

Département de Mathématiques

Filière SMIA :

Exercices avec Corrigés Analyse 1

Exercice 0.1. Soient les quatre assertions suivantes :

- (a) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0,$
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0,$
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0,$
- (d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 0.2. Écrire la négation des phrases suivantes :

- (1) $\forall x, \exists n : x \leq n.$
- (2) $\exists M : \forall n, |u_n| \leq M.$
- (3) $\forall x, \forall y, xy = yx.$
- (4) $\forall x, \exists y : yxy^{-1} = x.$
- (5) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n| < \epsilon.$
- (6) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \alpha \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exercice 0.3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$
- $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$

Exercice 0.4. On définit les cinq ensembles suivants :

- $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\},$
- $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| < 1\},$
- $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\},$
- $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > -1\},$
- $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < 1\}.$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de l'équivalence : $(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$

Série2

Exercice 0.5.

- 1- Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \notin \mathbb{Q}$.
- 2- Soient r et r' deux rationnels tels que $r < r'$. Montrer que $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.
- 3- En déduire qu'entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel.

Exercice 0.6. Montrer que $x = 31.72\ 356\ 356\ 356\ 356\ldots$ est un rationnel.

Exercice 0.7. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[1, 2] \cap \mathbb{Q}, \quad [1, 2[\cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Exercice 0.8. Soit I le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par $I = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2 \right\}$.

- 1- Montrer que I est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.
- 2- Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ces intervalles.

Exercice 0.9. Soient A et B deux parties bornées de \mathbb{R} . On note $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$.

- 1- Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
- 2- Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 0.10. Soient $a > 0$ et $b \geq 0$ deux réels.

- 1- Montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} : a n > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p .
- 2- On pose $r = b - (p - 1)a$. Montrer que $r < a$.
- 3- En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, x[$ tel que $y = qx + r$. Montrer que ce couple est unique.

Exercice 0.11. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \text{ et } x^2 < 2\}$.

- 1- Montrer que A est une partie non vide et majorée dans \mathbb{Q} .
- 2- Soit $r \in A$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(2 - r^2) > 2r + 1$. En déduire que $r' = r + \frac{1}{n} \in A$.
- 3- Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A . Montrer que $M > \sqrt{2}$.
- 4- En déduire que $\sup A \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 0.12. Soit u_n une suite bornée. Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \inf\{u_k; k \geq n\}$ et $w_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$.

Vérifier que v_n est croissante majorée et que w_n est décroissante minorée.

Exercice 0.13. Soit u_n la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^{2n+1}}$.

- 1- Montrer que u_n est une suite géométrique et déterminer sa raison r .
- 2- Étudier la monotonie et la convergence de la suite u_n .

Exercice 0.14. Soient u_n une suite réelle et v_n la suite dont le terme général est défini par :

$$v_0 = 0, \text{ et } \forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

- 1- En utilisant la définition de la convergence, montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$.
- 2- Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.
- 3- On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 0.15. Soit a_n la suite définie par $a_0 \in]1, 2[$ et $a_{n+1} = \frac{4a_n + 2}{a_n + 3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1- Montrer que a_n est une suite croissante majorée.
- 2- En déduire que a_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 0.16. Pour chacune des suites suivantes étudier le sens de variation (croissance, décroissance ou monotonie) et la convergence.

(a) $u_0 = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$; (b) $v_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$; (c) $w_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2 + 1}$.

Exercice 0.17. Soient u_n et v_n les deux suites définies par :

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k+n^2}.$$

- 1- Montrer que la suite u_n est décroissante minorée. Déterminer sa limite.
- 2- On considère la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
- 3- En déduire que u_n converge et donner sa limite.

Exercice 0.18. Soit $q \geq 2$ un entier et soit u_n la suite dont le terme général est donné par $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

- 1- Vérifier que pour tout entier n , $u_{n+q} = u_n$.
- 2- Calculer u_{nq} et u_{nq+1} . En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 0.19. Soit la suite u_n définie par : $u_0 = a \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}$.

- 1- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
- 2- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \frac{n}{2}$. En déduire la limite de u_n .

Exercice 0.20. On considère les suites réelles positifs u_n et v_n définies par :

$$u_0 = a > 0, v_0 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \text{ On suppose que } a < b.$$

- 1- Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.
- 2- Montrer que u_n et v_n sont convergentes et déterminer leur limite.

Série 4

Exercice 0.21. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x - 9} - x \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{1}{|x|} \right\rfloor \right).$$

Exercice 0.22. Soit la fonction $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu'elle est injective. Déterminer la fonction inverse de f .

Exercice 0.23. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

Exercice 0.24. Soit f une fonction continue sur $[a, \infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Prouver que f est bornée sur $[a, \infty[$.

Exercice 0.25. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite finie ℓ quand x tend vers ∞ . Démontrez que f est constante.

Exercice 0.26. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et x_0 un point où $f(x_0) > g(x_0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f est strictement plus grande que g .

Exercice 0.27. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$ et on définit la suite récurrente u_n par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

- 1- Montrer que la fonction $g(x) = x^3 - 3x + 1$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $[0, \frac{1}{2}]$.
- 2- Déduire que x_0 est l'unique solution dans $[0, \frac{1}{2}]$ de l'équation $f(x) = x$ et que $\forall x \in [0, x_0], f(x) \geq x$.
- 3- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq x_0$.
- 4- Étudier la monotonie de la suite u_n . Est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

Exercice 0.28. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 0.29. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a, b]$ et telles que $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} g(x)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 0.30. Considérons la fonction $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $|f(x_n) - f(y_n)|$. En déduire que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 0.31. Montrer que l'application $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

(Indication : On pourra montrer d'abord que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ on a $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|}$.)

Exercice 0.32. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k f(\frac{k}{n}) = 0$.

(Indication : Utiliser l'uniforme continuité de f et considérer le cas n pair et le cas n impair.)

Exercice 0.33. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient x_n des réels dans $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$.

Contrôle Final 2014 avec Corrigé

Soient f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, D_f son domaine de définition et A le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par : $A = \{x \in D_f : f(x) > x\}$.

- 1- Déterminer D_f .
- 2- Montrer que A admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).
- 3- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) > x$.
- 4- Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = a \sin x + 1$, où $a \in]-1, 1[$ est une constante.

- 1- Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = x_0$.
- 2- Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$, tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ on a : $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x - y|$.

On considère la suite x_n définie par $x_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

- 3- Montrer que, $\forall n \geq 1$, $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha|x_n - x_0|$.
- 4- En déduire que la suite x_n converge vers x_0 .

Soit g la fonction définie par $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$.

- a) Déterminer le domaine de définition de g .
- b) Vérifier que g est dérivable dans $]0, 1[$ et calculer sa dérivée dans $]0, 1[$.
- c) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{2} \arccos(2x - 1) + \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$.

\mathbb{R}^* par $h(x) = \frac{\cos x - 1}{x \cos x - \sin x}$.

- a) Étudier l'existence de la limite en 0 de la fonction h .
- b) Est-il possible de prolonger h par continuité en 0 ?

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$.

Corrigé du CF_Analyse1_S1_Automne2014

Exercice 1 : On a $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

- 1- La fonction f est bien définie si et seulement si, $x(1-x) \geq 0$. Or $x(1-x) \geq 0 \iff x \in [0, 1]$. D'où $D_f = [0, 1]$.
- 2- On a $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\sqrt{3} > \frac{1}{4}$. Donc $A \neq \emptyset$. De plus $A \subset D_f$ est majorée par 1. En tant que partie de \mathbb{R} non vide et majorée, A admet donc une borne supérieure.
- 3- On a
$$\begin{cases} x \in [0, 1] \\ \sqrt{x(1-x)} > x \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x(1-x) > x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x(1-2x) > 0 \end{cases} \iff x \in]0, \frac{1}{2}[.$$
- 4- D'après la question précédente, on a $A =]0, \frac{1}{2}[$, donc $\sup A = \frac{1}{2}$. Si A avait un plus grand élément, il serait égal à $\sup A = \frac{1}{2}$. Or $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} \notin A$. Donc A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 2 : $f(x) = a \sin x + 1$, où $a \in]-1, 1[$.

- 1- On considère la fonction $g : x \mapsto a \sin x + 1 - x$. C'est une fonction continue sur \mathbb{R} et on a $g(0) = 1 > 0$ et $g(3) = a \sin 3 + 1 - 3 < 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x_0 \in]1, 3[$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.
- 2- La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} donc, en particulier, dérivable sur tout intervalle d'extrémités x et y . Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a par le théorème des accroissements finis,

$$\text{il existe } c \text{ compris entre } x \text{ et } y \text{ tel que : } f(x) - f(y) = (x - y) \times f'(c) = (x - y) \times a \cos(c).$$

Et comme $\sup_{c \in \mathbb{R}} |a \cos(c)| \leq |a|$, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |a \cos(c)| \leq |a| |x - y|, \quad \text{avec } \alpha = |a|.$$

- 3- Pour tout $n \geq 1$ on a, d'après l'inégalité précédente, $|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n) - f(x_0)| \leq \alpha |x_n - x_0|$.
- 4- En appliquant successivement l'inégalité qu'on vient d'établir, on a :

$$|x_n - x_0| \leq \alpha |x_{n-1} - x_0| \leq \alpha^2 |x_{n-2} - x_0| \leq \dots \leq \alpha^{n-1} |x_1 - x_0|.$$

D'où $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n-1}$. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0$ ce qui est équivalent à $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Exercice 3 : On a $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$.

- a) La fonction g est bien définie si, et seulement si, $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \in [-1, 1]$. On en déduit que $D_g = [0, 1]$.
 b) La fonction g est la composée de deux fonctions dérivables sur $]0, 1[$ donc elle est dérivable sur $]0, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) = (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

- c) Posons $h(x) = \frac{1}{2} \arccos(2x - 1) + \arcsin(\sqrt{x})$, pour $x \in]0, 1[$. Cette fonction est bien définie et est dérivable. Pour montrer qu'elle est constante sur $]0, 1[$, il suffit de montrer que sa dérivée est partout nulle. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{2} \arccos(2x - 1) \right)' + \left(\arcsin(\sqrt{x}) \right)' \\ &= \frac{1}{2} \times (2x - 1)' \times (\arccos)'(2x - 1) + (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{-1}{\sqrt{4x(1-x)}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, 1[, \quad h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \arccos 0 + \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 : Posons $f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = x \cos x - \sin x$. Ces deux fonctions sont dérivables sur \mathbb{R} (et donc en particulier au voisinage de 0) et on a $f(0) = g(0) = 0$. En appliquant la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x - x \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x \sin x} = -\infty.$$

De la même manière on obtient que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. On en conclut que la fonction h n'admet pas de limite en 0.

Elle n'admet donc pas de prolongement par continuité en 0.

Exercice 5 : Remarquons que $x \ln \frac{1+x}{x} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$. En posant $u = \frac{1}{x}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{1+x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u - 0} = (\ln(1+x))' \Big|_{x=0} = 1.$$

Corrigé Série 1

Exercice 1 : 1.(a) est fausse il suffit de considérer la négation, qui est $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = -1 < 0$.

2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$.

3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$.

4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y^2 \leq x$.

Exercice 2 :

(1) $\exists x, \forall n : x > n$.

(2) $\exists M : \forall n, |u_n| > M$

(3) $\exists x, \exists y \ xy \neq yx$.

(4) $\exists x, \forall y : xyx^{-1} \neq x$.

(5) $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N |u_n| \geq \epsilon$.

(6) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0 : \exists f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \epsilon$.

Exercice 3 : Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \in f^{-1}(F \setminus A)$ alors $f(B) \in F \setminus A$ et $B \notin f^{-1}(A)$ soit $B \in E \setminus f^{-1}(A)$.

Réciproquement $B \in E \setminus f^{-1}(A)$ alors $B \notin f^{-1}(A)$ donc $f(B) \notin A$ soit $f(B) \in F \setminus A$ et $B \in f^{-1}(F \setminus A)$.

Exercice 4 : A_1 et A_4 définissent deux demi-plans (on trace les droites $x + y = 1$ et $x + y = -1$, A_1 correspond au demi-plan inférieur par rapport à la droite $x + y = 1$ et A_4 correspond au demi plan supérieur par rapport à la droite $x + y = -1$. Par l'ensemble A_2 qui correspond à l'intersection de A_1 et A_4 . A_2 est défini par les inéquations $x + y < 1$ et $x + y > -1$. Ces deux inéquations sont équivalentes à $|x + y| < 1$. Pour obtenir A_5 on raisonne comme pour A_2 et on trace donc les droites $x - y = 1$ et $x - y = -1$. L'ensemble A_5 sera l'intersection du demi-plan inférieur défini par la droite $x - y = 1$ et du demi-plan supérieur défini par la droite $x - y = -1$.

Pour représenter l'ensemble A_3 on distingue 4 cas :

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $x + y < 1$.

Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $x - y < 1$.

Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $-x + y < 1$.

Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $-x - y < 1$.

Alors A_3 est l'intersection de A_2 et A_5 .

Corrigé Série 2

Exercice 1 :

- 1) Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, supposons que $x + r = r' \in \mathbb{Q}$ alors $x = r - r' \in \mathbb{Q}$ absurde. Soit $r \neq 0$, supposons que $rx = r' \in \mathbb{Q}$ alors $x = \frac{r'}{r} \in \mathbb{Q}$ absurde.
- 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ et $r' - r \in \mathbb{Q}$ d'après 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$. De même, $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.
On a $x - r > 0$ et $x - r' = (r' - r)(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) < 0$. Ainsi $x \in]r, r'[$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

$$10^2 x = 3172,356356356\dots$$

$$10^5 x = 3172356,356356356\dots$$

$$x(10^5 - 10^2) = 3172356 - 3172$$

$$x = \frac{3172356}{10^5 - 10^2}$$

- 1) $A = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ alors $A \subset [1, 2]$. L'ensemble des minorants de A est $] -\infty, 1]$. L'ensemble des majorants de A est $[2, \infty[$.
 $\sup(A) = 2 \in A$; 2 est le plus grand élément de A . $\inf(A) = 1 \in A$; 1 est le plus petit élément de A .
- 2) $B =]1, 2[\cap \mathbb{Q}$ alors $B \subset]1, 2[$. L'ensemble des minorants de B est $] -\infty, 1]$. L'ensemble des majorants de B est $[2, \infty[$.
 $\sup(B) = 2 \notin B$; B n'admet pas de plus grand élément. $\inf(B) = 1 \notin B$; B n'admet pas de plus petit élément.
- 3) L'ensemble des minorants de \mathbb{N} est $] -\infty, 0]$; $\inf(\mathbb{N}) = 0$ est le plus petit élément mais \mathbb{N} n'est pas majoré.
- 4) $C = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Alors C est borné car $C \subset [-1, 2]$. L'ensemble des minorants de C est $] -\infty, -1]$. L'ensemble des majorants de C est $[2, \infty[$. De plus $2 \in C$ ($n = 0$); $\sup(C) = 2$.
2 est le plus grand élément de C .
 $\inf(C) = -1$. En effet, $\forall x \in C; x \geq -1$ et d'après la propriété d'Archimède :
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$. Alors $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} < \varepsilon + (-1)$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, on a $\inf(C) = -1$.

Exercice 4 :

- 1) D'abord (*) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} > 0$ et $x \neq -1$
(*) est équivalente à $\frac{x^2 + x + 2}{x+1} > 0$, comme $x^2 + x + 2 > 0$; $\Delta < 0$, il suffit que $x + 1 > 0$ c'est à dire $x > -1$.
Il faut résoudre les inéquations (1) $\frac{x^2 + x + 2}{x+1} \geq 1$ et (2) $\frac{x^2 + x + 2}{x+1} < 2$.
(1) implique que $x \in (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[) \cap]-1, \infty[=]-1, 0] \cup [1, \infty[$.
(2) implique que $x \in]x_1, x_2[$ avec $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.
Alors $x \in I$, s'il vérifie (1) et (2), soit $x \in]x_1, 0] \cup [1, x_2[$.

- 2) $\inf(I) = x_1$ et $\sup(I) = x_1$.

Exercice 4 :

- 1) Soit $x \in A + B$ alors $\exists a \in A; b \in B$ tel que $x = a + b$ et donc $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.
- 2) $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$, comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants, on a $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$ (1).

Soit $a \in A$ fixé, pour tout $b \in B$ on a $a + b \leq \sup(A + B)$ alors $\forall b \in B; b \leq \sup(A + B) - a$. On en déduit que $\sup(B) \leq \sup(A + B) - a$.

Pour tout $a \in A$, on a $a \leq \sup(A + B) - \sup(B)$, comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, $\sup(A) \leq \sup(A + B) - \sup(B)$ d'où $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$ (2). (1) et (2) implique l'égalité.

Exercice 6 :

- 1) A est non vide car d'après la propriété d'Archimède, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b}{a} < n_0$. $A \subset \mathbb{N}$ donc A est minorée. Soit $p = \min(A)$; $p \geq 1$ (car $b \geq 0$).
- 2) $p - 1 \notin A \Rightarrow a(p - 1) \leq b$. Posons $r = b - a(p - 1) \geq 0$, $r - a = b - pa < 0$. D'où $0 \leq r < a$.
- 3) Posons $x = a$, $y = b$, $q = p - 1$, $r = y - qx$ et $0 \leq r < x$.

Unicité : comme p est le minimum de A , $q = p - 1 \in \mathbb{N}$ est unique, on en déduit unicité de r .

Exercice 7 :

- 1) A est non vide : $\frac{5}{4} \in A$.
 $x \in A \Rightarrow x > 1$ d'où $x < x^2 < 2 \in \mathbb{Q}$; donc A est une partie majorée de \mathbb{Q} .
- 2) Soit $r \in A$ alors $\frac{2 - r^2}{2r + 1} > 0$, d'après la propriété d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \frac{2 - r^2}{2r + 1} > 1$.
 $r' - r = \frac{1}{n} > 0$ d'où $r' > r > 1$. Par ailleurs, $2 - r'^2 = 2 - r^2 - \frac{2r}{n} - \frac{1}{n^2} > 2 - r^2 - \frac{2r + 1}{n} = (2 - r^2)[1 - \frac{2r + 1}{n(2 - r^2)}] < 0$. Donc $r' \notin A$.
- 3) Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A alors $M > 1$, supposons que $M < \sqrt{2}$ alors $M^2 < 2$ d'où $M \in A$. d'après 2), $M + \frac{1}{n} \in A$ ce qui est absurde. Donc $M \geq \sqrt{2}$.
- 4) $\sqrt{2}$ est un majorant de A . Or tout M qui majore A doit être supérieur à $\sqrt{2}$ et $\sup(A) \leq \sqrt{2}$, on conclut que $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé Série 3

Exercice 1 : Posons $A_n = \{u_k; k \geq n\}$. On a $A_{n+1} \subset A_n$ donc $\inf(A_{n+1}) \geq \inf(A_n)$ et $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$ d'où le résultat.

On a (u_n) est bornée alors $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n \leq M$. On a $v_n \leq u_n$ donc (v_n) est majorée par M . $w_n \geq u_n$ alors (w_n) est minorée par m .

Exercice 2 :

- 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{4}$ ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $r = \frac{e}{4}$.
- 2) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc (u_n) est décroissante. Elle est convergente car $0 < r < 1$.

Exercice 3 :

- 1) $u_n \rightarrow l$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

. On a

$$\begin{aligned} |v_n - l| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_\varepsilon+1}^n |u_k - l| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Posons $A_{N_\varepsilon} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l|$ est bornée, on a $\frac{A_{N_\varepsilon}}{n} \rightarrow 0$. Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0$ on a $\frac{A_{N_\varepsilon}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour $n \geq \max(N_\varepsilon, N_0)$ on a $|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

- 2) Posons $\beta_n = u_{n+1} - u_n$ d'après 1) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1} - u_1}{n} = l$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{n} = l$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = l$.
- 3) Posons $\alpha_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, alors d'après la question 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(l)$. d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Exercice 4 :

- 1) Considérons la fonction $f(x) = \frac{4x+2}{x+2}$ pour $x \neq -2$. Alors $x \rightarrow f(x)$ est croissante, il suffit de comparer a_0 et $f(a_0)$.
 $f(a_0) - a_0 = \frac{-(a_0 - 2)(a_0 + 1)}{a_0 + 3}$. Comme $a_0 \in]1, 2[$ et $a_n > 0$, on a $f(a_0) - a_0 > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.
- 2) Montrons que $a_n \in]1, 2[$ (*) par récurrence. On a (*) est vraie pour $n = 0$. Supposons que (*) est vraie à l'ordre n est montrons (*) pour l'ordre $n + 1$.
 $1 < a_n < 2 \implies f(1) = \frac{3}{2} < f(a_n) < f(2) = 2$ d'où le résultat.
- 3) La suite (a_n) est croissante et majorée par 2 donc convergente.

Soit $\lim u_n = l$ alors l est solution de l'équation $l = f(l)$. d'où $l^2 - l - 2 = (l - 2)(l + 1) = 0$. Alors $\lim u_n = \sup(u_n) = 2$ ($1 \leq l \leq 2$).

Exercice 5 :

- a) On a $f(x) = \sqrt{x}$ strictement croissante et $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$. Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. La limite l vérifie l'équation $l = \sqrt{l}$ soit $l^2 = l$ et $l = \sup(v_n) = 1$
- b) $f(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$. Donc la suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Donc $l = 1 = \inf(v_n)$.
- c) On $w_n > 0$, alors $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{w_n^2 + 1} < 1$ d'où (w_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente. La limite l vérifie $l = \frac{l}{l^2 + 1}$, soit $l = 0 = \inf(w_n)$.

Exercice 6 :

- 1) $u_n = 2 + \frac{1}{n} > 2$, donc (u_n) décroissante minorée par 2, $\lim u_n = 2$.
- 2,3) $w_n = v_n - u_n = \frac{-k^2}{n^2(k+n^2)}$. Or $\frac{1}{2n+n^2} < \frac{1}{k+n^2} < \frac{1}{n^2+1}$ alors $\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6(2n+n^2)} < -w_n < \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6(1+n^2)}$. Par la suite $\lim w_n = 0$ et $\lim v_n = \lim \lim w_n + u_n = 2$

Exercice 7 :

- 1) $u_{n+q} = \cos(\frac{2(n+q)\pi}{q}) = u_n$
- 2) $u_{nq} = \cos(\frac{2nq\pi}{q}) = \cos(2n\pi) = 1$. et $u_{nq+1} = \cos \frac{2\pi}{q}$.
- 2) La suite (u_n) n'est pas de Cauchy :

$$\exists \varepsilon = \frac{1 - \cos(\frac{2\pi}{q})}{2} > 0$$

(car $q > 2$) $\forall n$ $nq \geq n$ et $nq + 1 \geq n$ mais $u_{nq} - u_{nq+1} > \varepsilon$.

Exercice 8 :

- 1) évident.
- 2) $u_{n+1} - u_n - \frac{1}{2} = \frac{4u_n + 1}{2u_n + 1} > 0$. On en déduit par télescopage que $u_n \geq a + \frac{n}{2}$. Donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 9 :

- 1) $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geq 1$. D'où (u_n) est croissante. D'autre part on a $v_{n+1} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$.
- 2) On a la suite (u_n) est croissante majorée par $v_0 = b$ donc convergente, soit $l = \lim u_n$. La suite (v_n) est décroissante minorée par $u_0 = a$ donc convergente, soit $l' = \lim v_n$. l, l' vérifient les équations suivantes :
 $l = \frac{l + l'}{2}$ et $l' = \sqrt{ll'}$ ce qui donne $l = l'$.

Corrigé Série 4

Exercice 1 :

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x-1} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)} = \frac{-5}{9}$$

d)

$$0 \leq |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin(\frac{1}{x})| = 0$$

e)

$$A_x = 1 + 2 + \dots + [\frac{1}{|x|}] = \frac{1}{2}([\frac{1}{|x|}](\frac{1}{|x|} + 1))$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 A_x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(|x|[\frac{1}{|x|}]^2 + x^2[\frac{1}{|x|}]).$$

On a et

$$x^2(\frac{1}{|x|} - 1) < x^2[\frac{1}{|x|}] \leq x^2 \frac{1}{|x|}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2[\frac{1}{|x|}] = 0.$$

D' autre part on a :

$$|x|(\frac{1}{|x|} - 1) < |x|[\frac{1}{|x|}] \leq |x| \frac{1}{|x|}$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|[\frac{1}{|x|}] = 1.$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 A_x = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 : On a $x^2 + 1 > 0$ alors $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

la fonction $x \rightarrow f(x)$ est strictement monotone, donc il existe une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]0, +\infty[$.

On résout l'équation $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 1}{2y}, \forall y \in]0, +\infty[$.

Exercice 3 : La fonction est périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Alors la restriction de f est bornée sur $[0, T]$ (Théorème de Heine) c'est-à-dire :

$$\exists M > 0 \forall x \in [0, T] |f(x)| \leq M.$$

soit $x \in \mathbb{R} \Rightarrow n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor \leq \frac{x}{T} < n + 1 = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor + 1$ alors $x - nT \in [0, T]$ et $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M$, donc f est bornée.

Exercice 5 : La fonction est périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Soit $x_n = x + nT \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ et $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ donc f est constante.

Exercice 6 : La fonction $h = f - g$ est continue en x_0 et $h(x_0) > 0$. Soit

$$\epsilon = \frac{h(x_0)}{2} \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

D'où $\forall x \in I_{x_0} =]x - \alpha, x + \alpha[\Rightarrow h(x) > \epsilon > 0$ donc $f(x) > g(x) \forall x \in I_{x_0}$.

Exercice 6 : f, g étant continues sur $[a, b]$, $(\exists x_0 \in [a, b])$ tel que $\sup(f(x)) = f(x_0)$ et $(\exists y_0 \in [a, b])$ tel que $\sup(g(x)) = g(y_0)$ (Théorème de Heine). Si $x_0 = y_0$ rien à démontrer, supposons que $x_0 \neq y_0$. Posons $h = f - g$ alors h est continue sur $[x_0, y_0]$

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$$

et

$$h(y_0) = f(y_0) - g(y_0) \leq 0$$

Théorème de la valeur intermédiaire implique $\exists c \in [x_0, y_0]$ tel que $h(c) = 0$ soit $f(c) = g(c)$

Exercice 12 : La fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0, 1]$, donc uniformément continue.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0; \forall x, y \in [0, 1] \text{ tel que } |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Posons

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

alors on a :

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f\left(\frac{k}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^n (-1)^{2p} f\left(\frac{2p}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{2p+1} f\left(\frac{2p+1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2p}{2n}\right) - f\left(\frac{2p+1}{2n}\right) \right) + \frac{f(1)}{2n} \end{aligned}$$

Et

$$|u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} |f(\frac{2p}{2n}) - f(\frac{2p+1}{2n})| + \frac{|f(1)|}{2n}$$

Si $|\frac{2p}{2n} - \frac{2p+1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \alpha$ alors $|f(\frac{2p}{2n}) - f(\frac{2p+1}{2n})| < \frac{\epsilon}{2}$ Il suffit de prendre $n > N = [\frac{1}{2\alpha}] + 1 > \frac{1}{2\alpha}$ Alors $|u_{2n}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{|f(1)|}{2n}$ Aussi $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 \implies \frac{|f(1)|}{2n} < \frac{\epsilon}{2}$

D'où

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 = \max(N, N_0) \in \mathbb{N} \forall n > N_1 \implies |u_{2n}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{2n}| = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0$ De la même façon on démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ sauf que dans ce cas il n'y a qu'une seule somme. Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$