphi_n(x) = f(x_{k-1})$ et $\psi_n(x) = f(x_k)$ $\forall x \in [x_{k-1}, x_k[$
et $\varphi_n(b) = \psi_n(b) = f(b)$

Alors (φ_n) et (ψ_n) sont en escalier vérifiant $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$.

De plus

$$\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a) \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable et F la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Montrer que F est continue sur $[a,b]$.

Soit $x_0 \in [a,b]$

Alors $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$

$= \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t) \times 1\, dt$

D'après la première formule de la moyenne,

$\exists\, c_x \in [x_0, x] \,/\, F(x) - F(x_0) = f(c_x) \cdot \int_{x_0}^x 1\, dt$

$= f(c_x) \cdot (x - x_0)$.

Soit $M \,/\, |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [a,b]$

Alors $|F(x) - F(x_0)| \leq M |x - x_0|$. cqfd

Exercice 2 : Soit la fonction f définie par : $\quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1) Montrer que f est définie sur $]1, +\infty[$.

$\forall x > 1$, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue, donc intégrable sur $[x, x^2]$

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et donner $f'(x)$ pour $x > 1$.

$t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$, donc admet une primitive sur $]1, +\infty[$. On la note G :

$G'(t) = f(t) \quad \forall t > 1$ (en particulier G est C^1 sur $]1, +\infty[$)

Alors

$$f(x) = G(x^2) - G(x)$$

Donc f est C^1 comme composée d'applications C^1

De plus

$$f'(x) = G'(x^2) \times 2x - G'(x)$$

$$= \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

3) Montrer pour tout $x > 1$, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2$.

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} \frac{(\ln t)'}{\ln t}\,dt$$

$$= \Big[\ln(\ln t)\Big]_x^{x^2} = \ln(\ln x^2) - \ln \ln x$$

$$= \ln(2\ln x) - \ln(\ln x)$$

$$= \ln \frac{2\ln x}{\ln x} = \ln 2 .$$

4) En écrivant $\frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t\ln t}$ et en utilisant la formule de la moyenne, calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2} t \times \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= c_x \cdot \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \quad \left(c_x \in [x, x^2] \right)$$

1

$$= c_x \cdot \ln 2 .$$

Quand $x \to 1$, $c_x \to 1$ car $c_x \in [x, x^2]$

donc $\quad f(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} \ln 2 .$

Nom :	Prénom : ....
Numéro apogée :	Numéro de table : ....

5) On prolonge f par continuité en 1, et on note $\tilde{f}$ ce prolongement. Montrer que, pour tout $x > 1$ on a

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(1) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt.$$

$\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x > 1$ et $\tilde{f}(1) = \ln 2$

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(1) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt.$$

6) En utilisant la formule de la moyenne, déduire que $\tilde{f}$ est dérivable en 1 et calculer sa dérivée.

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \int_x^{x^2} \frac{t-1}{\ln t} \times \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{c_x - 1}{\ln c_x} \cdot \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \, dt \qquad \left(c_x \in [x, x^2] \right)$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{c_x-1}{\ln c_x} \times \left(\ln x^2 - \ln x \right) = \frac{1}{x-1} \times \frac{c_x - 1}{\ln c_x} \times \ln x$$

$$= \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{c_x - 1}{\ln c_x} \xrightarrow{x \to 1} 1 \times 1 = 1$$

7) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

$$\tilde{f}'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \text{ si } x > 1.$$

$$\tilde{f}'(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 1 = \tilde{f}'(1)$$

donc f est $C1$ en 1, donc

sur $[1, +\infty[$

Exercice 3 :

Calculer les deux primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx.$$

$*$ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx \underset{(t=\sin x)}{=\!=\!=} \int \frac{dt}{2+t} = \ln(2+t)+c$

$(2+\sin x)' = \cos x$ $\qquad = \ln(2+\sin x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

$*$ Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx$, on pose $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

donc $\sin t = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

Alors

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(1+t^2)(1+t+t^2)}\,dt$$

$$f(t) = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t+t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{1+t+t^2}$$

$t \to +\infty \qquad 0 = a+c \Rightarrow c = -a$

$t = 0 \qquad 0 = b+d \Rightarrow d = -b$

$$\Rightarrow f(t) = (at+b)\left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+t+1}\right]$$

$$= (at+b)\ \frac{1}{(t^2+1)(t^2+t+1)}$$

$\Rightarrow$ $a=0$ et $b=2$

$$f(t) = 2\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+t+1}\right)$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{Arctg} t + C, \quad C\in\mathbb{R}$

- $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}\,dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right]}\,dt$$

$$\underset{u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{=\!=\!=} \frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2+1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} u + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\sin x}{2+\sin x}\,dx = 2\left[\operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)\right] + C$$

$C\in\mathbb{R}$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019/2020
Filière : SMIA-S2
Module d'Analyse II

Contrôle de Rattrapage - Durée 1h
(Jeudi 22 Octobre 2020)

Exercice 1 :

1) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}$.

2) Soit f une fonction continue et bornée sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt = 0.$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $\qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{(\ln t)^2}$.

1) Montrer que f est définie sur $]1,+\infty[$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et donner $f'(x)$ pour $x>1$.

3) Étudier la monotonie de f sur $]1,+\infty[$.

4) En utilisant la décroissance de la fonction $t\mapsto \frac{1}{(lnt)^2}$ sur $]1,+\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5) En utilisant l'inégalité $0<\ln t\leq t-1$ pour $t\in\,]1,+\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

Exercice 3 :

Déterminer la primitive suivante :

$$\int\frac{x^3+x^2-x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx.$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Filière SMIA-Semestre 2
Module : Analyse II
22 Octobre 2020

Corrigé du contrôle de Rattrapage
Analyse II (22 Octobre 2020)

Exercice 1 :

1) **Calculer la limite** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}$.

On va se ramener à une somme de Riemann en utilisant la fonction logarithme.

On pose $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}$ et $v_n = \ln u_n$ et on écrit donc

$$\begin{aligned}
v_n = &\ \ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right)\\
= &\ \ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln n(1+k/n)\right]\\
= &\ -\ln n + \frac{1}{n}\left[n\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln(1+k/n)\right]\\
= &\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+k/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k/n),
\end{aligned}$$

où $f\ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto \ln(1+x)$.

Puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$ et par le théorème des sommes de Riemann, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx = \Big[(1+x)\ln(1+x)\ln(1+x) - (1+x)\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

(L'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties)

Par le théorème de composition des limites, on trouve donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln 2-1}.$$

2) **Soit f une fonction continue et bornée sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Montrer que**

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt = 0.$$

Soit $x>1$. Puisque les deux fonctions f et $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues sur $[1,+\infty[$ en particulier sur $[x,x+1]$ et de plus g est positive, alors d'après la première formule de la moyenne il existe un réel

$c_x \in [x, x+1]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} f(t) \times \frac{1}{t} dt = & \quad f(c_x) \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt = f(c_x) \big[\ln t\big]_x^{x+1} \\ = & \quad f(c_x)\big(\ln(x+1) - \ln x\big) = f(c_x) \ln\left(\tfrac{x+1}{x}\right).\end{aligned}$$

Comme f est bornée, alors il existe une constante $M \geq 1$ telle que $|f(t)| \leq M \quad \forall t \in [1, \infty[$, alors

$$\left| \int_x^{x+1} f(t)/t dt \right| \leq M \ln\big(1 + 1/x\big) \longrightarrow 0, \text{ quand } x \mapsto +\infty.$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t} dt = 0.$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par: $\qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}.$

1) **Montrer que f est définie sur $]1, +\infty[$.**

Pour tout $x > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$ est continue, donc intégrable sur $[x, x^2]$.
Donc la fonction f est bien définie sur $]1, +\infty[$.

2) **Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et donner $f'(x)$ pour $x > 1$.**

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$ est continue sur $]1, +\infty[$, donc elle admet une primitive notée G telle que $G'(t) = \dfrac{1}{(\ln t)^2} \quad \forall t > 1$.
Alors

$$f(x) = G(x^2) - G(x).$$

Puisque G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et par composition, alors f est C^1 sur $]1, +\infty[$, et que sa dérivée donnée par

$$f'(x) = \quad 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{(\ln x^2)^2} - \frac{1}{(\ln x)^2} = \tfrac{1}{2} \frac{x-2}{(\ln x)^2},$$

pour tout $x > 1$.

3) **Étudier la monotonie de f sur $]1, +\infty[$.**

D'après la question 2), on a $f'(x) = \dfrac{x-2}{2(\ln x)^2}$.
Comme $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, alors on en déduit que f est décroissante sur $]1, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

4) **En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$ sur $]1, +\infty[$, déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.**

Pour $x > 1$, on a $x \leq x^2$. De plus, la fonction $t \mapsto 1/(\ln t)^2$ est décroissante sur l'intervalle $[x, x^2]$.

Donc pour tout $t \in [x, x^2]$, on a

$$\frac{1}{(\ln x^2)^2} \leq \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

En intègrant cette inégalité entre x et x^2, et on trouve

$$\frac{x^2 - x}{4(\ln x)^2} \leq f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln t)^2} dt \leq \frac{x^2 - x}{(\ln x)^2}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{4(\ln x)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4(\ln x)^2} = +\infty$ (Par croissance comparée du logarithme et des fonctions puissance), alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

5) **En utilisant l'inégalité $0 < \ln t \leq t - 1$ pour $t \in]1, +\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.**

D'après l'inégalité $0 < \ln t \leq t - 1$ pour $t > 0$, on a

$$\frac{1}{(t-1)^2} \leq \frac{1}{(\ln t)^2}.$$

Ce qui implique que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{(t-1)^2} dt = \left[-\frac{1}{(t-1)} \right]_x^{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{(\ln t)^2} dt = f(x).$$

Donc

$$f(x) \geq \left[-\frac{1}{(t-1)} \right]_x^{x^2} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x^2-1)} = \frac{x}{(x^-1)}.$$

Puisque $\lim_{x \to +1} x/(x^2 - 1) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +1} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 : Déterminer la primitive suivante : $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx$.

On a $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, donc la fraction rationnelle se décompose en éléments simples sous la forme

$$F(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

En multipliant par $x - 1$ et faisant $x = 1$, puis multipliant par $x + 1$ et faisant $x = -1$, on trouve que $a = 1$ et $b = -1$ et on en déduit aussi que $c = 1$ et $d = -1$. Donc

$$F(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\
&= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \ln\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$