Université Cadi Ayyad
Faculté Des Sciences Semlalia
Marrakech

Année univérsitaire : 2020/2021
Département de Mathématiques
Analyse 1-Filière SMIA-S1

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 1 : Les nombres réels

`Cours du 02/11/2020 au 07/11/2020`

⋆ ⋆ ⋆

Le résultat essentiel qui fait l'objet de ce chapitre est donné comme (dans le théorème) suivant :

> L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un **corps commutatif**, **totalement ordonné**, **Archimédien** et, satisfait à **l'axiome de la borne supérieure**.

La suite du cours consiste à expliquer chaque notion voire les propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$ introduite dans ce théorème.

1 Introduction

1.1 Les ensembles de nombres usuels

On rappelle les ensembles usuelles de nombres et leurs notations :

•**L'ensemble des entiers naturels**

Il est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Il contient en particulier les entiers pairs et impairs ainsi que les nombres premiers. La somme de deux entiers naturels est un entier naturel de même que leur produit. Par contre la diffèrence de deux entiers naturels n'est pas nécessairement un entier naturel.

On notera $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

•**L'ensemble des entiers relatifs**

Il est noté $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. La somme de deux entiers relatifs est un entier relatif de même que leur produit et leur différence. Tout entier naturel est un entier relatif, i.e. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. On notera $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

• **L'ensemble des nombres rationnels**

Il est noté $\mathbb{Q}$ et est défini par $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}$. Q vérifie un certain nombre de propriétés algébriques, qui font qu'on appelle $\mathbb{Q}$ un corps :

- $0 \in \mathbb{Q}$;
- Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $-x \in \mathbb{Q}$
- Si $x,\ y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y \in \mathbb{Q}$;
- Si $x,\ y \in \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{Q}$;
- Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.

•<u>L'ensemble des nombres décimaux</u>

Un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \{\frac{p}{10^k} | p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Comme précédemment, on notera $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Proposition 1.1

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale finie ou infinie périodique.

Exemple :

$$\frac{3}{5} = 0,6 \qquad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad 1,179\,\underleftrightarrow{325}\,\underleftrightarrow{325}\,\underleftrightarrow{325}\ldots$$

La démonstration du sens direct repose sur la division euclidienne. On peut montrer sur un exemple, réciproquement, que tout nombre dont l'écriture décimale comporte une partie décimale finie peut s'écrire comme une fraction (0,125=125/1000) et que, dans le cas où la partie décimale est périodique, il existe une méthode pour mettre le nombre en fraction.

Soit $x = 56,34\,\underleftrightarrow{2021}\,\underleftrightarrow{2021}\ldots$, ona :

$$100x = 5634,\underleftrightarrow{2021}\,\underleftrightarrow{2021}\ldots \tag{1}$$

et

$$10\,000 \times 100x = 5634\,2021,\underleftrightarrow{2021}\ldots \tag{2}$$

Donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

$$10\,000 \times 100x - 100x = 56\,342\,021 - 1234$$

donc $999\,900x = 56\,340\,787$ donc

$$x = \frac{56\,340\,787}{999\,900}.$$

Et donc bien sûr $x \in \mathbb{Q}$.

Il est clair que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exercice :

Soit $M = 0,2021\,2021\,2021\ldots\ldots$. Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.

<u>Solution :</u> Remarquons que $10\,000 \times M = 2021,2021\,2021\ \ldots$ Alors $10\,000 \times M - M = 2021$; donc $9999 \times M = 2021$ d'où $M = \frac{2021}{9999}$.

Proposition 1.2

Il n'existe aucun nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.

Preuve : **(TD)**
Supposons qu'il existe $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $p^2 = 2q^2$ avec p et q sont premiers entre eux. Cela impliquerait que 2 divise p^2 et par conséquent p aussi (puisque 2 est premier). On peut donc écrire $p = 2m$ et on aurait ainsi $4m^2 = 2q$, soit $q^2 = 2m^2$. On refait le même raisonnement pour q, pour aboutir au fait que 2 divise q. Ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Pourtant, cet x solution de $x^2 = 2$ est un nombre "réel" que l'on peu dessiner : c'est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ! Il manque quelque chose à $\mathbb{Q}$ et ce quelque chose, c'est l'ensemble des nombres réels qui contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et d'autres réels qui sont dit irrationnels.

Dans ce qui suit on va définir l'ensemble des nombres réels de façon axiomatique. C'est-à- dire que l'on appellera ensemble des nombres réels, tout ensemble qui verifiera certaines propriétés qu'on nommera axiomes. Comme on le verra plus tard, on definit $\mathbb{R}$ partir de quinze axiomes. Parmi les quinze axiomes, $\mathbb{Q}$ en vérifie quatorze. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le 15ème axiome. Ce dernier axiome introduit la notion de Minorants, Majorants, Sup, inf et relations d'ordre. C'est ce que nous allons définir dans la suite.

2 Définition axiomatique des nombres réels

2.1 Relations d'ordre.

Définition 2.1

Soit E un ensemble.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathcal{R}$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si
   — $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
   — $\mathcal{R}$ est antisymétrique : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
   — $\mathcal{R}$ est transitive : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Exemple 1

1. *Dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, la relation définie par*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leq y$$

   est une relation d'ordre car :
   — *$\leq$ est réflexive : pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x \leq x$,*
   — *$\leq$ est antisymétrique : pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \implies x = y$,*
   — *$\leq$ est transitive : pour tout $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \implies x \leq z$.*
2. *De même $\leqslant$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ est l'ordre naturel.*

3. *Sur $E = \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{R}$ par $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m \mid n$. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre car :*
   — $m \mid m$;
   — $(m \mid n)$ *et* $(n \mid m) \Rightarrow m = n$;
   — $(m \mid n)$ *et* $(n \mid p) \Rightarrow m \mid p$.
4. *Soit X un ensemble non vide et $E \in \mathcal{P}(X)$. Alors $\mathcal{R}$ défini par $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$ sur E est une relation d'ordre sur E.*
5. *Soit X un ensemble non vide et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$* [1]. *Pour $f, g \in E$ on pose $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) \leqslant g(x)$. Alors $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.*

Définition 2.2

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est totale si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Exemple 2

— $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ *est un ensemble totalement ordonné. En effet : si x et y sont deux rationnels, alors ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$*

— *Il y a des ordres qui ne sont pas totaux :*
  — $(\mathbb{N}^*, \mid)$ *car 2 et 3 ne sont pas comparables.*

Remarque 1

Dans toute la suite, on note $x\mathcal{R}y$ par $x \leq y$ et par $x < y$ si ($x \leq y$ et $x \neq y$)

2.2 Minorants, Majorants, Sup, inf, Max, Min

Définition 2.3

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$ tel que $A \neq \varnothing$ et $x \in E$.

1. On dit que :
   — M majore A si $\forall x \in A$, $M \geqslant x$: M est un majorant de A.
   — m minore A si $\forall x \in A$, $m \leqslant x$: m est un minorant de A.
2. On note les propriétés suivantes :
   — A est majorée si elle admet au moins un majorant.
   — A est minorée si elle admet au moins un minorant.
   — A est bornée s'il est majorée et minorée.
3. — Un élément $a \in A$ est le plus grand élément de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq a$. Lorsqu'il existe, on note le plus grand élément $a = \max A$.
   — De même, $b \in A$ est le plus petit élément de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq b$. Lorsqu'il existe, on note le plus petit élément $b = \min A$.

1. E est l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1

Si une partie A admet un plus grand (respectivement plus petit) élément, alors il est unique

Démonstration :
Si a_2 et a_1 sont deux plus grands éléments, alors $a_1 \leqslant a_2$ et $a_1 \geqslant a_2$ donc $a_1 = a_2$.

Exemple 3

— *Toute partie bornéé de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit et un plus grand élément.*

— *L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ admet zéro comme plus petit élément. L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de $\leq$ n'admet pas de plus petit élément, ni de plus grand élément.*

2.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 2.4

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. Soit $A \subset E$. Un élément $M \in E$ est appelé borne supérieure de A, noté $M = \sup A$, si

— M est un majorant de A.

— M est le plus petit des majorants de A.

De même, on dit que $m \in E$ est la borne inférieure de A, noté $m = \inf A$, si

— m est un minorant de A.

— m est le plus grand des minorants de A.

Clairement, si la borne supérieure de A existe, elle est unique.

Piège ! Il peut exister des parties non vides, majorées mais sans borne supérieure.
La proposition suivante nous fournit l'exemple qui prouve celà

Proposition 2.2

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\}$. Alors $\sup(A)$ et $\inf(A)$ n'existent pas dans $\mathbb{Q}$.

Preuve : (TD)
On a

$$\forall x \in A \ : \ -2 < x < 2$$

L'ensemble A est donc majoré et minoré. Supposons maintenant que $\sup(A)$ existe et que

$$\sup(A) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$\sup(A)$ *est un majorant et par définition de l'ensemble A, on a :*

$$\forall x \in A \ : \ x^2 < 2 \text{ et } x^2 < (\sup(A))^2$$

Comme l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$ (voir Proposition 1.2), il en résulte deux *possibilités pour* $\sup(A)$ *:*

$$(\sup(A))^2 = \frac{p^2}{q^2} < 2 \textit{ ou bien } (\sup(A))^2 = \frac{p^2}{q^2} > 2$$

Supposons par exemple que

$$\frac{p^2}{q^2} < 2.$$

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *vérifiant*

$$n > \frac{(\frac{2p}{q} + 1)}{2 - \frac{p^2}{q^2}}$$

On a :

$$(\frac{p}{q} + \frac{1}{n})^2 < 2.$$

En effet :

$$(\frac{p}{q} + \frac{1}{n})^2 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2} < \frac{p^2}{q^2} + \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n} \quad (*)$$

La relation (*) implique que $(\frac{p}{q} + \frac{1}{n}) \in A$. *D'autre part, puisque on a toujours*

$$\frac{p}{q} < \frac{p}{q} + \frac{1}{n},$$

on a

$$\sup(A) = \frac{p}{q} < \frac{p}{q} + \frac{1}{n} \in A$$

Notre hypothèse $\frac{p^2}{q^2} < 2$ *nous a permis de trouver un élément de l'ensemble A qui dépasserait strictement le* $\sup$ *de* A. *Ceci est en contradiction avec la définition du* $\sup(A)$ *qui est un majorant de* A*; donc vérifierait normalemant :*

$$\forall x \in A \ : \ \sup(A) \geq x$$

Conclusion l'hypothèse $\frac{p^2}{q^2} < 2$ *est impossible. On démontre de la même manière que l'hypothèse* $\frac{p^2}{q^2} > 2$ *est impossible aussi (en considérant l'inéquation* $(\frac{p}{q} - \frac{1}{n})^2) > 2$. *Puisque, d'après la proposition (1.2)* $\frac{p^2}{q^2} = 2$ *est impossible, on conclut que l'ensemble* A *ne peut avoir de sup rationnel. Comme* A *est symétrique par rapport à* $x = 0$*, on peut également affirmer que* $\inf(A)$ *n'existe pas.*

Université Cadi Ayyad
Faculté Des Sciences Semlalia
Marrakech

Année univérsitaire : 2020/2021
Département de Mathématiques
Analyse 1-Filière SMIA-S1

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 1 : Les nombres réels

`Cours du 09/11/2020 au 14/11/2020`

⋆ ⋆ ⋆

1 Introduction

1.1 Les ensembles de nombres usuels

2 Définition axiomatique des nombres réels

2.1 Relations d'ordre.

2.2 Minorants, Majorants, Sup, inf, Max, Min

Proposition 2.1

Si une partie A admet un plus grand (respectivement plus petit) élément, alors il est unique

2.3 Borne supérieure, borne inférieure

Proposition 2.2

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\}$. Alors $\sup(A)$ et $\inf(A)$ n'existent pas dans $\mathbb{Q}$.

Séance 2 : Cours du 09/11/2020 au 14/11/2020

D'après la proposition précédente (2.2), l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne sup car on peut trouver dans $\mathbb{Q}$ un ensemble majoré ne possédant pas de sup.
Nous allons donc plonger $\mathbb{Q}$ dans un ensemble plus vaste nommé ensemble des nombres réels et noté $\mathbb{R}$; dans lequel les défauts rencontrés dans les propositions (1.2) et (2.2) disparaitront. En d'autres termes, dans $\mathbb{R}$; on aura toujours les deux faits caractéristiques suivants :

a) L'équation $x^2 = 2$ a toujours une solution
b) Tout sous ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$, admet un sup appartenant à $\mathbb{R}$

Définissons donc l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, de façon axiomatique de sorte que le point b) soit vérifié.

2.4 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

Proposition 2.3

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$, qui lui donnent une structure de corps, c'est-à-dire qui vérifie les axiomes :

$\star$ $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif :

- Axiome (A_1) Associativité : pour tous $x,\ y,\ z$ dans $\mathbb{R}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Axiome (A_2) Élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x$
- Axiome (A_3) Opposé : $\forall x \in \mathbb{R},\ x-x = x-x = 0$
- Axiome (A_4) Commutativité : $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$

$\star$ $(\mathbb{R}, .)$ vérifie :

- Axiome (A_5) : Associativité : pour tous $x,\ y,\ z$ dans $\mathbb{R}$, $(x.y).z = x.(y.z)$
- Axiome (A_6) : Élément neutre, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x.1 = 1.x = x$
- Axiome (A_7) : Existence d'un inverse pour tous les réels non nuls : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.x = 1$
- Axiome (A_8) : Distributivité par rapport à l'addition : pour tous $x,\ y,\ z$ dans $\mathbb{R}$, $x.y + x.z = x.(y+z)$
- Axiome (A_9) : Commutativité : $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x.y = y.x$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ car les opérations $+$ et $.$ de $\mathbb{R}$ restreintes à $\mathbb{Q}$ sont des opérations internes à $\mathbb{Q}$. Ceci veut dire que l'addition et la multiplication de nombres rationnels sont des nombres rationnels.

2.5 $\mathbb{R}$ est un Corps totalement ordonné

Proposition 2.4

La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc :

- Axiome (A10) :pour deux éléments quelconques $x;\ y$ appartenant $\mathbb{R}$, on a : $x \leq y$ ou bien $y \leq x$; (Ordre total),
- Axiome (A11) : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- Axiome (A12) : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque 1

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition :

$$x \leq y \iff y - x \geq 0$$
$$x < y \iff (x \leq y \textit{ et } x \neq y)\,.$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels

x, y, z, t :

$$\begin{aligned} \text{Axiome (A13)} : (x \leq y \text{ et } z \leq t) &\implies x + z \leq y + t \\ \text{Axiome (A14)} : (x \leq y \text{ et } z \geq 0) &\implies x \times z \leq y \times z \\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) &\implies x \times z \geq y \times z. \end{aligned}$$

Observons que ces deux groupes d'axiomes sont également vérifiés par l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui ne se dustingue de $\mathbb{R}$ que par l'axiome suivant :

2.6 Axiome de la borne supérieure

Théorème 2.1

Axiome (A15) : Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 2.1

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve :

Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et B l'ensemble des minorants de A. Alors $B \neq \varnothing$ et $\forall (a, b) \in A \times B$, $b \leqslant a$ donc B est non vide et majorée. Soit $\beta = \sup B$. Montrons que β minore A.

Soit $a \in A$, alors a majore B. β est le plus petit majorant de B donc $\beta \leqslant a$ donc β est un minorant de A.

Si x est un minorant de A, $x \in B$ donc $x \leqslant \sup B$ donc β est bien le plus grand minorant de A. ∎

Remarque 2

La question naturelle qui se pose est la suivante. Peut on construire un ensemble muni de deux lois de composition internes + et $\times$; vérifiant les axiomes $A_1 ... A_{15}$: La réponse est affirmative. En fait l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication classique, vérifie les axiomes $A_1 ... A_{14}$: Ce qui caractérise $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ c'est l'axiome de la borne supérieure (A_{15}). Les mathématiciens ont fait beaucoup de constructions de $\mathbb{R}$. Citons deux très célèbres, celle de Dedekind qui utilisa les coupures de Dedekind et celle de Cauchy qui utilisa les limites de suites dites de cauchy. Nous n'aborderons pas ces questions dans ce cours.

2.7 Caractérisation des bornes inférieures et supérieures

Théorème 2.2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \varnothing$ et $m,\ M \in \mathbb{R}$. Alors :

1. A est majorée et

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / M - \varepsilon < x \end{cases}$$

2. A est minorée et

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geqslant m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / m + \varepsilon > x \end{cases}$$

Preuve :

du (1)

$\Rightarrow$ — $\sup A$ *majore* A *donc* $\forall x \in A$, $x \leqslant M$.

— *Soit* $\varepsilon > 0$, *alors* $M - \varepsilon < M$ *donc* $\exists x \in A / x > M - \varepsilon$.

$\Leftarrow$ — M *est un majorant de* A *alors* A *est majorée.*

— *Soit* α *un majorant de* A. *Alors on ne peut avoir* $\alpha < M$ *car si* $\alpha < M$, *alors en posant* $\varepsilon = M - \alpha$, $\varepsilon > 0$ *on a* $\exists x \in A / M - \varepsilon < x$ *donc* α *ne serait pas un majorant de* A. *Ainsi,* $\alpha \geqslant M$.

Exemple 1

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 2\} \qquad B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Corrigé :

• *On a* $x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ *et A n'est rien d'autre que l'intervalle* $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. *C'est un intervalle borné, dont la borne inférieure est* $-\sqrt{2}$ *et dont la borne supérieure est* $\sqrt{2}$.

• *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

Ainsi, B est minoré par 0 et majoré par 1. De plus, $1 \in B$, *dont 1 est un majorant de B qui est élément de B. C'est donc sa borne supérieure. Enfin, prouvons que 0 est la borne inférieure de A. Pour cela, on remarque que, pour tout* $\epsilon > 0$, *on peut trouver* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{1}{n} < \epsilon + 0$.

Comme 0 est un minorant de B, ceci prouve que 0 est la borne inférieure de B.

Université Cadi Ayyad
Faculté Des Sciences Semlalia
Marrakech

Année universitaire : 2020/2021
Département de Mathématiques
Analyse 1-Filière SMIA-S1

⋆ ⋆ ⋆

Chapitre 1 : Les nombres réels

`Cours du 16/11/2020 au 21/11/2020`

⋆ ⋆ ⋆

Séance 1 : Cours du 02/11/2020 au 7/11/2020. Voir plateformes ecampus de l'UCA

1 Introduction

1.1 Les ensembles de nombres usuels

2 Définition axiomatique des nombres réels

2.1 Relations d'ordre.

2.2 Minorants, Majorants, Sup, inf, Max, Min

Séance 2 : Cours du 09/11/2020 au 14/11/2020. Voir plateformes ecampus de l'UCA

2.3 Borne supérieure, borne inférieure

2.4 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

2.5 $\mathbb{R}$ est un Corps totalement ordonné

2.6 Axiome de la borne supérieure

2.7 Caractérisation des bornes inférieures et supérieures

Séance 3 : Cours du 20/11/2020

3 Propriétés des nombres réels

3.1 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 3.1

Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Propriétés 3.1

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

1. $|x| \geq 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x| < r \iff -r < x < r \iff x \in]r, r[$.
5. Inégalité triangulaire $|x+y| \leq |x| + |y|$
6. Seconde inégalité triangulaire $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Preuve : **(Démonstration des inégalités triangulaires)**

— 4) $-|x| \leq x \leq |x|$ *et* $-|y| \leq y \leq |y|$. *En additionnant* $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$, *donc* $|x+y| \leq |x|+|y|$.

— 5) *Puisque* $x = (x-y)+y$, *on a d'après la première inégalité :* $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$. *Donc* $|x| - |y| \leq |x-y|$, *et en intervertissant les réeles de* x *et* y, *on a aussi* $|y| - |x| \leq |y-x|$. *Comme* $|y-x| = |x-y|$ *on a donc* $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

3.2 Propriété d'Archimède

Théorème 3.1 *($\mathbb{R}$ est un corps archimèdien)*

L'ensemble $\mathbb{R}$ *vérifie la propriété suivante, dite d'Archimède*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} :\ nx > y$$

Preuve :

Supposons que la propriété d'Archimède ne soit pas vraie. Celle ci sera prouvée si on aboutit à une contradiction. Alors il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N},\ nx < y$. *Définissons la partie de* $\mathbb{R}$ *suivante :* $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$. *Elle est non vide et majorée par* y. *D'après l'axiome de la borne supérieure,* A *possède une borne supérieure* $b \in R$. *En particulier :* $\forall n \in \mathbb{N},\ nx \leq b$ *ce qui s'écrit aussi* $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)x \leq b$. *On en déduit que* $\forall n \in \mathbb{N},\ nx \leq b - x$. *Mais alors* $b - x$ *est un majorant de* A *et comme* $x > 0,\ b - x < b$. *Le réel* b *n'est donc pas le plus petit des majorants de* A *ce qui est en contradiction avec le fait que ce soit la borne supérieure de* A

3.3 Partie entière

Proposition 3.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Il existe un unique entier relatif* n *tel que* $n \leqslant x < n+1$. n *est alors la partie entière de* x *et se note* $\mathrm{E}(x)$ *ou* $[x]$.

Preuve :

• ***Unicité.*** *Soient n_1 et n_2 deux entiers relatifs vérifiant :*

$$n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \text{ et } n_2 \leqslant x < n_2 + 1.$$

On a alors

$$x - 1 < n_1 \leqslant x \text{ et } x - 1 < n_2 \leqslant x.$$

Ou encore

$$x - 1 < n_1 \leqslant x \text{ et } -x \leqslant -n_2 < 1 - x.$$

En sommant ces deux encadrement, on obtient :

$$-1 \leqslant n_1 - n_2 < 1.$$

Comme n_1 et n_2 deux entiers relatifs, cela donne $n_1 - n_2 = 0$, c'est-à-dire $n_1 = n_2$. D'où l'unicité d'un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$.

• ***Existence.*** *Prouvons l'existence d'un tel entier relatif.*

— *Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \leqslant x < x + 1$.*

— *Si $x \notin \mathbb{Z}$:*

 — *Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{Z} | k \leqslant x\}$. Il est clair que A est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée (d'après la propriété d'Archimède 3.2 , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}|\ k \leq x < N$.) et donc admet un maximum n. On a $n \leqslant x$ et $n + 1 > n = \max A$ donc $n + 1 \notin A$ et $n + 1 > x$. Autrement dit, n vérifie la condition souhaitée.*

3.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 3.2

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que I est un intervalle lorsque : tout réel compris entre deux éléments de I est lui-même élément de I, c'est à dire :

$$\forall x, y \in I \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I)$$

Par convention, $\emptyset$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme :

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$
4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x\}$
6. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$
7. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | a \geqslant x\}$
8. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | a > x\}$
9. $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

i) $(1), (2), (3), (4)$ *sont des intervalles bornés et* $(5), (6), (7), (8), (9)$ *des intervalles non bornés.*
ii) 1 *dit intervalle fermé borné*
iii) 4 *dit intervalle ouvert borné*
iv) 5 *et* 7 *dits intervalles fermés non bornés*
v) 6 *et* 8 *dits intervalles ouverts non bornés*
vi) 2 *et* 3 *dits intervalles semi ouverts*
Les définitions des paragraphes (2.2) et (2.3) impliquent immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.3

Soient a et b deux nombres donnés tels que $a < b$.
i) $\sup[a, b] = \max[a, b] = b$ *,* $\inf[a; b] = \min[a, b] = a$*.*
ii) $\sup]a, b[= b$ *,* $\inf]a, b[= a$ *et l'intervalle* $]a, b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément*
iii) $\sup[a, b[= b$ *,* $\inf[a, b[= \min[a, b[= a$ *et l'intervalle* $[a, b[$ *a pour plus petit élément* a *et n'a pas de plus grand élément.*
iv) $\sup]a, b] = \max]a, b] = b$ *,* $\inf]a, b] = a$ *et l'intervalle* $[a, b[$ *n'a pas de plus grand élément.*
v)$\inf]a, +\infty[= a$ *et l'intervalle* $]a, +\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure, ni de plus petit élément.*
vi) $\inf[a, +\infty[= \min[a, +\infty[= a$ *et l'intervalle* $]a, +\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure.*
vii) $\sup] - \infty, b[= b$ *et l'intervalle* $] - \infty, b[$ *n'admet pas de borne inférieure, ni de plus grand élément.*
viii) $\sup] - \infty, b] = \max] - \infty, b] = b$ *et l'intervalle* $] - \infty, b]$ *n'admet pas de borne inférieure.*

3.5 Densité dans $\mathbb{R}$

Définition 3.3

*Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si :*

1. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in A$ *tel que* $|x - a| \leqslant \varepsilon$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *avec* $x < y$, *alors* $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.
3. *Pour tous réels x et y avec $x < y$, il existe $r \in A$ tel que $x < r < y$ (c'est-à-dire $r \in]x, y[$).*

Ces trois conditions sont équivalentes : il suffit d'en avoir une pour prouver la densité.

Propriété *Si A est dense dans $\mathbb{R}$ et $a < b$, alors $A \cap]a, b[\neq \varnothing$ et est infini.*
En effet, si $A \cap]a, b[$ est fini alors on peut noter ses éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ or $A \cap]a, x_1[\neq \varnothing$, donc il n'existe aucun élément de A compris entre a et x_1. Ce qui contredit le fait que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x < p/q < y$, ce qui s'écrit $qx < p < qy$. Par la propriété d'Archimède on sait qu'on peut choisir un entier q tel que $q(y-x) > 1$, c'est-à-dire $qy > 1 + qx$. Prenons $p = E(1 + qx)$. On a $qy > p$ et par définition de la partie entière, $p > 1 + qx - 1 = qx$, ce qui donne le résultat.

Théorème 3.3

L'ensemble $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ formé des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $r \in]x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}[$, ce qui donne $r + \sqrt{2} \in]a; b[$, et on montre par l'absurde que $r + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque 1

Entre deux réels x et y distincts, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels compris entre x et y.

Séance 3 : Cours du 20/11/2020 Voir plateformes ecampus de l'UCA

1.3 Propriétés des nombres réels

1.3.1 Valeur absolue d'un nombre réel

1.3.2 Propriété d'Archimède

1.3.3 Partie entière

1.3.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

1.3.5 Densité dans $\mathbb{R}$

Séance 4 : Cours du 27/11/2020

1.3.6 Approximation décimale d'un nombre réel.

Parmi les rationnels, les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux de la forme $\dfrac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.(Voir (1.1)-Les ensembles de nombres usuels)

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux de la forme $\dfrac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\omega_n(x) = \frac{1}{10^n}\mathrm{E}(10^n x)$$

$\omega_n(x)$ est appelé approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n} et $\omega_n(x) \in \mathbb{D}$. On définit de plus

$$\eta_n(x) = \omega_n(x) + \frac{1}{10^n}$$

$\eta_n(x)$ est appelé approximation décimale par excès de x à la précision 10^{-n} et $\eta_n(x) \in \mathbb{D}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(10^n x) \leqslant 10^n x < \mathrm{E}(10^n x) + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega_n(x) \leqslant x < \eta_n(x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \omega_n(x) < \eta_n(x) - \omega_n(x) = \frac{1}{10^n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $10 > 1$ donc on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$, on a alors

$$|x - \omega_n(x)| = x - \omega_n(x) < \frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

Ainsi, $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. A fortiori, puisque $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.4 La droite numérique achevée

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux éléments non réels, l'un de ces deux éléments est noté $-\infty$ et l'autre $+\infty$.

Définition 1.4.1

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ et appelé droite numérique achevée.

On prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x : $-\infty < x < +\infty$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné, de plus il possède un maximum ($+\infty$) et un minimum ($-\infty$). Pour tout réel x on pose :

— $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$
— $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty.$
— $(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$
— $(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$
— Si $x > 0$: $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty$
— si $x < 0$: $x(+\infty) = (+\infty) = -\infty$ et $(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty.$
— $(+\infty)(+\infty) = +\infty, (-\infty)(-\infty) = +\infty$ et $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$

Remarque 1
On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini$0 \times (\pm\infty)$ ni $(-\infty) + (+\infty)$. Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans le chapitre sur les limites.

Théorème 1.4.1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve :
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$ alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $+\infty$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure.

Chapitre 2

SUITES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de suite numérique. Nous étudions les suites convergentes et la structure de l'ensemble de ces suites. En suite nous introduisons les notions de suites adjacentes, de suites récurentes et de suites de Cauchy et nous les caractérisons. Des critères de convergence ont été utilisés pour étudier ces suites et calculer leurs limites lorsqu' elle sont convergentes.

2.1 GENERALITES

2.1.1 Définition d'une suite

Définition 2.1.1

On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}$ toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, si I est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est toujours une suite.

Si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$, alors on note, pour $n \in I$, u_n au lieu de $u(n)$ l'image de n par u. La suite elle-même se note (u_n) ou $(u_n)_{n\in I}$.

Pour $n \in I$, u_n est le terme d'indice n de la suite (u_n).On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{R}$.

Remarque 2

Une suite peut être définie à partir d'un entier n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$, les énoncés du cours peuvent être adaptés pour de telles suites (remplacer $n \in \mathbb{N}$ par $n \geq n_0$).

Exemple 1

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- *par une formule **Explicite** : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n, soit $u_n = f(n)$. Par exemple,*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n) = \frac{1}{n^2+1}$$

- *par une formule de **récurrence** : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents :*

$u_{n-1}, \ldots u_0$. *Par exemple,*

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4} \textit{ (relation de récurrence d'ordre 1)}$$

$(F_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $F_0 = 1, F_1 = 1$ *et la relation* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *(relation de récurrence d'ordre 2). La suite* (F_n) *est la suite de Fibonacci.*

- *par une formule **implicite** : le terme général un de la suite est solution d'une équation dépendant de n. Par exemple,*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ la suite des solutions positives de l'équation } x^3 + 2x^2 + x = n.$$

2.1.2 Opérations sur les suites

On peut définir des opérations ($+$ et $\times$) sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Pour $(u_n),\ (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n) + (v_n)$ est la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = u_n + v_n$$

— Pour $(u_n),\ (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(u_n) \times (v_n)$ est la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = u_n v_n$$

— Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{N}$, $(\frac{1}{u_n})$ est la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{1}{u_n}$$

— Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(u_n)$ est la suite w_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \alpha u_n$$

— Pour $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(|u_n|)$ est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = |u_n|$$

Cette notation désigne la valeur absolue.

— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et de la multiplication précédemment définies a une structure d'anneau commutatif

— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire précédemment définies a une structure d'espace vectoriel.

2.1.3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2.1.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

— (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$. ($M$ est alors un majorant de la suite)

— (u_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$. ($m$ est alors un minorant de la suite)

— (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

Exemple 2

• $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + (-1)^n, \quad 0 \leq u_n \leq 2.$

• $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1+n}{2+n}, \quad |v_n| \leq \sqrt{2}.$

2.1.4 Suite croissante, décroissante

Définition 2.1.3

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on dit que :

— (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

— (u_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

— (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

— (u_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

— (u_n) est monotone si u est croissante ou décroissante.

— (u_n) est strictement monotone si est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 3

• $n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. *Donc* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est strictement croissante.*

Piège ! Il y a des suites non monotones. Par exemple, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante car$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$.

Remarque 3

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.

— *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

2.2 Suites convergentes, divergences

Définition 2.2.1

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers l si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. On écrit alors ceci :
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \text{ ou } \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers l. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.

Remarques

— Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Ceci signifie que pour n assez grand, les termes de (u_n) approchent l à ε près.

— Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge vers l si et seulement si la suite positive $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

— Soit (v_n) une suite réelle positive qui converge vers 0 et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{R}$. Si $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < v_n$, alors u converge vers l.

Exemples de suites convergentes

— Toute suite constante est convergente.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda$. Alors (u_n) converge vers λ : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \lambda| = 0 \leqslant \varepsilon$.

— La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver du fait de l'archimédisme de $\mathbb{R}$ $n_0 \in \mathbb{N}/n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ ($\mathbb{N}$ n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$). Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.

— Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Alors $\left(\frac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$, $a^n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0$ donc $\frac{1}{a^n} = \left|\frac{1}{a^n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.

— La suite $(\omega_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [1] converge vers x.

Définition 2.2.2

1. Soit$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, (u_n) tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$$

1. Voir chapitre 1 : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. (u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A$$

Remarque 4

*Il y a deux cas pour qu'une suite soit divergente : soit elle n'a pas de limite (**par exemple** $(-1)^n$), soit sa limite est infinie.*

On remarque aisément que (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si $-(u_n)$ tend vers $-\infty$.

Exemple 4

Soit (u_n) définie par : $u_n = n^2$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

***En effet**, soit $A > 0$. Prenons $N = E(\sqrt{A}) + 1$. Alors $N^2 > A$. Pour tout $n \geqslant N$, $u_n = n^2 > N^2 > A$ donc $u_n \in [A\ ;\ +\infty[$.*

D'après la définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$u_n = -n^3$: de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Théorème 2.2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers l.

Preuve :

Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

Supposons que (u_n) converge vers l_1 et l_2, et montrons que $l_1 = l_2$. Soit $\varepsilon > 0$:

- *$\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$;*
- *$\exists n_2 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_2$, $|u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$.*

Pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - u_n + u_n - l_2| \\ &= |l_1 - u_n + (u_n - l_2)| \\ &\leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $|l_1 - l_2| \leqslant 2\varepsilon$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $|l_1 - l_2| \leqslant \varepsilon$.

Petit lemme *(Voir T.D 1 : exercice 4)*

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $x < \varepsilon \Leftrightarrow x \leqslant 0$. En effet :

$\Leftarrow$ *« Obvious ! »*

$\Rightarrow$ *Si $x > 0$, alors $0 < \dfrac{x}{2} < x$, ce qui contredit l'assertion.*

Ici, $|l_1 - l_2| \leqslant 0 \Rightarrow l_1 - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$.

Remarque 5

— *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, convergente et de limite* $l \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha < l < \beta$*. Alors,* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $u_n \in [\alpha, \beta]$*.*

En effet*, on choisit* ε *tel que* $l - \varepsilon > \alpha$ *et* $l + \varepsilon < \beta$*. Alors,* $\varepsilon = \min(\beta - l, l - \alpha)$ *donc* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon] \subset [\alpha, \beta]$*.*

  — *Si* $l > 0$*, en choisissant* $\alpha = \dfrac{l}{2} > 0$*, on a* $u_n \geqslant \alpha > 0$ *pour* n *assez grand.*

  — *Si* $l < 0$*, en choisissant* $\beta = \dfrac{l}{2} > l$*, on voit que* $u_n \leqslant \beta < 0$ *pour* n *assez grand.*

— *Soit* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*,* $l \in \mathbb{R}$*,* $M > 0$ *et supposons que* $\forall \varepsilon > 0$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $|u_n - l| < M\varepsilon$*. Alors* (u_n) *converge vers* l*.*

En effet*, soit* $\varepsilon' > 0$ *tel que* $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{M}$ *donc* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $|u_n - l| \leqslant M\varepsilon = \varepsilon'$ *donc* $\forall \varepsilon' > 0$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$*.*

Théorème 2.2.2

Toute suite convergente est bornée.

__**Preuve :**__

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *convergente de limite* $l \in \mathbb{R}$*. Prenons* $\varepsilon = 1$[2]*. Alors* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$*,* $|u_n - l| \leqslant 1$*. D'où pour* $n \geqslant n_0$*,*

$$\begin{array}{rcl} |u_n| & = & |u_n - l + l| \\ & \leqslant & |u_n - l| + |l| \\ & \leqslant & 1 + |l| \end{array}$$

Soit par ailleurs $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0 - 1}|)$*. Alors* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $|u_n| \leqslant \max(M, 1 + |l|)$*.*

Remarque 6

La réciproque du théorème n'est vraie en général, il existe des suites bornées non convergentes, par exemple : $u_n = (-1)^n$*.*

2.2.1 Propriétés des suites réelles convergentes

Borne supérieure et suites

Proposition 2.2.1 (borne supérieure et suites)

Si A admet une borne supérieure (resp. inférieure), il existe alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers $M = \sup A$. (resp. $m = \inf A$).

2. On peut ici prendre n'importe quel nombre positif.

Preuve :

Supposons que A admette une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, on peut trouver un élément $u_n \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < u_n \leq M.$$

De cet encadrement on déduit alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = M$

Théorème de convergence des suites monotones

Théorème 2.2.3

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge vers $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge vers $l = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Preuve :

1. *Supposons que (u_n) est majorée et croissante et soit $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / l - \varepsilon < u_{n_0}$. Pour $n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l$ car (u_n) est croissante et l majore tous les termes. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$,*

$$u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$$

   Si (u_n) n'est pas majorée, soit $M \in \mathbb{R}$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geqslant M$. Pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M$.
2. *Démonstration analogue*

Exemple 5

$n \geq 1,\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$. *On a $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et $u_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.*

2.2.2 Opérations sur les limites

Proposition 2.2.2

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes respectivement vers $l, l' \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha(u_n) + (v_n)$ converge vers $\alpha l + l'$.
2. $u_n v_n$ converge vers ll'.
3. $|u_n|$ converge vers $|l|$.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $l \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$ et $\frac{v_n}{u_n}$ converge vers $\frac{l'}{l}$.

Preuve :

1. *Soit* $\varepsilon > 0$*, observons que pour* $n \in \mathbb{N}$ *,*

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| &= |\alpha (u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leqslant |\alpha| |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &\leqslant (|\alpha| + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

   On sait que $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$*,* $|u_n - l \leqslant \varepsilon|$ *et* $\exists n_2 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_2$*,* $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon$ *donc pour* $n \geqslant \max(n_1, n_2)$*,*

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| \quad &\leqslant |\alpha| |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &\leqslant (|\alpha| + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

   Donc $\forall \varepsilon' = \alpha\varepsilon + \varepsilon > 0$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$*,* $|\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| \leqslant \varepsilon'$*.*

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on effectue le calcul préliminairesuivant :*

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'| \\ &\leqslant |u_n - l| |v_n| + |l| |v_n - l'| \end{aligned}$$

   v_n *est convergente donc bornée :* $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}$*,* $|v_n| \leqslant M$*. Soit* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon \quad \textit{et} \quad n \geqslant n_2 \Rightarrow |v_n - l'| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\forall n \geqslant \max(n_1, n_2)$*,* $|u_n v_n - ll'| \leqslant (M + |l|) \varepsilon$*.*

3. $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$*. Cette dernière expression tend en effet vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*.*

4. $\forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|l| |u_n|}$$

   D'après (3)*,* $|u_n|$ *converge vers une limite strictement positive donc* $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_1$*,* $|v_n| \geqslant \frac{|l|}{2} > 0$ *car* $\frac{|l|}{2} < |l|$*. Par ailleurs, soit* $\varepsilon > 0$*,* $\exists n_2 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_2$*,* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ *donc pour* $n \geqslant \max(n_1, n_2)$*,*

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|l|} \cdot \frac{2}{|l|} = \frac{2\varepsilon}{|l|^2}$$

Chapitre 2

SUITES NUMÉRIQUES

2.1 GENERALITES

2.1.1 Définition d'une suite

2.1.2 Opérations sur les suites

2.1.3 Suite majorée, minorée, bornée

2.1.4 Suite croissante, décroissante

2.2 Suites convergentes, divergences

Remarques

Exemples de suites convergentes

Séance 4 : Cours du 4/12/2020

2.2.1 Propriétés des suites réelles convergentes

Borne supérieure et suites

Proposition 2.2.1 (borne supérieure et suites)

Si A admet une borne supérieure (resp. inférieure), il existe alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers $M = \sup A$. (resp. $m = \inf A$).

Preuve :

Supposons que A admette une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, on peut trouver un élément $u_n \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < u_n \leq M.$$

De cet encadrement on déduit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$

Théorème de convergence des suites monotones

Théorème 2.2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge vers $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge vers $l = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Preuve :

1. *Supposons que (u_n) est majorée et croissante et soit $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon < l$ donc $l - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / l - \varepsilon < u_{n_0}$. Pour $n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l$ car (u_n) est croissante et l majore tous les termes. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0$,*

$$u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$$

Si (u_n) n'est pas majorée, soit $M \in \mathbb{R}$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geqslant M$. Pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M$.

2. *Démonstration analogue*

Exemple 1
$n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$. On a $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et $u_n \leq \dfrac{n}{n+1} < 1$, donc $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2.2.2 Opérations sur les limites

Proposition 2.2.2

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites convergentes respectivement vers $l, l' \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\alpha(u_n) + (v_n)$ converge vers $\alpha l + l'$.
2. $u_n v_n$ converge vers ll'.
3. $|u_n|$ converge vers $|l|$.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $l \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$ et $\dfrac{v_n}{u_n}$ converge vers $\dfrac{l'}{l}$.

Preuve :

1. *Soit $\varepsilon > 0$, observons que pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| &= |\alpha (u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leqslant |\alpha| |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &\leqslant (|\alpha| + 1) \varepsilon \end{aligned}$$

On sait que $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l \leqslant \varepsilon|$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2$, $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon$ donc pour

$n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| & \leqslant |\alpha| \, |u_n - l| + |v_n - l'| \\ & \leqslant (|\alpha| + 1)\, \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon' = \alpha\varepsilon + \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $|\alpha u_n + v_n - (\alpha l + l')| \leqslant \varepsilon'$.

2. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on effectue le calcul préliminairesuivant :*

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l l'| &= |u_n v_n - l v_n + l v_n - l l'| \\ &\leqslant |u_n - l| \, |v_n| + |l| \, |v_n - l'| \end{aligned}$$

v_n *est convergente donc bornée :* $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$. *Soit* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_2 \Rightarrow |v_n - l'| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\forall n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $|u_n v_n - l l'| \leqslant (M + |l|)\, \varepsilon$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$. *Cette dernière expression tend en effet vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|u_n - l|}{|l| \, |u_n|}$$

D'après (3), $|u_n|$ *converge vers une limite strictement positive donc* $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1$, $|v_n| \geqslant \dfrac{|l|}{2} > 0$ *car* $\dfrac{|l|}{2} < |l|$. *Par ailleurs, soit* $\varepsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ *donc pour* $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|l|} \cdot \frac{2}{|l|} = \frac{2\varepsilon}{|l|^2}$$

2.2.3 Ordre et limites

Conservation des inégalités larges par passage à la limite

Proposition 2.2.3

Soient $(u_n, (v_n)$ deux suites réelles convergentes. On suppose que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$. Alors,

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n \leqslant \lim_{n \mapsto +\infty} v_n$$

Preuve :

Soit $\lambda = \lim u_n$ *et* $\mu = \lim v_n$, *supposons que* $\mu < \lambda$.

Soit $\gamma \in]\mu, \lambda[$, $\gamma > \mu$ *et* v *converge vers* μ *donc* $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, v_n \leqslant \gamma$. *De même,* $\gamma < \lambda$ *et* u *converge vers* λ *donc* $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2, u_n \geqslant \gamma$. *Mais alors, pour* $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, $u_n \leqslant v_n$ *et* $v_n < \gamma < u_n$, *ce qui est impossible.*

Piège ! Les inégalités strictes ne se conservent en général pas par passage à la limite.

2.2.4 Théorème des gendarmes

Proposition 2.2.4

Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\exists l \in \mathbb{R} / \lim u_n = \lim w_n = l$

Alors (v_n) converge vers l.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$.

(u_n) *converge vers* l *donc* $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

(w_n) *converge vers* l *donc* $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_2, w_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$,

$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant l + \varepsilon$$

Donc $v_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

Exemple 2

1. *Déterminer la limite de la suite* (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

$$\textit{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
$$2 - \frac{1}{n} \leq 2 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 2 + \frac{1}{n}$$
$$2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2 \end{array}\right\} \textit{donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

2. *Étudier la limite de la suite* (u_n) *définie, pour tout entier par :* $u_n = \dfrac{3n + 5 \times (-1)^n}{2n}$.

Extensions aux limites infinies

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si (u_n) tend vers $\pm\infty$, alors (u_n) n'est pas convergente et (u_n) n'est pas majorée ou minorée selon le cas.
2. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini. Si $a > 1$, $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.
3. Soient $u_n, v_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. Alors :
   - Si u_n tend vers $+\infty$, alors v_n aussi.
   - Si v_n tend vers $-\infty$, alors u_n aussi.

Proposition 2.2.5

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) une autre suite de réels.

1. Si (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
2. On suppose que $\exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, v_n \geqslant k$ [a]. Alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
3. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ alors $\dfrac{1}{u_n}$ tend converge 0.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et si v_n converge vers 0, alors $\dfrac{1}{v_n}$ tend vers $+\infty$.

[a] Cette condition se produit notamment si v_n converge vers une limite strictement positive ou si (v_n) tend vers $+\infty$.

Preuve :

1. *Soit* $m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant m$ *et* $M \in \mathbb{R}$. *Alors,* $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant M - m$. *Pour* $n \geqslant n_0$,
$$u_n + v_n \geqslant M - m + m = M$$
2. *Soit* $M \in \mathbb{R}_+$, *alors* $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_1, u_n \geqslant \dfrac{M}{k}$ *d'où, pour* $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,
$$u_n v_n \geqslant \frac{M}{k} \cdot k = M$$
Donc $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$.

Remarque 1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *telle que* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *et* (v_n) *une autre suite de réels.*

— *Si* (v_n) *converge,* (v_n) *est minorée.*
— *On ne peut rien affirmer de général sur* $(u_n + v_n)$ *lorsque* (v_n) *n'est pas minorée.*
— *Si* (v_n) *converge vers* 0, *on ne peut rien affirmer de général sur* $(u_n v_n)$.
— *Des théorèmes analogues existent lorsque* u_n *tend vers* $-\infty$.

2.3 Suites adjacentes

Définition 2.3.1

On dit que $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

1. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
2. $u_n - v_n$ converge vers 0.

Théorème 2.3.1

Deux suites adjacentes sont toujours convergentes de même limite.

Preuve :

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *adjacentes et on suppose* (u_n) *croissante et* (v_n) *décroissante.*

Lemme $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $u_p \leqslant v_q$.
En effet , supposons le contraire : $\exists p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $v_q < u_p$. *Pour* $n \geqslant \max(p, q)$,

$$v_n \leqslant v_q < u_p \leqslant u_n \Rightarrow u_n - v_n \geqslant u_p - v_q > 0$$

Si n *tend vers* $+\infty$, $0 \geqslant u_p - v_q > 0$, *ce qui est impossible*

Ici, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Alors (u_n) *est croissante et majorée par* v_0 *donc elle converge vers une limite* $l_1 \in \mathbb{R}$. *De même,* (v_n) *est décroissante et minorée par* u_0 *donc elle converge vers* $l_2 \in \mathbb{R}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ *donc* $l_1 \leqslant l_2$ *par passage à la limite de l'inégalité large. Or* $u_n - v_n$ *converge vers 0 mais aussivers* $l_1 - l_2$ *d'après les théorèmes généraux. Par unicité de la limite d'une suite convergente,* $l_1 - l_2 = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2$.

Exemple 3
Soient (u_n) *et* (v_n) *les deux suites définies pour* $n \geq 1$ *par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \textit{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$$

Montrons que (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes :*

1. (a) (u_n) *est croissante car* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
   (b) (v_n) *est décroissante :*
   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+2+2(n+1)^2-2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0$
2. *Pour tout* $n \geq 1$ *:* $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} > 0$, *donc* $u_n \leq v_n$.
3. *Enfin comme* $v_n - u_n = \frac{2}{n+1}$ *alors* $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite finie* ℓ. *Nous avons en plus l'encadrement* $u_n \leq \ell \leq v_n$ *pour tout* $n \geq 1$. *Ceci fournit des approximations de la limite : par exemple pour* $n = 3$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \leq \ell \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$ *donc* $1,3611\ldots \leq \ell \leq 1,8611\ldots$

Une façon équivalente d'énoncer 2.3 est :

2.3.1 Théorème des segments emboîtés

Théorème 2.3.2

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments[a] telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$. Alors :
Par conséquent,

1. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un segment non vide.
2. Si de plus on suppose que la longueur[b] du segment I_n tend vers 0 lorsque n tend

vers $+\infty$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

a. Un segment est un intervalle du type $[a, b]$ avec $a \leqslant b$.
b. La longueur du segment $[a, b]$ est bien sûr $b - a$.

Preuve :

Notons $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n \leqslant b_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$ donc $I_{n+1} \subset I_n \subset I_0$ donc

$$a_0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b_0$$

Alors a est croissante et majorée par b_0 donc elle converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, b est décroissante et minorée par a_0 donc elle converge vers $\mu \in \mathbb{R}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$ donc $\lambda \leqslant \mu$ par passage à la limite de l'inégalité large. Montrons que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\lambda, \mu]$$

$\Leftarrow$ *Si $\nu \in [\lambda, \mu]$, on $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \lambda$ et $b_n \geqslant \mu$ donc*

$$a_n \leqslant \lambda \leqslant \nu \leqslant \mu \leqslant b_n$$

Donc $\nu \in [a_n, b_n] = I_n$ donc $\nu \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

$\Rightarrow$ *Si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $x \in I_m$ donc $a_m \leqslant x \leqslant b_m$ donc $\lambda \leqslant x \leqslant \mu$ donc $x \in [\lambda, \mu]$.*

On suppose maintenant que $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or, d'après les théorèmes généraux, $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda - \mu$. Par unicité de la limite, $\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Ainsi, $[\lambda = \mu] = \{\lambda\}$.

Ce point est la limite commune de a_n et b_n.

2.3.2 Suites de Cauchy

Définition 2.3.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy ou que (u_n) vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0, |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Exemple 4

— *Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy. Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq m$, on a*
$|u_n - u_m| = |\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}| = |\frac{n^2-m^2}{n^2.m^2}| = \frac{(n-m)(n+m)}{n^2.m^2}$
Comme $0 \leq n - m \leq n$ et $0 \leq n + m \leq 2n$, on a $|u_n - u_m| \leq 2/m^2$. Soit ϵ un réel strictement positif et $N = E(\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}) + 1$. Quels que soient les entiers m et n vérifiant $n \geq m \geq N$ on a

$2/m^2 \leq \epsilon$: et par conséquent $|u_n - u_m| \leq \epsilon$ D'après la définition 2.3.2, la suite de terme général $1/n^2$ est une suite de Cauchy.

— *La suite $(\ln(n)$ n'est pas de cauchy, en effet $|\ln(p) - \ln(2p)| = ln2$*

Théorème 2.3.3

Une suite de $\mathbb{R}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve :

$\Rightarrow$ *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, (u_n) converge vers l donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall p \geqslant n_0, |u_p - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$,*

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= |u_n - l - (u_m - l)| \\ &\leqslant |u_n - l| + |u_m - l| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ *Soit (u_n) une suite de Cauchy.*

Étape 1 : *Soit $\varepsilon = 1$ [1]. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0$, $|u_n - u_m| < 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a donc :*

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \\ &\leqslant |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ &\leqslant 1 + |u_{n_0}| = M_1 > 0 \end{aligned}$$

Donc u_n est bornée *car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max\left(M_1, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|\right)$.*

Étape 2 : *construction de deux suites*

On pose $A_n = \{u_p; p \geq n\}$, la suite (A_n) est une suite décroissante au sens de l'inclusion d'ensembles non vides : $An + 1 \subset A_n$. Pour tout entier (A_n) est borné et non vide ; on pose $a_n = \inf(A_n)$, $b_n = \sup(A_n)$. On a ainsi défini deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_n \leq b_n$

Étape 3 : *les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.*

Or on sait que si A et B sont des parties bornées, non vides de $\mathbb{R}$ et si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$, donc l'inclusion $\forall n \in \mathbb{N},\ An + 1 \subset A_n$, entraine, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. La suite (a_n) est donc croissante, la suite (b_n) décroissante et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$. Il reste donc à montrer que $\lim(b_n - a_n) = 0$.

On écrit $b_n - a_n = (b_n - u_n) + (u_n - a_n)$: La condition de Cauchy s'écrit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant n_0,\ u_n - \frac{\varepsilon}{2} < u_p < u_n + \frac{\varepsilon}{2}$. d'où l'on déduit $\sup\limits_{p \geqslant n} u_p < u_n + \frac{\varepsilon}{2}$ et $\inf\limits_{p \geqslant n} u_p > u_n - \varepsilon$

On a donc $\forall n > n_0,\ 0 \leq b_n - u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 \leq u_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\forall n > n_0,\ 0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes, elles ont donc une limite commune, la double inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_n \leq b_n$. : entraine alors la convergence de la suite (u_n).

1. On peut bien entendu prendre ici n'importe quel nombre positif.

Exemple 5

Montrons que la suite $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *diverge en montrant que cette suite n'est pas une suite de Cauchy. (Voir TD 2)*

2.3.1 Suites de Cauchy

Définition 2.3.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy ou que (u_n) vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0, |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Exemple 1

— *Montrons que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy. Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq m$, on a*
$|u_n - u_m| = |\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}| = |\frac{n^2-m^2}{n^2.m^2}| = \frac{(n-m)(n+m)}{n^2.m^2}$
Comme $0 \leq n-m \leq n$ et $0 \leq n+m \leq 2n$, on a $|u_n - u_m| \leq 2/m^2$. Soit ϵ un réel strictement positif et $N = E(\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}) + 1$. Quels que soient les entiers m et n vérifiant $n \geq m \geq N$ on a $2/m^2 \leq \epsilon$: et par conséquent $|u_n - u_m| \leq \epsilon$ D'après la définition 2.3.1, la suite de terme général $1/n^2$ est une suite de Cauchy.

— *La suite $(\ln(n)$ n'est pas de cauchy, en effet $\mid \ln(p) - \ln(2p) \mid = ln2$*

Théorème 2.3.1

Une suite de $\mathbb{R}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve :

$\Rightarrow$ *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, (u_n) converge vers l donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall p \geqslant n_0$, $|u_p - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$,*

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= |u_n - l - (u_m - l)| \\ &\leqslant |u_n - l| + |u_m - l| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ *Soit (u_n) une suite de Cauchy.*

Étape 1 : *Soit $\varepsilon = 1$ [1]. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n_0$, $|u_n - u_m| < 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a donc :*

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \\ &\leqslant |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \\ &\leqslant 1 + |u_{n_0}| = M_1 > 0 \end{aligned}$$

Donc u_n est bornée *car* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \max(M_1, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|)$.

Étape 2 : *construction de deux suites*

On pose $A_n = \{u_p ; p \geq n\}$, la suite (A_n) est une suite décroissante au sens de l'inclusion d'ensembles non vides : $A_{n+1} \subset A_n$. Pour tout entier (A_n) est borné et non vide ; on

1. On peut bien entendu prendre ici n'importe quel nombre positif.

pose $a_n = \inf(A_n)$*,* $b_n = \sup(A_n)$*. On a ainsi défini deux suites* (a_n) *et* (b_n) *qui vérifient :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_n \leq b_n$

Étape 3 : *les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes.*

Or on sait que si A *et* B *sont des parties bornées, non vides de* $\mathbb{R}$ *et si* $A \subset B$ *alors* $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$*, donc l'inclusion* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$ *, entraine,* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$*. La suite* (a_n) *est donc croissante, la suite* (b_n) *décroissante et on a :* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$*. Il reste donc à montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$*.*

On écrit $b_n - a_n = (b_n - u_n) + (u_n - a_n)$ *: La condition de Cauchy s'écrit :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, \forall p \geqslant n_0,\ u_n - \frac{\varepsilon}{2} < u_p < u_n + \frac{\varepsilon}{2}$*. d'où l'on déduit* $\sup\limits_{p\geqslant n} u_p < u_n + \frac{\varepsilon}{2}$ *et* $\inf\limits_{p\geqslant n} u_p > u_n - \varepsilon$

On a donc $\forall n > n_0,\ 0 \leq b_n - u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ *et* $0 \leq u_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$*, d'où* $\forall n > n_0,\ 0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$*.*

Les suites (a_n) *et* (b_n) *sont des suites adjacentes, elles ont donc une limite commune, la double inégalité* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_n \leq b_n$*. : entraine alors la convergence de la suite* (u_n)*.*

Remarque 1

1. *Le théorème précédent est très important, puisqu'il fournit une condition nécessaire et suivante pour qu'une suite numérique converge, sans faire intervenir la limite.*
2. *Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque n'est pas vraie, par exemple l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet. En e§et, puisque* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*, pour tout* $n \geq 1$*, il existe un nombre rationnel* r_n *compris entre* $\sqrt{2} - \frac{1}{n}$ *et* $\sqrt{2} + \frac{1}{n}$*. Il est clair que* $\lim r_n = \sqrt{2}$ *puisque* $\sqrt{2} - \frac{1}{n} \leq r_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}$*.*

   Ainsi (r_n) *est une suite de rationnels qui converge vers* $\sqrt{2}$*. Comme cette suite converge dans* $\mathbb{R}$*, elle est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$*, donc c'est aussi une suite de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$*. Mais* (r_n) *ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$*.*

Exemple 2

Montrons que la suite $(u_n)_n$ *de terme général* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ *diverge en montrant que cette suite n'est pas une suite de Cauchy. (Voir TD 2) Il s'agit pour cela d'établir l'assertion :*

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad ((p \geq N \quad m \geq N) \quad \textit{et} \quad |u_p - u_m| > \epsilon)$$

Étant donné $N \in \mathbb{N}$*, considérons les entiers* $p = 2n$ *et* $m = n$*; on a*

$$u_p - u_m = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

On a donc montré l'assertion précédent avec $\epsilon = \frac{1}{2}$ *La suite* u_n *n'est donc pas une suite de Cauchy et d'après le théorème précédent elle ne converge pas. Il est par ailleurs aisé de vérifier que la suite* u_n *est strictement croissante ; comme elle ne converge pas, la suite* u_n *tend donc vers* $+\infty$*.*

2.4 Suites extraites, valeurs d'adhérence et théorème de Bolzano-Weierstrass

2.4.1 Suites extraites

A partir d'une suite (u_n), on peut obtenir une nouvelle suite (v_n) en enlevant certains termes de (u_n). On dira que (v_n) est une suite extraite de (u_n). La définition formelle est :

Définition 2.4.1

On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite (v_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 3

1. *$(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont deux suites extraites de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$*
2. *Si $u_n = (-1)^n$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$*

On rappelle que si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.4.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente et de limite $l \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite de (u_n) converge vers l.

Preuve :

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$. Montrons que (v_n) converge vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$, $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$. (u_n) converge vers l donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Prenons $n_0 = n_1$, pour $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |v_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Utilisation Ce théorème est souvent utilisée pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : on extrait une sous-suite qui est divergente, ou bien on extrait deux sous-suites de limites différentes.

Exemple 4

1. *$u_n = \cos(\frac{n\pi}{11})$, $n \in \mathbb{N}$, $u_{11n} = (-1)^n$ est divergente, donc $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge.*
2. *Si $u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite u_{2n} converge vers 1 et u_{2n+1} converge vers -1.*

Proposition 2.4.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Pour que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l il faut et il suffit que les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers l.

Preuve :

Exercice : voir TD 2

Exemple 5

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite tel que*

$$\forall m,n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq u_{m+n}\leq\frac{m+n}{mn}$$

$(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers 0, car les deux suites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent vers 0.*

2.4.2 Valeurs d'adhérence

Définition 2.4.2

Soit l un élément de $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit que l est *une valeur d'adhérence* de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.

Exemple 6

1. *La suite* $u_n=(-1)^n(2+\frac{1}{n+1})$ *possède deux valeurs d'adhérence,* 2 *et* -2.
2. *La suite* $u_n=n(\sin(\frac{n\pi}{2}))$ *possède* 0, $+\infty$ *et* $-\infty$ *comme valeurs d'adhérence.*
   En effet $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2n(\sin(n\pi))=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{4n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(4n+1)(\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}))=+\infty$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{4n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(4n+3)(\sin(\dfrac{3\pi}{2}))=-\infty$

Proposition 2.4.2 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Un réel ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une infinité d'indices n tels que $|u_n-\ell|<\varepsilon$. (c-à-d : $\forall\epsilon>0$, $\forall N,\exists n\geq N,\ |u_n-\ell|<\epsilon$.)
2. Pour que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) soit une valeur d'adhèrence de la suite (u_n), il faut et il suffit que, pour tout réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A[$) contienne une infinité de termes de la suite.

<u>**Preuve :**</u>

$\Leftarrow$ *Puisque* l *est une valeur d'adhérence, il existe* φ_n *strictement croissante telle que* $(u_{\varphi(n)})$ *converge vers* l*. Fixons maintenant* $\epsilon>0$*, alors l'intervalle* $]l-\epsilon;l+\epsilon[$ *contient tous les* $u_{\varphi(n)}$*, à partir d'un certain rang.*

$\Rightarrow$ *Les inervalles* $I_n=]l-\frac{1}{n};l+\frac{1}{n}[$ *contiennent chacun une infinité de termes de la suite. On choisit* $n_1\in\mathbb{N}$ *tel que* $u_{n_1}\in I_1$*. L'intervalle* I_1 *contient une infinité de termes de la suite, donc il existe* $n_2>n_1$ *tel* $u_{n_2}\in I_2$*. Par récurence, on construit ainsi une suite* (n_p) *strictement croissante d'entiers tels que* $u_{n_p}\in I_p$*, pour tout* $p\geq 1$*. On alors* $l-\frac{1}{p}<u_{n_p}<l+\frac{1}{p}$*, donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n_p}=l$ *est une valeur d'adhèrence de la suite* (u_n).

2.4.3 Limite supérieure et limite inférieure.

On va maintenant introduire deux notions fondamentales dans l'étude d'une suite réelle : la limite supérieure et la limite inférieure. En fait, dans la preuve de la théorème (2.3.1), on a utilisé sans en parler ces deux notions qui généralisent la notion de limite, elles sont définies pour n'importe quelle suite (ayant ou non une limite) et coincident avec la notion de limite lorsque celle-ci existe.

Soit (un) une suite réelle et soit $A_n = \{u_p;\ p > n\}$.
On a $x_n = \sup A_n = \sup\limits_{p\geqslant n} u_n$ et $y_n = \inf A_n = \inf\limits_{p\geqslant n} u_n$
Il est clair que $A_{n+1} \subset A_n$, donc (x_n) est décroissante et (y_n) est croissante. Ces deux suites admettent donc des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf x_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup y_n$

Définition 2.4.3 ($\limsup$ et $\liminf$)

On appelle la limite supérieure (respectiviment la limite inférieure) de la suite (u_n) la limite dans $\mathbb{R}$ de (x_n) (respectiviment (y_n)) définie par

$$x_n = \sup A_n = \sup_{p\geqslant n} u_n \text{ (respectiviment } y_n = \inf A_n = \inf_{p\geqslant n} u_n)$$

On note la limite supérieure par $\overline{\lim} u_n$ et la limite inférieure par $\underline{\lim} u_n$.
Ainsi

$$\overline{\lim} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} u_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} u_k$$

$$\text{et} \quad \underline{\lim} u_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} u_k$$

Exemple 7
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n=3k\,; \\ 1+\frac{1}{k}, & n=3k+1\,; \\ 2, & n=3k+2. \end{cases}$
Cette suite n'est pas convergente, ses valeurs d'adhèrence sont $\frac{1}{3}$, 1 *et 2. Ona a donc* $\overline{\lim} u_n = 2$ *et* $\underline{\lim} u_n = \frac{1}{3}$

Théorème 2.4.2

Pour toute suite (u_n), on a :

1. $\overline{\lim} u_n$ et $\underline{\lim} u_n$ sont des valeurs d'adhèrence.
2. Si l est valeur d'adhèrence, alors $\underline{\lim} u_n \leq l \leq \overline{\lim} u_n$
3. La suite (u_n) admet une limite (dans $\mathbb{R}$) si, et seulement si $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$

Démonstration :

1. *Montrons que* $l = \overline{\lim} u_n$ *est une valeur d'adhèrence*
   — 1^{er} ***cas :*** $l \in \mathbb{R}$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On a* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. *Donc il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tous* $n \geq N$, $l - \varepsilon < \sup\limits_{p\geqslant n} u_p < l + \varepsilon$. *On en déduit que, pour tout* $n \geq \mathbb{N}$, *il existe* $q \geq n$ *tel que* $l - \varepsilon < u_q < l + \varepsilon$. *Donc l'intervalle* $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ *contient une infinité de termes de la suite, et* l *est donc une valeur d'adhèrence de* (u_n).

— $2^{\text{ème}}$ ***cas :*** $l = +\infty$. *Soit* $A \in \mathbb{R}$. *On a* $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. *Donc il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tous* $n \geq N$, $\sup\limits_{p\geqslant n} u_p > A$, *donc pour tout* $n \geq \mathbb{N}$, *il existe* $q \geq n$ *tel que* $u_q > A$. *On en déduit que l'intervalle* $]A, +\infty[$ *contient une infinité de termes de la suite, et par suite* $+\infty$ *est une valeur d'adhèrence de* (u_n).

— $3^{\text{ème}}$ ***cas :*** $l = -\infty$. *Soit* $A \in \mathbb{R}$. *On a* $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. *Donc il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tous* $n \geq N$, $\sup\limits_{p\geqslant n} u_p < A$, *donc pour tout* $n \geq \mathbb{N}$, *il existe* $q \geq n$ *tel que* $u_q < A$. *On en déduit que l'intervalle* $]-\infty, A[$ *contient une infinité de termes de la suite, et par suite* $-\infty$ *est une valeur d'adhèrence de* (u_n).

On démontre, de même, que $\underline{\lim} u_n$ *est une valeur d'adhèrence.*

2. *Soit* l *une valeur d'adhèrence de* (u_n). *On a* $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$. *Or* $\inf\limits_{p\geqslant\varphi(n)} u_p < u_{\varphi(n)} < \sup\limits_{p\geqslant\varphi(n)} u_p$.

   En passant à la limite, on obtient $\underline{\lim} u_n \leq l \leq \overline{\lim} u_n$.

3. *Supposons que* $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$. *On a, pour tout* n, $\inf\limits_{p\geqslant n} u_p < u_n < \sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. *Ainsi d'après le théorème d'encadrement* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *existe et vaut* l.

   Réciproqument, si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, *toutes ses sous-suites ont la même limite* l *donc* (u_n) *admet une seule valeur d'adhèrence et par suite* $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$.

2.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Nous allons montrer, que de toute suite bornée, nous pouvons extraire une sous-suite convergente. Ce résultat est trés utile car il nous permet tout de même d'isoler des sous-suites de (u_n) au comportement favorable.

Théorème 2.4.3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une sous suite de u qui converge. Ceci signifie que $\exists l \in \mathbb{R}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Preuve :

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. *On construit par récurrence deux suites* a *et* b *avec :*

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, b_n]\}$ *est une partie infinie de* $\mathbb{N}$.

Initialisation : *On prend tout d'abord* $a_0 = m$ *et* $b_0 = M$. *Soit* $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. *Il est clair que*

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_0, c]\}}_{A} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c, b_0]\}}_{B} = \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ *est infini donc* A *ou* B *sont infinis. Si* A *est infini, on prend* $a_1 = a_0$ *et* $b_1 = c_0$. *Si* B *est infini, on prend* $a_1 = c_0$ *et* $b_0 = b_1$.

Dans tous les cas :

— $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$

— $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$

— $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_1, b_1]\}$ *est infini.*

Hérédité : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*, supposons qu'on a construit*

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$$

tels que $\forall k \in \{1, n\}$, $b_{k+1} - a_{k+1} = \dfrac{1}{2}(b_k - a_k)$ *et que* $\forall k \in \{0, n\}$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_k, b_k]\}$ *est infini. Construisons* a_{n+1} *et* b_{n+1}*. Soit* $c_n = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$*. Alors*

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, c_n]\}}_{A_n} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c_n, b_n]\}}_{B_n}$$

est infini donc A_n *ou* B_n *est infini. Si* A_n *est infini, on prend* $a_{n+1} = a_n$ *et* $b_{n+1} = c_n$*. Si* B_n *est infini, on prend* $a_{n+1} = c_n$ *et* $b_{n+1} = b_n$*. On a bien dans tous les cas :*

— $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$

— $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

— $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ *est infini.*

Les deux suites sont maintenant construites. On construit alors par récurrence l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ *:*

Initialisation : *On prend* $\varphi(0) = 0$*. En effet,* $u_0 \in [m, M] = [a_0, b_0]$.

Hérédité : *Supposons avoir construit* $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$ *pour tout* $k \in \{1, n\}$*. Alors* $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ *est infini donc il contient des éléments strictement plus grand que* $\varphi(n)$*. On prend par exemple pour* $\varphi(n+1)$ *le plus petit de ces éléments.*

a_n *et croissante,* b_n *est décroissante et* $\forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites a_n *et* b_n *sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Or,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(n)}$ *converge vers* λ*.*

2.5 Exemples de suites

2.5.1 Suites arithmétiques

Définition 2.5.1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est dite arithmétique si et seulement si, il existe r de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \times (n)$$

2.5.2 Suites géométriques

Définition 2.5.2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est dite géométrique si et seulement si, il existe q de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé la raison de suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q est :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1-q^n}{1-q} \times u_0$$

Théorème 2.5.1

On fixe un réel q. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme gééral : $u_n = q^n$.

1. Si $q = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.
2. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Preuve :

1. *Evident*
2. *Si* $|q| > 1$*, alors* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $|u_n| = |q|^n$*. Soit* $a > 1$*, alors* $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}/a^n \geqslant M$ *donc ici* $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}/ |u_n| \geqslant M$ *donc* u *n'est ni bornée ni convergente.*
3. *Si* $|q| < 1$*, alors* u *converge vers 0. En effet :*
   - *Si* $q = 0$*, alors* $\forall n \geqslant 1$*,* $u_n = 0$*.*
   - *Si* $q \neq 0$*, alors* $a = \dfrac{1}{|q|}$ *est bien défini et* $a > 1$ *donc* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, a^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Pour* $n \geqslant n_0$,

$$\begin{array}{rcl} a^n & = & a^{n-n_0}a^{n_0} \\ & \geqslant & a^{n_0} \\ & \geqslant & \dfrac{1}{\varepsilon} > 0 \end{array}$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$*,*

$$\begin{array}{rcl} |u_n - 0| & = & |q|^n \\ & = & \dfrac{1}{|a|^n} \\ & \leqslant & \varepsilon \end{array}$$

2.3.1 Suites de Cauchy

2.4 Suites extraites, valeurs d'adhérence et théorème de Bolzano-Weierstrass

2.4.1 Suites extraites

2.4.2 Valeurs d'adhérence

2.4.3 Limite supérieure et limite inférieure.

Séance 7 : Cours du 18/12/2020

2.4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Nous allons montrer, que de toute suite bornée, nous pouvons extraire une sous-suite convergente. Ce résultat est trés utile car il nous permet tout de même d'isoler des sous-suites de (u_n) au comportement favorable.

Théorème 2.4.1

Soit $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une sous suite de u_n qui converge. Ceci signifie que $\exists l \in \mathbb{R}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tels que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Preuve :

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$. On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) avec :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, b_n]\}$ *est une partie infinie de* $\mathbb{N}$.

Initialisation : *On prend tout d'abord $a_0 = m$ et $b_0 = M$. Soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Il est clair que*

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_0, c]\}}_{A} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c, b_0]\}}_{B} = \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ est infini donc A ou B sont infinis. Si A est infini, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$. Si B est infini, on prend $a_1 = c_0$ et $b_0 = b_1$.

Dans tous les cas :

- $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
- $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$
- $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_1, b_1]\}$ *est infini.*

Hérédité : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'on a construit*

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$$

tels que $\forall k \in \{1, n\}$, $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ *et que* $\forall k \in \{0, n\}$, $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_k, b_k]\}$ *est infini. Construisons* a_{n+1} *et* b_{n+1}. *Soit* $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. *Alors*

$$\underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_n, c_n]\}}_{A_n} \cup \underbrace{\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [c_n, b_n]\}}_{B_n}$$

est infini donc A_n *ou* B_n *est infini. Si* A_n *est infini, on prend* $a_{n+1} = a_n$ *et* $b_{n+1} = c_n$. *Si* B_n *est infini, on prend* $a_{n+1} = c_n$ *et* $b_{n+1} = b_n$. *On a bien dans tous les cas :*

— $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
— $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$
— $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ *est infini.*

Les deux suites sont maintenant construites. On construit alors par récurrence l'application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ *:*

Initialisation : *On prend* $\varphi(0) = 0$. *En effet,* $u_0 \in [m, M] = [a_0, b_0]$.

Hérédité : *Supposons avoir construit* $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$ *pour tout* $k \in \{1, n\}$. *Alors* $\{p \in \mathbb{N} | u_p \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ *est infini donc il contient des éléments strictement plus grand que* $\varphi(n)$. *On prend par exemple pour* $\varphi(n+1)$ *le plus petit de ces éléments.*

a_n *et croissante,* b_n *est décroissante et* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites a_n *et* b_n *sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune* $l \in \mathbb{R}$. *Or,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $u_{\varphi(n)}$ *converge vers* l.

2.4.5 Deuxième démonstration (plus courte)

Tout d'abord une première étape.

Théorème 2.4.2 (Théorème de Ramsey)

Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Preuve :
Soit (u_n) *une suite réelle. On considère l'ensemble*

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n,\ u_k < u_n\}.$$

Concernant cet ensemble A *deux cas se présentent : ou bien* A *est fini (y compris vide), ou bien il est infini. Si* A *est fini ou vide, il admet un élément maximal* n_0 *(on pose* $n_0 = -1$ *dans le cas où* A *est vide). On pose* $p_0 = n_0 + 1$, *donc* $p_0 \notin A$. *Par définition de* A, *on sait qu'il existe* $p_1 > p_0$ *tel que*

$u_{p_1} \geq u_{p_0}$ *(car sinon* $p_0 \in A$*). De même, il existe* $p_2 > p_1$ *tel que* $u_{p_2} > u_{p_1}$ *car sinon* $p_1 \in A$. *Et ainsi de suite, par récurrence on construit une suite strictement croissante d'entier (pk) tels que upk+1 upk pour tout* k. *On a bien construit une sous-suite croissante de* (u_n).

Si A *est infini, alors on peut écrire* $A = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ *o'u* (p_n) *est une suite strictement croissante d'entiers. On a en particulier* $u_{p_{n+1}} < u_{p_n}$ *par définition de* A. *Ainsi la sous-suite* (u_{p_n}) *est décroissante.*

Preuve : (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Soit (u_n) *une suite réelle bornée. Par le Théorème de Ramsey elle admet une sous-suite monotone. Cette sous-suite monotone est aussi bornée, donc par le Théorème de convergence des suites monotones, elle est convergente.*

2.5 Exemples de suites

2.5.1 Suites arithmétiques

Définition 2.5.1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est dite arithmétique si et seulement si, il existe r de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r est :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

2.5.2 Suites géométriques

Définition 2.5.2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est dite géométrique si et seulement si, il existe q de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

q est appelé la raison de suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q est :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \times u_0$$

Théorème 2.5.1

On fixe un réel q. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme gééral : $u_n = q^n$.

1. Si $q = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.
2. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Preuve :

1. *Evident*
2. *Si $|q| > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |q|^n$. Soit $a > 1$, alors $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}/a^n \geqslant M$ donc ici $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}/\ |u_n| \geqslant M$ donc u n'est ni bornée ni convergente.*
3. *Si $|q| < 1$, alors u converge vers 0. En effet :*
   — *Si $q = 0$, alors $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 0$.*
   — *Si $q \neq 0$, alors $a = \dfrac{1}{|q|}$ est bien défini et $a > 1$ donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0, a^n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Pour $n \geqslant n_0$,*

$$\begin{aligned} a^n &= a^{n-n_0}a^{n_0} \\ &\geqslant a^{n_0} \\ &\geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |u_n - 0| &= |q|^n \\ &= \frac{1}{|a|^n} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

2.5.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 2.5.3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est dite arithmético-géométrique si et seulement si,il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique avec $a \neq 0$ on définit le point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$\alpha = a\alpha + b$. On a donc :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ et } \alpha = a\alpha + b$$

Par différence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison a, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = a^n(u_0 - \alpha) \iff u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha)$$

2.5.4 Critère de d'Alembert

Théorème 2.5.2

Soit u une suite de réels strictement positifs. Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l < 1$, alors u converge vers 0.

Preuve : (Voir exercice 3 de TD 2)

2.5.5 Suites définies par récurrence

Proposition 2.5.1

Soit f une fonction et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.

Démonstration :

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(l)$ par définition de la continuité de f en l.

En utilisant le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ donc tout intervalle ouvert contenant I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang p, donc il contient tous les termes de la suite $f(u_n)$ à partir du rang $p-1$. Ainsi la suite $f(u_n)$ converge vers l.

La limite d'une suite si elle existe est unique donc $f(l) = l$.

Remarque 1

Pour une fonction numérique, un réel a vérifiant $f(a) = a$ est appelé un point fixe pour f.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrons que (u_n) converge et déterminons sa limite.

(u_n) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On montre sans trop de difficulté (par récurrence) que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$ et que (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée donc elle converge vers une limite l et si f est continue en l alors cette limite est solution de $f(x) = x$.

La fonction f est continue sur $]-1\,; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante avec $u_0 = 1$ donc $l \geq 1$ et donc f est continue en l.

Résolvons $f(x) = x$ pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{x+1} = x \\ &\iff x + 1 = x^2 \text{ car } x \geq 1 \\ &\iff x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ ou } x = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 \end{aligned}$$

La seule solution qui convient est donc $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ainsi (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; ce nombre est appelé le nombre d'or.

Exercice

Soient $a, b \geq 0$ et (u_n), (v_n) les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq v_n$, $u_n \geq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geq v_n$.
3. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.
4. Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$.
5. Démontrer que, pour tout $\lambda > 0$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Solution :

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ et de développer cette inégalité.
2. On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n \geq v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$. De plus, on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} \leq u_n.$$
De même,
$$\sqrt{v_{n+1}} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n v_n} = v_n.$$
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente vers un réel l_1.

La suite (v_n) est croissante, et, pour tout entier n,

$$v_n \leq u_n \leq u_1.$$

Elle est donc majorée par u_1. Ainsi, (v_n) est convergente vers l_2. l_1 et l_2 vérifient l'équation

$$\frac{l_1 + l_2}{2} = l_1 \implies l_1 = l_2.$$

4. Si $b = 0$, alors on constate facilement que (v_n) est la suite identiquement nulle, et donc $M(a, 0) = 0$.
5. On considère les suites (u'_n) et (v'_n) vérifiant les mêmes relations de récurrence que (u_n) et (v_n), mais avec pour conditions initiales $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$. Il est facile de prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$. Ainsi, on en déduit par passage à la limite que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Chapitre 4

Fonctions dérivables

Cours de la semaine du 11 au 16 janvier 2021

4.1 Dérivée et fonction dérivée

4.1.1 Définitions

Définition 4.1

Soit $f : I \longrightarrow R$.

1. Soit $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_{f,x_0} & I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$
admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en x_0. On note alors $l = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et on dit que l est la dérivée de f au point x_0.
2. f est dérivable sur I si $\forall x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Si c'est le cas, l'application $x \in I \longmapsto f'(x)$ s'appelle la dérivée de f et se note f' ou $\frac{df}{dx}$.
3. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$,
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{x - x_0}{x - x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \\ &\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1-k} = n x_0^{n-1} \end{aligned}$$
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n x^{n-1}$.

2. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \sqrt{x}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Si $x_0 > 0$, on sait que f est continue et

$$\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 2\sqrt{x_0}$$

Si $x_0 = 0$, $\forall x > x_0$, $\sqrt{x} + 0 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$. f n'est pas dérivable en 0.

Cependant, f est dérivable en x et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. La fonction définie par $f(x) = \sin x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2\frac{\sin(\frac{x - x_0}{2})\cos(\frac{x + x_0}{2})}{x - x_0} = \cos x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $\cos x_0$, autrement dit : $f'(x_0) = \cos x_0$.

Dérivées à droite et à gauche

Définition 4.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Int}(I)$.
On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en x_0 si l'application

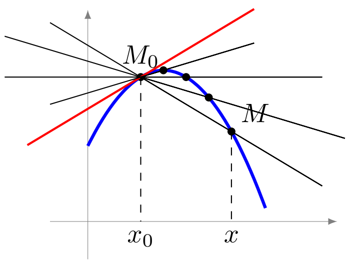
$$\begin{aligned} I \setminus \{x_0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

admet une limite finie à gauche (respectivement à droite) en x_0, notée alors $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectivement $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$).

4.1.2 Interprétation graphique : tangente

La droite qui passe par les points distincts $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$T_{x_0} : y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$



Proposition 4.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (I)$.

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

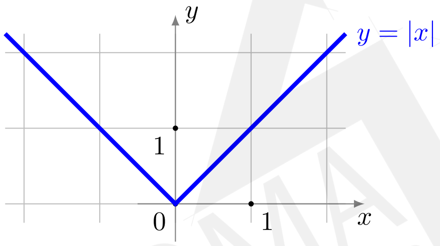
Exemple 1

La fonction $x \mapsto f(x) = |x|$ est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \textit{si } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \textit{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$ et dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = -1$, mais n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.



Proposition 4.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Alors : f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in I$,

$$f(x) = \alpha(x - x_0) + \beta + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $l = f'(x_0)$ donc pour $x \neq x_0$,

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \mathcal{T}_{f,x_0}(x)$$

Or pour $x \neq x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\mathcal{T}_{f,x_0}(x) \\ &= f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)(\mathcal{T}_{f,x_0}(x) - l) \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_0 \\ \mathcal{T}_{f,x_0}(x) - l & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$. On a bien $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et, pour $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

et ceci même si $x = x_0$.

$\Leftarrow$ Supposons que, pour $x \in I$, $f(x) = \alpha(x - x_0) + \beta + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Or $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ car f est continue en x_0 et $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \beta$ donc $\beta = f(x_0)$. Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha$$

donc f est dérivable en x_0 et $\alpha = f'(x_0)$.

Bilan Si f est dérivable en x_0, on a donc, pour $x \in I$,

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. On voit alors que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ donc f est continue en x_0. Ainsi,

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continue en } x_0$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue mais pas dérivable en 0.

4.2 Extremum local d'une fonction

Extremum

Définition 4.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f présente un minimum local (respectivement maximum local) en x_0 si $\exists r > 0$ tel que :

1. $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$
2. $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(x_0)$).

On dit que f admet en un point x_0 de I un extremum local si elle admet un maximum local ou un minimum local.
On note que x_0 doit appartenir à l'intérieur de I pour pouvoir être un extremum.

Lemme

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Si f présente en x_0 un extremum local et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

<u>Preuve :</u>
Supposons que f présente en x_0 un minimum local, par exemple. Alors $\exists r > 0 / [x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

— *Pour $x \in [x_0 - r, x_0[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ donc, par passage à la limite en x_0, $f'(x_0) \leqslant 0$.*

— *Pour $x \in]x_0, x_0 + r]$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ donc, par passage à la limite en x_0, $f'(x_0) \geqslant 0$.*

Ainsi, $f'(x_0) = 0$.

Piège ! La réciproque de ce lemme est fausse !

Par exemple, $f : x \longrightarrow x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$, mais f ne présente en 0 ni minimum ni maximum local.

4.2.1 Opérations sur les dérivées

Opérations générales

Théorème 4.1

Version locale Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g$ est dérivable en x_0 et $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.
3. Si de plus, $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$. Par conséquent $\frac{g}{f}$ est dérivable et x_0 et
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)\, f(x_0) - f'(x_0)\, g(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Version globale Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(\alpha f + r)' = af' + g'$.
2. $fg \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Si de plus, $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$. Par conséquent, $\frac{g}{f} \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et
$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - fg'}{f^2}$$

Démonstration Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathcal{T}_{f,x_0}(x)$. On a $\mathcal{T}_{f,x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ et $\mathcal{T}_{g,x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(x_0)$.

1.
$$\mathcal{T}_{\alpha f + g, x_0}(x) = \alpha \mathcal{T}_{x_0, f} + \mathcal{T}_{g, x_0}$$

   D'où le résultat.

2.
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{fg,x_0} &= \frac{f(x)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)\, g(x) - f(x)\, g(x_0) + f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x)\, \mathcal{T}_{g,x_0} + g(x_0)\, \mathcal{T}_{f,x_0} \end{aligned}$$

   Or f et g sont continues en x_0 donc $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g(x_0)$. De plus, $\mathcal{T}_{f,x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ et $\mathcal{T}_{g,x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(x_0)$, d'où le résultat.

3.
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\frac{1}{f},x_0} &= \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \left(-\frac{1}{f(x)\, f(x_0)}\right) \\ &\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -f'(x_0) \cdot \frac{1}{f^2(x_0)} \end{aligned}$$

Théorème 4.2

Soit $f : I \longrightarrow J$ où J est un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en y_0, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et
$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g' \circ f(x_0)$$
2. Si $f \in \mathcal{D}(I, J)$ et $G \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$

Démonstration Pour $y \in J$, $\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{si } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{si } y = y_0 \end{cases}$. Il est clair que ψ est continue en y_0. On a pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \psi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Or f est continue en x_0 donc $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ donc $\psi \circ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g' \circ f(x_0)$, et $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$, d'où le résultat.

Exemple 2

— *Calculons la dérivée de la fonction* $f : x \longmapsto \cos(x^2) + e^{-x^3} + ln(\sqrt{x})$.
$x \longmapsto cos(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \longmapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$x \longmapsto e^{-x^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \longmapsto x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto ln(\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \ln x$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Enfin f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (f)'(x) = -2x\sin(x^2) - 3x^2 e^{-x^3} + \frac{1}{2x}.$$

— *Etudions la dérivabilité de la fonction définie par : $f : x \longmapsto x\sin(\frac{1}{x})$ et $f(0) = 0$*
• *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.*
• *Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$ qui n'existe pas.* • *Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*, (f)'(x) = \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x}$*

4.2.2 Dérivée d'une réciproque

Théorème 4.3

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone, alors :

1. f induit une bijection de I dans $J = f(I)$ notée encore f^{-1}. $g = f^{-1}$ est continue strictement monotone de J dans I de même monotonie que f.
2. Soit $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors $g = f^{-1}$ est dérivable en y_0 et
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration

1. Ce résultat est connu, voir le théorème de la bijection section (Cours : Limites thm bijection).
2. Pour $y \in J \setminus \{y_0\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{g,y_0}(y) &= \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \\ &= \frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))} \end{aligned}$$

g est injective donc $g(y) \neq g(y_0)$ pour $y \in J \setminus \{x_0\}$. Ainsi :

$$\mathcal{T}_{g,y_0}(y) = \frac{1}{\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}}$$

g est continue donc $g(y) \underset{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}}{\longrightarrow} g(y_0)$ et on sait que $\mathcal{T}_{f,x_0}(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} f'(x_0)$ donc, par composition des limites, pour $y \in J \setminus \{x_0\}$:

$$\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y)) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y))} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si $f'(x_0) = 0$, supposons par exemple f strictement croissante. Alors $\forall x \neq x_0$, $\mathcal{T}_{f,x_0}(x) > 0$ car c'est le quotient de deux nombres négatifs ou positifs simultanément. Ainsi, pour $x \neq x_0$, $\mathcal{T}_{f,x_0}(g(y)) \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0^+$ donc g admet une tangente verticale en 0.

Reformulation Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone et dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$, $g = f^{-1}$ est dérivable sur J et $\forall y \in J$,

$$g'(y) = \frac{1}{f' \circ g(y)}$$

Application :

— **Étude de la racine n-ième :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$. f est strictement croissante et $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ donc f est bijective et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt[n]{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = nx^{n-1} > 0$. Ainsi, $\forall y \in f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, g est dérivable en y et

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \\ &= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Or $\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1} = y^{1-\frac{1}{n}}$ donc $g'(y) = \frac{1}{n} y^{1-\frac{1}{n}}$.

— **Fonction arcsin :**
$x \longmapsto \arcsin x$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1;1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

En effet :

$$\begin{aligned}\arcsin' x &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

— **Fonction arccos :**
$x \longmapsto \arccos x$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1;1[, \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
En effet :

$$\begin{aligned}\arccos' x &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)}\\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

— **Fonction arctan :**
$x \longmapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

sectionFonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

4.2.3 Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique :

La fonction cosinus hyperbolique notée ch est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction sinus hyperbolique notée sh est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x-(-e^{-x})}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$. $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. $ch'x = shx$, $sh'x = chx$
4. $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.
5. $argsh$ est dérivable et $argsh'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
7. Par définition la tangente hyperbolique est :

$$\mathrm{th}\, x = \frac{shx}{chx}$$

La fonction $\text{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.
$\text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$

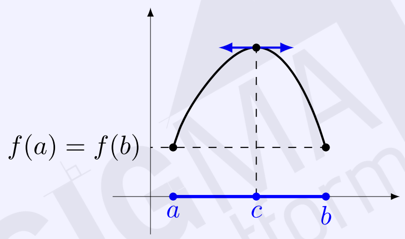
8.

$$argch' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$$
$$argsh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
$$argth' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| < 1)$$

4.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 4.4 (Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors $\exists c \in]a, b[\, / f'(c) = 0$.
Le théorème s'applique toujours lorsque f est dérivable sur $[a, b]$.



Démonstration

— Si f est constante, alors $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
— Supposons f non constante. f est continue sur le $[a, b]$ fermé borné donc f est bornée et atteint ses bornes. Posons alors $m = \min f$ et $M = \max f$. f n'est pas constante donc $m < M$ et M ou/et m est/sont différent(s) de $f(a) = f(b)$. Supposons par exemple $m \neq f(a)$, m est atteint en un point $c \in]a, b[$. Il est clair que f admet en c un minimum local donc $f'(c) = 0$ car f est dérivable en c.

Remarque 1
Les hypothèses faites sont bien nécessaires pour la validité du théorème comme le montrent les exemples suivants

Exemple 3

1. *Soit la fonction f définie sur* $[0; 1]$ *par* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *si* $x \neq 1$ *et* $f(1) = 0$. *Cette fonction est continue, dérivable sur* $[0; 1[$ *et il n'existe aucun point c de* $]0; 1[$ *qui vérifie* $f'(c) = 0$
2. *Soit la fonction f définie sur* $[0; 1]$ *par* $f(x) = x$ *si* $x \in [0; \frac{1}{2}]$ *et* $f(x) = -x + 1$ *si* $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ *. Cette fonction est continue sur* $[0; 1]$ *, dérivable sur* $]0; 1[$ *sauf au point* $\frac{1}{2}$ *et il n'existe aucun point* c *de* $]0; 1[$ *qui vérifie* $f'(c) = 0$.

Le théorème de Rolle s'étend au cas de limites infinies, plus précisément, il s'étend aux cas suivants.

Théorème 4.5

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et vérifiant $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$). Il existe, alors, un élément $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.6

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;a]$), dérivable sur $]a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;a[$) et vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(a)$). Il existe, alors, un élément $c \in]a;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;a[$) tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique : Si une fonction prend la même valeur en deux points distincts a et b, il existe un point où la tangente est horizontale. ce point n'est pas forcément unique.

Application : Soit $P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$ un polynôme ayant n racines réelles différentes : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

<u>Montrons que P' a $n-1$ racines distinctes.</u>

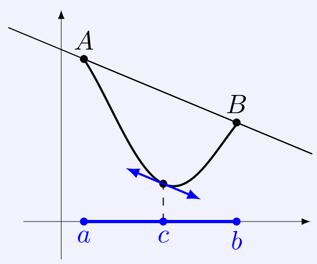
On considère P comme une fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$. P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $P(\alpha_1) = 0 = P(\alpha_2)$ alors par le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que $P'(c_1) = 0$. Plus généralement, pour $1 \le k \le n-1$, comme $P(\alpha_k) = 0 = P(\alpha_{k+1})$ alors le théorème de Rolle implique l'existence de $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines de P' : $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$. Comme P' est un polynême de degré $n-1$, toutes ses racines sont réelles et distinctes.

4.3.1 Théorème des accroissements finis et conséquences

Théorème 4.7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Cela signifie qu'il existe un point de la courbe de f entre a et b dont la tangente est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Démonstration Soit

$$\begin{aligned} g\ \ & [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto f(t) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)\right] \end{aligned}$$

$t \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$ est affine donc dérivable sur $[a,b]$. g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Or $g(a)=0=g(b)$, donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$g'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

Conséquence 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors

$$f \text{ est constante } \Leftrightarrow f'=0$$

Il suffit en fait d'avoir f continue sur I et dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$.

Preuve

$\Leftarrow$ Ce sens est le seul restant à démontrer, il est clair qu'une fonction constante possède une dérivée nulle.

— Si f est réelle, soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Montrons que $f(a)=f(b)$. f est dérivable sur $[a,b] \subset I$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)=0$, d'où $f(b)=f(a)$.

Inégalités des accroissements finis

Proposition 4.3

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit bornée. On pose $m=\inf f'$ et $M=\sup f'$. Alors, $\forall x,y \in I$:

1. $$m(y-x) \leqslant f(y)-f(x) \leqslant M(y-x)$$
2. Si $\lambda=\sup|f'|$,
$$|f(y)-f(x)| \leqslant \lambda|y-x|$$

Démonstration

1. Soient $x,y \in I$ tels que $x<y$. f est dérivable sur $[x,y] \subset I$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x,y[$ tel que $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$. Or $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ donc, puisque $y-x>0$,
$$m(y-x) \leqslant f'(c)(y-x)=f(y)-f(x) \leqslant M(y-x)$$
2. On a $|f(y)-f(x)|=f'(c)(y-x) \leqslant \lambda(y-x)=\lambda|y-x|$. Si $y \leqslant x$, alors $|f(x)-f(y)| \leqslant \lambda|x-y|=\lambda|y-x|$.

Corollaire Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ et $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ [1]. Alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

En effet, f' est continue sur le compact $[a,b]$ donc elle est bornée. D'après le (2) du résultat précédent, $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x,y \in I$, $|f(y)-f(x)| \leqslant \lambda|y-x|$.

Exemple 4

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$, *alors*

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

1. C'est à dire que f est dérivable et f' est continue.

En effet, si $x \in [a,b]$, alors $\frac{1}{b} < \ln'(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, d'où le résultat.

Variations des fonctions

Théorème 4.8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
- Si $f' \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors f est croissante.
- Si $f' > 0$ sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante.

Démonstration Soient $x, y \in [a,b]$ avec $x < y$. f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis $\exists c \in]x,y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)\underbrace{(y-x)}_{>0}$$

- Si $f'(c) \geqslant 0$, alors $f(y) \geqslant f(x)$.
- Si $f'(c) > 0$, alors $f(y) > f(x)$.

Variante

Proposition 4.4

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors :
1. f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
2. Si $\forall t \in I$, $f'(t) > 0$, alors f est strictement croissante.

Un énoncé analogue existe pour les fonctions décroissantes.

Démonstrations

1. $\Rightarrow$ Soit $x \in I$, montrons que $f'(x) \geqslant 0$. Soit $x \in I \setminus \{x\}$. Si $y > x$, $f(y) \geqslant f(x)$ donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$. Si $x > y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$ donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$. Finalement, $\forall y \in I \setminus \{x\}$, $\mathcal{T}_{f,x}(y) \geqslant 0$ donc par passage à la limite lorsque $y \to x$, $f'(x) \geqslant 0$.

   $\Leftarrow$ Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. f est dérivable sur $[x,y]$ et $f' \geqslant 0$ donc, d'après le résultat sur la variation des fonctions, f est croissante sur $[x,y]$ donc $f(x) \leqslant f(y)$.
2. Si de plus, $f' > 0$ sur I on a, toujours d'après le résultat sur la variation des fonctions, f strictement croissante sur $[x,y]$ donc $f(x) > f(y)$.

Remarque 2

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et si f' n'admet pas de limite en x_0, on ne peut pas en conclure que f n'est pas dérivable.

Exemple 5

Soit

$$f \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

— *Pour* $x_0 = 0$ *et* $x \neq 0$,
$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$
Donc pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.

— *Pourtant, pour* $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ *mais* $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'admet pas de limite en* 0, $f'(x)$ *n'admet donc pas de limite en* 0 *mais* f *est dérivable en* 0 [2].

4.3.2 Régle de l'Hospital

Proposition 4.5 (Règle de l'Hospital)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R})$ alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$

Démonstration 4.1

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ *avec par exemple* $a < x_0$. *Soit* $h : I \to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. *Alors*
- h *est continue sur* $[a, x_0] \subset I$,
- h *est dérivable sur* $]a, x_0[$,
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ *tel que* $h'(c_a) = 0$. *Or* $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ *donc* $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. *Comme* g' *ne s'annule pas sur* $I \setminus \{x_0\}$ *cela conduit Ã* $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. *Comme* $a < c_a < x_0$ *lorsque l'on fait tendre* a *vers* x_0 *on obtient* $c_a \to x_0$. *Cela implique*
$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

Exemple 6

Calculer la limite en 1 *de* $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. *On vérifie que :*
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- *Prenons* $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, *alors* g' *ne s'annule pas sur* $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3.$$

Donc
$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3.$$

2. En fait, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$: sa dérivée n'est pas continue.

Chapitre 3 : Fonctions d'une variable réelle : Limites, Continuité

⋆⋆⋆

Cours de la semaine du 21 au 26 décembre 2020

⋆⋆⋆

0.1 Généralités

0.1.1 Définitions

Définition 0.1.1

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$[a]. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

— L'ensemble D est l'ensemble de définition de f.
— Le nombre $f(x)$ est l'image de x par la fonction f. C'est un élément de $\mathbb{R}$.
— Le nombre x est un antécédent de $f(x)$ par f.

a. Qu'est-ce qu'une fonction ?
Une fonction associe à tout élément d'un ensemble de départ un unique élément d'un ensemble d'arrivée.

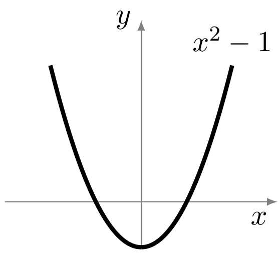
L'ensemble des fonctions numériques définie sur un ensemble D sera noté par $\mathcal{F}(D;\mathbb{R})$.

Exemple 1

La fonction hyperrbolique :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1. \end{array}$$

Le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est la partie $\mathcal{C}_f$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.
L'exemple du graphe de $x \mapsto x^2 - 1$



Opérations usuelles

Définition 0.1.2

Soient D un ensemble, $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit :

— $f + g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ par : $\forall x \in D$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

— $f \cdot g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ par : $\forall x \in D$,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

— $\alpha f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ par : $\forall x \in D$,

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

— Lorsque $\forall x \in D$, $f(x) \neq 0$, on note $\frac{1}{f}$ la fonction de D dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in D$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

On vérifie aisément que $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

0.1.2 Fonctions paire, impaire, périodique.

Définition 0.1.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à -dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

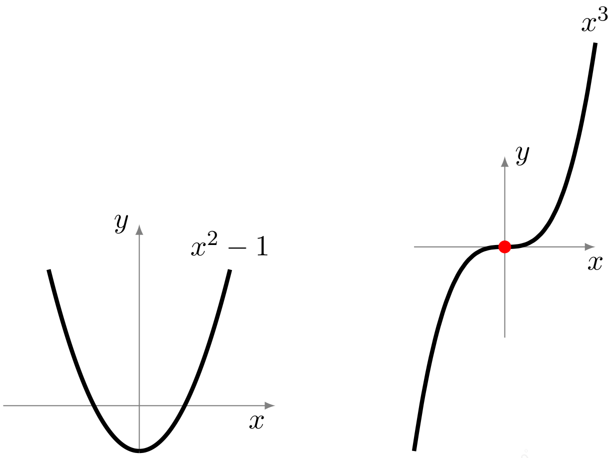
— f est paire si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,

— f est impaire si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

— f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

— f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple 2

— *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire.*
— *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ est impaire.*
— *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est impaire.*

Définition 0.1.4

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ est **périodique de période T** si

$$\forall x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D} \text{ et } f(x+T) = f(x)$$

Toutes les périodes sont des multiples de la plus petite période qui est appelée **la période**.

Exemple 3

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.

0.1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 0.1.5

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

— $f \geq g$ si $\forall x \in D \ \ f(x) \geq g(x)$;
— $f \geq 0$ si $\forall x \in D \ \ f(x) \geq 0$;
— $f > 0$ si $\forall x \in D \ \ f(x) > 0$;
— f est dite constante sur D si $\exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in D \ f(x) = a$;
— f est dite nulle sur D si $\forall x \in D \ \ f(x) = 0$.

Définition 0.1.6

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

— f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in D \ f(x) \leq M$;
— f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in D \ f(x) \geq m$;
— f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à -dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D \;\; |f(x)| \leq M.$$

Exemple 4

1. *Les applications sinus et cosinus sont bornées sur* $\mathbb{R}$ *car*
   $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x) \leq 1$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$
2. *L'application* $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x$ *est minorée et sa borne inférieure est O. Elle n'est pas majorée car quel que soit le réel M, le réel* $x = ln(l + |M|)$ *est tel que* $e^x = |M| + 1 > M$

Si une fonction f est majorée alors l'ensemble $f(D)$ admet une borne supé- rieure M qu'on appellera borne supérieure de la fonction f. On note $M = \sup\limits_{x\in D} f(x)$

De même, Si une fonction f est minorée alors l'ensemble $f(D)$ admet une borne inférieure m qu'on appellera borne inférieure de la fonction f. On note $m = \inf\limits_{x\in D} f(x)$

On notera, en vertu du théorème 1.1 (voir chapitre1), que

1. $$M = \sup_{x\in D} f(x) < +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \leqslant M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D / M < f(x_0) + \varepsilon \end{cases}$$

2. $$m = \inf_{x\in D} f(x) < +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geqslant m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D / m > f(x_0) - \varepsilon \end{cases}$$

Remarque 1

Une fonction définie sur un intervalle borné n'est pas forcément bornée. C'est le cas par exemple de la fonction définie sur $[0;1]$ *par* $f(0) = 1$ *et* $f(x) = \frac{1}{x}$ *si* $x \in]0;1]$

0.2 Notion de limite

0.2.1 Notion de voisinage et de points adhérents.

Définition 0.2.1

Soient $V \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{V}$ est voisinage de x dans $\mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0 /]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$ [a].
- On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $+\infty$ si $\exists M \in \mathbb{R} /]M, +\infty[\subset \mathcal{V}$.
- On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de $-\infty$ si $\exists M \in \mathbb{R} /]-\infty, M[\subset \mathcal{V}$.

On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a. Tout voisinage de x dans $\mathbb{R}$ est a fortiori un voisinage de x dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 5

— $[0,1[$ *est un voisinage de* $\frac{1}{2}$ *dans* $\mathbb{R}$ *car* $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] \subset [0,1[$. *Par contre,* $[0,1[$ *n'est pas un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}$ *car* $\forall \varepsilon > 0$, $[-\varepsilon, \varepsilon]$ *contient des réels strictement négatifs donc n'est pas inclus dans* $[0,1[$.

— *Un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.*
En effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et* $c \in]a, b[$. *Posons* $\alpha = \min(c-a, b-c)$, *alors* $\left[c - \frac{\alpha}{2}, c + \frac{\alpha}{2}\right]$ *est inclus dans* $]a, b[$.

Proposition 0.2.1

— Toute partie contenant un voisinage de x est encore un voisinage de x :
Si $A \in \mathcal{V}(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{V}(x)$.
— Une réunion quelconque de voisinages de x est également voisinage de x.
— Une intersection finie de voisinages de x reste un voisinage de x.

Piège! Une intersection infinie de voisinages peut ne pas être un voisinage.
En effet, $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \notin \mathcal{V}(0)$.

0.2.2 Adhérence d'un ensemble

Définition 0.2.2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.
On dit que x est adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$.
L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence de A et se note $\mathrm{Adh}(A)$ ou $\overline{A}$.

Remarque 2

$$x \text{ est adhérent à } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / |x-a| \leqslant \varepsilon$$

Exemple 6

— *Soit* $A = [a; b]$. *Si* $x \in A$, *alors* x *est adhérent à* A. *D'autre part, pour tout* $\epsilon > 0$, $A \cap]b - \epsilon, b + \epsilon[\neq \emptyset$. *Donc* $b \in \overline{A}$. *De même* $a \in \overline{A}$. *Si* $x < a$, *alors pour* $\epsilon = \frac{a-x}{2} > 0$ $A \cap]x - \epsilon, x + \epsilon[= \emptyset$. *Donc* x *n'est pas adhérent à* A. *On démontre, de même que si* $x > b$, *alors* x *n'est pas adhérent à* A. *Ainsi* $\overline{[a, b]} = [a, b]$. *De même* $\overline{]a, b[} = [a, b]$
— $\overline{]a, c[\cup]c, b[} = \overline{[a, b]}$.
— $A \subset \mathbb{R}$.

- *Si* A *est majorée, alors* $\sup A \in \mathrm{Adh}(A) = \overline{A}$.
- *Si* A *est minorée, alors* $\inf A \in \mathrm{Adh}(A) = \overline{A}$.

Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Théorème 0.2.1

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \overline{A} = \mathrm{Adh}(A) \Leftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } x$$

Preuve :

$\Rightarrow$ *Supposons que* $x \in \mathrm{Adh}(A)$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ *tel que* $|x - a_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. *En particulier,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A$ *tel que* $|x - a_n| \leqslant 2^{-n}$. *Ainsi* a *est une suite de points de* A *qui converge vers* x.

$\Leftarrow$ *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *qui converge vers* x *et* $V \in \mathcal{V}(x)$. *Alors* $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$, $a_n \in V$. *Pour* $n \geqslant n_0$ *De* $a_n \in V \cap A \neq \varnothing$.

0.2.3 Définitions des Limites

Dans la suite, D est une partie non vide de $\mathbb{R}$ [1], et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 0.2.3

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a et on écrit $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a) / f(U \cap D) \subset V$$

Conséquences de la définition des limites sur les fonctions

1. Supposons $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a : $\exists U \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in U \cap D, f(x) > 0$.
   En effet, si $m \in]0, l[$ alors $]m, +\infty] \subset \mathcal{V}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall x \in U \cap D$, $f(x) \in]m, +\infty]$.
2. Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ avec $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < l < \beta$. Alors, au voisinage de a, $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$.
   En effet, $[\alpha, \beta] \in \mathcal{V}(l)$.

0.2.4 Définitions epsilonnesques

On supposera à partir de la définition de la limite précédante que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pour pouvoir envisager les cas où $l \in \{\pm\infty\}$.

1. En pratique, D est une réunion finie d'intervalles.

1. $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

2. $l \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$.

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall t \in D, t \geqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

3. $l \in \mathbb{R}$, $a = -\infty$.

$$f(x) \underset{x \to +-\infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 / \forall t \in D, t \leqslant M \Rightarrow |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$$

4. $a \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

5. $a \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \alpha > 0 / \forall t \in D, |t-a| \leqslant \alpha \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

6. $a = +\infty$, $l = +\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 / \forall t \in D, t \geqslant A \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

7. $a = -\infty$, $l = +\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \geqslant M$$

8. $a = -\infty$, $l = -\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

9. $a = +\infty$, $l = -\infty$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists A < 0 / \forall t \in D, t \leqslant A \Rightarrow f(t) \leqslant M$$

Exemple 7

1. *(Limite et convergence des suites) :*
   On retrouve la notion de limite déjà définie pour les suites. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, prenons $D = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$: alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

$\Rightarrow$ *Soit $\varepsilon > 0$, $V = [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \in \mathcal{V}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}(+\infty)$ tel que $u(U \cap \mathbb{N}) \subset V$. Soit $M > 0$ tel que $[M, +\infty] \subset U$. On prend $n_0 = \mathrm{E}(M) + 1$. Pour $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N} \cap U$ donc*

$u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

$\Leftarrow$ *Soit* $V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\varepsilon > 0$ *tel que* $[l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$ *donc* $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ *donc* $u_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$. *En prenant* $U = [n_0, +\infty]$, *alors* $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} \cap U$, $u_n \in V$.

Exercice

Montrer, en utilisant la définition, que :

$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x_0 > 0$

$\lim_{x\to 0} x.\sin(\frac{1}{x}) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$

Solution

2. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x_0 > 0$
En effet : On a l'égalité $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$ *et puisque* $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0} > 0$, *on en déduit* $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$. *Donnons- nous un nombre* $\epsilon > 0$ *et posons* $\alpha = \epsilon\sqrt{x_0}$. *Le nombre* α *est strictement positif et si l'on a* $|x - x_0| < \alpha$, *alors il vient* $\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$ *et par suite* $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$. *Nous venons ainsi de montrer que* $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x_0 > 0$
3. $\lim_{x\to 0} x.\sin(\frac{1}{x}) = 0$. *En effet, soit* $\varepsilon > 0$ *fixé. On oura* $|x.\sin(\frac{1}{x})| < \varepsilon$ *dès que* $|x| < \varepsilon$ *car* $|\sin(\frac{1}{x})| < 1$. *En résume :* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha = \varepsilon\ /\forall \in I,\ |x - 0| < \alpha \Longrightarrow |x.\sin(\frac{1}{x}) - 0| < \varepsilon$.
4. *Montrons que* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$
$\forall A \geq 1.\ 0 \neq |x-2| < \frac{1}{A} \Longrightarrow \frac{1}{(x-2)} > \frac{1}{|x-2|} > A$, *en choisissant* $\delta = \frac{1}{A}$
$\forall A < 1.\ 0 \neq |x-2| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{(x-2)} > 1 > A$.
Ainsi, $\forall A > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+\backslash\{2\} \quad |x-2| < \delta \implies f(x) > A$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. *En effet : Soit* $\epsilon > 0$. *On cherche* A *tel que si* $x > A$ *alors on a :* $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{|x|} < \epsilon$. *Cette inéquation est équivalente à* $|x| > \frac{1}{\epsilon}$. *En posant* $A = \frac{1}{\epsilon}$, *on a bien pour tout* $x > A$ *:* $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{|x|} < \epsilon$. *Voilà qui prouve que* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$. *En effet : Soit* $A \in \mathbb{R}$, *si* $A \leq 0$ *alors* $\forall x \geq 0,\ x^2 + x + 1 \geq 0 \geq A$. *Si* $A > 0$, *en coisissant* $B = \sqrt{A}$, *ona* $\forall x \geq B,\ x^2 + x + 1 \geq x^2 \geq A$. *Ainsi* $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x > B \implies x^2 + x + 1 > A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$
7. *Montrons que* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$
En effet : Soit $\epsilon > 0$. *On cherche* B *tel que si* $x > B$ *alors on a :* $|\frac{x^2}{x^2+1} - 1| =< \epsilon$. *Majorons* $|\frac{x^2}{x^2+1} - 1| = |\frac{1}{x^2+1}| \leq \frac{1}{x^2}$. *Orpour tout* $x > 0$ *:* $\frac{1}{x^2} < \epsilon \Longleftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. *Posons donc :* $B = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. *D'après ce qui précède :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x > B \Longrightarrow |\frac{x^2}{x^2+1} - 1| =< \epsilon$.

Limites à droite et à gauche en un point

On suppose $a \in \mathbb{R}$ et a adhérent à $D_{+} = D \cap]a, +\infty[$ et à $D_{-} = D \cap]-\infty, a[$.

Définition 3.2.4

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$[a]. On dit que f admet l pour limite à gauche en a et on écrit $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = l$ ou $f(a^-)$

si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Définition analogue pour la limite à droite. Si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Même notation pour les limites à droite. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ > a}} f(x) = l$ ou $f(a^+)$

a. Peut être $l \in \{\pm\infty\}$.

Proposition 3.2.2

Si une fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point a, cette limite est unique.

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'application f admette deux réels ℓ_1 et ℓ_2 distincts pour limite en a et considérons le réel strictement positif $\epsilon = \frac{1}{3}|\ell_1 - \ell_2|$ D'après la définition, d'une part

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in D \quad (|x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| < \epsilon)$$

et d'autre part

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in D \quad (|x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - \ell_2| < \epsilon)$$

Il en résulte, en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$,

$\forall x \in D \quad (|x - a| < \delta \implies |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq 2\epsilon \leq \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$

La relation $|\ell_1 - \ell_2| \leq \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$ étant impossible si $\ell_1 \neq \ell_2$, on aboutit à une contradiction. Cela signifie que l'hypothèse de deux limites distinctes pour f en a est absurde. On a ainsi démontré que si l'application f admettait une limite en a celle-ci était nécessairement unique.

Proposition 3.2.3

f admet une limite l en a $\iff \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$

Exemple 8

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

— *comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim\limits_{2^+} E = 2$,*

— *comme pour tout* $x \in [1, 2[$ *on a* $E(x) = 1$*, on a* $\lim\limits_{2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E *n'a pas de limite en* 2.

3.2.5 Caractérisation des limites à l'aide des suites

Théorème 3.2.2 (Définition séquentielle)

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall u_n \in D^{\mathbb{N}} / \; u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a, f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Soit $u_n \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, et $V \in \mathcal{V}(l)$. Alors $\exists U \in \mathcal{V}(a) / \; f(U \cap D) \subset V$. $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0$, $u_n \in V$. Pour $n \geqslant n_0$, $f(u_n) \in V$ car $u_n \in U \cap D$.

$\Leftarrow$ Par contraposée, supposons que f ne tend pas vers l en a. Alors

$$\exists V \in \mathcal{V}(l) / \forall U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap D) \not\subset V \Leftrightarrow \exists t \in U \cap D / f(t) \notin V$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$U_n = \begin{cases} [a - 2^{-n}, a + 2^{-n}] & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty] & \text{si } a = +\infty \\ [-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathcal{V}(a)$ donc on peut trouver $t_n \in U_n / f(t_n) \notin V$. Alors $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ mais $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers l car $f(t_n) \notin V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3

Le théorème 3.2.2 est parfois utilisé pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point a*. Pour cela, il suffit de trouver deux suites* (u_n) *et* (v_n) *d'éléments de* D *qui admettent* a *comme limite et telles que* $(f(u_n))$ *et* $(f(v_n))$ *admettent deux limites distinctes.*

Exemple 9

La fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *n'a pas de limite en* 0.

En effet : *si on considère les suites définies par* $u_n = \frac{1}{n\pi}$ *et* $vn = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$*, on aura* $f(u_n) = 0$ *et* $f(v_n) = 1$.

3.2.6 Critère de Cauchy

3.2.7 Opérations sur les limites

Cas de limites finies

Proposition 3.2.4

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des limites $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(D)$.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$$\alpha f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha\lambda + \mu$$
2. $$f(x)\, g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\mu$$
3. $$|f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} |\lambda|$$
4. Si, $\forall x \in D$, $f(x) \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors
$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$
5. $$\inf(f(x), g(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \min(\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad \sup(f(x), g(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \max(\lambda, \mu)$$

Démonstrations On utilise la définition séquentielle. Montrons la proposition (2)

Soit $u_n \in D^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a. On a alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mu$. On sait alors que

$$fg(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda\mu \Rightarrow fg(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\mu$$

Cas de limites infinies

Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$.

Hypothèses	Conclusion
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \\ g \text{ minorée au voisinage de } a \end{cases}$	$f(x) + g(t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \\ g \text{ minorée par une constante strictement positive au voisinage de } a \end{cases}$	$f(x)\, g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \\ f \text{ à valeur dans } \mathbb{R}_+^* \text{ au voisinage de } a \end{cases}$	$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$

— g minorée au voisinage de a signifie $\exists m \in \mathbb{R}$ et $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ tels que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) \geqslant m$. Ceci se produit notamment si g est bornée sur D ou si g admet en a une limite $l > -\infty$[2].

— g minorée par une constante strictement positive au voisinage de a signifie $\exists m > 0$ et $U \in \mathcal{V}(a)$ tels que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) \geqslant m$. Ceci se produit notamment si g admet une limite strictement positive en a.

— Des énoncés analogues existent pour f tendant vers $-\infty$.

Démonstration de la proposition (2).

Soit $m > 0$ et $U_1 \in \mathcal{V}(a)$, tel que $\forall t \in U \cap D$, $g(t) > m$. Soit $V \in \mathcal{V}(+\infty)$, $\exists M > 0$ tel que $[M, +\infty[\subset V$. Donc $\exists U_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$ tel que $\forall t \in U_2 \cap D$, $f(t) \in \left[\dfrac{M}{m}, +\infty\right]$. Soit $U = U_1 \cap U_2$, $U \in \mathcal{V}(a)$ et $\forall t \in U \cap D$, $f(t)\, g(t) \geqslant \dfrac{M}{m} m = M$.

Remarque Il y a des situations où on ne peut rien affirmer : les formes indéterminées.

— Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, on ne peut rien affirmer sur $f(x) + g(x)$ FI.

— Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$; on ne peut rien dire de général sur $f(x)\, g(x)$ FI.

— Dans ces situations, il faut lever l'indétermination. Par exemple, quid de $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$? On a , $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x + 1 - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Composition des limites (Composée de deux fonctions)

Théorème 3.2.3

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ tel que $f(D) \subset J$ et $g : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

1. f admet une limite $b \in \overline{J}$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$).
2. g admet en b une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$).

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l$$

Démonstration

— Soit $V \in \mathcal{V}(b)$ et montrons que $V \cap J \neq \varnothing$. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ donc $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$. Mais $f(U \cap D) \subset f(D) \subset J$ donc $f(U \cap D) \subset V \cap J$ et $U \cap D \neq \varnothing$ donc $f(U \cap D) \neq \varnothing$.

2. Soit $\lambda < l$, alors $[\lambda, +\infty] \in \mathcal{V}(l)$ donc $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $g(U \cap D) \subset V$.

— Supposons que $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} l$, soit $W \in \mathcal{V}(l)$ donc $\exists V \in \mathcal{V}(b)$, $g(V\cap J) \subset W$. V est voisinage de b et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ donc $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U\cap D) \subset V$. Pour $t \in U\cap D$, $f(t) \in V\cap J$ donc $g\circ f(t) \in W$.

Exemple Quid de $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$? Pour $x>0$,

$$x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

On a $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, par composition,

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

3.2.8 Limites et ordre

Théorème 3.2.4

Soient $f,g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$, on suppose que $\exists U \in \mathcal{V}(a)\,/\forall x \in U\cap D$, $f(x) \leqslant g(x)$.

— Si f et g admettent en a des limites $l, l' \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant l'$.
— Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
— Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème des gendarmes

Théorème 3.2.5

Soient $f,g,h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose :

1. $\exists U \in \mathcal{V}(a)\,/\forall x \in U\cap D$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Démonstration Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists \varepsilon>0$ tel que $[l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ donc $\exists U_1 \in \mathcal{V}(a)\,/f(U\cap D) \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. De même, $h(x) \underset{t\to a}{\longrightarrow} l$ donc $\exists U_2 \in \mathcal{V}(a)\,/f(U_2\cap D) \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.

Soit $O = U\cap U_1\cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ et $\forall x \in O\cap D$,

$$l-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant l+\varepsilon$$

Ainsi, $g(x) \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$ donc $g(O\cap D) \subset V$.

Exemple 10

Intéressons-nous à la limite en 0 *de l'application* $f : x \in \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *on a* $0 < sin(x) < x < tan(x)$. *On en déduit que pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$ *autrement dit que* $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. *La parité des fonctions sinus et cosinus implique que* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[,\ \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. *Comme* $\lim_{0} \cos(x) = 1$, *le théorème des gendarmes permet de conclure que* $\lim_{0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Corollaire Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose que au voisinage de a, $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, et $g(x) \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$. Alors $f(x)$ tend vers l en a.

3.2.9 Fonctions monotones

Définition 3.2.5

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

— f est croissante sur D si $\forall x, y \in D \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

— f est strictement croissante sur D si $\forall x, y \in D \quad x < y \implies f(x) < f(y)$

— f est décroissante sur D si $\forall x, y \in D \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$

— f est strictement décroissante sur D si $\forall x, y \in D \quad x < y \implies f(x) > f(y)$

— f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Exemple 11

— *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*

— *Les fonctions exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et logarithme* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

— *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction* $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *est strictement croissante.*

Majoration et limite

Théorème 3.2.6

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$.

1. Si f est majorée, alors f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en b avec $l = \sup f(]a, b])$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

1. Supposons f majorée, soit $l = \sup f([a,b[)$ et montrons que $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} l$. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists\varepsilon > 0/ [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$ donc $l-\varepsilon$ ne majore pas f donc $\exists c \in [a,b[/ f(c) > l-\varepsilon$. Soit $U = [c,+\infty[$, $U \in \mathcal{V}(b)$ et $\forall x \in U \cap [a,b[= [c,b[$, on a $l \geqslant f(x)$ car $l = \sup f$ et $f(x) \geqslant f(c)$ car $x > c$ donc
$$l \geqslant f(x) \geqslant f(c) > l-\varepsilon$$
Ainsi, $f(x) \in]l-\varepsilon, l] \subset [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \subset V$.
2. Supposons que f n'est pas majorée. Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, soit $V \in \mathcal{V}(+\infty)$, alors $\exists M \in \mathbb{R}/ [M,+\infty[\subset V$. f n'est pas majorée donc $\exists c \in]a,b] / f(c) > M$. Soit $U = [c,+\infty] \in \mathcal{V}(b)$ et pour $x \in U \cap]a,b] = [c,b[$, $f(x) \geqslant f(c) > M \Rightarrow f(x) \in V$.

Corollaire 1 Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante.

1. Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{[a,b[} f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le théorème 3.2.6 à $-f$.

Corollaire 2 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante.

1. Si f est minorée, f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{]a,b]} f$.
2. Si f n'est pas minorée, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le corollaire 1 à $g : \begin{array}{l} [-b,-a[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$.

Corollaire 3 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante.

1. Si f est majorée, alors f admet en a une limite finie.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

La démonstration se fait en appliquant le corollaire 2 à $-f$, ou bien appliquer le théorème à $g : \begin{array}{l}]-b,-a] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$.

Inégalités des limites

Théorème 3.2.7

Soit $I = [\alpha,\beta]$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Soit $a \in]\alpha,\beta[$, alors f admet en a des limites à gauche et à droite finies $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. On a de plus
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Un énoncé analogue existe pour les fonctions décroissantes.

Exemple 12

la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[0;1[$ est monotone mais n'est pas bornée.

3.3 Fonctions continues

Définition 3.3.1

Soit f est une fonction définie sur un intervalle D et soit x_0 est un réel de D.
f est continue en x_0 signifie que f admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$. Autrement dit si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

f est continue sur l'intervalle D signifie que f est continue en chaque point x_0 de D.
f est dite discontinue en un point $x_0 \in D$ si elle n'est pas continue en x_0. Autrement dit si :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x \in D \quad |x - x_0| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continue de D dans $\mathbb{R}$.

Exemple 13

1. *Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.*
   La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.
   Plus généralement, cette fonction est continue sur I.
2. *$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-1}$ n'est pas continue en 1 car non définie en 1.*
3. *$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ n'est pas continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 1$.*
4. *Si f n'est pas continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle est discontinue en $x_0 \in \mathbb{R}$.*

3.3.1 Suites et continuité

Théorème 3.3.1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de D. Alors :

f est continue en $x_0 \iff$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Démonstration :

$\implies$ *On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on peut maintenant conclure que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

$\Longleftarrow$ *On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.*

Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in D \quad \textit{tel que} \quad |x_\delta - x_0| < \delta \textit{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \textit{et} \quad |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

Exemple 14

— *La fonction partie entière E n'est pas continue en 0 car la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{-l}{n}$ converge vers 0 mais la suite de terme général $E(u_n)$ qui est la suite constante égale à -1 converge vers -1 et $E(0) = 0 \neq -1$.*

— *Pour $x > 0$ la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0. En effet, Considérons les deux suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi} 2n$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Ces deux suites convergent vers 0 mais $f(x_n) \longrightarrow 0$ et $f(y_n) \longrightarrow 1$*

3.3.2 Règles de calcul sur les fonctions continues

Somme, produit, quotient, valeur absolue

Version locale Soient $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$, on suppose f et g continues en x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

— $\alpha f + g$ est continue en x_0.

— fg est continue en x_0.

— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

— $|f|$ est continue en x_0.

Version globale Soient $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

— $\alpha f + g$ est continue sur D.

— fg est continue sur D.

— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue sur D.

— $|f|$ est continue sur D.

Démonstration Soit $u \in D^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0. f et g sont continues en x_0 donc $f(u_n) \longrightarrow f(x_0)$ et $g(u_n) \longrightarrow g(x_0)$. D'après les théorèmes généraux sur les suites convergentes :

— $\alpha f(u_n) + g(u_n) \longrightarrow \alpha f(x_0) + g(x_0)$

— $f(u_n) g(u_n) \longrightarrow f(x_0) g(x_0)$

— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\dfrac{1}{f(u_n)} \longrightarrow \dfrac{1}{f(x_0)}$

— $|f(u_n)| \longrightarrow |f(x_0)|$

Remarques Soit $D \subset \mathbb{R}$, alors :

— $x \in D \longmapsto x$ est continue donc par produit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est continue.

— $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \alpha x^n$ est continue donc par somme, toutes les fonctions polynômiales sont continues.

— Par quotient, toute fonction rationnelle bien définie est continue.

Théorème sur la composition

Théorème 3.3.2

Soient D, J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues. Alors $g \circ f$ est continue sur D.

Démonstration Soit $x_0 \in$D . Montrons que $g \circ f$ est continue en x_0.

Soit W un voisinage de $g(f(x_0))$ dans $\mathbb{R}$. Or $f(x_0) \in J$ et g est continue sur J donc on peut trouver un voisinage V de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g(J \cap V) \subset W$. De même, $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ et f est continue en x_0 donc $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$.

Si $x \in U \cap D$, alors $f(x) \in V$ et $f(x) \in J$ donc $f(x) \in V \cap J$ donc $g(f(x)) \in W$ donc $g \circ f(U \cap D) \in W$[3].

3.3.3 Continuité à droite, Continuité à gauche.

Définition 3.3.2

- Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $[x_0, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$. On dit que f est continue en x_0 à droite lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $]x_0 - \alpha, x_0]$, $\alpha > 0$. On dit que f est continue en x_0 à gauche lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple 15

La fonction $f(x) = E(x)$ est continue à droite en tout point $n \in \mathbb{Z}$, mais elle n'est pas continue à gauche en ces points.

Remarque 4

Une fonction f peut ne pas être continue en un point x_0 et admettre une limite à droite $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et une limite à gauche $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ en x_0 identiques.

Exemple 16

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$. La fonction f n'est pas continue en $x_0 = 0$ et pourtant $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 1$

Théorème 3.3.3

Soit x_0 un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0. On dit que f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple 17

1. *$x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0.*

3. Les autres preuves de ce résultat utilisant respectivement les définitions séquentielles et epsilonnesques de la continuité sont elles aussi « laissées au courageux lecteur ! » .

2. *Soit f la fonction définie sur $D=\mathbb{R}$ par :* $\begin{cases} f(x)=3x+1, & x\leq 1 \\ f(x)=\frac{4}{x}, & x>1 \end{cases}$

   Ona $f(1)=4$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$*, donc la fonction f est continue en* 1

3.3.4 Prolongement par continuité

Définition 3.3.3

Soit D un intervalle, $x_0\in D$ et f une fonction définie et continue sur $D\backslash\{x_0\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ continue sur D : $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in D\setminus\{x_0\} \\ \ell & \text{si } x=x_0 \end{cases}$

Exemple 18

— *La fonction h définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par* $h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{h}(0)=1$ et $\tilde{h}(x)=h(x)$ pour $x\neq 0$ car* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

— $x\longmapsto f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ *n'est pas prolongeable par continuité en 1 car* ($\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$).

— *La fonction* $u : x\mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? ...*

Limites à droite et à gauche en un point

3.2.5 Caractérisation des limites à l'aide des suites

3.2.6 Critère de Cauchy

3.2.7 Opérations sur les limites

Cas de limites finies

Cas de limites infinies

Composition des limites (Composée de deux fonctions)

3.2.8 Limites et ordre

Théorème des gendarmes

3.2.9 Fonctions monotones

Majoration et limite

Inégalités des limites

3.3 Fonctions continues

Définition 3.3.1

Soit f est une fonction définie sur un intervalle D et soit x_0 est un réel de D.
f est continue en x_0 signifie que f admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$. Autrement dit si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

f est continue sur l'intervalle D signifie que f est continue en chaque point x_0 de D.
f est dite discontinue en un point $x_0 \in D$ si elle n'est pas continue en x_0. Autrement dit si :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x \in D \quad |x - x_0| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continue de D dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

1. *Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.*
   La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.
   Plus généralement, cette fonction est continue sur I.
2. $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x-1}$ *n'est pas continue en 1 car non définie en 1.*
3. $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ *n'est pas continue en 0 car $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0) = 1$.*

3.3.1 Suites et continuité

Théorème 3.3.1

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de D. Alors :

f est continue en x_0 $\iff$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Démonstration :

$\Longrightarrow$ *On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on peut maintenant conclure que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

$\Longleftarrow$ *On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.*
Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in D \quad \textit{tel que} \quad |x_\delta - x_0| < \delta \textit{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \textit{et} \quad |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

Exemple 2

— *La fonction partie entière E n'est pas continue en 0 car la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{-l}{n}$ converge vers 0 mais la suite de terme général $E(u_n)$ qui est la suite constante égale à -1 converge vers -1 et $E(0) = 0 \neq -1$.*

— *Pour $x > 0$ la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ n'est pas continue en 0. En effet, Considérons les deux suites définies par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Ces deux suites convergent vers 0 mais $f(x_n) \longrightarrow 0$ et $f(y_n) \longrightarrow 1$*

3.3.2 Règles de calcul sur les fonctions continues

Somme, produit, quotient, valeur absolue

Version locale Soient $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$, on suppose f et g continues en x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

— $\alpha f + g$ est continue en x_0.
— fg est continue en x_0.
— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.
— $|f|$ est continue en x_0.

Version globale Soient $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

— $\alpha f + g$ est continue sur D.
— fg est continue sur D.
— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue sur D.
— $|f|$ est continue sur D.

Démonstration Soit $u_n \in D^{\mathbb{N}}$ convergente vers x_0. f et g sont continues en x_0 donc $f(u_n) \longrightarrow f(x_0)$ et $g(u_n) \longrightarrow g(x_0)$. D'après les théorèmes généraux sur les suites convergentes :

— $\alpha f(u_n) + g(u_n) \longrightarrow \alpha f(x_0) + g(x_0)$
— $f(u_n) g(u_n) \longrightarrow f(x_0) g(x_0)$
— Si $\forall t \in D, f(t) \neq 0$, $\frac{1}{f(u_n)} \longrightarrow \frac{1}{f(x_0)}$
— $|f(u_n)| \longrightarrow |f(x_0)|$

Remarques Soit $D \subset \mathbb{R}$, alors :

— $x \in D \longmapsto x$ est continue donc par produit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est continue.
— $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \alpha x^n$ est continue donc par somme, toutes les fonctions polynômiales sont continues.
— Par quotient, toute fonction rationnelle bien définie est continue.

Théorème sur la composition

Théorème 3.3.2

Soient D, J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues. Alors $g \circ f$ est continue sur D.

Démonstration Soit $x_0 \in$D . Montrons que $g \circ f$ est continue en x_0.

Soit W un voisinage de $g(f(x_0))$ dans $\mathbb{R}$. Or $f(x_0) \in J$ et g est continue sur J donc on peut trouver un voisinage V de $f(x_0)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g(J \cap V) \subset W$. De même, $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ et f est continue en x_0 donc $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U \cap D) \subset V$.

Si $x \in U \cap D$, alors $f(x) \in V$ et $f(x) \in J$ donc $f(x) \in V \cap J$ donc $g(f(x)) \in W$ donc $g \circ f(U \cap D) \in W$ [1].

1. Les autres preuves de ce résultat utilisant respectivement les définitions séquentielles et epsilonnesques de la continuité sont elles aussi « laissées au courageux lecteur ! » .

3.3.3 Continuité à droite, Continuité à gauche.

Définition 3.3.2

— Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $[x_0, x_0+\alpha[,\ \alpha > 0$. On dit que f est continue en x_0 à droite lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

— Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $]x_0-\alpha, x_0],\ \alpha > 0$. On dit que f est continue en x_0 à gauche lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple 3

La fonction $f(x) = E(x)$ est continue à droite en tout point $n \in \mathbb{Z}$, mais elle n'est pas continue à gauche en ces points.

Remarque 1

Une fonction f peut ne pas être continue en un point x_0 et admettre une limite à droite $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et une limite à gauche $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ en x_0 identiques.

Exemple 4

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$. La fonction f n'est pas continue en $x_0 = 0$ et pourtant $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 1$

Théorème 3.3.3

Soit x_0 un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0. On dit que f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple 5

1. *$x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0.*
2. *Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par :* $\begin{cases} f(x) = 3x+1, & x \leq 1 \\ f(x) = \frac{4}{x}, & x > 1 \end{cases}$

   Ona $f(1) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$, donc la fonction f est continue en 1

3.3.4 Prolongement par continuité

Définition 3.3.3

Soit D un intervalle, $x_0 \in D$ et f une fonction définie et continue sur $D \backslash \{x_0\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ continue sur D : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

Exemple 6

— *La fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}-\{0\}$ *par* $h(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ *est prolongeable par continuité en* 0 *en posant* $\tilde{h}(0)=1$ *et* $\tilde{h}(x)=h(x)$ *pour* $x\neq 0$ *car* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

— $x\longmapsto f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ *n'est pas prolongeable par continuité en* 1 *car* ($\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$).

— *La fonction* $u: x\mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *est-elle prolongeable par continuité sur* $\mathbb{R}$ *? ...*

Cours de la semaine du 04 au 09 janvier 2021

3.3.5 Fonctions uniformément continues

Définition 3.3.4

$f: D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0/\forall x,y\in D,|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

Remarque 2

— *La continuité uniforme est de caractère global (elle dépend de l'ensemble D), alors que la continuité est de caractère local (elle ne dépend que du point* x_0 *et non de l'ensemble D).*

— ***Si f est uniformément continue sur D et si*** (x_n) ***et*** (y_n) ***sont deux suites d'éléments de D telles que*** $x_n-y_n\longrightarrow 0$***, alors*** $f(x_n)-f(y_n)\longrightarrow 0$.

— *La continuité uniforme est plus forte que la continuité : Pour la continuité* α *dépend à la fois de* x_0 *et de* ϵ*, alors que Pour la continuité uniforme* α *ne dépend que de* ϵ.

Théorème 3.3.4

Toute fonction uniformément continue est continue.

Preuve :

Soit $f: D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *uniformément continue et* $x_0\in D$*. Montrons que* f *est continue en* x_0*. Soit* $\varepsilon>0$*,* f *est uniformément continue donc* $\exists\beta>0/\forall x,y\in D$*,*

$$|x-y|\leqslant\beta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

Pour $x\in D$ *vérifiant* $|x-x_0|\leqslant\beta$*, on a bien* $|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$.

Remarque 3

Montrons qu'il existe des fonctions continues qui ne le sont pas uniformément. Soit

$$f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\mapsto t^2\end{array}$$

Montrons que f *est continue. Soit* $x_0\in\mathbb{R}$ *et* $u_n\in D^{\mathbb{N}}$ *qui converge vers* x_0*. On sait que* (u_n^2) *tend vers* x_0^2 *donc* $(f(u_n))$ *tend vers* $f(x_0)$ *donc* f *est continue en* x_0*. Supposons que* f *est uniformément* *continue, alors* $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall s,t \in \mathbb{R}$*,* $|s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |s^2 - t^2| \leqslant \varepsilon$*. Posons maintenant pour* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $x_n = n$ *et* $y_n = n + \frac{1}{n}$*. Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{1}{n_0} \leqslant \alpha$*, alors pour* $n \geqslant n_0$*,*

$$\begin{aligned} |x_n - y_n| &\leqslant \frac{1}{n} \\ &\leqslant \frac{1}{n_0} \\ &\leqslant \alpha \end{aligned}$$

On doit donc aussi avoir

$$\left|x_n^2 - y_n^2\right| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \leqslant \varepsilon$$

Si $\varepsilon = 1$*, la relation précédente est absurde donc c'est impossible.*

3.3.6 Les grandes théorèmes sur les fonctions continues

Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème 3.3.5

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m. C'est à dire que : $\exists x_1 \in [a,b],\ m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$ et $\exists x_2 \in [a,b],\ M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$

Démonstration :

1. *Supposons que* f *n'est pas bornée on peut alors trouver une suite* (x_n) *d'éléments de* $[a,b]$ *telle que :* $|f(x_n)| > n$ *: D'après le théorème de Balzano- Weierstrass, il existe une sous suite* $(x_{\varphi(n)})$ *qui converge. Soit* l *sa limite.* l *est dans [a ; b] puisque* $(x_{\varphi(n)})$ *est dans* $[a,b]$ *.* f *est continue , en particulier en* l*, donc* $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$*. Mais ce résultat est en contradiction avec le fait que* $|f(x_{\varphi(n)})| > \varphi(n) \geq n$ *qui entraine que* $\lim f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$*. La fonction* f *est donc bornée.*
2. *La fonction f est bornée. Elle admet donc une borne supérieure* M *et une borne inférieure* m*. Supposons, par exemple, que* M *n'est pas atteinte sur* $[a,b]$*. C'est à dire :* $\forall x \in [a,b]$*,* $f(x) > M$*.*
   Considérons, alors la fonction g définie sur $[a,b]$ *par :* $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$
   La fonction g *est continue et strictement positive sur* $[a,b]$*. D'après 1) ,* g *est bornée. Elle admet donc une borne supérieure* M_0*.*
   Il en résulte que $\forall x \in [a,b]$*,* $f(x) > M - \frac{1}{M_0}$*.*
   M ne serait pas, alors, la borne supérieure.
   On démontre d'une manière analogue que la borne inférieure est atteinte.

Remarque 4

1. *Si f n'est pas continue, M ou m peuvent ne pas exister, par exemple, soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]0;1] et f(0) = 0$. La fonction f est définie sur $[0;1]$ mais n'admet pas de borne supérieure*
2. *La continuité est une condition suffisante pour qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné soit bornée et atteigne ses bornes. Mais ce n'est pas une condition nécessaire comme le montre l'exemple suivant : Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x$ si $x \in]0;1[, g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Cette fonction n'est pas continue sur $[0;1]$ alors que sa borne inférieure 0 et sa borne supérieure 1 sont atteintes.*

3.3.7 Théorème de Heine

Théorème 3.3.6

Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné est uniformément continue.

Démonstration Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x, y \in [a,b] / \begin{cases} |x-y| \leqslant \alpha \\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon \end{cases}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n, y_n \in [a,b]$ avec $|x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. $[a,b]$ est fermé et borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, donc il existe une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de x avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante qui converge vers un élément c de $[a,b]$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left|y_{\varphi(n)} - c\right| &= \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - c\right| \\ &\leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - c\right| \end{aligned}$$

Or $\left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc cette quantité tend vers 0, ainsi que $\left|x_{\varphi(n)} - c\right|$. Donc $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers c. f et continue en a car $c \in [a,b]$ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(c)$ et $f\left(y_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(c)$ donc

$$\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \underset{n \mapsto +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui est impossible car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| > \varepsilon$.

3.3.8 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.3.7 (Version n°1)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe un point c du segment $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstrations

Version n°1 Supposons par exemple $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.

On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$
2. $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n}(b-a)$
3. $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geq 0$

On prend $a_0 = a$, $b_0 = b$, on a bien $f(a_0) \leqslant 0$ et $f(b_0) \geqslant 0$. Soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

— Si $f(c) \leqslant 0$, on prend $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

— Sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

On a bien dans tous les cas :

1. $a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$
2. $b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b_0 - a_0)$
3. $f(a_1) \leqslant 0$ et $f(b_1) \geqslant 0$

Supposons avoir construit

$$a \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant b$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\forall k \in [[0,n]]$, $f(a_k) \leqslant 0$ et $f(b_k) \geqslant 0$. Soit $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$:

— Si $f(c_n) \leqslant 0$, alors on prend $a_{n+1} = c$, $b_{n+1} = b_n$.

— Si $f(c_n) \geqslant 0$, alors on prend $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$.

Dans tous les cas on a bien :

1. $a \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$
2. $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(a-b)$
3. $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ et $f(b_{n+1}) \geqslant 0$

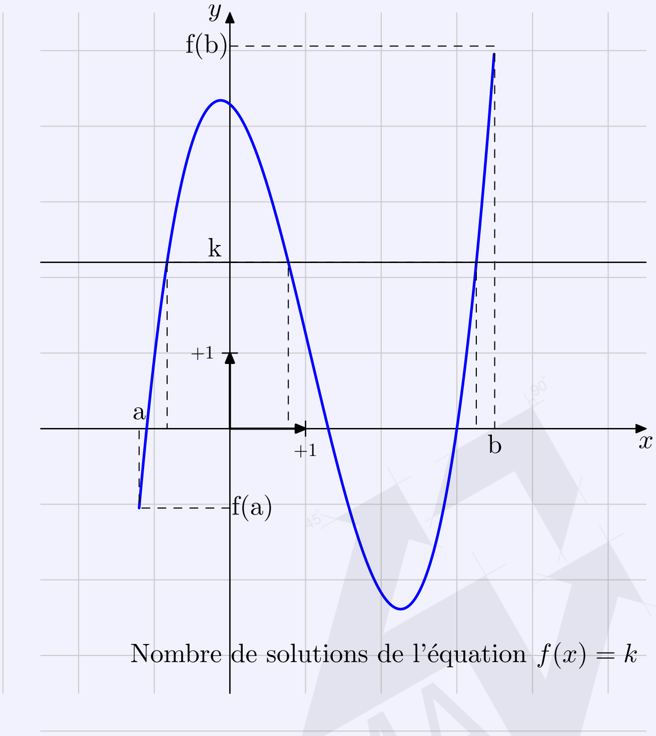
Il est clair que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc elles convergent vers une limite commune $x \in [a,b]$. f est continue en x donc les suites (a_n) e (b_n) convergent toutes les deux vers x donc $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(x)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 0$. De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, $f(x) = 0$.

Remarque 5

Le théorème 3.3.7 n'est pas vraie, en général, si f n'est pas définie sur un intervalle, par exemple, soit f la fonction définie sur $A = \{-1; 1\}$ qui est fermé borné par $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$ La fonction f est continue sur A, $f(-1)f(1) < 0$ et $\forall x \in A,\ f(x) \neq 0$

Théorème 3.3.8 (Version n°2)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Pour tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.



Nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$

Démonstrations

- Si $k = \inf\limits_{[a,b]} f$ ou $k = \sup\limits_{[a,b]} f$, d'après le théorème 3.3.5 $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f$
- Si $\inf\limits_{[a,b]} f < k < \sup\limits_{[a,b]} f$, nous appliquons le théorème 3.3.7 à la fonction g définie sur $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$) par $g(x) = f(x) - k$

Corollaire 1 (Version n°3)
Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration :
Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypoth7se, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$.

Remarque 6

1. *La continuité est une condition suffisante pour qu'une fonction sur un intervalle fermé borné possède la propriété de la valeur intermédiaire, mais ce n'est pas une condition nécessaire. Par exemple, soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0 et possède la propriété de la valeur intermédiaire.*
2. *Le théorème 1.14 n'est pas vraie, en général, si f n'est pas continue. En effet, considérons, par exemple, la fonction f définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$; $f(x) = x + 4$ si $1 < x \leq 2$.*

Cette fonction n'est pas continue en 1*. Sa borne inférieure* 0 *est atteinte, sa borne supérieure* 3 *n'est pas atteinte. Elle prend les valeurs* 1 *et* 2 *mais ne prend aucune valeur comprise entre* 1 *et* 2*.*

3.4 Fonctions continues, monotones et bijections

3.4.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Dans cette section nous rappelons le matériel nécessaire concernant les applications bijectives.

Définition 3.4.1

Soit $f : I \to J$ une fonction, ù I et J sont des parties de $\mathbb{R}$.

— f est injective si $\forall x, x' \in I \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;

— f est surjective si $\forall y \in J \quad \exists x \in I \quad y = f(x)$;

— f est bijective si f està la fois injective et surjective, c'està -dire si $\forall y \in J \quad \exists! x \in I \quad y = f(x)$.

Proposition 3.4.1

Si $f : I \to J$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : J \to I$ telle que $g \circ f = id_I$ et $f \circ g = id_J$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Remarque 7

Une fonction peut admettre une fonction réciproque sans être continue.

Exemple 7

La fonction $f : [0,1] \to [0,1]$*, définie par :* $f(x) = x$ *si* $x \in]0,1[$ *,* $f(0) = 1$ *et* $f(1) = 0$ *est bijective et non continue.*

Propriétés 3.4.1

— *On rappelle que l'identité,* $id_I : I \to I$ *est simplement définie par* $x \mapsto x$*.*

— $g \circ f = id_I$ *se reformule ainsi :* $\forall x \in I \quad g(f(x)) = x$*.*

— *Alors que* $f \circ g = id_J$ *s'écrit :* $\forall y \in J \quad f(g(y)) = y$*.*

— *Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions* f *et* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

3.4.2 Continuité des fonctions réciproques

Théorème 3.4.1 (Théorème de la bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Démonstration :
On établit d'abord un lemme utile à la démonstration du « théorème de la bijection ».

Lemme 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Preuve : (Lemme)
Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$. En échangeant les rôles de x et de x', on montre de même que $x \leq x'$. On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective.

[Démonstration du théorème] :

1. *D'après le lemme précédent, f est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle (f est surjective).*
2. *Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.*
   (a) *Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc*

$$\begin{aligned} y < y' &\implies f(x) < f(x') \\ &\implies x < x' \qquad \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\implies f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$

   c'est-à -dire f^{-1} est strictement croissante sur J.

   (b) *Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait*

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

   c'est-à -dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$y_0 - \delta < f(x) < y_0 + \delta \implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon.$$

   Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) &\implies x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \\ &\implies f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon. \end{aligned}$$

Comme $f(x_0-\epsilon)<y_0<f(x_0+\epsilon)$, *on peut choisir le réel* $\delta>0$ *tel que*

$$f(x_0-\epsilon)<y_0-\delta \quad \textit{et} \quad f(x_0+\epsilon)>y_0+\delta$$

et on a bien alors pour tout $x\in I$

$$\begin{aligned} y_0-\delta<f(x)<y_0+\delta &\implies f(x_0-\epsilon)<f(x)<f(x_0+\epsilon)\\ &\implies f^{-1}(y_0)-\epsilon<x<f^{-1}(y_0)+\epsilon. \end{aligned}$$

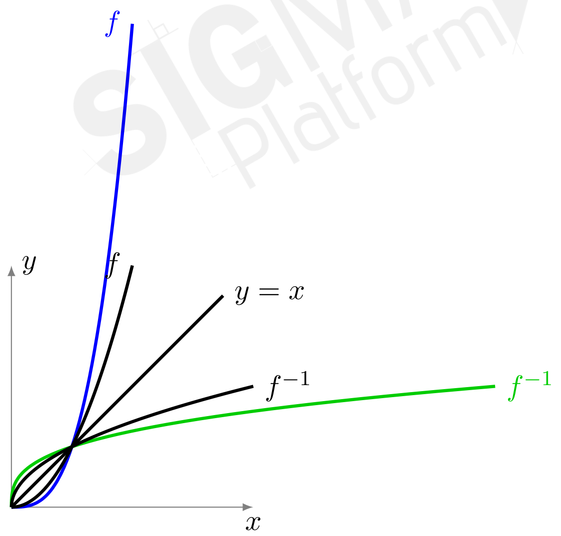
La fonction f^{-1} *est donc continue sur* J.

3.4.3 Application : Fonctions réciproques des fonctions usuelles

Fonctions puissances.

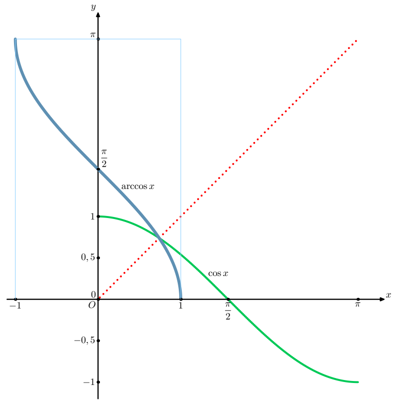
Définition 3.4.2

Soit un entier $n\geq 1$ et un réel $y\geq 0$. On note $y^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^n=y$ et on l'appelle *racine n-ème* de y. La fonction $[0;+\infty[\to[0;+\infty[,\ y\mapsto y^{\frac{1}{n}}$ est la fonction réciproque sur $[0;+\infty[$ de $x\mapsto x^n$.



La fonction arc-cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. L'image de l'intervalle $[0,\pi]$ est $[-1,1]$.La fonction cosinus réalise donc une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On appelle fonction arc-cosinus et on note $\arccos$ ou $\cos^-1$ la bijection réciproque de l'application cosinus sur $[0,\pi]$.



On a donc, par définition de la bijection réciproque : $\begin{cases} \cos\left(\arccos(x)\right) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos\left(\cos(x)\right) = x & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$

Autrement dit : Si $\quad x \in [0, \pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$

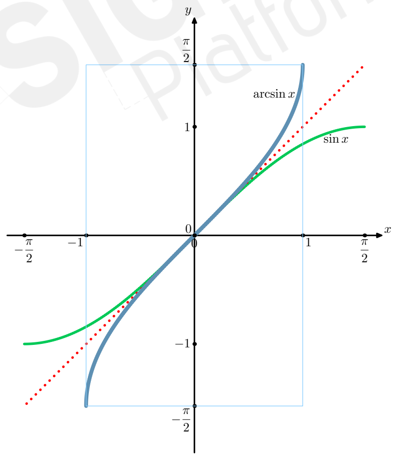
La fonction arc-sinus

La restriction

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection . Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$



$$\begin{cases} \sin\left(\arcsin(x)\right) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\left(\sin(x)\right) = x & \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Si $\quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y$

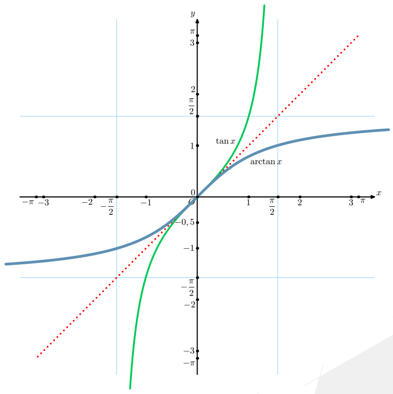
La fonction arc-tangente

La restriction

$$\tan_| :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$



$$\begin{cases} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\end{cases}$$

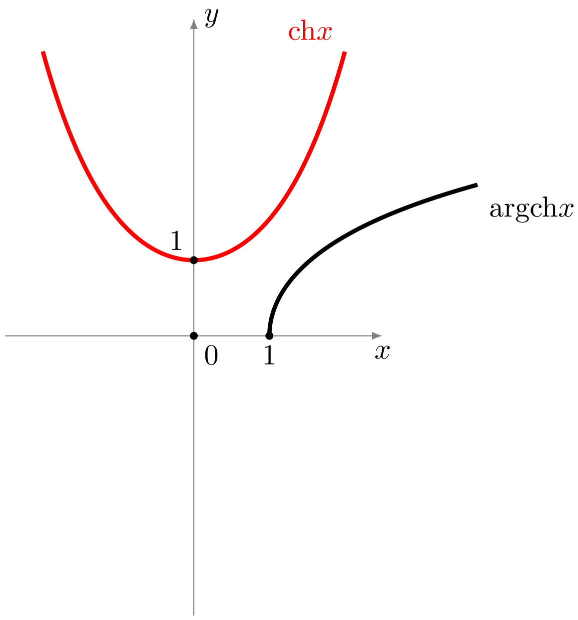
Si $\quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y$

3.4.4 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est : $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

La restriction $ch_{|}$: $[0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $argch$: $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$.

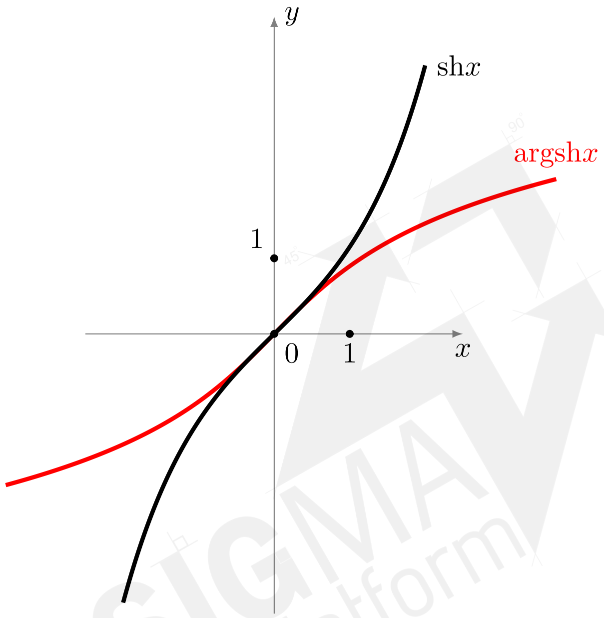


3.4.5 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est :

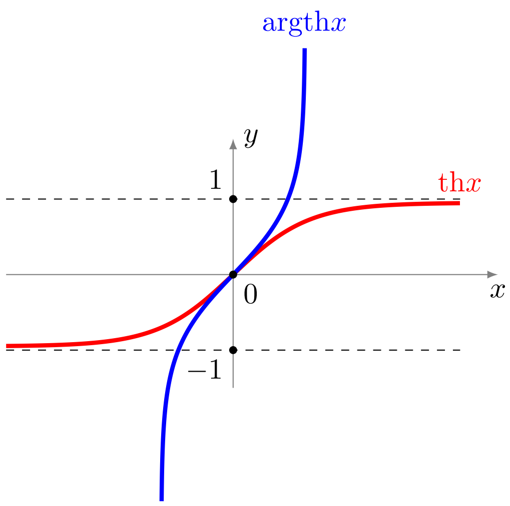
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} shx = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} shx = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



3.4.6 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est : $\operatorname{th} x = \dfrac{shx}{chx}$
La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est une bijection, on note $argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.



3.4.7 Propriétés sur trigonométrie hyperbolique

Proposition 3.4.2

$$ch^2x - sh^2x = 1$$
$$ch(a+b) = cha \cdot chb + sha \cdot shb$$
$$ch(2a) = ch^2a + sh^2a = 2\,ch^2a - 1 = 1 + 2\,sh^2a$$

$$sh(a+b) = sha \cdot chb + shb \cdot cha$$
$$sh(2a) = 2\,sha \cdot cha$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1)$$
$$argshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$argthx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercices :

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 *Étudier les limites suivantes :*

1. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ *en 1*
2. $\dfrac{x\ln x + 7}{x^2+4}$ *en* $+\infty$
3. *Soient m,n des entiers positifs.* $\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ *en 0*
4. $(x+1)^{\frac{1}{x}}$ *en* 0.
5. $\dfrac{E(\ln\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$
6. $xE(x - \dfrac{1}{x})$ *en 0*

Exercice 3 1. *Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{5\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$.*

En utilisant la définition, montrer que f est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{5\}$

2. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.*

3. *Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que h est discontinue en tout point.

Exercice 4 *Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?*

1. $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ **2**. $g(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $h(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

Exercice 5 1. *Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.*

2. *Montrer que la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{*+}$.*

Exercice 6 1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*

(a) *Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.*

(b) *Atteint-elle sa borne inférieure. ?*

2. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.*
Montrer que g admet un minimum absolu.

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.*

Exercice 8 *Soit P un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.*

1. *Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.*

2. *Montrer que le polynôme $x^n + px + q$, (p et q réels) admet au plus trois racines réelles.*

Exercice 9 *Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln\ln(x)$ sur $[k, k+1]$, $k \geq 2$ montrer que*

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

<u>**Exercices facultatifs.**</u>

Exercice 10 1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. On dit que x est un point fixe de f.*

2. *Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).*

Exercice 11 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.*

1. *Montrer qu'il existe* $h > 0$ *tel que* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.
2. *Montrer qu'il existe* y *dans* $[a, b]$ *tel que* $m = \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ *puis qu'il exsite* x *tel que* $f'(x) = m$.

Exercice 12 *Etudier en chaque point de* $\mathbb{R}$ *l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction* f *définie par* $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$ *et* 1 *si* $x = 0$.

Exercice 13 *Soit* f *une fonction continue et périodique sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *admettant une limite réelle quand* x *tend vers* $+\infty$. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 14 *Soit* f *croissante de* $[a, b]$ *dans lui-même. Montrer que* f *a un point fixe.*

Exercice 15 *Soit* f *continue sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *admettant une limite réelle quand* x *tend vers* $+\infty$. *Montrer que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* f_n *une fonction définie sur* $[0, 1]$ *par* $f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n$

1. *Montrer qu'il existe un unique* $x_n \in [0, 1]$ *tel que* $f_n(x_n) = 0$.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) > 0$
3. *En déduire que la suite* (x_n) *est monotone et qu'elle converge vers une limite* l.
4. *Supposons qu'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq x_n \leq M < 1$
   (a) *Calculer la limite de* x_n^n *lorsque* n *tend vers l'infini.*
   (b) *Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de* (x_n).

Exercice 17 *Etablir les relations*

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ *et* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \boldsymbol{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$.
2. $\cos(arctanx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(arctanx) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(2arcsinx) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 18 *Calculer les limites suivantes en utilisant la régle de l'Hospital après avoir vérifier sa validité :*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$$