ANALYSE1

Cours : 24H, TD :23H EXA: 3H

SMA-SMI 2020-2021

A: AMPHI … 08H30-10H30 LUNDI
B: AMPHI … 10H45-12H45 MARDI

PROFESSEURS:

COURS:

AMINA BENBACHIR HASSANI
ABDELKHALEK EL ARMANI

TRAVAUX DIRIGÉS:

ABDELKRIM BARBARA
HASSAN TAHRI JOUTÉ
SOUAD KHERROUBI

OBJECTIFS DU MODULE

1. *Comprendre les propriétés fondamentales des nombres réels (propriétés algébriques et analytiques, notamment la propriété de la borne supérieure et la borne inferieure), apprendre à manipuler des inégalités, savoir faire des démonstrations « à l'aide des epsilons » (convergence d'une suite, critère de Cauchy pour les suites et pour les fonctions, limites et continuité).*

2. **Acquérir des connaissances concernant tout ce qui est en liaison avec les fonctions d'une seule variable, notamment les fonctions transcendantes usuelles (fonctions circulaires, fonctions hyperboliques, ainsi que leurs inverses).**

3. ***Développer la capacité d'abstraction, résoudre des problèmes d'un type différent de ceux rencontrés au lycée.***

Ch. 1: Ensemble des nombres réels

- **Majorant , Minorant et propriété d'Archimède.**
- **Bornes supérieure et inférieure .**
- **Caractérisation de R par la propriété de la borne supérieure .**
- **Valeur absolue et partie entière.**
- **Densité de Q et R\Q dans R .**
- **Approximation des réels par des décimaux.**

Ch. 2: Suites numériques

- ❑ *Suites, convergence, opérations sur les limites des suites, limites usuelles,* **limite et ordre**
- ❑ *limites séquentielles, Suites monotones*
- ❑ *Suites de Cauchy*
- ❑ *Suites adjacentes (erreur d'approximation de la limite), Critères de convergence*
- ❑ *Suites extraites, Valeurs d'adhérence et Théorème de Bolzano Weierstrass*
- ❑ *Suites récurrentes .*

Ch. 3: Fonctions numériques d’une variable réelle

- ***Limite d’une fonction, caractérisation séquentielle des limites, Opérations algébriques sur les limites.***
- ***Continuité, Théorème des valeurs intermédiaires, image d’un intervalle et d’un segment par une application continue .***
- ***Fonction monotone, Théorème de la limite monotone, Théorème de la bijection.***
- ***Fonctions réciproques des fonctions circulaires et hyperboliques.***
- ***Continuité uniforme, fonctions lipchitzienne.***
- ***Théorème de Heine.***

Ch. 4: Dérivabilité

- ***Définition de la dérivée (à gauche et à droite). Interprétation géométrique de la dérivée, Opérations sur les dérivées.***
- ***Dérivation de la fonction réciproque et Dérivation des fonctions Arcs et fonctions Args.***
- ***Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.*** ***chapitre 1 Analyse 1 SMAI 2020-2021.pdf***

Ch.1 : Nombres Réels

Abdelkhalek El amrani et Amina Benbachir Hassani

Department de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Atlas Fès, Maroc.

abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma

amina.benbachirhassani@usmba.ac.ma

10 novembre 2020

Plan

Votre histoire

- **Dès la naissance :** On commence à manipuler les entiers naturels sous forme matériels, ainsi que l'opération somme(rassemblement des objets), la différence et la division sont rarement utilisées, on manipule aussi les décimaux et les rationnels positifs sous forme d'objets. La notion d'ordre et l'opération multiplication sont vécues dans cet age sans pouvoir les remarquer.
- **Primaire :** Dès la première année du primaire on commence à manipuler les entiers naturels et leurs écritures comme des êtres absolus, à partir des objets, et les opérations $+$ et $\times$ ainsi que l'ordre , on introduit par la suite les nombres décimaux et les rationnels positifs durant les trois dernières années de ce cycle ; l'introduction de $3,14$ la valeur décimale (approchée) du nombre irrationnel π se fait en géométrie en calculant le périmètre et la surface d'un cercle, on introduit aussi le nombre rationnel $\frac{22}{7}$ valeur (approchée) rationnel de ce nombre.
- **Collège :** Introduction des nombres entiers et décimaux relatifs ainsi que les quatre opérations et l'ordre, en première année. Au début du deuxième année, on introduit les nombres rationnels, les opérations et l'ordre sur cette classe des nombres ; vers la fin de cette année et

Votre histoire

grâce au théorème de Pythagore, on introduit des exemples de nombres irrationnels de la forme $\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ldots$. Le concept de nombres réels est ainsi introduit, les quatre opérations et l'ordre sur ces nombres sont effectués.

- **Lycée : Tronc commun :**
  On introduit les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ \mathbb{D}, \ \mathbb{Q} \ et \ \mathbb{R}$: on écrit $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ en extension , $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ en compréhension tandis que $\mathbb{R}$ est défini comme réunion de $\mathbb{Q}$ et l'ensemble de tous les nombres irrationnels. On en déduit la fameuse suite d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Toutes les définitions et propriétés concernant les nombres réels (vus comme éléments de $\mathbb{R}$) (les quatre opérations, l'ordre et opérations et ordre sont rappelées et mathématisées). Les concepts de la valeur absolue et intervalle sont introduit grâce au concept de l'ordre et la droite numérique.
- **Lycée : Deuxième année du baccalauréat science mathématique :**
  On présente $(\mathbb{Z}, +, \times)$ comme exemple d'anneau commutatif unitaire intègre et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ comme exemples de corps commutatifs.

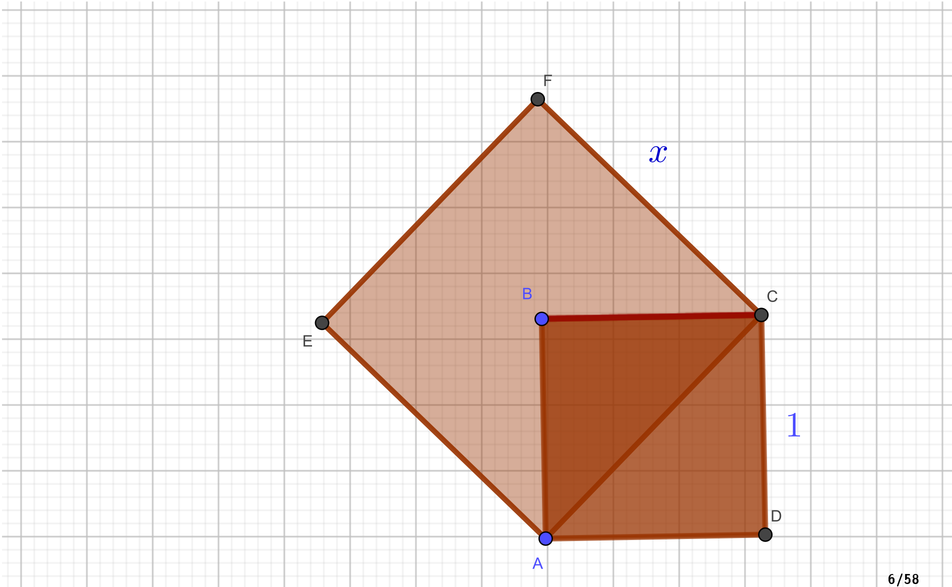
Histoire du concept :

- **Babylone, - 1800 av.J.C.** : Quelques tablettes babyloniennes donnent à résoudre, sous la forme de problèmes concrets, ce que nous appelons maintenant des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues à coefficients rationnels. Par exemple :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} x - y = 10 \\ \frac{2}{3}x - \frac{y}{2} = 8 + \frac{1}{3} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{7} + \frac{y}{11} = 1 \\ \frac{6x}{7} = \frac{10y}{11} \end{array} \right.$$

- **Époque de Pythagore (6^{eme} siècle $av.J.C.$) (Grecs) :** La découverte du premier nombre irrationnel $\sqrt{2}$.
- **Euclide (3^{eme} siècle $av.J.C.$) (Grecs) :** On sait construire à la règle et au compas, un carré du plan dont l'aire est le double de celle du carré unité par exemple. La longueur l des cotés de ce carré vérifie l'équation $x^2 = 2.1 = 2$. Il est facile de voir que l est aussi égal à la longueur de la diagonale du carré unité.

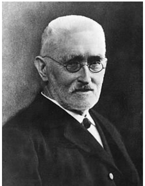
Histoire du concept :



Histoire du concept :

Ce nombre est facile à construire à la règle et au compas et pourtant nous allons démontrer qu'il n'est pas rationnel.

- **Époque de** $Peano$, $Dedekind$ **et** $Cantor$ **(**19^{eme} **siècle siècle) :** Les mathématiciens aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels.
On a d'abord défini les nombres entiers naturels de manière axiomatique **(Peano)**, puis à partir des nombres entiers naturels, on a construit successivement les nombres entiers relatifs, les nombres rationnels et décimaux et enfin les nombres réels.
- **Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)(Allemand) :** C'est à ce mathématicien, vers la fin du 19^{eme} siècle (1872) , que revient le mérite de présenter la première construction basée sur la notion de section ou coupure.



Histoire du concept :

- **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)(Allemand) :** Une autre méthode, basée sur les suites de Cauchy, est donnée par ce grand mathématicien.

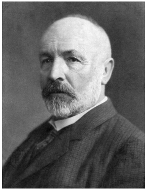


Figure – Georg Kantor

Il existe plusieurs méthodes, au moins cinq, de construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ à partir des nombres rationnels qui reposent, presque toutes, sur la notion d'ordre, et non seulement sur les opérations comme pour les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

Histoire du concept :

On démontre heureusement que toute ces méthodes sont équivalentes au sens où les objets construits ont une structure de "corps commutatif archimédien complet" et qu'un tel objet est unique à isomorphisme près (théorème difficile à démontrer).
Dans ce cours, on ne s'attachera donc pas à une construction précise du corps des nombres réels mais plutôt à ses propriétés telles qu'elles sont énoncées par la suite et notamment la propriété de la borne supérieure, étroitement liée à l'ordre, qui distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. C'est l'absence de cette borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ pour certaines parties non vides et majorées de $\mathbb{Q}$ qui matérialise les "trous" de $\mathbb{Q}$.
Ainsi, en plus des deux opérations $+$ et $\times$ qui prolongent celles dans $\mathbb{Q}$ et qui ont les mêmes propriétés, le concept d'ordre est aussi fondamental dans la construction de $\mathbb{R}$; ce qui explique son introduction et utilisation tout au long de ce chapitre, en particulier, et dans tout ce cours d'une manière générale.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est Archimédien :

Proposition($\mathbb{Q}$ est archimédien) 1.1

Pour tous $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$, il existe un entier naturel n tel que $na > b$.

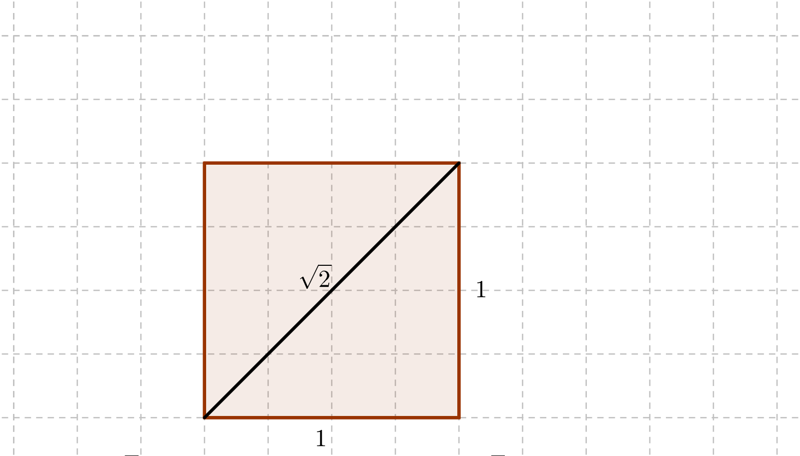
Preuve. Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ telles que $a > 0$, alors :
- Si $b \leqslant 0$ la propriété est trivialement vraie avec $n = 1$ (par exemple).
- Si $b > 0$. Alors $na > b$ est équivalente à $n > ba^{-1}$. Comme $ba^{-1} \in \mathbb{Q}$ et que $ba^{-1} > 0$, alors il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $ba^{-1} = \frac{p}{q}$, et l'entier $n = p + 1$ vérifie l'inégalité $n > p \geqslant ba^{-1}$. $\square$

Remarque 1.1

Cette propriété est fondamentale. Elle signifie que dans $\mathbb{Q}$ il y a des nombres rationnels aussi petits que l'on veut. On dit que $(Q, +, \times, \leqslant)$ est un "corps archimédien".

Approche géométrique :

Le nombre $\sqrt{2}$ est facile à construire à la règle et au compas, grâce au théorème de Pythagore, et pourtant nous allons démontrer qu'il n'est pas rationnel.

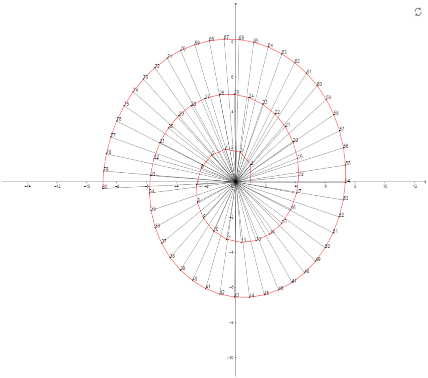


$$\sqrt{2} \; est \; un \; nombre \; positif \;, \; mais \; \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^{+}$$

Approche géométrique :

Par le même procédé on peut réaliser la spirale de Pythagore ou de Théodore de Cyrène qui permet de construire successivement à la règle et au compas toutes les grandeurs réelles dont le carré est un entier naturel non nul n.

Approche géométrique :



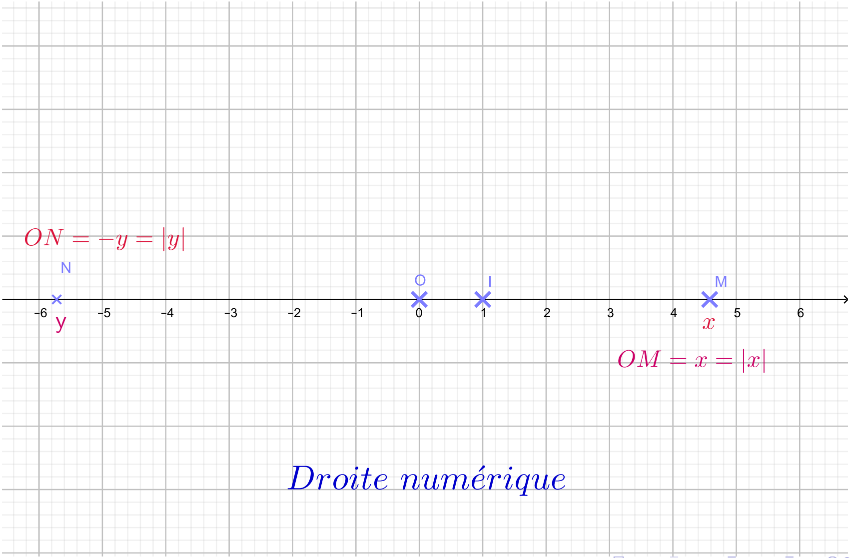
Spirale de Pythagore
ou de Théodore de Cyrène

Approche géométrique :

Spirale

D'un point de vue géométrique il existe bien des grandeurs réelles mesurables (correspondant à des longueurs) mais non rationnelles r notées $\sqrt{m}$ dont le carré est m. Ces grandeurs seront représentées par des nombres réels irrationnels, éléments d'un nouvel ensemble noté $\mathbb{R}$ et appelé ensemble des nombres réels.
Et l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être représenté géométriquement par une droite munie d'un repère (O, I) (O :origine symbolisant 0 et I : extrémité symbolisant 1), notée $D(O, I)$ et appelée **droite numérique**, et Chaque nombre réel x est représenté par un point unique M de $D(O, I)$ et inversement, de telle sorte que $OM =\mid x \mid$ si $OI = 1$.
Il en résulte que l'ensemble $\mathbb{R}$ est d'une certaine façon "continu" (sans "trou") à l'image de la droite qui le représente géométriquement.

Approche géométrique :



$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$:

Proposition 1.1

Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$. Comme $(-x)^2 = x^2$, on peut supposer que $x > 0$, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ avec p et q sont premiers entre eux (c-à-d : $p \wedge q = 1$). D'où

$$\begin{aligned} x = \frac{p}{q} &\Longrightarrow x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \\ &\Longrightarrow 2q^2 = p^2 \quad (*) \\ &\Longrightarrow p^2 \; est \; un \; nombre \; pair \\ &\Longrightarrow p \; est \; un \; nombre \; pair \; car \; sinon \; c-à-d \; p \; est \; impair \; on \; a : \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$:

il existe $n \in \mathbb{N} : p = 2n + 1$, d'où

$$\begin{aligned} p^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1, \\ &\textit{d\'{}où } p^2 \textit{ est impair, ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

D'où p est un nombre pair et alors $\left(\exists p' \in \mathbb{N}\right) : p = 2p'$, donc

$$\begin{aligned} (*) &\Longrightarrow 2q^2 = 4\left(p'\right)^2 \\ &\Longrightarrow q^2 = 2\left(p'\right)^2 \\ &\Longrightarrow 2 \textit{ divise } q^2 \\ &\Longrightarrow 2 \textit{ divise } q. \end{aligned}$$

Enfin 2 divise p et 2 divise q, c-à-d : 2 est un diviseur commun à p et q, ce qui est absurde (car $p \wedge q = 1$).
Donc l'hypothèse de départ est fausse.
Donc il n'existe aucun rationnel x vérifiant $x^2 = 2$.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$:

Remarque 1.2

Le raisonnement précédent peut se généraliser en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique (Théorème d'Euclide) pour démontrer que si m est un nombre entier naturel qui n'est pas le carré d'un autre entier ,en particulier un nombre premier, alors l'équation $x^2 = m$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, en d' autres termes $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$.
En conclusion, on peut dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels possède des "trous" (une infinité) et ne suffit pas pour traiter des problèmes simples de géométrie classique et aussi d'analyse comme nous allons voir dans la suite de ce chapitre et les chapitres suivants.

Définition 2.1

Un ensemble ordonné est la donnée d'un ensemble non vide E, et d'une relation d'ordre sur E, c'est-à-dire d'une relation binaire dans E, notée $\leqslant$ et vérifiant :

$$\begin{cases} (i) & \leqslant \ \ est\ reflexive & : (\forall x \in E) \ \ x \leqslant x, \\ (ii) & \leqslant \ \ est\ antisymtrique & : \left(\forall (x, y) \in E^2\right) \ \ (x \leqslant y \ et \ y \leqslant x) \Rightarrow x = y, \\ (iii) & \leqslant \ \ est\ transitive & : \left(\forall (x, y, z) \in E^3\right) \ \ (x \leqslant y \ et \ y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z. \end{cases}$$

Une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble E est dite totale et E est dit totalement ordonné si, et seulement si,
$\left(\forall (x, y) \in E^2\right) \ \ (x \leqslant y \ ou \ y \leqslant x)$.

Notation : Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, alors pour tout $(x, y) \in E^2$
$x \geqslant y$ signifie que $y \leqslant x$.
$x < y$ signifie que $x \leqslant y \ \ et \ x \neq y$.
$x > y$ signifie que $y < x$.

Exemples 2.1

1. *Les ensembles $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs sont totalement ordonnés par la relation définie par :*
   Pour tout $(x, y) \in E^2$ $x \leqslant y \Leftrightarrow (\exists z \in E) : y = x + z$; où
   $E = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{Z}$.
2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est totalement ordonné par la relation définie par :*
   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ $\;x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+$; où
   $\mathbb{Q}^+ = \left\{ r \in \mathbb{Q} : r = \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;:\; p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
3. *Si X est un ensemble non vide et non réduit à un élément, la relation définie sur $\mathcal{P}(X)$, par :*
   pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(X))^2$ $\;A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$ est une relation d'ordre non totale (dite partielle) sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X : ils existe A et B de $\mathcal{P}(X)$ tels que $A \nsubseteq B$ et $B \nsubseteq A$.

Définitions 2.1

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1.
   - $i.$ *Un élément M de E est dit* ***majorant*** *de A ou* ***majore*** *A si et seulement si $(\forall x \in A)\ \ x \leqslant M$.*
   - $ii.$ *A est dite majorée signifie qu'elle possède un majorant.*
   - $iii.$ *Un élément M de E est dit le plus grand élément (unique) ou le maximum de A si et seulement si M majore A et $M \in A$, on le note $M = Max(A)$.*
2.
   - $i.$ *Un élément m de E est dit* ***minorant*** *de A ou* ***minore*** *A si et seulement si $(\forall x \in A)\ \ m \leqslant x$.*
   - $ii.$ *A est dite minorée signifie qu'elle possède un minorant.*
   - $iii.$ *Un élément m de E est dit le plus petit élément(unique) ou le minimum de A si et seulement si m minore A et $m \in A$, on le note $m = min(A)$.*
3. *A est dite bornée signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples 2.2

1. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels est minoré par zéro et* $0 = min(\mathbb{N})$.
2. *Le sous-ensemble* $\mathbb{Z}^-$ *de* $\mathbb{Z}$ *est majoré par zéro et* $0 = max(\mathbb{Z}^-)$.
3. *Toute partie finie de* $\mathbb{Q}$ *est bornée.*
4. *Soit* A *la partie de* $\mathbb{Q}$ *définie par :* $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, *alors* A *est bornée,* 0 *est un minorant de* A; $1 = max(A)$.

Remarque 2.1

Tout élément plus grand qu'un majorant est aussi un majorant et tout élément plus petit qu'un minorant est aussi un minorant.

Proposition 2.1

Dans $(\mathbb{N}\ ,\ \leqslant)$ *on a :*

1. *Toute partie non vide* A *de* $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*
2. $\mathbb{N}$ *n'est pas majoré.*
3. *Toute partie non vide et majorée* A *de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

Ces propriétés font partie des hypothèses de la construction de $\mathbb{N}$*.*

Exercice 2.1

1. *Montrer que* $(\mathbb{Z}\ ,\ \leqslant)$ *vérifie les propriétés* $2.$ *et* $3.$ *ci-dessus et que toute partie non vide et minorée* A *de* $\mathbb{Z}$ *admet un plus petit élément.*
2. *Montrer que dans* $(\mathbb{Z}\ ,\ \leqslant)$, $\mathbb{Z}$ *n'est ni majoré, ni minoré.*

Définitions 2.2

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. *Si A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A; on le note $sup\,(A)$.*
2. *Si A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de A; on le note $inf\,(A)$.*

Remarque 2.2

La borne supérieure (res. la borne inférieure) d'une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ si elle existe est unique.

Exemple 2.1

Soit $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \ / \ 1 \leqslant x^2 \prec 5\right\}$. Alors :
A est bornée dans $\mathbb{Q}$.
$inf\,(A) = min\,(A) = 1$; $sup\,(A) = \sqrt{5}$ *et* $max\,(A)$ *n'existe pas.*

Proposition 2.2

$(\mathbb{Q}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ \leqslant)$ *est un corps commutatif totalement ordonné, où* $+$, $\times$, *et* $\leqslant$ *sont les opérations et l'ordre usuels dans* $\mathbb{Q}$ *c-à-d :*

$$\begin{cases} (i)\ \ (\mathbb{Q},+,\times)\ \ est\ un\ corps\ commutatif\ \ (voir\ cours\ d'algèbre)\,. \\ (ii)\ \ (\mathbb{Q},\leqslant)\ \ est\ totalement\ ordonné. \\ (iii)\ \ Pour\ tout\ \ (a,b,c)\in\mathbb{Q}^3\ on\ a: \\ \qquad (a\leqslant b)\Longrightarrow(a+c\leqslant b+c)\ \ (\leqslant\ \ est\ compatible\ avec\ l'addition)\,. \\ \ (a\leqslant b\ et\ 0\leqslant c)\Longrightarrow(a.c\leqslant b.c)\,(\leqslant\ \ est\ compatible\ avec\ la\ multiplication) \end{cases}$$

Exercice 2.2

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$\left(c-a-d \text{ } il \text{ } n'existe \text{ } aucun \text{ } M \text{ } de \text{ } \mathbb{Q} \text{ } tel \text{ } que \text{ } M^2 = 2\right).$

Solution On l'a déjà montré dans l'introduction.
On proposera deux autres méthodes :
1^{ere} **méthode :** Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q sont premiers entre eux (c-à-d- $p \wedge q = 1$). D'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
&\Longrightarrow 2q^2 = p^2 \quad (*) \\
&\Longrightarrow p^2 \mid 2q^2 \\
&\overset{d'après \text{ } Th. \text{ } Gauss}{\Longrightarrow} p^2 \mid 2 \ \left(car \ p \wedge q = 1 \Rightarrow p^2 \wedge q^2 = 1\right) \\
&\Longrightarrow p^2 = 1 \ ou \ p^2 = 2 \\
&\Longrightarrow 2q^2 = 1 \ ou \ p^2 = 2 \\
&\Longrightarrow 2 \mid 1 \ ou \ p^2 = 2, \ ce \ qui \ est \ absurde \ \left(p \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow p = 1 \ ou \ p^2 \geqslant 4
\end{aligned}$$

D'où l'hypothèse de départ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Seconde méthode : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q des entiers positifs , et q le plus petit de tels dénominateurs. Alors

$$\begin{aligned} \frac{2q-p}{p-q} &= \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Puisque $2q-p$ et $p-q$ sont deux entiers positifs et $0 < p-q < q$ (car $2q = \sqrt{2}p$ et $\sqrt{2}p > p$), nous avons contredit la minimalité de q. $\square$

Définition 3.1

On dit qu'un ensemble ordonné $(E\ ,\ \leqslant)$ *vérifie la propriété de la borne supérieure, si et seulement si toute partie non vide majorée* A *de* E *admet une borne supérieure dans* E $(\in E)$.

Exemples 3.1

1. $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *vérifient la propriété de la borne supérieure.*
2. $(\mathbb{Q}\ ,\ \leqslant)$ *ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.*

Preuve. La propriété 1 est simple à vérifier, montrons alors 2.
Soit $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x > 0 \ et \ x^2 < 2\right\}$; alors A est non vide $(1 \in A)$, $A \subset \mathbb{Q}$ et A est majorée par 2; mais A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ $(\in \mathbb{Q})$.
En effet, Sinon, soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que $M = sup\,(A)$. On a : $M > 1$ (car $1,01 \in A$) et $M^2 \neq 2$ (car $\sqrt{2} \notin A$).
Deux cas se présentent alors :
1^{er} cas : $M^2 < 2$. On a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 &= M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leqslant M^2 + \frac{2M+1}{n}.\end{aligned}$$

Donc en choisissant n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $n_0 > \frac{2M+1}{2-M^2}$ on a :

$$\begin{aligned}\left(M+\frac{1}{n_0}\right)^2 &\leqslant M^2+\frac{2M+1}{n_0}\\ &< M^2+\frac{2M+1}{\frac{2M+1}{2-M^2}}\\ &= M^2+\left(2-M^2\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Et comme $M+\frac{1}{n_0}\in\mathbb{Q}^{+*}$, alors $M+\frac{1}{n_0}\in A$; d'où $M+\frac{1}{n_0}\leqslant M$ (car M est un majorant de A) ou encore $\frac{1}{n_0}\leqslant 0$ ce qui es absurde .

2^{eme} cas : $M^2>2$.

On a : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left(M-\frac{1}{n}\right)^2 &= M^2-\frac{2M}{n}+\frac{1}{n^2}\\ &> M^2-\frac{2M}{n}.\end{aligned}$$

Donc en choisissant n_1 dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $n_1 > \frac{2M}{M^2-2}$ on a :

$$\begin{aligned}\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 &> M^2 - \frac{2M}{n_1} \\ &> M^2 - \frac{2M}{\frac{2M}{M^2-2}} \\ &= M^2 - \left(M^2 - 2\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $M > 1$ et $n_1 \in \mathbb{N}^*$ d'où $0 < M - \frac{1}{n_1} < M$, et comme $M = sup\,(A)$, alors $M - \frac{1}{n_1}$ n'est pas un majorant de A, d'où il existe r dans A tel que $0 < M - \frac{1}{n_1} < r \leqslant M$ ou encore
$0 < \left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 < r^2 < 2.$

On a donc montré qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 < 2$ et $\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 > 2$ ce qui est absurde.

Donc A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Nous admettrons dans ce cours le théorème suivant :

Théorème(admis) 3.1

Il existe un ensemble $\mathbb{R}$, appelé ***ensemble des nombres réels,*** *contenant $\mathbb{Q}$ et muni de deux lois $+$ et $\times$ et d'une relation binaire $\leqslant$ prolongeant $+$, $\times$ et $\leqslant$ de $\mathbb{Q}$ tels que :*

$$\begin{cases} (i) & (\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ \leqslant)\ \text{est un corps commutatif totalement ordonné.} \\ (ii) & \text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{R},\ \text{admet une borne supérieure dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Propriétés caractéristiques des bornes supérieure et inférieure

Propriétés caractéristiques des bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$)
Dans la pratique nous aurons besoin de la caractérisation suivante des bornes supérieures et inférieure.

Proposition (Propriétés caractéristiques des bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$) 3.1

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

1. $$M = sup\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & (\forall x \in A)\ \ x \leqslant M, \\ (ii) & (\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists x \in A) : \ M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2. $$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & (\forall x \in A)\ \ m \leqslant x, \\ (ii) & (\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists x \in A) : \ x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve.

1.

$$M = sup\,(A) \iff \begin{cases} M \text{ } majore \text{ } A, \\ \left(\forall M' \in \mathbb{R}\right) \; M' < M \Longrightarrow M' \; n'est \; pas \; un \; majo- \\ \qquad rant \; de \; A \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} M \text{ } majore \text{ } A, \\ \left(\forall M' \in \mathbb{R}\right) \; M' < M \Longrightarrow (\exists x \in A) : M' < x \end{cases}.$$

Or

$$\left\{M' \in \mathbb{R} \; / \; M' < M\right\} = \left\{M - \varepsilon \; / \; \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\right\},$$

donc

$$M = sup\,(A) \iff \begin{cases} (\forall x \in A) \;\; x \leqslant M, \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}) \;\; (\exists x \in A) : M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2.

$$m = inf\,(A) \iff \begin{cases} m \text{ } minore \text{ } A, \\ \left(\forall m' \in \mathbb{R}\right) \; m' > m \Longrightarrow m' \; n'est \; pas \; un \; mino- \\ \qquad rant \; de \; A. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \quad m \; minore \; A, \\ \left(\forall m' \in \mathbb{R}\right) \; m < m' \Longrightarrow (\exists x \in A) : x < m' \end{array} \right. .$$

Or

$$\left\{m' \in \mathbb{R} \; / \; m < m'\right\} = \{m + \varepsilon \; / \; \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\},$$

donc

$$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A) \;\; m \leqslant x, \\ \;(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}) \;\; (\exists x \in A) : x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$\square$

Proposition 3.1

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que A est minorée ; on considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$-A=\{-x\ /\ x\in A\};$$

alors, $-A$ est non vide et majorée
$((\forall m\in\mathbb{R})\ \ m\ minore\ A\Longrightarrow -m\ majore\ \ -A\ )$; soit $M=sup\,(-A)$, alors

$$\begin{cases}(\forall x\in A)\ \ -x\leqslant M,\\ \ \ (\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*})\ \ (\exists x\in A):M-\varepsilon<-x.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(\forall x\in A)\ \ -M\leqslant x,\\ \ \ (\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*})\ \ (\exists x\in A):x<-M+\varepsilon.\end{cases}$$

Donc $-M=inf\,(A)$. Donc A admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et $inf\,(A)=-\left(sup\,(-A)\right)$. $\square$

Exercice 3.1

Vérifier que pour une partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$,
$sup\,(A) = -\,(inf\,(-A))\,.$

Exercice 3.2

1. *Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On écrit parfois $sup\,(A) = +\infty$.*
2. *En utilisant la technique de la solution de l'exercice précédent, déduire que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée n'admet pas de borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On écrit parfois $inf\,(A) = -\infty$.*

$\mathbb{R}$ est archimédien :

Théorème($\mathbb{R}$ est archimédien ou propriété d'Archimède) 3.1

Pour tous $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n tel que $na > b$.

Preuve. Par l'absurde ; supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n.a \leqslant b$, alors la partie $A = \{n.a\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est non vide $(a \in A)$ et majorée (par b), elle admet donc une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ (n+1)\ \ a \leqslant M &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n\ a \leqslant M - a < M,\\ &\Longrightarrow M - a \textit{ est un majorant de } A \textit{ qui est}\\ &\qquad\qquad \textit{strictement inférieur } M.\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. $\square$

$\mathbb{R}$ est archimédien :

Théorème($\mathbb{R}$ est archimédien ou propriété d'Archimède) 3.1

Pour tous $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n tel que $na > b$.

Preuve. Par l'absurde ; supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n.a \leqslant b$, alors la partie $A = \{n.a \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est non vide $(a \in A)$ et majorée (par b), elle admet donc une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ (n+1)\ \ a \leqslant M &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n\ a \leqslant M - a < M, \\ &\Longrightarrow M - a \textit{ est un majorant de } A \textit{ qui est} \\ &\qquad\qquad \textit{strictement inférieur } M.\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. $\square$

Remarque 3.1

Cette propriété signifie que si l'on considère un nombre réel a strictement positif, aussi petit soit-il, et que l'on considère la suite $a, 2a, 3a...$ alors on obtiendra dans cette suite, des nombres aussi grands que l'on veut dépassant n'importe quel nombre réel donné.
Autrement dit, une quantité, aussi petite soit-elle, ajoutée suffisamment de fois à elle même dépasse n'importe quelle quantité donnée.

Corollaire 3.1

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > b$.

Preuve. Prendre $a = 1$ dans le théorème précédent. □

Corollaire 3.2

Le sous-ensemble $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ est non majoré.

Preuve. $\mathbb{N}$ est non majoré est la négation du corollaire précédent. □

Remarque 3.2

1. *Pour déterminer la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ (si elle existe) ; on peut procéder comme suit :*
   - *i.* *On montre que $A \neq \emptyset$ (il suffit de trouver un élément appartenant à A).*
   - *ii.* *On montre que A est majorée (il suffit de trouver un majorant de A).*
   - *iii.* *Si A est non vide et majorée le $sup\,(A)$ existe dans $\mathbb{R}$; pour voir si un majorant M de A est la borne supérieure de A :*
     - *a.* *On regarde d'abord si $M \in A$; car si oui, $M = max\,(A)$ donc $M = sup\,(A)$; si non :*
     - *b.* • *On voit si M vérifie la propriété caractéristique de la borne supérieure :*

$$(\forall \varepsilon > 0) \;\; (\exists x \in A) \;\; : \;\; M - \varepsilon < x \;, \;\; ou\ bien$$

       • *On fait un raisonnement par l'absurde, c'est-à dire on suppose qu'il existe un majorant $M^{'}$ de A avec $M^{'} < M$ et on essaie de trouver une contradiction (absurdité).*
2. *On procède d'une manière analogue pour déterminer la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ (si elle existe).*
3. *Si le $sup\,(A)$ (ou $inf\,(A)$) n'est pas donné, il faut deviner la valeur du sup (ou de inf). Parfois la représentation de la partie A sur la droite numérique est très utile, par exemple si $A = \left\{(-1)^{n} + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}^{*}\right\}$.*

Exemple 3.1

Soit $A = \left\{ \frac{2n-1}{2n+1} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Déterminons $sup\,(A)$ *et* $inf\,(A)$ *(si elles existent).*

1. $A \neq \emptyset$ *car* $-1 \in A$ *(pour* $n = 0$ *), et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n+1} &= 1 - \frac{2}{2n+1} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Donc A *est majorée par* 1 *et par suite* $sup\,(A)$ *existe dans* $\mathbb{R}$.
Est-ce que $1 = sup\,(A)$?
• $1 \notin A$ *car sinon il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{2n-1}{2n+1} = 1$ *et*

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n+1} = 1 &\iff 2n - 1 = 2n + 1 \\ &\iff -1 = 1 \ \ (absurde)\,. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un majorant M *de* A *tel que* $M < 1$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n-1}{2n+1} \leqslant M$ *et*

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2n+1}\leqslant M &\Longleftrightarrow 1-\frac{2}{2n+1}\leqslant M\\ &\Longleftrightarrow 1-M\leqslant \frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow 2n+1\leqslant \frac{2}{1-M}\quad (M<1\Longrightarrow 0<1-M)\\ &\Longleftrightarrow n\leqslant \frac{1}{1-M}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a donc $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n\leqslant \frac{1}{1-M}-\frac{1}{2}$ c'est-à dire que $\mathbb{N}$ est majoré, absurde. Donc $sup\,(A)=1$.

Utilisation de la propriété caractéristique : Soit $\varepsilon>0$, montrons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}: 1-\varepsilon<\frac{2n_0-1}{2n_0+1}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}1-\varepsilon<\frac{2n-1}{2n+1} &\Longleftrightarrow 1-\varepsilon<1-\frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow -\varepsilon<-\frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{2n+1}<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}<2n+1\end{aligned}$$

Or $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} < n_0$. Pour ce n_0 on a :$1 - \varepsilon < \frac{2n_0-1}{2n_0+1}$.

2. On a déjà $A \neq \emptyset$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n+1} &= 1 - \frac{2}{2n+1} \\ &\geqslant 1 - 2 \; car \; 2n+1 \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{2n+1} \leqslant 1 \\ &= -1, \end{aligned}$$

et par suite $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{2n-1}{2n+1} \geqslant -1$. Donc A est minorée par -1.
Par ailleurs, $-1 \in A\ \ (pour\ \ n = 0)$, donc $-1 = min\,(A)$ et par suite $inf\,(A) = -1$.

Exemple 3.2

Soit $A = \left\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. *Alors :*

(i) $Inf\,(A) = ?$

- *On a :* $2 \in A$ *(prendre* $x = 1$*), d'où* $A \neq \emptyset$*. Par ailleurs,* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ x + \frac{1}{x} > 0$, *d'où* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *qui est non vide et minorée, elle admet donc une borne inférieure.*
- *D'autre part, pour tout* $x \in \mathbb{R}^{*+}$, *on a :*

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \\ &\geqslant 2, \end{aligned}$$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, *c'est-à dire que* 2 *est un, autre, minorant de* A.

- *Et comme* $2 \in A$, *alors* $2 = min\,(A)$; *donc* $inf\,(A) = 2$.

(ii) *On remarque que les éléments de* A *deviennent aussi grand que l'on*

veut lorsque x est choisi assez grand dans $\mathbb{R}^{*+}$, car $\left((\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ x + \frac{1}{x} \geqslant x\right)$, d'où l'idée de conjecturer que : A est non majorée.
Montrons donc que cette conjecture est vraie.
Supposons, par l'absurde, que A est majorée et soit $M \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \ x + \frac{1}{x} \leqslant M\ \left(M > 0 \ car\ \ (\forall y \in A)\ \ y > 0\right)$. D'où pour $x = M\ \ \left(\in \mathbb{R}^{*+}\right)$, on a : $M + \frac{1}{M} \leqslant M$, ou encore $\frac{1}{M} \leqslant 0$, ce qui est absurde.
Donc A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, elle n'admet pas, donc, de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.3

Étudie les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble B suivant :

$$B = \left\{ x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^{*-} \right\}.$$

Proposition et définition 3.1

Pour tout nombre réel x, il existe un seul entier relatif p $(p \in \mathbb{Z})$ tel que

$$p \leqslant x < p + 1.$$

- *p est appelé **la partie entière** de x et est noté par $E(x)$ (ou $[x]$).*
- *$x - E(x)$ est dite **Partie décimale** de x $(0 \leq x - E(x) < 1)$.*

Preuve. Existence de p : Soit x un réel fixé ; considérons $A = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \leq x\}$, alors d'après la propriété d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > -x$ (prendre $a = 1$ et $b = -x$ dans le Théorème 1.2.1), d'où $-m \in A$, et alors $A \neq \emptyset$; et $A \subset \mathbb{Z}$ majorée par x (par définition de A). Donc A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, elle admet donc un plus grand élément p; d'où $p \leq x$. Et comme $p < p + 1$, $p + 1 \notin A$, alors $x < p + 1$. Donc $(\exists p \in \mathbb{Z}) \ : \ p \leqslant x < p + 1$.
Unicité de p : Supposons l'existence de deux éléments de $\mathbb{Z}$, p et q tels que

$$\begin{cases} p \neq q \\ p \leqslant x < p + 1 \\ q \leqslant x < q + 1 \end{cases}$$

supposons que $q < p$ (par exemple), alors $q + 1 \leqslant p$ et puisque $x < q + 1$, alors $x < q + 1 \leqslant p$, d'où $p \leqslant x < p$ absurde.

Exercice 3.4

Qu'en pensez-vous du raisonnement suivant établissant l'unicité de $p = E(x)$*?*
Comme p *est la borne supérieure de* A*, et vu l'unicité de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$*, alors l'unicité d'un entier relatif vérifiant les conditions de la proposition précédente est assurée.* □

Remarque 3.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(i) $E(x)$ *est le plus grand élément de* $\mathbb{Z}$ *inférieur ou égale à* x :

$$(\forall q \in \mathbb{Z}\ q \leqslant x \Longrightarrow q \leqslant E(x)).$$

(ii) $(\exists!\,(p,r) \in \mathbb{Z} \times [0,1[) : x = p + r$. *(Habitude humaine naturelle : lorsqu'un groupe de personnes veulent diviser quelque chose entre elles, chacune d'elles essaie de calculer (dans sa tète) sa part entière de cette quantité (ce langage est lié aux rationnels !)).*

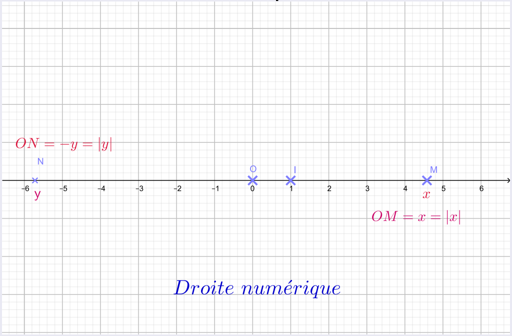
Définition 3.2

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle ***valeur absolue*** *de x et on note $\mid x \mid$, le nombre réel $max\{x, -x\}$.*

Remarque 3.4

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \mid x \mid = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}.$$

On trouve ainsi l'idée signalée dans l'introduction que :
Géométriquement, sur la droite numérique $D = D(O, I)$ $avec\ OI = 1$, $\mid x \mid$ est la distance OM, où M est le point d'abscisse x.



Les propriétés suivantes sont connues, et démontrées, au tronc commun Marocain (chapitres 3 et 4).

Proposition 3.2

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ $(=\{t \in \mathbb{R} : 0 < t\})$, on a :

- $0 \leqslant \mid x \mid$
- $\mid x \mid = 0 \iff x = 0$
- $\mid x \mid = \mid -x \mid$
- $\mid x\ y \mid = \mid x \mid \mid y \mid$ *et* $\mid x^p \mid = \mid x \mid^p$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$
- $\mid \dfrac{1}{x} \mid = \dfrac{1}{\mid x \mid}$ *si* $x \neq 0$
- $- \mid x \mid \leqslant x \leqslant \mid x \mid$
- $\mid x + y \mid \leqslant \mid x \mid + \mid y \mid$ *et* $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leqslant \mid x - y \mid$
- $\mid x \mid < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$
- $\mid x \mid \leqslant \varepsilon \iff -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$
- $\mid x \mid > \varepsilon \iff (x > \varepsilon \text{ ou } x < -\varepsilon)$
- $\mid x \mid \geq \varepsilon \iff (x \geq \varepsilon \text{ ou } x \leq -\varepsilon)$.

Définition 3.3

Étant données un réel x et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, on dit qu'un nombre réel a est une approximation (ou une valeur approchée) de x à ε près si et seulement si $\mid x - a \mid < \varepsilon$, (ou $\mid x - a \mid \leqslant \varepsilon$).

Remarque 3.5

Pour tout nombre réel x, la partie entière $E(x)$ est "la meilleure" approximation entière de x à 1 près.

Nombres décimaux : Définition et exemples

Dans la pratique nous avons besoin de connaitre des valeurs décimales approchées d'un nombre réel irrationnel ou rationnel avec une certaine précision.
En fait, nous verrons que tout nombre réel admet un développement décimal illimité, ce qui est une façon plus naturelle et plus intuitive de représenter les nombres réels : c'est ainsi que $1 = 0,999999999...$, $\sqrt{2} = 1,414213562...$, $e = 2,718281828...$ et $\pi = 3,141592654...$, etc ....

Définition 3.4

On appelle nombre décimal tout nombre réel pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 3.3

$23,145 \in \mathbb{D}$ *car* $23,145 = \frac{23145}{10^3}$, $-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ *car* $-\frac{1}{4} = \frac{-25}{10^2}$ *et* $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ $(prouver\ le)$.

Approximation d'un nombre réel par des décimaux

Proposition 3.3

Étant données un nombre réel x et un entier naturel k, il existe un nombre décimal unique x_k tel que $10^k\ x_k \in \mathbb{Z}$ et $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$ (x_k est approximation décimale de x à 10^{-k} près).

Preuve. Soient x un nombre réel et k un entier naturel, alors :

- **Existence :** $E\left(10^k\ x\right) \leqslant 10^k\ x < E\left(10^k\ x\right) + 1$, d'où

$\frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} \leqslant\ x < \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} + \frac{1}{10^k}$, donc, en posant $x_k = \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k}$, on a : $10^k\ x_k = E\left(10^k\ x\right)$, d'où $10^k\ x_k \in \mathbb{Z}$ et $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$.

- **Unicité :** Soit y_k un élément de $\mathbb{R}$ tel que $10^k\ y_k \in \mathbb{Z}$ et

$y_k \leqslant x < y_k + \frac{1}{10^k}$;
en multipliant cette double inégalité par 10^k, on obtient

$$10^k\ y_k \leqslant 10^k\ x < 10^k\ y_k + 1;$$

or $10^k\ y_k \in \mathbb{Z}$, donc $E\left(10^k\ x\right) = 10^k\ y_k$ et par suite
$y_k = \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} = x_k$.

Approximation d'un nombre réel par des décimaux

Par ailleurs, $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$, d'où $0 \leqslant x - x_k < \frac{1}{10^k}$ et alors $| x - x_k |< 10^{-k}$, donc x_k est une approximation de x à 10^{-k} près. Et $10^k \ x_k \in \mathbb{Z}$, donc x_k est un nombre décimal . □

Exercice 3.5

Vérifier que $(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ x_k \leqslant x_{k+1}$.

Solution Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$, d'où $10^{k+1} \ x_k \leqslant 10^{k+1} \ x < 10^{k+1} \ x_k + 10$ et comme $10^{k+1} \ x_k \in \mathbb{Z}$, alors $10^{k+1} \ x_k \leqslant E\left(10^{k+1} \ x\right)$, d'où $x_k \leqslant \frac{E\left(10^{k+1} \ x\right)}{10^{k+1}}$, donc $x_k \leqslant x_{k+1}$. □

Intervalles de $\mathbb{R}$

Définitions 3.1

• *Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que* $a \leqslant b$; *on appelle* ***segment*** *d'extrémités* a *et* b *et on note* $[a, b]$, *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *défini par :* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$.

• *Soit* $I \subset \mathbb{R}$, *on dit que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *si et seulement si pour tous* a *et* b *de* I *tels que* $a \leqslant b$, $[a, b] \subset I$, *c-à-d pour tous* a *et* b *de* I *tels que* $a \leqslant b$, *on a :* $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I$.

Remarque 3.6

1. *Pour tous* a *et* b *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $a \leqslant b$,

$$[a, b] = \{\lambda \ a + (1 - \lambda) \ \ b \ / \ \lambda \in [0, 1]\} = \{\lambda \ b + (1 - \lambda) \ \ a \ / \ \lambda \in [0, 1]\}.$$

2. $\emptyset$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition 3.4

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, alors I est l'un des neuf types d'ensembles suivants :

$$\begin{cases}]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, &]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \\ [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, & [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \\ ]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \\ ]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, &]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\} \\ \multicolumn{2}{c}{]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}.} \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ et $]-\infty,+\infty[$ sont des intervalles ouverts.

Preuve. Suivant que I est majoré, minoré ou non et que $inf\,(I)$ et $sup\,(I)$ appartiennent ou n'appartiennent pas à I. $\square$

Voisinage d'un nombre réel

Définitions 3.2

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $V \subset \mathbb{R}$.

1. *On appelle intervalle de centre* x_0 *et de rayon* r*, où* $r > 0$*, l'intervalle* $]x_0 - r, x_0 + r[$.
2. V *est un voisinage de* x_0 *signifie qu'il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_0 - r, x_0 + r[\subset V$.
3. V *est un voisinage de* $+\infty$ $(rsp. \ -\infty)$ *signifie qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $]a, +\infty[\subset V$ $(rsp. \ ]-\infty, a[\subset V)$.

Définitions 3.3

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. A *est ouvert signifie que* A *est voisinage de chacun de ses points c-à-d :*
$$(\forall x \in A) \ (\exists r > 0) :]x - r, x + r[\subset A.$$
2. A *est fermé signifie que son complémentaire* $C_{\mathbb{R}}^{A}$ *est ouvert.*
3. V *est un voisinage de* $+\infty$ $(rsp. \ -\infty)$ *signifie qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $]a, +\infty[\subset V$ $(rsp. \ ]-\infty, a[\subset V)$.

Voisinage d'un nombre réel

Exercice 3.6

1. *Montrer que tout intervalle ouvert est un ouvert, c-à-d : pour tous* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$, $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ *et* $]-\infty, +\infty[$ *sont des ouverts. Et que* $\emptyset$ *est un ouvert.*
2. *Montrer que les sous-ensembles suivants sont des fermés :* $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ *et* $]-\infty, +\infty[$, *où* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *avec* $a \leqslant b$.
3. *Montrer que toute réunion d'ouverts est un ouvert.*
4. *Montrer que l'intersection de deux fermés est un fermé.*

Proposition 4.1

*Entre deux nombres réels distincts, il existe au moins un nombre rationnel ($\in \mathbb{Q}$) et un nombre irrationnel $\left(élément\ de\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}\right)$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit a et b deux nombres réels distincts, tels que $a < b$. Alors :
• $\frac{1}{b-a} > 0$; $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > \frac{1}{b-a} > 0$ et donc $\frac{1}{q} < b - a$.
Soit $p = E(a\ q) + 1$, donc $p - 1 = E(a\ q)$ et par suite $p - 1 \leqslant a\ q < p$, d'où $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}$ et $a < \frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < a + (b-a)$, donc $\frac{p}{q} \in \left]a, b\right[$.
• D'après ce qui précède l'intervalle $\left]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins un nombre rationnel r; le nombre réel $r\sqrt{2}$ appartient à $\left]a, b\right[$ et c'est un irrationnel. □

Remarques 4.1

1. *Entre deux nombres réels distincts il existe une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*
2. *Tout intervalle contenant au moins deux points, contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Preuve. Par récurrence (ou par l'absurde). □

Ch.2 : Suites numériques

Abdelkhalek El amrani et Amina Benbachir Hassani

Department de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Atlas Fès, Maroc.

abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma

amina.benbachirhassani@usmba.ac.ma

24 janvier 2021

Plan

Définition 1.1

Une suite de nombres réels, suite numérique ou suite réelle est une application : $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto f(n) = x_n$, *elle est souvent notée :* (x_n), $(x_n)_n$ *ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et pour* n *fixé dans* $\mathbb{N}$, *l'élément* x_n *de* $\mathbb{R}$ *est appelé terme du rang* n *ou d'indice* n *ou terme général de la suite* (x_n).
Il arrive que l'application f *soit définie sur une partie infinie* $I \subset \mathbb{N}$, *on parle dans ce cas de la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *indexée par* I.

Définition 1.2

Si (x_n) *est une suite réelle telle qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *vérifiant :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant p \Longrightarrow x_n = x_p;$$

on dit que la suite (x_n) *est stationnaire ou constante à partir du rang* p.
Si $p = 0$ *alors* $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = x_0$ *et* (x_n) *est dite constante.*

Définitions 1.1

Une suite (x_n) de nombres réels est dite :

1. *croissante (resp. strictement croissante) si, et seulement si,* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \leqslant x_{n+1}$ *(resp.* $x_n < x_{n+1}$*).*
2. *décroissante (resp. strictement décroissante) si, et seulement si,* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} \leqslant x_n \ \ (resp.\ x_{n+1} < x_n)$.
3. *monotone (resp. strictement monotone) si, et seulement si, (x_n) est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*
4. *majorée si, et seulement si, l'ensemble $\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré :* $(\exists M \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \leqslant M$.
5. *minorée si, et seulement si, l'ensemble $\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est minoré :*
$$(\exists m \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{N})\ \ m \leqslant x_n.$$
6. *bornée si, et seulement si, elle est à la fois majorée et minorée :* $\left(\exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2\right) : (\forall n \in \mathbb{N})\ \ m \leqslant x_n \leqslant M$; *ceci est équivalent à* $(\exists M > 0)\ :\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ |\,x_n\,| \leqslant M$.

Exemples 1.1

les suites suivantes sont des suites numériques :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n = \frac{n^2+1}{n^2+4}$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n = n + ln\,(n)$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n = y_0 + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + ... + \frac{y_n}{2^n}$, *où* (y_n) *est une suite numérique positive et majorée .*
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, x_0 *et* y_0 *sont deux réels fixés tels que* $0 < x_0 < y_0$.
5. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ x_{n+1} = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}$ *et* x_0 *et* x_1 *sont deux réels fixés.*
6. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ *et* $x_0 = 1$.
7. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ *et* $x_0 = 3$.
8. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$ *et* $x_0 = a$ *où* a *est un réel positif.*

Définitions 1.2

Soient (x_n) une suite de nombres réels .

1. *On dit que (x_n) est convergente si, et seulement si, il existe un nombre réel x tel que*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : ((\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon) .$$

Dans ce cas, on dit aussi que (x_n) converge vers x ou a pour limite x ou tend vers x et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ ou $x_n \longrightarrow x$.
Dans le cas contraire, on dit que (x_n) diverge ou est divergente.

2. *On dit que (x_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ou admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ ou $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$ ou $x_n \longrightarrow -\infty$) si, et seulement si,*

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ x_n > A \ \ (resp. \ x_n < -A) .$$

Proposition 1.1

1. *Toute suite stationnaire est convergente.*
2. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de nombres réels.

1. Si (x_n) est stationnaire, alors
$(\exists p \in \mathbb{N}) \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant p \Longrightarrow x_n = x_p$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $n_0 = p$ on a :
$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n - x_p = 0$. Donc
$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x_p \mid < \varepsilon$, c-à-d $x_n \longrightarrow x$.
2. Si $x_n \longrightarrow x$, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$:
$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < 1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} \mid x_n \mid - \mid x \mid &\leqslant \mid \mid x_n \mid - \mid x \mid \mid \\ &\leqslant \mid x_n - x \mid \end{aligned}$$
d'où $\mid x_n \mid \leqslant \mid x_n - x \mid + \mid x \mid$; donc
$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n \mid < 1 + \mid x \mid$.
Soit $M = max\left(\mid x_0 \mid, \mid x_1 \mid, ..., \mid x_{n_0 - 1} \mid, 1 + \mid x \mid\right)$, alors :
$(\forall n \in \mathbb{N}) \mid x_n \mid \leqslant M$.

Proposition 1.2

Si (x_n) est une suite de nombres réels convergente vers une limite réelle x, alors cette limite est unique.

Preuve.
On suppose que (x_n) converge vers une autre limite $x^{'}$ différente de x, alors $\mid x - x^{'} \mid > 0$ donc pour $\varepsilon = \frac{1}{4} \mid x - x^{'} \mid$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon$ et
$n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid x_n - x^{'} \mid < \varepsilon$.
On considère $N = max\,(n_0, n_1)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 < \mid x - x^{'} \mid &\leqslant \mid x - x_N \mid + \mid x_N - x^{'} \mid \\ &< 2\varepsilon \\ &= \frac{\mid x - x^{'} \mid}{2}, \end{aligned}$$

d'où $1 < \frac{1}{2}$; absurde .

Définition 2.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles, on définit :

- *La somme :* $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$.
- *Le produit :* $(x_n) \ (y_n) = (x_n \ y_n)$.
- *Le produit par un réel λ :* $\lambda.(x_n) = (\lambda \ .x_n)$.
- $(x_n) \leqslant (y_n) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ x_n \leqslant y_n.$

Théorème 2.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques convergentes vers les deux nombres réels x et y respectivement et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $(x_n) + (y_n) \longrightarrow x + y.$
2. $(x_n)(y_n) \longrightarrow xy.$
3. $\lambda.(x_n) \longrightarrow \lambda.x.$

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\left(n \geqslant n_0 \Longrightarrow | x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ *et* $\left(n \geqslant n_1 \Longrightarrow | y_n - y | < \frac{\varepsilon}{2}\right)$. On considère $N = max\left(n_0, n_1\right)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ on a :
$$\begin{aligned} | x_n + y_n - (x + y) | &\leqslant | x_n - x | + | y_n - y | \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Soit $M > 0$ tel que $| x | < M$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ | y_n | < M$ (un tel M existe car (y_n) est bornée). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} | x_n y_n - xy | &= | \left(x_n - x\right) y_n + \left(y_n - y\right) x | \\ &\leqslant | x_n - x | \, | y_n | + | y_n - y | \, | x | \\ &\leqslant M \left(| x_n - x | \ + | y_n - y |\right). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant N &\Longrightarrow | x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2M} \ \ et \ \ | y_n - y | < \frac{\varepsilon}{2M} \\ &\Longrightarrow | x_n y_n - xy | < M \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right). \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant N \Longrightarrow | x_n y_n - xy | < \varepsilon$.

3. Il suffit de prendre dans 2. la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\, y_n = \lambda$. □

Proposition 2.1

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et (x_n) une suite numérique telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n \neq 0$. Si $x_n \longrightarrow x$ alors $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x}$.

Preuve. $x_n \longrightarrow x$, alors pour $\frac{|x|}{2} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$
\begin{aligned}
(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 &\Longrightarrow | x_n - x | < \frac{| x |}{2} \\
&\Longrightarrow || x_n | - | x || < \frac{| x |}{2} \\
&\Longrightarrow -\frac{| x |}{2} < | x_n | - | x | < \frac{| x |}{2} \\
&\Longrightarrow \frac{| x |}{2} < | x_n | .
\end{aligned}
$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \frac{|x|^2}{2}\ \varepsilon$ car $x_n \longrightarrow x$.
Soit $N = max\left(n_0, n_1\right)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| &= \left| \frac{x - x_n}{x_n x} \right| \\
&= \frac{\mid x_n - x \mid}{\mid x_n \mid \mid x \mid} \\
&< \frac{\mid x \mid^2}{2}\ \varepsilon \frac{1}{\frac{|x|}{2} \mid x \mid} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 2.2

Soient (x_n) *et* (y_n) *deux suites numériques .*

1. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$ *et* (y_n) *est bornée, alors* $x_n + y_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty \ (resp. \ -\infty)$, *alors* $x_n + y_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$.
3. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$ *et* $y_n \longrightarrow l$ *et* $l > 0$, *alors* $x_n.y_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$.
4. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$ *et* $y_n \longrightarrow l$ *et* $l < 0$, *alors* $x_n.y_n \longrightarrow -\infty \ (resp. \ +\infty)$.
5. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \ y_n \geqslant l > 0$, *alors* $x_n.y_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$.
6. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ (resp. \ -\infty)$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \, y_n \leqslant l < 0$, *alors* $x_n.y_n \longrightarrow -\infty \ (resp. \ +\infty)$.
7. *Si* $x_n \longrightarrow +\infty \ ou \ -\infty$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \, x_n \neq 0$, *alors* $\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0.$

Preuve. Immédiate (à titre d'exercice). □

Remarque 2.1

Faire attention aux formes indéterminées suivantes :

- *Si* $x_n \longrightarrow +\infty$ *et* $y_n \longrightarrow -\infty$, *on ne peut rien dire de la limite de* $(x_n + y_n)$ *en général.*
- *Si* $x_n \longrightarrow \pm\infty$ *et* $y_n \longrightarrow 0$, *on ne peut rien dire de la limite de* $(x_n.y_n)$ *en général.*
- *Si* $x_n \longrightarrow \pm\infty$ *et* $y_n \longrightarrow \pm\infty$, *on ne peut rien dire sur la limite de* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *en général.*

Proposition 2.2

Soient (x_n) *et* (y_n) *deux suites numériques qui coïncident à partir d'un certain rang c-à-d :* $(\exists p \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant p \Longrightarrow x_n = y_n$ *. Alors, pour tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *,* $x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow y_n \longrightarrow x$*. (*$(x_n)$ *et* (y_n) *sont alors de même nature : convergent toutes les deux, tendent toutes les deux vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *ou n'ont pas de limite finie ou infinie toutes les deux).*

Preuve. • Pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_n \longrightarrow x$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon$.
Soit $N = max\,(p, n_0)$, alors

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N &\Longrightarrow n \geqslant p \ et\ n \geqslant n_0 \\ &\Longrightarrow x_n = y_n \ et\ \ \mid x_n - x \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid y_n - x \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $y_n \longrightarrow x$.
(x_n) et (y_n) jouent deux rôles symétriques, donc $y_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \longrightarrow x$.
• Démonstration analogue pour $x = +\infty$ ou $x = -\infty$.
• La démonstration du cas restant se fait par contra-posée . □

Exercice 2.1

Soit (x_n) une suite numérique.

1. *Montrer que, si (x_n) converge vers l, alors la suite $(\mid x_n \mid)$ est convergente et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid x_n \mid = \mid \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \mid$.
2. *Montrer que, si (x_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $(\mid x_n \mid)$ tend vers $+\infty$.*

Définition 3.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles.
On dit que (x_n) est négligeable devant (y_n), et l'on note $x_n = o\,(y_n)$, si et seulement si, il existe une suite (ε_n) telle que :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = \varepsilon_n y_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

Remarque 3.1

Si $y_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors

$$x_n = o\,(y_n) \;\; \textit{si et seulement si} \;\; \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Définition 3.2

Deux suites réelles (x_n) et (y_n) sont dites équivalentes si, et seulement si $x_n - y_n = o(y_n)$. On note alors $x_n \sim y_n$.

Remarque 3.2

Si $y_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $x_n \sim y_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$.

Exemple 3.1

Considérons, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $y_n = \dfrac{1}{n}$. Posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$.
On a alors , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$x_n = \varepsilon_n y_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *D'où* $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et* $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.

Théorème 4.1

Soit (x_n) une suite numérique, alors :

1. *Si (x_n) est croissante et majorée, alors (x_n) est convergente vers sa bore supérieure $\sup\limits_n x_n = sup\left(\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$*
2. *Si (x_n) est décroissante et minorée, alors (x_n) est convergente vers sa bore inférieure $\inf\limits_n x_n = inf\left(\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$*

Preuve.

1. Supposons que (x_n) est croissante et majorée, posons $M = \sup\limits_n x_n$.

   Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : M - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant M$.
   Et comme (x_n) est croissante, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ M - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant M < M + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \mid x_n - M \mid < \varepsilon.$$

2. Supposons que (x_n) est décroissante et minorée, posons $m = \inf\limits_n x_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : m \leqslant x_{n_0} < m + \varepsilon$.
Et comme (x_n) est décroissante, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow \;\; m - \varepsilon < m \leqslant x_n \leqslant x_{n_0} < m + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow | \, x_n - m \, | < \varepsilon.$$

□

Remarque 4.1

Soit (x_n) une suite numérique, alors :

1. *Si (x_n) est croissante et non majorée, alors $x_n \longrightarrow +\infty$.*
2. *Si (x_n) est décroissante et non minorée, alors $x_n \longrightarrow -\infty$.*

Proposition 4.1

Soient (x_n) , (y_n) *et* (z_n) *trois suites numériques, alors :*

1. *Si* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant y_n$ *et si* (x_n) *et* (y_n) *sont convergentes vers* x *et* y *respectivement alors* $x \leqslant y$.
2. *Si* (x_n) *est convergente et* α *et* β *sont deux réels tels que* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant \alpha$ $(resp. (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta \leqslant x_n)$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \alpha$ $\left(resp.\ \beta \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)$.
3. *Si* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ *et si* (x_n) *et* (y_n) *sont convergentes vers vers la même limite* l, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.
4. *Si* $l \in \mathbb{R}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n - l| \leqslant y_n$ *et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, *alors* (x_n) *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Preuve.

1. Sinon, c-à-d si $y < x$; soit $\varepsilon = \frac{1}{3}(x-y)$, alors $\varepsilon > 0$ et il existe n_0 et n_1 dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$(n \geqslant n_0 \Longrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon) \text{ et } (n \geqslant n_1 \Longrightarrow y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon);$$

   d'où pour $N = max(n_0, n_1)$, on a :

   $$\begin{aligned} x - \varepsilon < x_N \leqslant y_N < y + \varepsilon &\Longrightarrow x - \varepsilon < y + \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < x - y < 2\varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < x - y < \frac{2}{3}(x-y) \\ &\Longrightarrow 1 < \frac{2}{3}, \text{ce qui est impossible.} \end{aligned}$$

2. Il suffit de prendre (y_n) la suite constante (α) $(resp.\ (\beta))$ dans 1.
3. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que

   $$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \begin{cases} -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \\ -\varepsilon < y_n - l < \varepsilon \end{cases}$$

et alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0 &\Longrightarrow -\varepsilon < x_n - l \leqslant z_n - l \leqslant y_n - l < \varepsilon \\ &\Longrightarrow | z_n - l | < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc (z_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| x_n - l | \leqslant y_n \Longleftrightarrow l - y_n \leqslant x_n \leqslant l + y_n$, il suffit alors d'appliquer le résultat précédent (les deux suites $(l - y_n)$ et $(l + y_n)$ sont convergentes vers la même limite l). □

Remarque 4.2

Les propriétés précédentes restent vraies, si les inégalités des hypothèses sont vraies à partir d'un certain rang.

Proposition 4.2

Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques, alors :

1. *Si $x_n \to 0$ et (y_n) est bornée, alors $x_n y_n \to 0$.*
2. *Si $x_n \to l$, alors $\mid x_n \mid \to \mid l \mid$. La réciproque est fausse.*

Preuve.

1. (y_n) est bornée, alors $(\exists M > 0) : (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mid y_n \mid \leqslant M$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mid x_n . y_n \mid \leqslant M \mid x_n \mid$, or $x_n \to 0$, d'où $(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ si \ n \geqslant n_0, \ \mid x_n \mid < \frac{\varepsilon}{M}$ et par suite $(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ si \ n \geqslant n_0, \ \mid x_n . y_n \mid < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n . y_n = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, alors $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - l \mid < \varepsilon$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid \mid x_n \mid - \mid l \mid \mid \leqslant \mid x_n - l \mid < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mid x_n \mid = \mid l \mid$.
   Pour $x_n = (-1)^n$ on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \mid x_n \mid = 1$ d'où $\mid x_n \mid \to 1$, alors que (x_n) n'a pas de limite.

Corollaire 4.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques, alors :

1. *Si $x_n = o(y_n)$ et (y_n) est bornée, alors $x_n \to 0$.*
2. *Si $x_n \sim y_n$, alors (x_n) et (y_n) sont de même nature : convergent ou diverge au même temps. Et si l'une tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition la proposition précédente et les opérations sur les limites des suites. □

Proposition 4.3

Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques telles que $x_n \leqslant y_n$ à partir d'un certain rang. Alors :

$(x_n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y_n \longrightarrow +\infty)$ *et* $(y_n \longrightarrow -\infty \Longrightarrow x_n \longrightarrow -\infty)$.

Preuve. En exercice. □

Théorème 5.1

Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait : $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \leqslant q < 1$. Alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Preuve. On suppose que la propriété $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \leqslant q < 1$. est vraie pour tout entier naturel n (la preuve dans le cas où cette propriété n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n'est pas très différente). Montrons, alors que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$.
Par récurrence, la propriété est trivialement vérifiée pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$, alors

$$\begin{aligned} \mid u_{n+1} &= \mid u_n \mid . \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \\ &\leqslant \mid u_0 \mid q^n . q \\ &\leqslant \mid u_0 \mid q^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, selon le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$.

Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} | u_0 | q^n = 0$, car $| q |< 1$, d'où la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$. □

Corollaire 5.1

Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls.

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ pour un $\varepsilon < 1$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$ par exemple) et le théorème précédent. □

Exemple 5.1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ est convergente vers 0.

En effet, le résultat est trivialement vérifié pour $a = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}| = \frac{| a |}{n+1}.$$

D'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\mid a \mid}{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Le résultat se déduit alors du corollaire précédent. □

Remarques 5.1

1. *Avec les notations du théorème précédent, si on a pour tout entier naturel* n *à partir d'un certain rang :* $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \geqslant q > 1$, *alors la suite* (u_n) *diverge. En effet, il suffit d'appliquer le théorème à la suite de terme général* $\frac{1}{u_n}$ *pour voir que* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mid u_n \mid = +\infty$.
2. *Toujours avec les notations du théorème précédent, si* $q = 1$ *on ne peut rien dire comme le montre l'exemple suivant.*

Exercice 5.1

Soit (x_n) *une suite numérique. Montrer que :*

1. *Si* (x_n) *est décroissante et tend vers* 0, *alors* $(\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \geqslant 0$.
2. *Si* (x_n) *est croissante et tend vers* 0, *alors* $(\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \leqslant 0$.

Définition 6.1

On dit que deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n - x_n = 0.$

Théorème 6.1

Soient (x_n) et (y_n) deux suites adjacentes telles que (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante, alors :

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant y_n.$
2. *Les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, et elles convergent vers la même limite.*

Preuve.

1. Considérons la suite de terme général $z_n = y_n - x_n$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_{n+1} - z_n = (y_{n+1} - y_n) + (x_n - x_{n+1})$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_{n+1} - z_n \leqslant 0$ d'où la suite (z_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$, alors, d'après l'exercice précédent, $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_n \geqslant 0$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant y_n$.
2. On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$, d'où (x_n) est croissante majorée par y_0 et (y_n) est décroissante minorée par x_0, elles sont donc convergentes ; soient $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l'$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n - x_n = 0 = l - l'$, donc $l = l'$. □

Exemple 6.1

Les suites (x_n) *et* (y_n) *définies pour* $n > 0$ *par :*
$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ *et* $y_n = x_n + \frac{1}{n!n}$ *sont adjacentes.*

- (x_n) *est croissante :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}$, *d'où* $x_{n+1} > x_n$.
- (y_n) *est décroissante : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n\,(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n!n\,(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Et alors, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ y_{n+1} - y_n < 0.$

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ y_n - x_n = \frac{1}{n!n}$, d'où $y_n - x_n \longrightarrow 0.$

Exercice 6.1

Montrer que la limite commune des deux suites précédentes est irrationnelle.

Exercice 6.2

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *la suite de terme général :* $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Pour tout n *de* $\mathbb{N}$, *considérons* $x_n = u_{2n}$ *et* $y_n = u_{2n+1}$.

1. *Montrer que les deux suites* (x_n) *et* (y_n) *sont adjacentes.*
2. *En déduire la nature de la suite* (u_n).

Théorème (*Propriété des segments emboités*) **6.1**

Si $([a_n, b_n])$ *est une suite décroissante* $((\forall n \in \mathbb{N})\ \ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$ *d'intervalles fermés et bornés (segments) de* $\mathbb{R}$ *telle que* $b_n - a_n \longrightarrow 0$, *alors leur intersection* $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *est réduite à un point.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, donc $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ c-à-d (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ; il s'agit alors de deux suites adjacentes puisque $b_n - a_n \longrightarrow 0$. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite commune de (a_n) et (b_n) on a :

• $l = \sup\limits_n a_n = \inf\limits_n b_n$,

• $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ a_n \leqslant l \leqslant b_n$, d'où $l \in J$ et $J \neq \emptyset$.

• Supposons que J contient un autre point l' avec $l' \geqslant l$ *(par exemple)*, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n \leqslant l \leqslant l' \leqslant b_n$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \mid l - l' \mid \leqslant \mid b_n - a_n \mid$. Comme $b_n - a_n \longrightarrow 0$, alors $l = l'$. □

Définition 7.1

On dit qu'une suite réelle (x_n) est de ***Cauchy*** *(ou vérifie la condition ou le critère de Cauchy) si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon >)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \left(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2\right)\ (m \geqslant n_0 \text{ et } n \geqslant n_0) \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon.$$

Exercice 7.1

Soit (x_n) une suite réelle.
Montrer que : (x_n) est de ***Cauchy*** *si, et seulement si*

$$(\forall \varepsilon >)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \left(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2\right)\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_{n+m} - x_n \mid < \varepsilon.$$

Proposition 7.1

1. *Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite réelle de Cauchy est une suite bornée.*

Preuve. Soit (x_n) une suite réelle, alors :

1. Si (x_n) est convergente vers un réel l.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - l \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:
   $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, on a :
$$\begin{aligned} \mid x_n - x_m \mid &= \mid (x_n - l) - (x_m - l) \mid \\ &\leqslant \mid x_n - l \mid + \mid x_m - l \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Si (x_n) est de Cauchy , alors, pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$:
   $n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, on a : $\mid x_n - x_m \mid < 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $n \geqslant n_0$ on a :
$$\begin{aligned} \mid x_n \mid &= \mid x_n - x_{n_0} + x_{n_0} \mid \\ &\leqslant \mid x_n - x_{n_0} \mid + \mid x_{n_0} \mid \\ &\leqslant 1 + \mid x_{n_0} \mid . \end{aligned}$$
   Soit $A = sup\{\mid x_0 \mid, \mid x_1 \mid, ..., \mid x_{n_0} \mid, 1 + \mid x_{n_0} \mid\}$, alors
   $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \mid x_n \mid \leqslant A$.

Théorème($\mathbb{R}$ est est complet) 7.1

Une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente (vers une limite finie) si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy.
On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Preuve. $\Longrightarrow$] Proposition 1.
$\Longleftarrow$] (x_n) est une suite de Cauchy, elle est donc bornée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soient $X_p = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N} \ et \ n \geqslant p\}$, $a_p = inf\,(X_p)$ et $b_p = sup\,(X_p)$ (existent car X_p est non vide et borné).
On a : (b_n) et (a_n) sont adjacentes, en effet :
• $(\forall p \in \mathbb{N}) \ \ X_{p+1} \subset X_p, \ a_p \leqslant a_{p+1} \ et \ \ b_{p+1} \leqslant b_p$; donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
• Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$\left(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\right) \ n \geqslant n_0 \ et \ m \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $p \geqslant n_0$, alors, par définition de $b_p\,(= sup\,(X_p))$, il existe $n \geqslant p \geqslant n_0$ tel que $b_p - \frac{\varepsilon}{3} < x_n \leqslant b_p$; et par définition de $a_p\,(= inf\,(X_p))$,

il existe $m \geqslant p \geqslant n_0$ tel que $a_p \leqslant x_m < a_p + \frac{\varepsilon}{3}$; et par suite :
$0 \leqslant b_p - x_n < \frac{\varepsilon}{3}$ et $-\frac{\varepsilon}{3} < a_p - x_m \leqslant 0$, ou encore $| b_p - x_n | < \frac{\varepsilon}{3}$ et $| a_p - x_m | < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a donc

$$\begin{aligned} | b_p - a_p | &\leqslant | b_p - x_n | + | x_n - x_m | + | x_m - a_p | \\ &< 3\,\frac{\varepsilon}{3} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $b_n - a_n \longrightarrow 0$.
Soit x la limite commune de (a_n) et (b_n), alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, par définition de a_p et b_p, $a_p \leqslant x_p \leqslant b_p$, donc la suite (x_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. □

Remarque 7.1

$\mathbb{Q}$ n'est pas complet, en effet la suite de l'exemple $2.5.1$ est de Cauchy mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.
On peut voir ainsi, intuitivement, $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Et c'est de cette façon qu'on comble les "trous", dont on a parlé dans l'introduction du chapitre 1, qui se trouvent dans $\mathbb{Q}$.

Définition 8.1

Soient (x_n) une suite numérique. On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite (x_n), toute suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, c-à-d : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \; n > m \Longrightarrow \varphi(n) > \varphi(m)$). (On montre par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \varphi(n) \geqslant n$).

Exemple 8.1

1. *Soit $(x_n) = (6n)$ et $\varphi(n) = 3n$, la sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right) = (18n)$.*
2. *Pour $(x_n)_n = ((-1)^n)_n$ et $\varphi(n) = 2n$, la sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right) = \left((-1)^{2n}\right)_n$ c'est la suite constante égale à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit (x_n) la suite de terme général : $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2}$, alors :*
   - (i) *Pour $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \varphi(n) = 2n : x_{2n} = 0$.*
   - (ii) *Pour $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \varphi(n) = 2n+1 : x_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)^2}$.*
   - (iii) *Pour $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \varphi(n) = 4n+3 : x_{4n+3} = \frac{2}{(4n+3)^2}$.*

Proposition 8.1

Soit (x_n) une suite numérique qui tend vers un x appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors toute suite extraite de (x_n) tend vers x.

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}$. Supposons que la suite (x_n) tend vers x et soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (x_n).
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow | x_n - x | < \varepsilon$;
d'où

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0 \\ &\Longrightarrow | x_{\varphi(n)} - x | < \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$.
Les cas où $x \in \{+\infty, -\infty\}$ se traitent de la même façon. $\square$

Proposition 8.2

Soit (x_n) une suite numérique.

1. *Si (x_n) admet une suite extraite divergente, alors elle est divergente.*
2. *Si (x_n) admet deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes, alors (x_n) diverge.*
3. *Pour $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ on a :*

$$(x_n) \ tend \ vers \ l \ \Leftrightarrow \begin{cases} (x_{2n}) \ tend \ vers \ l \\ (x_{2n+1}) \ tend \ vers \ l \end{cases}$$

Preuve. 1. et 2. sont évidentes d'après la proposition précédente .
3. • Si $x_n \longrightarrow l$, alors d'après la proposition précédente, $x_{2n} \longrightarrow l$ et $x_{2n+1} \longrightarrow l$.
• Réciproquement, on suppose que $x_{2n} \longrightarrow l$ et $x_{2n+1} \longrightarrow l$ où $l \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que
$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_1 \Longrightarrow | x_{2n} - l | < \varepsilon$ et $n \geqslant n_2 \Longrightarrow | x_{2n+1} - l | < \varepsilon$. Soit $N = max\,(2n_1, 2n_2 + 1)$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned} Si\ p\ est\ pair\ p \geqslant N &\Longrightarrow p \geqslant 2n_1 \\ &\Longrightarrow \frac{p}{2} \geqslant n_1 \\ &\Longrightarrow \mid x_{2\frac{p}{2}} - l \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Si\ p\ est\ impair\ p \geqslant N &\Longrightarrow p \geqslant 2n_2 + 1 \\ &\Longrightarrow \frac{p-1}{2} \geqslant n_2 \\ &\Longrightarrow \mid x_{2\frac{p-1}{2}+1} - l \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(\forall p \in \mathbb{N})\ p \geqslant N \Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon$. Ce qui montre que $\lim_{p \to +\infty} x_p = l$.

Les cas où $l \in \{+\infty, -\infty\}$ se traitent de la même façon.

Exemples 8.1

Soient (x_n) *et* $(y_n)_{n\geqslant 2}$ *les suites de termes généraux* $x_n = (-1)^n$ *et* $y_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

1. $x_{2n} = 1$ *et* $x_{2n+1} = -1$ *d'où* $x_{2n} \longrightarrow 1$ *et* $x_{2n+1} \longrightarrow -1$ *donc* (x_n) *diverge.*
2. $y_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ *et* $y_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$ *si* $n \neq 0$, *d'où :* $y_{2n} \to 0$ *et* $y_{2n+1} \to 0$, *donc* $(y_n)_{n\geqslant 2}$ *converge vers* 0.

Définition 8.2

Soient (x_n) *une suite numérique et* x *un élément de* $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
On dit que x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,* x *est limite d'une sous-suite de* (x_n) .

Exemple 8.2

La suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\;\; x_n = \frac{n}{2} sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ *admet* 0 , $+\infty$ *et* $-\infty$ *comme valeurs d'adhérences.*
$x_{8n} \longrightarrow 0$, $x_{8n+1} \longrightarrow +\infty$ et $x_{8n+5} \longrightarrow -\infty$.

Proposition 8.3

Soient (x_n) une suite numérique et x un nombre réel.

1. *x est une valeur d'adhérence de (x_n) si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite (x_n), c-à-d : $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ est infini.*
2. *$+\infty \ (resp. \ -\infty)$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si, et seulement si, pour tout $A > 0$, l'ensemble $]A, +\infty[\ (resp. \ ]-\infty, -A[)$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) c-à-d : $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in]A, +\infty[\}$ (resp. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in]-\infty, -A[\}$) est infini.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, alors x étant une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$, d'où

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_{\varphi(n)} \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[,$$

donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n) car $\{\varphi(n)\ /\ n \geqslant n_0\}$ est infini (car sinon, soit $N = max(\{\varphi(n)\ /\ n \geqslant n_0\})$, on a $\varphi(N+1) \leqslant N$ et $\varphi(N+1) \geqslant N+1 > N$, ce qui est absurde).

$\Longleftarrow$] On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ I_n = \left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) c-à-d : $\{m \in \mathbb{N}\ /\ x_m \in I_n\}$ est infini .

- Pour $k=0$, on prend $\varphi(0) = 0$,
- Pour $k=1$, $\{m \in \mathbb{N}\ /\ x_m \in I_1\}$ est infini, soit $\varphi(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{\varphi(1)} \in I_1$, on a bien $\varphi(1) > \varphi(0)$.
- Pour $k=2$, I_2 contient une infinité de termes de la suite (x_n) , donc

$$\{m \in \mathbb{N}\ /\ m > \varphi(1)\ \ et\ x_m \in I_2\} \neq \emptyset,$$

sinon $\{m \in \mathbb{N}\ /\ x_m \in I_1\} \subset \{m \in \mathbb{N}\ /\ m \leqslant \varphi(1)\}$ absurde (le premier ensemble est infini, le second est fini) ; soit $\varphi(2) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{\varphi(2)} \in I_2$ et $\varphi(2) > \varphi(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construit $\varphi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}\ et\ 0 \leqslant k \leqslant n$ tels que $(\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\})\ \ \varphi(k+1) > \varphi(k)$, alors I_{n+1}

contient une infinité de termes de la suite (x_n) , donc $\{m \in \mathbb{N} \ / \ m > \varphi(n) \ \ et \ x_m \in I_{n+1}\} \neq \emptyset$, sinon

$$\{m \in \mathbb{N} \ / \ x_m \in I_{n+1}\} \subset \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leqslant \varphi(n)\},$$

absurde (le premier ensemble est infini, le second est fini) ; soit $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(n+1)} \in I_{n+1}$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.
Donc, par le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ (\exists \varphi(n) \in \mathbb{N}) : x_{\varphi(n+1)} \in I_{n+1} \, et \, \varphi(n+1) > \varphi(n) \ avec \, \varphi(0) = 0.$$

On définit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ x - \frac{1}{n} < x_{\varphi(n)} < x + \frac{1}{n}$; donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est une sous-suite de (x_n) et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = x$.

2. Même démonstration que 1, en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n =]n, +\infty[\ \ (resp. \ \ ]-\infty, n[)$.

Lemme 8.1

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. *Alors*

$$A \text{ est infini} \iff (\forall N \in \mathbb{N}^*) \ (\exists n \geqslant N) \ : n \in A.$$

Preuve. $\Longrightarrow$] Sinon, $(\exists N \in \mathbb{N}^*) : (\forall n \geqslant N) \ : n \notin A$, d'où $A \subset \{0, 1, 2, ..., N-1\}$, absurde .
$\Longleftarrow$] Sinon, c-à-d : on suppose que A est fini . Soit $M = Max\,(A)$, alors $(\forall n \geqslant M+1) \ n \notin A$, absurde . □

Corollaire 8.1

Soient (x_n) *une suite numérique et* x *un nombre réel .*

1. x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geqslant N) : \mid x_n - x \mid < \varepsilon$.
2. $+\infty \ (resp. \ -\infty)$ *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,* $(\forall A > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geqslant N) : x_n > A \ (resp. \ x_n < -A)$.

Preuve.

1. D'après la proposition $2.6.4$, on a :

   $x\ valeur\ d'adhérence\ de\ (x_n) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in]x - \varepsilon, x$

   $\Longrightarrow$] Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, alors :

   $$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\} \\ &= \{n \in \mathbb{N}\ /\ \mid x_n - x \mid < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

   Donc

   $$\begin{aligned} x\ valeur\ d'adhérence\ de\ (x_n) &\Longrightarrow A_\varepsilon\ est\ infini \\ &\Longrightarrow (\exists n \geqslant N)\ \mid x_n - x \mid < \varepsilon\ d'après\ le\ le \end{aligned}$$

   $\Longleftarrow$] Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N : \mid x_n - x \mid < \varepsilon$ c-à-d :

   $$(\exists n \geqslant N) : x_n \in A_\varepsilon,$$

   d'où, d'après le lemme précédent, A_ε est infinie, donc x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

2. Pour $+\infty$ $(resp.\ -\infty)$ (traiter à titre d'exercice).

Théorème $(de\ Bolzano - Weierstrass)$ **8.1**

De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente c-à-d : Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Preuve. Soient (x_n) une suite bornée de nombres réels et a et b deux nombre réels tels que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ a \leqslant x_n \leqslant b$. On a :

- $I_0 = \{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in [a,b]\}$ est infini $(= \mathbb{N})$.
- Soit $c = \frac{a+b}{2}$ (c'est le milieu du segment $[a,b]$). On considère les deux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$. Des deux ensembles $\{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in [a,c]\}$ et $\{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in [c,b]\}$, un au moins est infini .

On désigne par I_1 celui des deux intervalles $[a, c]$ ou $[c, b]$ qui contient une infinité de termes de la suite (x_n) par $\varphi(1)$ l'entier le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n \in I_1\}$, on a $x_{\varphi(1)} \in I_1$ (dans le cas où les deux intervalles ci-dessus contiennent une infinité de termes de la suite, on choisit arbitrairement un parmi eux) ; on note $y_1 = x_{\varphi(1)}$. La longueur de I_1 est $\frac{b-a}{2}$ et $\{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n \in I_1\}$ est infini .

- On recommence sur I_1, ce qui a été fait sur I_0, en considérant le milieu de I_1, on a deux intervalles dont l'un au moins contient une infinité de termes de la suite (x_n) (car $\{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n \in I_1\}$ est infini). On désigne par I_2 cet intervalle et par $\varphi(2)$ le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n \in I_2 \; et \; n > \varphi(1)\}$ ($\neq \emptyset$ déjà vu), on a : $\varphi(2) > \varphi(1)$ et $x_{\varphi(2)} \in I_2$. La longueur de I_2 est $\frac{b-a}{2^2}$ et $\{n \in \mathbb{N} \;/\; x_n \in I_2\}$ est infini ; on note $y_2 = x_{\varphi(2)}$.

- On définit, par récurrence, une suite d'intervalles $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et une suite $(y_n)_{n\geqslant 0} = \left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ telles que : $*\ \ I_0 = [a,b]\,,\, y_0 = x_0,$

$*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on définit $y_{n+1} = x_{\varphi(n+1)}$ par :
$*$ $I_{n+1} \subset I_n$ avec I_{n+1} la moitié de I_n qui contient une infinité de termes de la suite (x_n) et $\varphi(n+1)$ le plus petit élément de $\{k \in \mathbb{N} \ / \ x_k \in I_{n+1} \ et \ k > \varphi(n)\}$, donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et on note $y_{n+1} = x_{\varphi(n+1)}$.

On a donc
$\begin{cases} \bullet \ (y_n) = \left(x_{\varphi(n)}\right) \ est\ une\ suite\ extraite\ de\ \ (x_n)\ \ (\varphi\ est\ strictement\ crois \\ \bullet \ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ y_n \in I_n\ et\ la\ longueur\ de\ I_n\ est\ \frac{b-a}{2^n}. \end{cases}$

(y_n) Cauchy : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$; donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N \Longrightarrow y_n \in I_n\,(\subset I_N)\,,$ d'où

$$\left(\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2\right)\ \ n \geqslant N\ et\ m \geqslant N \Longrightarrow \mid y_n - y_m \mid < \frac{b-a}{2^N}$$
$$< \varepsilon.$$

Donc (y_n) est de Cauchy, elle est donc convergente. D'où le résultat. $\square$

Définition 9.1

Une suite (x_n) est dite arithmétique si, et seulement si, il existe $r \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + r$; r est appelé la ***raison*** *de la suite (x_n).*

Proposition 9.1

Soit (x_n) une suite arithmétique de raison r, alors :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = x_0 + nr$ *et plus généralement* $\left(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\right)$ $x_n = x_p + (n-p)\,r$.
2. i . *Si $r = 0$ alors (x_n) est constante et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$.*
   ii . *Si $r > 0$ alors (x_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.*
   iii . *Si $r < 0$ alors (x_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

Définition 9.2

Une suite (x_n) est dite géométrique si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = qx_n$; q est appelé la ***raison*** *de (x_n).*

Proposition 9.2

1. *Soit $q \in \mathbb{R}$, alors :* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & si \ \mid q \mid < 1 \\ 1 & si \ q = 1 \\ +\infty & si \ q > 1 \\ n'existe\ pas & si \ q \leqslant -1 \end{cases}$
2. *Soit (x_n) une suite géométrique de raison q, alors :*
   i. $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = x_0 q^n$ *et plus généralement* $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)$ $x_n = x_p q^{n-p}$ *si* $q \neq 0$.
   ii. *Si $x_0 \neq 0$, alors (x_n) converge si et seulement si $\mid q \mid < 1$ ou $q = 1$.*

Preuve. Voir le cours de 1^{ere} et 2^{eme} sciences.(Faites la à titre d'exercice).

Proposition (*Approximation d'un nombre réel par des décimaux*) **9.1**

Tout nombre réel x est limite d'une suite unique (x_n) strictement croissante de nombres décimaux. En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \leqslant x < x_n + 10^{-n},$$

x_n est alors une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$, selon la proposition 1.2.4 du chapitre précédent

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists! x_n \in \mathbb{D}) : x_n \leqslant x < x_n + 10^{-n}\ \left(x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}\right).$$

Et alors, $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leqslant x - x_n < 10^{-n}$. Et comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 10^{-n} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$. $\square$

Remarque 9.1

Tout nombre réel est limite d'une suite à termes rationnels car $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, et aussi limite d'une suite à termes irrationnels (prendre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n + 10^{-n}\sqrt{2}$ où (x_n) est la suite de la proposition précédente).

Proposition 9.3

Soit (x_n) une suite numérique. Pour chaque n de $\mathbb{N}$, soit $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$, (S_n) est appelée suite des sommes partielles de (x_n) , alors :

1. *Si (x_n) une suite géométrique de raison q,*
   i. $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = x_0 (1 + q + ... + q^n) = \begin{cases} x_0 (n+1) & si\ q = 1 \\ x_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & si\ q \neq 1 \end{cases}$
   ii. *Si* $\mid q \mid < 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{x_0}{1 - q}$.
   iii. *Si* $\mid q \mid \geqslant 1$ *et* $x_0 \neq 0$, *alors* (S_n) *diverge.*
2. *Si (x_n) une suite arithmétique de raison r,*
   i. $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = (n+1)\ \dfrac{x_0 + x_n}{2} = \dfrac{n+1}{2} (2x_0 + nr)$.
   ii. *Si* $x_0 = 0$ *et* $r = 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$.
   iii. *Si* $r > 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, *indépendamment de la valeur de* x_0.
   iv. *Si* $r < 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$, *indépendamment de la valeur de* x_0.

Preuve.

1. Il suffit d'appliquer la proposition précédente et la formule :

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1+q+\ldots+q^n).$$

2. Voir le cours de 1^{ere} et 2^{eme} sciences.(Faites le à titre d'exercice). □

Définition 9.3

*On dit que qu'une suite numérique (x_n) est une suite **arithmético-géométrique** si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = ax_n + b$.*

Remarque 9.2

i. *Si $a = 1$, (x_n) est une suite arithmétique de raison b.*

ii. *Si $b = 0$, (x_n) est une suite géométrique de raison a.*

Donc les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des suites arithmético-géométriques.

Proposition 9.4

Soit (x_n) *une suite arithmético-géométrique telle que* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = ax_n + b$ *avec* $a \neq 1$. *Et soit* $y_n = x_n - r$ *où* $r = \frac{b}{1-a}$, *alors :*

1. *La suite* (y_n) *est géométrique de raison* a.
2. $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = a^n (x_0 - r) + r$.
3. *Si* $|a| < 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{b}{1-a}$.
4. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} = (x_0 - r) \frac{1-a^n}{1-a} + nr$.

Preuve.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - r = ax_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= ax_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(x_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= a\left(x_n - r\right) = ay_n, \end{aligned}$$
d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ y_{n+1} = ay_n$, donc (y_n) est géométrique de raison a.
2. Puisque (y_n) est géométrique de raison a, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $y_n = a^n y_0$ et $x_n - r = a^n\left(x_0 - r\right)$, d'où $x_n = a^n\left(x_0 - r\right) + r$.
3. Si $\mid a \mid < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = r = \dfrac{b}{1-a}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :
$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} &= (y_0 + r) + (y_1 + r) + \ldots + (y_{n-1} + r) \\ &= (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + nr = y_0 \frac{1-a^n}{1-a} + nr \\ &= (x_0 - r)\frac{1-a^n}{1-a} + nr. \quad \square \end{aligned}$$

Définition 10.1

Soient $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I \subset D_f$ et $a \in I$. La suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

*est appelée une **suite récurrente** associée à la fonction f.*

Exemple 10.1

1. *Les suites aritmético-géométriques (en particulier les suites arithmétiques et géométriques), définies précédemment, sont récurrentes associées à la fonction $x \mapsto ax + b$.*
2. *La suite définie par $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $ad - bc \neq 0$, est une suite récurrente associée à la fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.*

Proposition 10.1

Soit (x_n) une suite récurrente définie par :
$x_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = f(x_n)$ avec $a \in I$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I \subset D_f$, alors :
Si f est continue en un réel l de I et (x_n) converge vers l, alors l est un point fixe de f sur I, c-à-d : $f(l) = l$.

Preuve. Comme $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, alors $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \in I$ (par récurrence). On considère la suite $(y_n)_n = (x_{n+1})_n$. On a :

- $(y_n)_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$, donc $y_n \longrightarrow l$. Et $f(I) \subset I$ entraînent que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad y_n \in I$, et
- la continuité de f en l entraine que $(y_n)_n = (f(x_n))_n$ converge vers $f(l)$ (ce résultat sera démontré ultérieurement dans le chapitre 3 : Fonctions numériques (Continuité)).
- L'unicité de la limite d'une suite entraine que $f(l) = l$.

Remarque 10.1

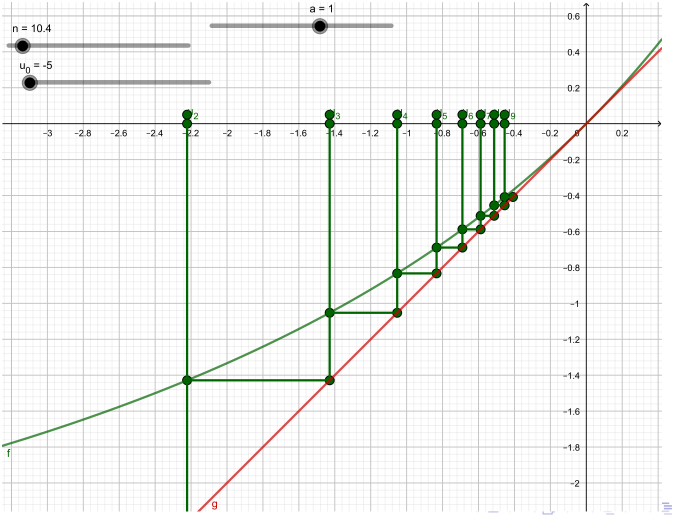
1. *Si l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur I et f est continue sur I, alors (x_n) diverge.*
2. *Il se peut que l'équation $f(x) = x$ admet des solutions sur I et que (x_n) diverge.*
3. *Si (x_n) converge vers l et f est continue en l alors la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(l)$.*

Théorème 10.1

Soient f une fonction numérique, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$, $a \in I$ et (x_n) une suite récurrente définie par :
$x_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = f(x_n)$, alors :

1. *Si f est croissante sur I, alors (x_n) est monotone :*
   (i). *Si $x_0 \leqslant x_1$, alors (x_n) est croissante.*
   (ii). *Si $x_0 \geqslant x_1$, alors (x_n) est décroissante.*
2. *Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de monotonies différentes (c-à-d : l'une est croissante, l'autre est décroissante).Et si l'une converge vers l en lequel f est continue, l'autre est convergente vers $f(l)$.*

1. (i). Supposons que $x_0 \leqslant x_1$, montrons par récurrence que (x_n) est croissante . Pour $n = 0$, l'inégalité $x_0 \leqslant x_1$ est vraie par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \leqslant x_{n+1}$ alors $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$ car f est croissante sur I et $(\forall m \in \mathbb{N})$, $x_m \in I$, d'où $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$ donc la propriété est vraie pour $n+1$.
   Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad x_n \leqslant x_{n+1}$ c-à-d que (x_n) est croissante .
   (ii). Si $x_0 \geqslant x_1$, on montre de la même façon que (x_n) est décroissante.
2. Soit $g = f \circ f$, alors g est croissante sur I(composée de deux fonctions de même monotonie sur I $f(I) \subset I$).
   Posons $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n = x_{2n}$ *et* $v_n = x_{2n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = g(u_n)$, de même $v_{n+1} = g(v_n)$; donc d'après 1, (u_n) et (v_n) sont monotones, et on a
   1^{er} **cas :** Si $x_0 \leqslant x_2$, alors $f(x_0) \geqslant f(x_2)$ c-à-d : $x_1 \geqslant x_3$. On a donc $u_0 \leqslant u_1$, $v_0 \geqslant v_1$ et g croissante sur I, d'où d'après 1, la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
   2^{eme} **cas :** Si $x_0 \geqslant x_2$, alors $f(x_0) \leqslant f(x_2)$ c-à-d : $x_1 \leqslant x_3$. On a donc $u_0 \geqslant u_1$, $v_0 \leqslant v_1$ et g croissante sur I, d'où d'après 1 la suite (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
   Le dernier point du théorème est assuré par *remarque* 10.1. 3.


a = 1
n = 10.4
u_0 = -5
f
g
-3
-2.8
-2.6
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8
-2

Exemple 1 : Étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Réponse : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \sqrt{2+x}$, alors (u_n) est une suite récurrente associée à f qui est strictement croissante sur $D_f = [-2, +\infty[= I$ (Voir le cours de 1^{ere} science)et

$$f(I) = \left[f(-2), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[= [0, +\infty[\, (\subset I).$$

Par ailleurs, $u_0 \in I$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; u_n \in I$. De plus
$u_0 = 1 \; et \; u_1 = f(u_0) = \sqrt{3}$ d'où $u_0 < u_1$ donc (u_n) est croissante.

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leqslant 2$.
Par récurrence : pour $n = 0$ on a $u_0 \leqslant 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant 2$, alors $f(u_n) \leqslant f(2)$ d'où $u_{n+1} \leqslant 2$ $(f(2) = 2)$.
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leqslant 2$.
La suite (u_n) est majorée par 2 et est croissante, elle est donc convergente, et sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I. Or pour tout $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{2+x} = x \\ &\Leftrightarrow 2 + x = x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \; ou \; x = 2. \end{aligned}$$

Donc $l = -1$ ou $l = 2$. Or $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_0 \leqslant u_n$ ((u_n) est croissante) d'où $l \geqslant 1$ $(u_0 = 1)$ donc $l = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exemple 2 : Étudier la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases} .$$

Réponse : Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, alors (u_n) est une suite récurrente associée à f qui est strictement croissante sur $D_f = [-1, +\infty[= I$, (Voir le cours de 1^{ere} science) et

$$f(I) = \left[f(-1), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[= [0, +\infty[\, (\subset I) .$$

Par ailleurs, $u_0 = 7 \; et \; u_1 = f(u_0) = 2$, d'où $u_1 < u_0$, donc (u_n) est décroissante.

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n > 1$. Par récurrence, pour $n = 0$ on a $u_0 > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 1$, alors $f(u_n) > f(1)$ car f est strictement croissante sur I et $(1, u_n) \in I^2$, d'où $u_{n+1} > 1$ $(f(1) = 1)$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$.

La suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante, elle est donc convergente , et sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I.

Or pour tout $x \in I$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \ ou\ x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $l = 1$ ou $l = -\frac{1}{2}$. Or $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n$, d'où $1 \leqslant l$, donc $l = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exemple 3 : Étudier la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right). \end{cases}$$

Où a et A sont deux réels strictement positifs.

Réponse : (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $f(x) - x = \frac{A - x^2}{2x}$ $(*)$, et alors, si (u_n) converge sa limite est l'un des points fixes de f qui sont $-\sqrt{A}$ et $\sqrt{A}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - A}{x^2}\right), \end{aligned}$$

Tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$:

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{A}$	↗	$+\infty$

D'où $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ f(x) \geqslant \sqrt{A}$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_n \geqslant \sqrt{A}$; et selon $(*)$ le signe de $x \mapsto g(x) = f(x) - x$ sur $]0,+\infty[$ est donné dans le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ u_n \geqslant u_{n+1}$; c-à-d $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ; et puisqu'elle est minorée par $\sqrt{A}$, elle est alors convergente vers $\sqrt{A}$.

Exercice $(Examen\ de\ rattrapage\ SMP - SMC\ 2008 - 2009)$ **10.1**

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}. \end{cases}$$

1. *On suppose que $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$*
   - a . *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant 1$.*
   - b . *Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.*
2. *On suppose que $u_0 > 1$.*
   Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Ch.3 : Fonctions numériques d'une variable réelle

Abdelkhalek El amrani et Amina Benbachir Hassani

Department de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
Atlas Fès, Maroc.

abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma

amina.benbachirhassani@usmba.ac.ma

24 janvier 2021

A l'encontre des deux concepts : nombres réels et suites numérique, le concept de fonctions numérique est introduit un peu tard aux programmes de l'école Marocaine ; ainsi :

- **Collège :** 3^{eme} **année :** Introduction des deux classes de fonctions linéaires $x \longmapsto ax$ et affines $x \longmapsto ax+b$ où a et b sont deux nombres réels non nuls. Le tracé de leurs courbes fait appel aux droites définies par leurs équations cartésiennes dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
- **Lycée : Tronc commun :** On introduit le concept de fonction numérique d'une variable réelle . Le domaine de définition, la bornitude, la monotonie, la parité et la courbe représentative d'une fonction numérique sont introduits et illustrés par les exemples $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$, $g : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ et les deux fonctions cos et sin. Une étude complète de ces quatre fonctions est faite et leurs courbes sont tracées, en utilisant des techniques géométriques à savoir la symétrie centrale, axiale et le concept de translation, sans les notions de limite, continuité et dérivabilité ; ainsi la notion de parabole et hyperbole sont introduites pour désigner la courbe de f et g.

- **Lycée : Première année du baccalauréat scientifique :** Une étude analytique , très poussée, des fonctions numérique est introduite. Le programme de mathématique de cette année comporte les quatre chapitres réservées aux fonctions numériques d'une variable réelle :

  1. **Généralités sur les fonctions numériques(semestre 1) :** On présente, d'une façon mathématique, les notions fondamentales telles que : le domaine de définition, bornitude, extrémums absolus et relatifs, périodicité, monotonie et taux des variations, le tracé des courbes des fonctions : $f : x \longmapsto ax^3$, $g : x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto E\left(x\right)$ se fait sans les notions de limite, continuité et dérivabilité.
  2. **Limite des fonctions numériques(semestre 1 et 2) :** On présente, d'une façon mathématique, dans la filière **Science mathématique**, cette notion ; ainsi la fameuse définition de limite finie d'une fonction en un nombre réel, est introduite et illustrée par des exemples :

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \alpha > 0\right) : \left(\forall x \in D_f\right) \ \mid x - x_0 \mid < \alpha \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$$

Les quinze définitions mathématiques des limites sont introduites et illustrées par des exemples.
Les opérations sur les limites, limites et ordre, limites des fonctions de références : **Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan** sont aussi introduites, en particulier le théorème de calcul des limites en l'infini d'une fonction polynomiale ou fraction rationnelle est donné sous cette forme : Si P et Q sont deux fonctions polynomiales non nulles et $n = d°P$ et $m = d°Q$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{\pm\infty} a_n x^n \\ \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} \end{cases}$

3. **Dérivabilité des fonctions numériques(semestre 2) :** On présente, d'une façon mathématique, dans la filière **Science mathématique**, cette notion ; en recommandant dans les instructions officielles, au professeurs, de l'utilisation de l'approximation des fonctions dérivables en un point par des fonctions affines, pour introduire ce concept.
Les opérations sur la dérivabilité, dérivabilité des fonctions de références : **Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan**sont aussi introduites

Les trois applications de la notion de dérivée sont utilisées : **Variation d'une fonction sur un intervalle, Extrémum d'une fonction et l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$.**
4. **Étude des fonctions numériques(semestre 2) :** L'accent est mis, dans ce chapitre, sur la représentation graphique de la courbe représentative d'une fonction numérique. Ainsi on introduit la notion de convexité et concavité et les points d'inflexions d'une telle courbe, le centre de symétrie et l'axe de symétrie, et les branches infinies sont introduite sous forme d'un savoir scientifique et ceci dans toutes les filières scientifiques.

- **Lycée : Deuxième année du baccalauréat scientifique :** Dans le programme de toutes les filières scientifique, une grande importance est donnée aux fonctions numériques d'une variable réelle. Ainsi dans le premier chapitre on introduit les quatre types de la notion de continuité (en un point, à gauche en un point, à droite en un point et sur un intervalle), la définition mathématique de ces types de continuité est introduite, uniquement, à la filière sciences mathématique.

Les opérations sur la continuité, notamment la continuité de la composée de deux fonctions, continuité des fonctions de références : **Les fonctions polynômiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan** sont aussi introduites (sans preuve) : le théorème des valeurs intermédiaires $(T.V.I)$, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, en particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, les images des différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sont calculées à l'aide de la monotonie de cette fonction sur cet intervalle. On introduit aussi le fameux théorème de la bijection monotone à savoir :

Toute application f continue est strictement monotone sur un intervalle I est bijective de cette intervalle vers l'intervalle $f(I)$.

Ce théorème sert à introduire les fonctions **racines nièmes** et les fonctions exponentielles comme bijections réciproques respectives des fonctions $x \longmapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$ et des fonctions logarithmes sur $\mathbb{R}$.

Quant à la fonction **arc-tangente** qui ne figure que dans le programme de sciences mathématique, elle est présentée comme bijection réciproque de la fonction **tangente** sur $\mathbb{R}$. Sont aussi données les propriétés

Dans les deux chapitres : **Dérivabilité** et **Étude des fonctions numériques** , on rappelle les principaux résultats et concepts déjà étudiés au première année, puis on introduit le fameux théorème de la dérivée de la composée :**Si f et g sont deux fonctions numériques de la variable réelle dérivable en x_0 et $f(x_0)$ respectivement, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et** $(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0)) . f^{'}(x_0)$, une démonstration rigoureuse est aussi présentée (pour la filière science mathématique).

On introduit aussi un théorème sur la dérivabilité de la bijection réciproque qu'on applique pour étudier et présenter la dérivée des nouvelles fonctions introduites dans ce niveau à savoir la fonction racine n^{ieme} , puissance rationnelle, la fonction arc-tangente et la fonction exponentielle.

Les théorèmes de **Rolle** , des **accroissements finis** et des deux **inégalités des accroissements finis** sont introduits et démontrés dans la filière science mathématique ; et sont utilisés pour démontrer des résultats admis en 1^{ere} année, en particulier la caractérisation des variations d'une fonction sur un intervalle à partir du signe de sa dérivée

Une étude simple des primitives est donnée, en mettant l'accent sur la classe des fonctions continues, ainsi on présente, sans démonstration les deux théorèmes suivants :

- **Toute fonction continue sur un intervalle admet une fonction primitive sur cet intervalle .**
- **Toute fonction continue sur un intervalle I admet, pour chaque (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$, une unique primitive F sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.**

La fonction logarithme népérien est introduite comme la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Aussi sont présentées et étudiées ses propriétés algébriques et analytiques.
Les courbes des quatre nouvelles fonctions : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ **, arctan, ln et exp** sont tracées, ainsi que leurs composées avec d'autres fonctions sont étudiées.

Introduction :

Dans ce chapitre, on introduira sous forme de savoir savant les concepts précédents : **Fonction numérique d'une variable réelle, les différents types de limites et continuité d'une fonction numérique , le théorème de la bijection monotone,... etc** . La plupart des résultats déjà cités et autres seront introduits et démontrés. En particulier on montrera que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle grâce au théorème de **Weierstrass** qui sera énoncé et démontré, ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires et son cas particulier le théorème de **Cauchy** : **Toute fonction continue sur un intervalle qui prend deux valeurs de signes opposés prend nécessairement la valeur zéro**. La caractérisation séquentielle de la continuité sera donnée et démontrée.
Le nouveau concept : **L'uniformément continuité** d'une fonction sur un intervalle, plus fort que la continuité, sera introduit et illustré par des exemples et renforcé par des propriétés, en particulier le théorème de **Heine.**

Introduction :

Le théorème de la bijection monotone sera énoncé et démontré, puis utilisé pour introduire **Huit** nouvelles fonctions : **acsin, arccos, ch, sh, th, argsh, argch et argth .** On présentera aussi quelques propriétés algébriques et analytiques de ces fonctions.
Le concept de la dérivabilité et les résultats qui s'y attachent sera étudié dans un chapitre à part (le dernier dans dans ce module d'analyse 1).

Définition 2.1

1. *On appelle fonction numérique f de la variable réelle, toute relation liant chaque nombre réel x à au plus un nombre réel noté $f(x)$, lorsqu'il existe, et appelé image de x par f. Et le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} \; / x \text{ admet une image dans } \mathbb{R}\}$ s'appelle le domaine, ou l'ensemble, de définition de f. On note*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ou tout simplement $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pour désigner une fonction numérique f de la variable réelle x.

2. *Si E est une partie non vide de $\mathbb{R}$; on appelle application de E dans $\mathbb{R}$, toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est E, c-à-d : chaque élément de E admet une image et une seule par f dans $\mathbb{R}$.*

Définition 2.2

Soient $f \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de domaine de définition* D_f *. On appelle* ***Courbe****, ou* ***Graphe*** *de* f*, le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *noté* $(\mathcal{C}_f)$ *ou* $(\mathcal{G}_f)$ *, défini par :* $\{(x, f(x)) \; / \; x \in D_f\}$.

Remarque 2.1

Généralement, la courbe d'une fonction numérique f *de la variable réelle* x *est représentée dans un plan rapporté à un repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *, par l'ensemble des points* $M(x, f(x))$ *tels que* $x \in D_f$.

Définition 3.1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application. On dit que :*

1. f *est définie au voisinage de* x_0, *si* E *est un voisinage de* x_0, *c'est-à dire, il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_0 - r, x_0 + r[\subset E$.
2. f *est définie au voisinage de* x_0 *sauf peut être en* x_0, *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} \subset E$ $(]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} =]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[)$.
3. f *est définie à droite de* x_0 $(resp.\ à\ gauche\ de\ x_0)$ *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $[x_0, x_0 + r[\subset E$ $(resp.\ ]x_0 - r, x_0] \subset E)$.
4. f *est définie à droite de* x_0 *sauf peut être en* x_0 $(resp.\ à\ gauche\ de\ x_0\ sauf\ peut\ être\ en\ x_0)$ *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_0, x_0 + r[\subset E$ $(resp.\ ]x_0 - r, x_0[\subset E)$.
5. f *est définie au voisinage de* $+\infty$ $(resp.\ -\infty)$ *s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $]M, +\infty[\subset E$ $(resp.\ ]-\infty, M[\subset E)$.

Remarque 3.1

f est définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 (resp. au voisinage de x_0) si, et seulement si, f est définie à droite de x_0 sauf peut être en x_0 et à gauche de x_0 sauf peut être en x_0 (resp. à droite de x_0 et à gauche de x_0).

Définition 3.2

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique .*

1. *Si* $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ *et* f *définie au voisinage de* x_0 *sauf peut être en* x_0; *on dit que* f *admet* l *comme limite en* x_0, *ou que* $f(x)$ *tend vers* l *lorsque* x *tend vers* x_0, *et on écrit* $l = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x)$, $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *ou* $f(x) \overset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} l$ *si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0) : (\forall x \in E)\ 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$
2. *Si* $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ *et* f *définie à droite de* x_0 *sauf peut être en* x_0 *(resp. à gauche de* x_0 *sauf peut être en* x_0*) ; on dit que* f *admet* l *comme limite à droite en* x_0 *(resp. à gauche en* x_0*) et on écrit* $l = \lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$ *ou* $l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *(resp.* $l = \lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$ *ou* $l = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$*) si, et seulement si,* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0) :$ $(\forall x \in E)\ 0 < x - x_0 < \eta\, (resp. 0 < x_0 - x < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

3. Si $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $l \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de $+\infty$ (resp. au voisinage de $-\infty$) ; on dit que f admet l comme limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) et on écrit $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (resp. $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$) si, et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0)$: $(\forall x \in E)\ \ x > A\,(resp. x < -A) \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$
4. Si $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $l = +\infty$ et f définie au voisinage de x_0; on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. quand x tend vers $-\infty$) et on écrit $+\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (resp. $+\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$) si, et seulement si, $(\forall A > 0)(\exists B > 0) : (\forall x \in E)\ \ x > B\,(resp. x < -B) \Rightarrow f(x) > A.$
5. Si $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $l = -\infty$ et f définie au voisinage de x_0; on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. quand x tend vers $-\infty$) et on écrit $-\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (resp. $-\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$) si, et seulement si, $(\forall A > 0)(\exists B > 0)$: $(\forall x \in E)\ \ x > B\,(resp. x < -B) \Rightarrow f(x) < -A.$

6. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$ (resp. $-\infty$) et f définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0; on dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers x_0 et on écrit $+\infty = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x)$, $+\infty = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x)$, $-\infty = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ ou $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$) si, et seulement si, $(\forall A > 0)\,(\exists \eta > 0) : (\forall x \in E)\ \ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow f(x) > A$ $(resp.\ f(x) < -A)$.

Remarque 3.2

Si $l \in \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on a :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0) :$ $f\left((]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}) \cap E\right) \subset]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ *(car pour tout* $x \in E$ *on a :*
$(\ x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus \{x_0\}) \iff (0 <\mid x - x_0 \mid < \eta)$ *et*
$(f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[) \iff (\mid f(x) - l \mid < \varepsilon)$*).*

Exercice 3.1

Écrire les analogues de la remarque précédente pour $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et les fonctions considérés sont définies sur un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0.

Proposition 3.1

Si f tend vers une limite l quand x tend vers x_0, cette limite est unique.

Preuve. • Cas où x_0 *et* l sont réels.
On suppose f tendant vars une autre limite l' avec $l' \neq l$.
Soit $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{3}$, il existe η_1 et η_2 tels que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{cases} 0 <| x - x_0 |< \eta_1 \Longrightarrow | f(x) - l |< \varepsilon \\ 0 <| x - x_0 |< \eta_2 \Longrightarrow | f(x) - l' |< \varepsilon \end{cases}$$

D'où pour $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$, on a :

$$\begin{aligned}
0 <\mid x - x_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_1 \ et \ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_2 \\
&\Longrightarrow (\mid f(x) - l \mid < \varepsilon) \ \ et \left(\mid f(x) - l^{'} \mid < \varepsilon\right) \\
&\Longrightarrow 0 <\mid l - l^{'} \mid \leqslant \mid f(x) - l \mid + \mid f(x) - l^{'} \mid \\
&\Longrightarrow 0 <\mid l - l^{'} \mid < \varepsilon + \varepsilon < \frac{2}{3} \mid l - l^{'} \mid \\
&\Longrightarrow 1 < \frac{2}{3} \ ; \ ce \ qui \ est \ absurde. \quad \square
\end{aligned}$$

Exercice 3.2

Démontrer le résultat ci-dessus pour les autres cas de x_0 et l appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 3.2

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie au voisinage d'un réel x_0 sauf peut être en x_0 et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Preuve. • Pour $l \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$] Évidente, il suffit de revenir aux définitions.

$\Longleftarrow$] Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists \eta_1 > 0)$ $(\exists \eta_2 > 0)$:

$$(\forall x \in E) \begin{cases} 0 < x - x_0 < \eta_1 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon \\ -\eta_2 < x - x_0 < 0 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta &\Longleftrightarrow -\eta < x - x_0 < \eta \ et \ x \neq x_0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < x - x_0 < \eta \ ou \ -\eta < x - x_0 < 0 \\ &\Longrightarrow 0 < x - x_0 < \eta_2 \ ou \ -\eta_1 < x - x_0 < 0 \\ &\quad (car \ \eta \leqslant \eta_1 \ et \ \eta \leqslant \eta_2) \\ &\Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l.$

• Pour les autres cas de $l \in \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice) . $\square$

Proposition(Caractérisation séquentielle de la limite) 1

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction numérique,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *, alors :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *si , et seulement si, pour toute suite* (u_n) *de points de* E*, dont tous les termes sont différents de* x_0 *à partir d'un certain rang, qui tend vers* x_0*, la suite* $(f(u_n))$ *tend vers* l*.*

Preuve. • Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$] On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit (u_n) une suite de points de E , $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que , $(\forall n \in \{N_0, N_0 + 1, ...\})\ u_n \neq l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$. Montrons que $(f(u_n))$ tend vers l.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 : (\forall x \in E)\ 0 <| x - x_0 |< \eta$

Proposition(Caractérisation séquentielle de la limite) 1

Soient $f \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction numérique,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *, alors :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *si , et seulement si, pour toute suite* (u_n) *de points de* E*, dont tous les termes sont différents de* x_0 *à partir d'un certain rang, qui tend vers* x_0*, la suite* $(f(u_n))$ *tend vers* l*.*

Preuve. • Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$] On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit (u_n) une suite de points de E , $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que , $(\forall n \in \{N_0, N_0+1, ...\})\ u_n \neq l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$. Montrons que $(f(u_n))$ tend vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 : (\forall x \in E)\ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \Longrightarrow$

Proposition(Caractérisation séquentielle de la limite) 1

Soient $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction numérique,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *, alors :* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *si , et seulement si, pour toute suite* (u_n) *de points de* E*, dont tous les termes sont différents de* x_0 *à partir d'un certain rang, qui tend vers* x_0*, la suite* $(f(u_n))$ *tend vers* l.

Preuve. • Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$] On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit (u_n) une suite de points de E , $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que , $(\forall n \in \{N_0, N_0+1, ...\})\ u_n \neq l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$. Montrons que $(f(u_n))$ tend vers l.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 : (\forall x \in E)\ 0 <| x - x_0 |< \eta \Longrightarrow \ | f(x) - l |< \varepsilon$.
Et comme $u_n \longrightarrow x_0$, alors pour ce η, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$:
$(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N_1 \Longrightarrow | u_n - x_0 < \eta$, d'où pour $N = max(N_0, N_1)$, on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N \Longrightarrow 0 <| u_n - x_0 < \eta$, d'où, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ n \geqslant N \Longrightarrow | f(u_n) - l |< \varepsilon$; donc $f(u_n) \longrightarrow l$.

$\Longleftarrow$] Supposons que f n'admet pas l pour limite quand $x \longrightarrow x_0$, alors, $(\exists \varepsilon > 0) : (\forall \eta > 0)\,(\exists x \in E) : 0 <\mid x - x_0 \mid< \eta$ et $\mid f(x) - l \mid \geqslant \varepsilon$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\eta = \frac{1}{n}$, $(\exists u_n \in E) : 0 <\mid u_n - x_0 \mid< \frac{1}{n}$ et $\mid f(u_n) - l \mid \geqslant \varepsilon$. Il existe, donc, une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de points de E, non constante à partir d'un certain rang, qui tend vers x_0 et la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers l.

• Pour les autres cas de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice) . $\square$

Remarque 3.3

1. *Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) de même limite x_0 et telles que les deux suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ possèdent des limites différentes.*
2. *Pour montrer qu'une fonction ne tend pas vers une limite finie quand $x \longrightarrow x_0$; il suffit trouver une suite (u_n) qui tend vers x_0 et telle que la suite $(f(u_n))$ diverge (($f(u_n)$) tend vers l'infini ou n'a pas de limite finie).*

Exemple 3.1

La fonction $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. En effet :

• *Pour (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$; on a : $u_n \longrightarrow 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 0$, d'où $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; et*

• *Pour (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = \frac{1}{\pi+2n\pi}$; on a : $v_n \longrightarrow 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos(\pi+2n\pi) = -1$, d'où $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.*

Remarque 3.4

Sous les conditions de la proposition précédente, si on enlève la condition : (u_n) *est non constante à partir d'un certain rang, l'implication* $\Longrightarrow]$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$ *n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant : Soient* l *et* l' *deux nombres réels distincts,* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Soient* f *et* (u_n) *la fonction et la suite définies par :*

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = l \quad si\ x \neq x_0 \\ f(x_0) = l' \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{c} (\forall n \geqslant n_0)\ \ u_n = x_0 \\ u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}\ sont\ donn\acute{e}s\ dans\ \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{c} (\forall n \geqslant n_0)\ \ f(u_n) = l' \\ f(u_0), f(u_1), ..., f(u_{n_0-1}) \in \left\{l, l'\right\} \end{array}\right. ,$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ *mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l'$ *et* $l \neq l'$. $\square$

Proposition (Limite et ordre) 1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *trois fonctions,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $\left(l, l'\right) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, *alors* $l \leqslant l'$.
2. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
3. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
4. *Si* $(\forall x \in E) \ \mid f(x) - l \mid \leqslant g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
5. *Si* $h \leqslant f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
   Avec $f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in E) \ f(x) \leqslant g(x)$

Preuve.

1. • Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On fait une démonstration par l'absurde, en supposant que $l^{'} < l$; soient M_1 et M_2 deux nombres réels tels que : $l^{'} < M_1 < M_2 < l$.
   D'où, pour $M_1 - l^{'} > 0$, il existe $\eta_1 > 0$:
   $(\forall x \in E) \quad | x - x_0 | < \eta_1 \Longrightarrow | g(x) - l^{'} | < M_1 - l^{'}$. Et pour $l - M_2 > 0$, il existe $\eta_2 > 0$:
   $(\forall x \in E) \quad | x - x_0 | < \eta_2 \Longrightarrow | f(x) - l | < l - M_2$.
   Soit $x \in E$ tel que $| x - x_0 | < inf(\eta_1, \eta_2)$ (x existe car E est un voisinage de x_0), alors : $\begin{cases} l^{'} - M_1 < g(x) - l^{'} < M_1 - l^{'} \\ M_2 - l < f(x) - l < l - M_2. \end{cases}$
   Donc $g(x) < M_1 < M_2 < f(x)$, qui est en contradiction avec $f \leqslant g$.
   • Pour les autres cas de $x_0 \in \cup \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice).
   Pour les propriétés de 2. à 4. il suffit d'appliquer les définitions .
5. La condition imposée implique que
   $(\forall x \in E) \ | f(x) - l | \leqslant max(| g(x) - l |, | h(x) - l |$, il suffit alors d'utiliser la définition de la limite (ou bien la propriété 4.).

Proposition(Limite de la composée) 1

Soient $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}, f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f(E) \subset F$ *et* $\left(x_0, l, l^{'}\right) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^3$. *Alors :*
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *il existe* $r > 0$ *tel que*
$(\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\})$ $f(x) \neq l$ *et* $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l^{'}$ *alors*
$\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l^{'}$.

Preuve. • Cas où $\left(x_0, l, l^{'}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors : $\exists \eta > 0 : (\forall y \in F) \quad 0 <| y - l |< \eta \Longrightarrow | g(y) - l^{'} |< \varepsilon$ (car $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l^{'}$) ; et pour ce η, il existe $r^{'} > 0$:
$(\forall x \in E) \quad 0 <| x - x_0 |< r^{'} \Longrightarrow | f(x) - l |< \eta$, d'où pour $\alpha = min\left(r, r^{'}\right)$, on a :
$(\forall x \in E) \quad 0 <| x - x_0 |< \alpha \Longrightarrow 0 <| f(x) - l |< \eta$. Donc pour tout $x \in E$, on a :

$$0 <| x - x_0 |< \alpha \Longrightarrow (f(x) \in F \ et \ 0 <| f(x) - l |< \eta)$$

• Cas où $x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty$ *et* $l' = +\infty$.
Soit $A > 0$, alors : $(\exists B > 0)$: $(\forall y \in F) \quad y > B \Longrightarrow g(y) > A$ (car $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$) ; et pour ce B, il existe $\alpha > 0$:
$(\forall x \in E) \quad 0 <| x - x_0 |< \alpha \Longrightarrow f(x) > B$ (car $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$).
Donc pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} 0 <| x - x_0 |< \alpha &\Longrightarrow (f(x) \in F \text{ } et \text{ } f(x) > B) \\ &\Longrightarrow g(f(x)) > A \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) > A. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = +\infty$.
• Pour les autres cas (à traiter à titre d'exercice) . □

Remarque 3.5

Sous les conditions de la proposition précédente, si on enlève la condition : f est non constante au voisinage de x_0; la conclusion $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=l'$ n'est pas toujours vraie comme le montre les exemples des fonctions numériques f, g suivantes définies sur $\mathbb{R}$: Soient l et l' deux nombres réels distincts et $x_0\in\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} f(x)=l & si\ x\neq x_0 \\ f(x_0)=l' \end{cases}$ *et* $\begin{cases} g(x)=l' & si\ x\neq l \\ g(l)=l. \end{cases}$ *Alors* $\begin{cases} g\circ f(x)=l & si\ x\neq x_0 \\ g\circ f(x_0)=l' \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y)=l'$ *mais* $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=l$ *et* $l\neq l'$.

2. $\begin{cases} f(x)=l & si\ x\neq x_0 \\ f(x_0)=l' \end{cases}$ *et* $\begin{cases} g(x)=\frac{1}{(x-l)^2} & si\ x\neq l \\ g(l)=l. \end{cases}$ *Alors* $\begin{cases} g\circ f(x)=l & si\ x\neq x_0 \\ g\circ f(x_0)=\frac{1}{(l'-l)^2} \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{y\to l} g(y)=+\infty$ *mais* $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x)=l$ *et* $l\neq+\infty$.

3. *Avec les fonctions f et g de l'exemple 2.,* $\lim\limits_{y\to l} -g(y)=-\infty$ *mais* $\lim\limits_{x\to x_0} -g\circ f(x)=-l$ *et* $-l\neq-\infty$.

Proposition (Opérations sur les limites) 1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *et* $(x_0, l, h) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^3$ *telles que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = h$. *Alors :*

1. *si* $l + h$ *est défini, alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + h$.
2. *si* lh *est défini, alors* $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l.h$.
3. *si* $l \neq 0$, *alors* $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* x_0 *sauf peut être en* x_0 *et* $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.
On a $(\forall x \in E)$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)\ g(x)$ *et pour* $f(x) \neq 0$ $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Preuve.

1 et 2. Soit (u_n) une suite d'éléments de E, non constante à partir d'un certain rang, convergeant vers x_0. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Longrightarrow f(u_n) \longrightarrow l \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = h \Longrightarrow g(u_n) \longrightarrow h. \end{cases}$$

On en déduit que $f(u_n) + g(u_n) \longrightarrow l + h$ et $f(u_n)\, g(u_n) \longrightarrow lh$ et alors $(f+g)(u_n) \longrightarrow l + h$ et $(fg)(u_n) \longrightarrow lh$ et par suite $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + h$ et $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = l.h.$

3. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \; et \; l \in \mathbb{R}^*$, alors : pour $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, il existe $\eta > 0$: $(\forall x \in E)\ \ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \frac{|l|}{2}$. Donc pour tout $x \in E \setminus \{x_0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
0 <\mid x - x_0 \mid < \eta &\Longrightarrow \mid l \mid - \frac{\mid l \mid}{2} < \mid l \mid - \mid f(x) - l \mid \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{\mid l \mid}{2} < \mid l \mid - \mid l - f(x) \mid \leqslant \mid\mid l \mid - \mid l - f(x) \mid\mid \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{\mid l \mid}{2} < \mid\mid l \mid - \mid l - f(x) \mid\mid \leqslant \mid l - l + f(x) \mid \\
&\Longrightarrow 0 < \frac{\mid l \mid}{2} < \mid f(x) \mid .
\end{aligned}$$

Donc
$(\forall x \in E \setminus \{x_0\})\ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x) \mid > \frac{|l|}{2}\ \ (*)\ \ \Longrightarrow f(x) \neq 0.$
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ est alors définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

D'après ce qui précède, $(\exists \eta > 0)$:
$(\forall x \in E)\ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x) \mid > \frac{|l|}{2} > 0.$

Soit $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$: $(\forall x \in E)\ 0 <| x - x_0 |< \alpha \Longrightarrow | f(x) - l |< \varepsilon \frac{|l|^2}{2}$.
Soit $\beta = inf(\eta, \alpha)$, alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
0 <| x - x_0 |< \beta &\Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{| f(x) - l |}{| f(x)\, l |} \\
&\Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| \leqslant \varepsilon \frac{| l |^2}{2} \frac{1}{| f(x) | \, | l |} \\
&\Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon \frac{| l |^2}{2} \frac{2}{| l |} \frac{1}{| l |} \\
&\qquad \left(car \ \ (*) \Longrightarrow \frac{1}{| f(x) |} < \frac{2}{| l |} \right) \\
&\Longrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$. □

Exercice 3.3

Montrer que :

1. *Pour* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (resp. \ -\infty)$, $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* x_0 *et* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$
2. *Pour* $x_0 = +\infty \ ou \ -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (resp. \ -\infty)$, *alors* $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* x_0 *et* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$
3. *Pour* $x_0 = +\infty \ ou \ -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \ et \ l \in \mathbb{R}^*$; $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* x_0 *et* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}.$

Remarque 3.6

1. *Les propriétés des opérations sur les limites en un réel x_0 sont vraies pour les limites à droites et à gauche en x_0 .*
2. *Les propriétés des opérations sur les limites peuvent-être résumées dans le tableau suivant :*

Fonction	**f**	**g**	**f + g**	**f . g**	**f/g**	**|f|**	$\sqrt[n]{f}$ (n$\in \mathbb{N}^*$)
Limite en α **Où** $\alpha \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$ **et** $a \in IR$	l	l'	$l+l'$	ll'	l/l' si $l' \neq 0$, **F.I** si $l = l' = 0$ $(\text{signe de } l\, g)\infty$ si $l' = 0$ et $l \neq 0$	$\|l\|$	$\sqrt[n]{l}$ Si $f \geq 0$ au voisinage de α
		$+\infty$	$+\infty$	$(\text{signe de } l)\infty$ si $l \neq 0$, **F.I** si $l = 0$	0		
		$-\infty$	$-\infty$	$(\text{signe de } -l)\infty$ si $l \neq 0$, **F.I** si $l = 0$			
	$+\infty$	l'	$+\infty$	$(\text{signe de } l')\infty$ si $l' \neq 0$, **F.I** si $l' = 0$	$(\text{signe de } g)\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I**		
		$-\infty$	Forme indéterminée(F.I)	$-\infty$			
	$-\infty$	l'	$-\infty$	$(\text{signe de } -l')\infty$ si $l' \neq 0$, **F.I** si $l' = 0$	$(\text{signe de } -g)\infty$	$+\infty$	N'est pas définie
		$+\infty$	**F.I**	$-\infty$	**F.I**		
		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$			

On rappelle les limites usuelles suivantes(voir 1^{ere} science) :

Propriétés 3.1

1. *Si f est une fonction constante sur un intervalle ouvert I (c-à-d : $(\forall x \in I)\ \ f(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$, alors $(\forall a \in I)\ \ \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.*
2. *Si f est une fonction polynômiale ou sin ou cos ou exp, alors : $(\forall a \in \mathbb{R}) \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
3. *Si f est une fonction fraction rationnelle ou tan ou ln, alors : $(\forall a \in D_f) \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $(D_f = domaine\ de\ définition\ de\ f)$.*
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tanx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = 1.$
5. *Les propriétés précédentes sont vraies pour les limites à droites et à gauche en un point.*
6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \ , \ si\ n\ est\ pair \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = -\infty \ , \ si\ n\ est\ impair. \end{cases}$

ii. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ si $a_n \neq 0$.

7. Pour tous entiers naturels non nuls n et m
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ si $a_n b_m \neq 0$.

8. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n lnx = 0$.

Preuve. En exercice .

Définitions 4.1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in E$.

1. *Pour* f *définie au voisinage de* x_0, f *est continue en* x_0 *signifie que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; *c-à-d :*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) : \forall x \in E, \ | x - x_0 | < \eta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

2. *Pour* f *définie à gauche de* x_0*(resp. à droite de* x_0*) ;* f *est continue à à gauche en* x_0 *(resp. à droite en* x_0*) signifie que* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ *(resp.* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*).*
3. f *est discontinue en* x_0 *(resp. à gauche en* x_0*, resp. à droite en* x_0*) signifie que* f *n'est pas continue en* x_0 *(resp. n'est pas continue à gauche en* x_0*, resp. n'est pas continue à droite en* x_0*).*
4. f *est discontinue en* x_0 *si, et seulement si,*

$$(\exists \varepsilon > 0) \ : \ (\forall \eta > 0) (\exists x \in E) \ : \ 0 < | x - x_0 | < \eta \ et \ | f(x) - f(x_0) | \geqslant \varepsilon.$$

Proposition 4.1

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un réel x_0. Alors :
f est continue en x_0 si, et seulement si, f est continue à gauche en x_0 et f est continue à droite en x_0.

Preuve. Se déduit de la proposition 3.2. □

Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions continues) 1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues en x_0; alors : $f + g$, $f.g$ et $\lambda\ f$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en x_0; et si de plus $f(x_0) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont définies au voisinage de x_0 et elles sont continues en x_0.

Preuve. Utiliser la proposition(Opérations sur les limites). □

Remarque 4.1

La proposition précédente est vraie pour la continuité à droite et la continuité à gauche en un point .

Proposition(Continuité de la composée) 1

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f(E) \subset F$ *et* $x_0 \in E$. *Alors :*
Si f *est continue en* x_0 *et* g *est continue en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, alors : $(\exists \eta > 0)$:
$(\forall y \in F) \quad | y - f(x_0) | < \eta \Longrightarrow | g(y) - g(f(x_0)) | < \varepsilon$ (car $\lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = f(x_0)$) ; et pour ce η, il existe $\alpha > 0$:
$(\forall x \in E) \quad | x - x_0 | < \alpha \Longrightarrow | f(x) - f(x_0) | < \eta$.
Donc pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} | x - x_0 | < \alpha &\Longrightarrow (f(x) \in F \ \textit{et} \ | f(x) - f(x_0) | < \eta) \\ &\Longrightarrow | g(f(x)) - g(f(x_0)) | < \varepsilon \\ &\Longrightarrow | g \circ f(x) - g \circ f(x_0) | < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$. Donc $g \circ f$ est continue en x_0.

Théorème et Définition (Prolongement par continuité) 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite finie l en un point x_0 (resp. à gauche en x_0, resp. à droite en x_0) alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

est continue en x_0 (rep. continue à gauche en x_0, resp. continue à droite en x_0) elle s'appelle ***le prolongement par continuité*** *de f en x_0 (rep. à gauche en x_0 , resp. à droite en x_0). On dit aussi que f est prolongeable par continuité (rep. par continuité à à gauche, resp. par continuité à droite) en x_0.*

Preuve. Simple à vérifier. □

Exemple 4.1

Le prolongement par continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{sinx}{x}$ en 0 est la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{sinx}{x} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1. \end{cases}$$

Corollaire 4.1

Soient $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}, f : E \longrightarrow \mathbb{R}, g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(E) \subset F$ et $x_0 \in E$. Alors :
Si f admet une limite l $(l \in F)$ en x_0 et g est continue en l alors $g \circ f$ admet la limite $g(l)$ en x_0.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $g \circ h$, où h est le prolongement par continuité de f en x_0. □

Remarque 4.2

La proposition précédente est vraie à droite et à gauche en un point et en l'infini.

Proposition 4.2

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in E$. Alors : f est continue en x_0 si , et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de E qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$.

Preuve. Utiliser la proposition(Caractérisation séquentielle de la limite).

Définitions 4.2

Soient $E \subset \mathbb{R}$, a, b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : \ E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

1. *f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ signifie que f est continue sur tout point de $]a, b[$.*
2. *f est continue sur l'intervalle $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) signifie que f est continue sur $]a, b[$ (resp. sur $]a, +\infty[$) et est continue à droite en a.*
3. *f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ (resp. sur $]-\infty, b]$) signifie que f est continue sur $]a, b[$ (resp. sur $]-\infty, b[$) et est continue à gauche en b.*
4. *f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ signifie que f est continue sur $]a, b[$ et est continue à droite en a et à gauche en b.*
5. *f est dite continue sur E (ou continue) signifie que f est continue en tout point de E.*

Exemples 4.1

1. *Les fonctions polynômiales,* cos, sin *et* exp *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
2. *Les fonctions fraction rationnelles et* tan *sont continues sur leurs domaines de définitions.*
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$, *(on prend* $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad \sqrt[1]{x} = x$*).*
4. *La fonction* ln *est continue sur* $]0, +\infty[$.
5. *La fonction* $E : x \mapsto E(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}\mathbb{Z}$; *en particulier* E *est continue à droite et non continue à gauche en tout point de* $\mathbb{Z}$.

Théorème(de Weierstrass) 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f *est continue alors* f *est bornée sur* $[a, b]$ *(c-à-d :* $f([a, b]) = \{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}$ *est borné) ; et il existe* $x_m \in [a, b]$ *et* $x_M \in [a, b]$ *tels que :*

$$\begin{cases} f(x_M) = M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \left(= \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \right) \\ f(x_m) = m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \left(= \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \right). \end{cases}$$

Preuve.

1. • Montrons que f est majorée : Par l'absurde en supposant que f n'est pas majorée. Donc :
$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in [a,b])\ \textit{tel que}\ f(x_n) \geqslant n.$
La suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) qui converge vers une limite x de $[a,b]$ (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{\varphi(n)} \in [a,b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$). Puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue en x et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x)$ $(\in \mathbb{R})$.
D'autre part, $(\forall n \in \mathbb{N})\ f\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = +\infty$ ce qui est absurde.
• Notons $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, d'après la propriété caractéristique de la borne supérieure, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists x_n \in [a,b])\ :\ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers une limite x_M de $[a,b]$ (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{\varphi(n)} \in [a,b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$). Puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue en x_M et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f\left(x_M\right)$.

Or

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ M - \frac{1}{n} \leqslant M - \frac{1}{\varphi(n)} < f\left(x_{\varphi(n)}\right) \leqslant M$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M - \dfrac{1}{n}\right) = M$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = M$.

Et l'unicité de la limite d'une suite convergente entraine :

$f\left(x_M\right) = M$.

M le sup de $f([a,b])$ appartenant à $f([a,b])$, il s'agit donc d'un max .

2. Même démonstration pour f minorée et l'existence d'un $x_m \in [a,b] : m = f\left(x_m\right)$.

Théorème(Théorème des valeurs intermédiaires) 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*, alors, pour touts* a *et* b *de* I*,* f *prend toute valeur intermédiaire entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, c'est-à-dire pour tout* y *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, il existe* c *compris entre* a *et* b *tel que* $y = f(c)$*.*

Preuve. Soient $a \in I$ et $b \in I$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors :

1. Si $a = b$ alors $f(a) = y = f(b)$, prendre $c = a = b$.
2. Si $a \neq b$, alors , puisque a et b jouent deux rôles symétriques, on peut supposer $a < b$ (par exemple).

- Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$, donc $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, d'où :

· Si $f(a) = y$, on prend $c = a$.

· Si $f(b) = y$, on prend $c = b$.

Nous supposons maintenant $f(a) < y < f(b)$.
Soit $A_y = \{x \in [a,b] \ / \ f(x) < y\}$; $A_y \neq \emptyset$, car $a \in A_y$, et A_y est majorée par b, il admet donc une borne supérieure c et $c \in [a,b]$ (car $A_y \subset [a,b]$).
On a : $c = supA_y$, donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ (\exists x_n \in A_y) : c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c.$$

La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} f(x_n) < y \\ c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c \end{cases},$$

donc on a

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ f(x_n) < y \\ x_n \longrightarrow c \end{cases},$$

et puisque f est continue en c alors

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) \;\; f(x_n) < y \\ f(x_n) \longrightarrow f(c) \end{cases},$$

et par suite $f(c) \leqslant y \;\; (**)$.
D'autre part, on a $y < f(b)$, donc $f(c) < f(b)$, d'après $(**)$ d'où $c \neq b$ et par suite $c < b$ (car $c \in [a, b]$) .
Pour tout $x \in]c, b]$, $x > c$ donc $x \notin A_y$ (car c majore A_y) et par suite $f(x) \geqslant y$. D'où par passage à la limite à droite en c et vu la continuité de f au point c, $f(c) \geqslant y$.
On a donc $y = f(c)$.
• Si $f(a) > f(b)$, on considère la fonction $-f$, y étant compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc $-y$ est compris entre $-f(a)$ et $-f(b)$ avec $-f(a) \leqslant -f(b)$ et $-f$ est continue sur I ; d'après le cas précédent

$(\exists c \in [a,b]) : -y = -f(c)$ et donc $y = f(c)$. □

Corollaire 5.1

L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.

Preuve. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $f(a)$ et $f(b)$ appartenant à $f(I)$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d'après le théorème précédent (TVI), il existe c compris entre a et b tel que $y = f(c)$.

Or c est compris entre a et b, il appartient donc au segment d'extrémités a et b, lequel est contenu dans I donc $c \in I$.

$(c \in I \text{ et } y = f(c)) \Longrightarrow y \in f(I)$.

Donc $f(I)$ est un intervalle. □

Corollaire 5.2

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, par une fonction continue f est un intervalle fermé borné :

$f([a,b]) = [m, M]$, *où* $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ *et*

$M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Preuve. • $(\forall x \in [a,b])\ \ m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc $f([a,b]) \subset [m,M]$.
• Soit $y \in [m,M]$; d'après le théorème de Weierstrass, il existe x_m et x_M éléments de $[a,b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$; or y est compris entre $f(x_m)$ et $f(x_M)$, le théorème des des valeurs intermédiaires entraine l'existence d'un x compris entre x_m et x_M donc entre a et b (car $[a,b]$ est un intervalle) tel que $y = f(x)$.
$(x \in [a,b]\ \ et\ y = f(x)) \Longrightarrow y \in f([a,b])$.
Donc $[m,M] \subset f([a,b])$
Donc $f([a,b]) = [m,M]$. □

Corollaire 5.3

1. ***(Théorème de Cauchy) :*** *Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*
2. *Une fonction continue sur un intervalle I ne peut pas changer de signes sans s'annuler.*

Preuve.

1. $f(a)\,f(b)<0$, alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'un est strictement négatif et l'autre est strictement positif donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, par le TVI il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$; puisque $f(a)\neq 0$ et $f(b)\neq 0$, alors $c\neq a$ et $c\neq b$ et alors $c\in\,]a,b[$.
2. On suppose que f change de signes sur I, il existe donc α et β dans I $(\alpha<\beta)$ tels que $f(\alpha).f(\beta)<0$; f étant continue sur $[\alpha,\beta]$, il existe, d'après 1, $c\in\,]\alpha,\beta[$ tel que $f(c)=0$; donc f s'annule en c sur I. □

Exemples 5.1

1. *L'équation* $(1):\ x^5+2x-1=0$ *admet une racine dans l'intervalle* $]0,1[$ *car la fonction* $f:x\longmapsto x^5+2x-1$ *est continue sur* $[0,1]$ *et* $f(0)=-1$ *et* $f(1)=2$ *d'où* $f(0).f(1)<0$ *donc il existe* $c\in\,]0,1[$ *tel que* $f(c)=0$ *c'est à dire que l'équation* (1) *admet une solution dans l'intervalle* $]0,1[$.
2. *L'équation* $x+lnx=0$ *admet une solution dans l'intervalle* $\left]e^{-2},1\right[$.

Remarques 5.1

1. *Le théorème des valeurs intermédiaires, veut dire que pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation admet au moins une solution dans $[a,b]$, et graphiquement, la courbe de la fonction f coupe la droite d'équation $y=\alpha$, au moins une fois. Et le théorème de Cauchy veut dire que l'équation $f(x)=0$, admet au moins une solution dans $]a,b[$, et la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses au moins une fois.*
2. *Si de plus f est strictement monotone sur $[a,b]$, alors la solution de l'équation en question est unique. En effet :*
   Puisque f est strictement monotone sur $[a,b]$, alors pour tous x et y distincts de $[a,b]$, $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\neq 0$, et alors $f(x)\neq f(y)$, c'est à dire qu'il n'existe pas de nombres distincts c et c' de $[a,b]$ qui ont la même image par f, ce qui assure l'unicité de la solution de l'équation $f(x)=\alpha$, pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 5.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\inf f(I)$ et $\sup f(I)$ (si $f(I)$ est non minoré $\inf f(I) = -\infty$ et si $f(I)$ est non majoré $\sup f(I) = +\infty$.

Preuve. Posons $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. Alors :

• Si m et M sont réels : Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $m < y < M$, par définition de m et M, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $m \leqslant f(a) < y < f(b) \leqslant M$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y = f(x)$ d'où $y \in f(I)$. Donc $]m, M[\subset f(I)$.

On a évidement $f(I) \subset [m, M]$; donc $]m, M[\subset f(I) \subset [m, M]$ et $f(I)$ est l'un des quatre intervalles d'extrémités m et M : $[m, M]$ ou $]m, M]$ ou $[m, M[$ ou $]m, M[$.

• Si $m=-\infty$ et $M\in\mathbb{R}$: Soit $y\in\mathbb{R}$ tel que $y<M$, par définition de m et M , il existe $a\in I$ et $b\in I$ tels que $f(a)<y<f(b)\leqslant M$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y=f(x)$ d'où $y\in f(I)$. Donc $]-\infty,M[\subset f(I)$.
On a évidement $f(I)\subset\,]-\infty,M]$; donc $]-\infty,M[\,\subset f(I)\subset\,]-\infty,M]$, et par suite $f(I)=\,]-\infty,M[$ ou $f(I)=\,]-\infty,M]$.
• Si $m\in\mathbb{R}$ et $M=+\infty$: Soit $y\in\mathbb{R}$ tel que $m<y$, par définition de m et M, il existe $a\in I$ et $b\in I$ tels que $m\leqslant f(a)<y<f(b)$; il existe ensuite, par le TVI , un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y=f(x)$ d'où $y\in f(I)$. Donc $]m,+\infty[\,\subset f(I)$.
On a évidement $f(I)\subset[m,+\infty[$; donc $]m,+\infty[\,\subset f(I)\subset[m,+\infty[$, et par suite $f(I)=\,]m,+\infty[$ ou $f(I)=[m,+\infty[$.
• Si $m=-\infty$ et $M=+\infty$: Soit $y\in\mathbb{R}$, par définition de m et M, il existe $a\in I$ et $b\in I$ tels que $f(a)<y<f(b)$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y=f(x)$ d'où $y\in f(I)$. Donc $\mathbb{R}\subset f(I)$.
On a évidement $f(I)\subset\mathbb{R}$; donc $f(I)=\mathbb{R}=\,]-\infty,+\infty[$.

Remarque 5.1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Le tableau suivant, donne la nature de l'intervalle $f(I)$, en fonction de la nature de I et la monotonie de f sur I.

Intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Proposition 5.1

Soient a *et* b *deux réels tels que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue .*
Si f *est injective, alors* f *est strictement monotone sur* $[a, b]$ *.*

Preuve. Posons $I = [a, b]$ et rappelons que :

$$f \text{ est injective sur } I \Leftrightarrow \forall \left(x, x'\right) \in I^2 \; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f\left(x'\right).$$

• Si $f(a) < f(b)$, montrons que f est strictement croissante sur I. On a pour $x < y < z$ dans I, $f(x) < f(z) \Longrightarrow f(x) < f(y) < f(z)$. Car :

$*$ $f(y) < f(x) < f(z) \overset{TVI}{\Longrightarrow} \exists c \in [y, z] : f(x) = f(c) \Longrightarrow \exists c \in I : x \neq c$ et $f(x) = f(c)$ absurde.

$*$ $f(x) < f(z) < f(y) \overset{TVI}{\Longrightarrow} \exists c \in [x, y] : f(z) = f(c) \Longrightarrow \exists c \in I : z \neq c$ et $f(z) = f(c)$ absurde .

Soient maintenant x et y de I tels que $a < x < y < b$, alors $f(a) < f(x) < f(b)$ et par suite $f(x) < f(y) < f(b)$ ce qui entraine $f(a) < f(x) < f(y) < f(b)$. Donc f est strictement croissante sur I.

• Si $f(a) > f(b)$, alors $-f(a) < -f(b)$, donc $-f$ qui est continue et injective est strictement croissante sur I, donc f est strictement décroissante sur I.

Théorème 5.2

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors :
f est injective sur I si, et seulement si, f est strictement monotone sur I.

Preuve. $\Longleftarrow$] Soient $x \in I$ et $y \in I$ tel que $x \neq y$, alors :

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \ si \ f \ est \ strictement \ croissante \ sur \ I \\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \ si \ f \ est \ strictement \ décroissante \ sur \ I \end{cases}$$

D'où $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \neq 0$, et alors $f(x) - f(y) \neq 0$ donc $f(x) \neq f(y)$ et f est injective .

En fait cette implication ne fait pas intervenir la continuité .
$\Longrightarrow$] Soient a et b deux éléments fixés dans I tels que $a < b$; supposons que $f(a) < f(b)$ (par exemple) et montrons que f est strictement croissante sur I.
Tout d'abord et d'après la proposition précédente, f est strictement croissante sur $[a, b]$.
Soient $x \in I$ et $y \in I$ tel que $x < y$.
Considérons : $i = inf(a, x)$ et $s = sup(b, y)$, alors $i \leqslant a < b \leqslant s$, d'où $[a, b] \subset [i, s]$; et comme f est strictement monotone sur $[i, s]$ et strictement croissante sur $[a, b]$ alors f est croissante sur $[i, s]$ et par suite $f(x) < f(y)$ (car x et y sont dans $[i, s]$) . $\square$

Théorème(de la bijection monotone) 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors f est une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$; et l'application inverse de f, notée f^{-1}, $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue, et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et de même sens de monotonie que f.

Remarque 5.2

On peut remplacer strictement monotone par injective (Théorème $5.2.$).

Preuve. • f est surjective de I sur $f(I)$; elle est aussi injective (Théorème $5.2.$), c'est donc une bijection .

• $f(I)$ est un intervalle(Corollaire $5.1.$) .

• Supposons que f est strictement croissante sur I (par exemple) et montrons que f^{-1} est strictement croissante et continue sur $f(I)$.

$*$ f^{-1} **est strictement croissante sur** $f(I)$: Soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$, montrons que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; par l'absurde, supposons que $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, alors $f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geqslant f\left(f^{-1}(y_2)\right)$ car f est croissante sur I, d'où $y_1 \geqslant y_2$ ce qui est absurde, donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
$*$ f^{-1} **est continue sur** $f(I)$: Soit $y_0 \in f(I)$; montrons que f^{-1} est continue en y_0.
Soit $\varepsilon > 0$, il faut chercher $\eta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}(\forall y \in f(I)) \quad |y - y_0| < \eta &\Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon\end{aligned}$$

où $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$.
On note par $l(I)$ la longueur de I qui est $\beta - \alpha$, si I est borné et d'extrémités α et β réels tels que $\alpha < \beta$ et $l(I) = +\infty$ si I n'est pas borné. Trois cas se présentent :

1. $x_0 = inf\,(I)\ (= min\,(I))$, donc $y_0 = min\,(f\,(I))$ (car f est croissante) ; I est donc de la forme $[x_0, ...)$ et $f\,(I) = [y_0, ...)$. Soit $r = x_0 + inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right)$. On a :

$$\begin{cases} x_0 < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ x_0 < r \leqslant x_0 + \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ r \in I\ \ (car\ I\ est\ un\ intervalle) \end{cases}$$

(car pour I borné, $x_0 + \frac{l(I)}{2} \in I \Longrightarrow r \in I$ (car I est un intervalle) et si I est non borné , alors $I = [x_0, +\infty[$ donc $x_0 < r$ entraine que $r \in I$) .

Soit $\eta = f\,(r) - y_0 = f\,(r) - f\,(x_0)$, d'où $\eta > 0$ car f est strictement croissante sur I.

Soit $y \in f\,(I)$, alors $y \geqslant y_0$ et on a :

$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 < y - y_0 < \eta \\ &\Longrightarrow y_0 < y < y_0 + \eta \\ &\Longrightarrow y_0 < y < f\,(r), \end{aligned}$$

et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(r)) &\Longrightarrow x_0 < f^{-1}(y) < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ &\Longrightarrow x_0 < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < f^{-1}(y) - x_0 < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 <\mid f^{-1}(y) - x_0 \mid< \varepsilon. \end{aligned}$$

2. $x_0 = sup(I)\ (= max(I))$, donc $y_0 = max(f(I))$ (car f est croissante) ; I est donc de la forme $(..., x_0]$ et $f(I) = (..., y_0]$. Soit $s = x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right)$. On a :

$$\begin{cases} inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \leqslant \varepsilon \\ inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \leqslant \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant -\varepsilon \\ -inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant -\frac{l(I)}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant x_0 - \varepsilon \\ x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant x_0 - \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 > s \geqslant x_0 - \varepsilon \\ x_0 > s \geqslant x_0 - \frac{l(I)}{2} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} x_0 > s \geqslant x_0 - \varepsilon \\ s \in I \ \ (car\ I\ est\ un\ intervalle) \end{cases}$ (car pour I borné, $x_0 - \frac{l(I)}{2} \in I \Longrightarrow s \in I$ (car I est un intervalle) et si I est non borné, alors $I =]-\infty, x_0]$ donc $s < x_0$ entraine que $s \in I$).

Soit $\eta = y_0 - f(s) = f(x_0) - f(s)$, d'où $\eta > 0$ car f est strictement croissante sur I.

Soit $y \in f(I)$, alors $y \leqslant y_0$ et on a :

$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 < y_0 - y < \eta \\ &\Longrightarrow -\eta < y - y_0 < 0 \\ &\Longrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 \\ &\Longrightarrow y_0 - (y_0 - f(s)) < y < y_0 \\ &\Longrightarrow f(s) < y < y_0, \end{aligned}$$

et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(s)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) &\Longrightarrow s < f^{-1}(y) < x_0 \\ &\Longrightarrow x_0 - \varepsilon \leqslant s < f^{-1}(y) < x_0 \\ &\Longrightarrow 0 < x_0 - f^{-1}(y) < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < \mid f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \mid < \varepsilon \\ &car \ \mid f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \mid = \mid f^{-1}(y) - x_0 \mid \\ &= f^{-1}(y) - x_0. \end{aligned}$$

3. $inf(I) < x_0 < sup(I)$; il existe donc a et b de I tels que $a < x_0 < b$.
   Soient $\begin{cases} s = sup(a, x_0 - \varepsilon) \\ i = inf(b, x_0 + \varepsilon) \end{cases}$.
   On a : $a \leqslant s < x_0 < i \leqslant b$, donc $s \in I$ et $i \in I$ (car I est un intervalle) et $f(s) < f(x_0) < f(i)$ car f est strictement croissante sur I.

Soit $\eta = inf\left(f\left(x_0\right) - f\left(s\right), f\left(i\right) - f\left(x_0\right)\right)$, alors $\eta > 0$ et

$$\begin{cases} \eta \leqslant y_0 - f\left(s\right) \\ \eta \leqslant f\left(i\right) - y_0 \end{cases} \Longrightarrow (*) \begin{cases} f\left(s\right) \leqslant y_0 - \eta \\ y_0 + \eta \leqslant f\left(i\right) \end{cases}$$

Soit $y \in f\left(I\right)$ tel que $0 <\mid y - y_0 \mid< \eta$, alors :

$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid< \eta &\Longrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \\ &\Longrightarrow f\left(s\right) \leqslant y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \leqslant f\left(i\right) \\ &\Longrightarrow f\left(s\right) < y < f\left(i\right) \end{aligned}$$

et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f\left(I\right)$ alors $s < f^{-1}\left(y\right) < i$, d'où $x_0 - \varepsilon \leqslant s < f^{-1}\left(y\right) < i \leqslant x_0 + \varepsilon$ (d'après la définition de s et i) ou encore $-\varepsilon < f^{-1}\left(y\right) - x_0 < \varepsilon$ et par suite $\mid f^{-1}\left(y\right) - f^{-1}\left(y_0\right) \mid< \varepsilon$.

Remarques 5.2

1. *Le théorème précédent peut s'énoncer ainsi : Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I, alors f est une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$ si , et seulement si, f est strictement monotone sur l'intervalle I.*
2. *Si f continue et strictement monotone sur un intervalle I et de fonction réciproque $g = f^{-1}$; on a : $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in I\}$ et $\mathcal{G}_g = \{(y, g(y)) \ / \ y \in f(I)\}$. Or $(\forall y \in f(I)) (\exists! x \in I) : y = f(x)$, donc $\mathcal{G}_g = \{(f(x), x) \ / \ x \in I\}$. Pour tout $x \in I$, les éléments $(x, f(x))$ et $(f(x), x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, donc Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice(la droite d'équation $y = x$).*

Les trois théorèmes suivants sont simples à vérifier.

Théorème et Définition 6.1

L'application : $x \longmapsto sin\,(x)$ *est continue et strictement croissante de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, 1]$, *elle admet donc une fonction réciproque de* $[-1, 1]$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *continue et strictement croissante, notée* $Arcsin$, *et on a :*

$$\begin{cases} \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1,1]\; Arcsin\,(y) = x \Leftrightarrow sin\,(x) = y \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad Arcsin\,(sin\,(x)) = x \\ \forall x \in [-1,1] \quad sin\,(Arcsin\,(x)) = x. \end{cases}$$

Théorème et Définition 6.2

L'application : $x \longmapsto cos\,(x)$ *est continue et strictement décroissante de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$, *elle admet donc une fonction réciproque de* $[-1, 1]$ *sur* $[0, \pi]$ *continue et strictement décroissante, notée* $Arccos$, *et on a :*

$$\begin{cases} \forall x \in [0,\pi] \quad \forall y \in [-1,1]\; Arccos\,(y) = x \Leftrightarrow cos\,(x) = y \\ \forall x \in [0,\pi] \quad Arccos\,(cos\,(x)) = x \\ \forall x \in [-1,1] \quad cos\,(Arccos\,(x)) = x. \end{cases}$$

Attention :

$$\left\{\begin{array}{c} Arcsin\left(sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) \neq \frac{9\pi}{4} \quad et\ on\ a \\ Arcsin\left(sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = Arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \\ Arccos\left(cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{13\pi}{3} \quad et\ on\ a \\ Arccos\left(cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = Arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Théorème et Définition 6.3

L'application : $x \longmapsto tan\,(x)$ *est continue et strictement croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$*, elle admet donc une fonction réciproque de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *continue et strictement croissante, notée* $Arctan$*, et on a :*

$$\left\{\begin{array}{c} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \forall y \in \mathbb{R} \quad Arctan\,(y) = x \Leftrightarrow tan\,(x) = y \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad Arctan\,(tan\,(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad tan\,(Arctan\,(x)) = x. \end{array}\right.$$

Figure – Fonction Arcsin

x	-1	0	1
$Arcsin'(x)$		$+$	
$Arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

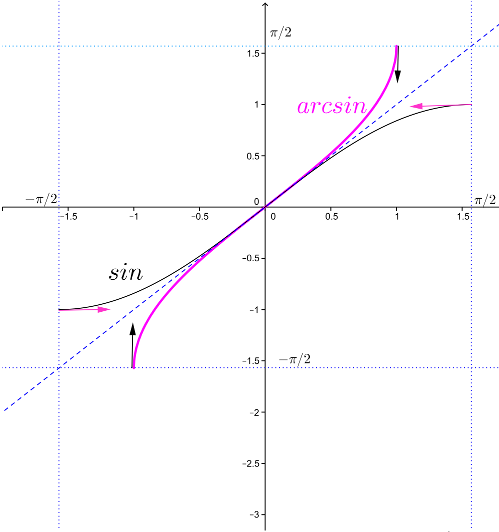


Figure – Fonction Arcos

x	-1	$\frac{\pi}{2}$	1
$Arcos'(x)$		$-$	
$Arcos(x)$	π	0	0

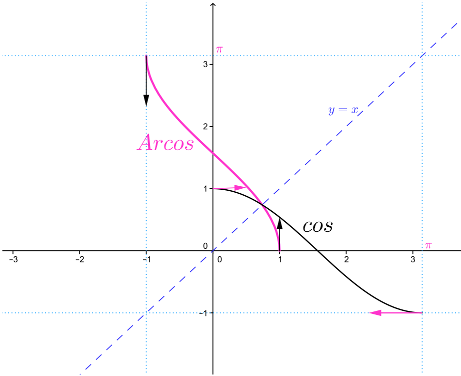
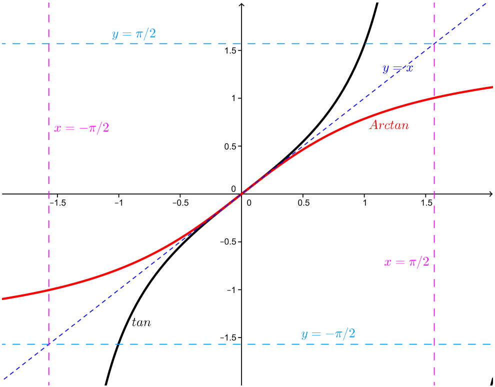


Figure – Fonction Arctan

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$Arctan'(x)$		$+$	
$Arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$



Définition 7.1

Les fonctions cosinus hyperbolique, notée ch, *sinus hyperbolique, notée* sh, *et tangente hyperbolique, notée* th, *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad et \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

Propriétés 7.1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$.
2. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
3. $ch(x+y) = ch(x)\, ch(y) + sh(x)\, sh(y)$.
4. $sh(x+y) = sh(x)\, ch(y) + ch(x)\, sh(y)$.
5. $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1 = 1 + 2sh^2(x)$.
6. $sh(2x) = 2sh(x)\, ch(x)$.
7. $th(x+y) = \dfrac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)\, th(y)}$.
8. $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
9. *ch est paire, sh et th sont impaires.*

Tableaux des variations et courbes des fonctions ch, sh et th :

Figure – Fonction sh

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

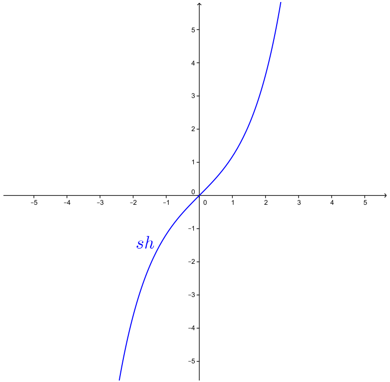


Figure – Fonction ch

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

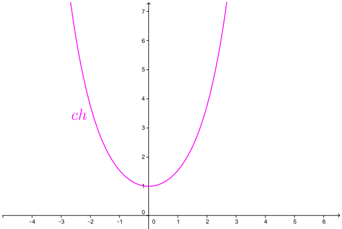
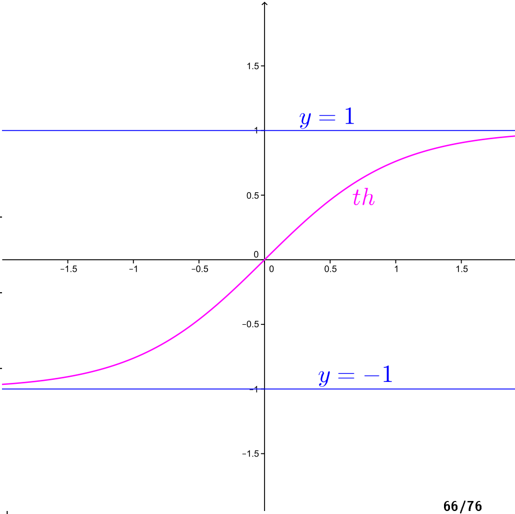


Figure – Fonction th

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th'(x)$			$+$		
$th(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



Théorèmes et Définitions (Fonctions Args) 1

1. *La fonction* $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue sur* $\mathbb{R}$*, donc elle admet une fonction réciproque, notée* $Argsh$ *qui est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et on a :*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad Argsh\,(x) = y \Leftrightarrow x = sh\,(y)\,.$
2. *La fonction* $ch : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$ *est strictement croissante et continue sur* $\mathbb{R}^+$*, donc elle admet une fonction réciproque, notée* $Argch : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *qui est continue et strictement croissante sur* $[1, +\infty[$ *et on a :* $\forall x \in [1, +\infty[$ *et* $\forall y \in \mathbb{R}^+$
$Argch\,(x) = y \Leftrightarrow x = ch\,(y)\,.$
3. *La fonction* $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ *est strictement croissante et continue sur* $\mathbb{R}$*, donc elle admet une fonction réciproque, notée* $Argth :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *qui est continue et strictement croissante sur* $]-1, 1[$ *et on a :* $\forall x \in]-1, 1[$ *et* $\forall y \in \mathbb{R}$
$Argth\,(x) = y \Leftrightarrow x = th\,(y)\,.$

Proposition 8.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Argsh\,(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
2. $\forall x \in [1, +\infty[\,, \quad Argch\,(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
3. $\forall x \in\,]-1, 1[\,, \quad Argth\,(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Preuve. En exercice. □

Courbes des fonctions $Argch$, $Argsh$ et $Argth$:

Figure – Fonction Argsh

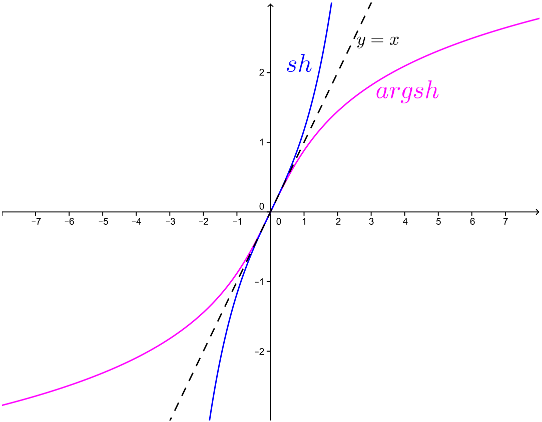


Figure – Fonction Argch

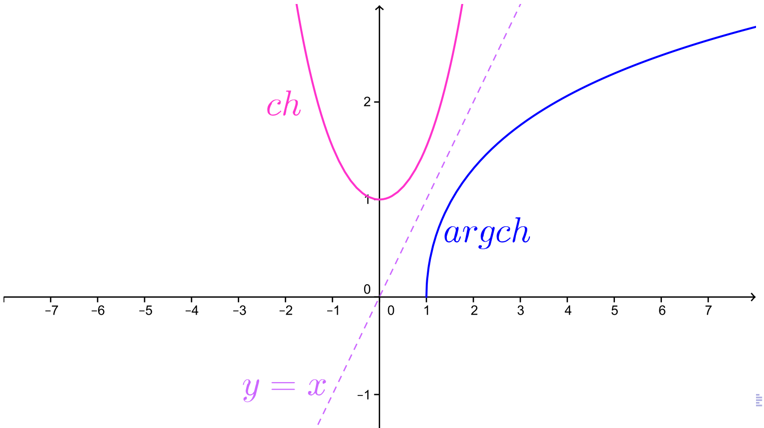
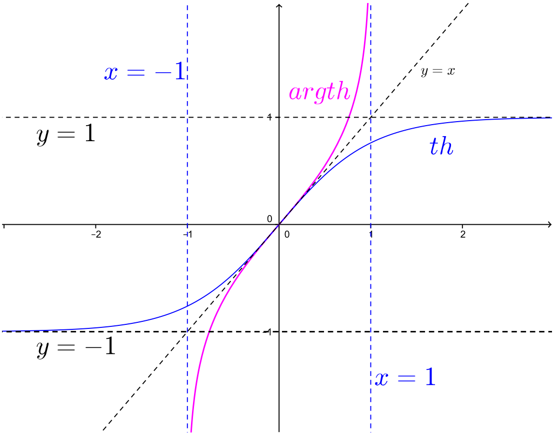


Figure – Fonction Argth



Définition 9.1

Soient E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
f est dite ***uniformément continue*** *(U.C) ou uniformément continue sur E (U.C sur E) signifie que*

$$(\forall \varepsilon > 0) \;\; (\exists \eta > 0) : (\forall (x, y)) \in E^2 \;\; | x - y |< \eta \Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon.$$

Remarque 9.1

1. *Si f est uniformément continue sur E, alors pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de E telles que $x_n - y_n \longrightarrow 0$, la suite $(f(x_n) - f(y_n))$ tend vers 0.*
2. *Si f est uniformément continue sur E alors f est continue sur E; mais la réciproque est fausse en général : La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas U.C sur $\mathbb{R}$.*

Preuve.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de E telles que $x_n - y_n \longrightarrow 0$; montrons que $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $(\forall (x,y) \in E^2) \ \ | x - y | < \eta \Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon$. Pour ce η, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow | x_n - y_n | < \eta$, d'où
   $$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow | x_n - y_n | < \eta \\ &\Longrightarrow | f(x_n) - f(y_n) | < \varepsilon.\end{aligned}$$
2. (i) Dans la définition de la continuité uniforme le η dépend de ε seulement, par contre dans la définition de la continuité en un point x_0 de E, le η dépend de ε et de x_0 en général.

   (ii) Considérons les deux suites $(x_n) = (n)$ et $(y_n) = \left(n + \frac{1}{n+1}\right)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_n - y_n = -\frac{1}{n+1}$ et
   $$\begin{aligned}f(x_n) - f(y_n) = n^2 - \left(n + \frac{1}{n+1}\right)^2 &= n^2 - \left(n^2 + \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\frac{2n}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$
   Donc $x_n - y_n \longrightarrow 0$; mais $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow -2 \ (\neq 0)$. Donc d'après 1, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Heine 9.1

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, est y uniformément continue.

Preuve. Soit f une telle fonction ; supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, alors :
$(\exists \varepsilon > 0) : (\forall \eta > 0) (\exists x, y \in [a, b]) :\mid x - y \mid < \eta$ *et* $\mid f(x) - f(y) \mid \geqslant \varepsilon$. *Alors*

$$(\exists \varepsilon > 0) : (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists x_n, y_n \in [a, b]) :\mid x_n - y_n \mid < \frac{1}{n} \; et \; \mid f(x_n) - f(y_n) \mid \geqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ étant bornée, d'où selon le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence $x \in [a, b]$, et alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ qui converge vers x. Et comme $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \mid x_{n_k} - y_{n_k} \mid < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k}$ et $\mid f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \mid \geqslant \varepsilon \quad (*)$, alors $x_{n_k} - y_{n_k} \longrightarrow 0$ et $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \;\; y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k})$, d'où $(y_{n_k})_{k \geqslant 1}$ est aussi convergente vers x. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est donc continue en x, d'où, selon le théorème de la continuité séquentielle, les deux suites $(f(x_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ et $(f(y_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ convergent vers $f(x)$, d'où $\lim\limits_{k \to +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ ce qui est en contradiction avec $(*)$.

Définition 9.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle non vide I.
f est dite ***Lipschitzienne*** *sur I, si et seulement si, il existe $k \in [0, +\infty[$ tel que $\left(\forall (x, y) \in I^2\right) \quad | f(x) - f(y) | \leqslant k | x - y |$.*
Le nombre k s'appelle le rapport de f.

Exemples 9.1

1. *Toute fonction constante sur un intervalle est y Lipschitzienne.*
2. *La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ de rapport $\frac{1}{2}$; mais non Lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.*
3. *La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 9.1

Toute fonction numérique Lipschitzienne sur un intervalle est y uniformément continue.

Preuve. Soit f une fonction numérique Lipschitzienne de rapport k sur un intervalle I, et soit $\varepsilon > 0$ alors :

- Si $k = 0$, alors $\left(\forall (x, y) \in I^2\right) \ \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$ (car $f(x) - f(y) = 0$). D'où n'importe quelle $\eta > 0$ convient.
- Si $k > 0$, pour tout $(x, y) \in I^2$ on a :

$$\begin{aligned} \mid x - y \mid < \frac{\varepsilon}{k} &\Longrightarrow k \ \mid x - y \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) : (\forall (x, y)) \in I^2 \ \mid x - y \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur I. □