CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE 3 DU 26/5/2018 /SMIA/S2

Pr A.ALAMI IDRISSI

EX 1) On pose $u = 1/x$. Alors u tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Nous obtenons:

$f(x) = \exp(1/x) + \ln\left(\frac{x-1}{ex}\right) = e^u + \ln(\frac{1/u - 1}{e1/u}) = e^u + \ln(\frac{1-u}{e}) = e^u + \ln(1-u) - 1 =$

$= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} - u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3) - 1 = -\frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$

soit: $f(x) = -\frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Par conséquent le signe de $f(x)$ quand x tend vers l'infini,dépend de $-1/x$.

Ainsi $f(x)$ est positive en $-\infty$ et négative en $+\infty$.

Remarque:

La relation : $\ln\left(\frac{x-1}{ex}\right) = \ln(x-1) - \ln(ex)$ n'est pas valide si x est négatif.

EX 2) dl: développement limité

1) Au voisinage de 0 on a le dl : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$, d'où $\frac{1+\cos x}{2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^5)$. Posons $u = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$. Alors $u^2 = \frac{x^4}{16}$. Il est inutile de calculer u^3 et u^4 puisque le dégré du plus petit monôme va dépasser 4. On utilise le dl usuel suivant:

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{1}{8}u^2 + o(u^4) = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{16} =$
$\frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 1 = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{384}x^4 + o(x^4)$

Nous obtenons: $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - 1 = -\frac{x^2}{8} + \frac{1}{384}x^4 + o(x^4)$

On a: $\sin x = x - \frac{x3}{3!} + o(x^4)$, puis $\sin^2 x = x^2 - \frac{x4}{3} + o(x^4)$, ce qui donne:

$g(x) = \ln(1 - \sin^2 x) = \ln(1 - x^2 + \frac{x4}{3} + o(x^4))$. On pose $v = -x^2 + \frac{x4}{3}$, alors $v^2 = x^4$. On utilise le développement usuel suivant:

$\ln(1+v) = v - \frac{v}{2} + o(v^2) = -x^2 + \frac{x4}{3} - \frac{x4}{2} = -x^2 - \frac{x4}{6} + o(x^4)$

2)D'après le résultat de 1) nous obtenons:

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{384}x^4+o(x^4)}{-x^2-\frac{x4}{6}+o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{384}x^2+o(x^2)}{-1-\frac{x2}{6}+o(x^2)} = (\frac{1}{8} - \frac{1}{384}x^2 + o(x^2))(1 - \frac{x2}{6} + o(x^2))$
$= \frac{1}{8} - \frac{3}{128}x^2 + o(x^2)$

3) Ainsi la tangente au graphe de h au point 0 est la droite horizontale d'équation $y = 1/8$. Et comme $h(x) - 1/8 = -\frac{3}{128}x^2 + o(x^2)$, le graphe de h est (au voisinage de 0) en dessous de la tangente au point 0 .

4)

$$\lim_{x\to 0}\left(8\frac{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}-1}{\ln(1-\sin^2 x)}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(8h(x))^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{1/x^2\ln\left(1-\frac{3}{16}x^2+o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{3}{16}+o(1)} = e^{-3/16}$$

EX3) 1) Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier,par conséquent le domaine de définition de f (à ne pas confondre avec le domaine d'étude) est $\mathbb{R}$. 2) La courbe Γ n'admet pas de branches infinies puisque :$|2\cos^3 t| + |2\sin^3 t| \leq 4$.

3) f étant 2π – périodique,on se place d'abord dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Ensuite on a $f(-t) = (2\cos^3 t, -2\sin^3 t)$ (symétrie par rapport à l'axe Ox) , puis
$f(\pi - t) = (-2\cos^3 t, 2\sin^3 t)$ (symétrie par rapport à l'axe Oy), et

$f(\pi/2-t) = (2\sin^3 t, 2\cos^3 t)$ (symétrie par rapport à la bissectrice d'équation $y = x$), donc le domaine d'étude est l'intervalle $[0, \pi/4]$.

4) $x'(t) = -6\sin t\cos^2 t, y'(t) = 6\cos t\sin^2 t.$ Pour $t \in [0, \pi/4],$ on a: $x'(t) \leq 0, y'(t) \geq 0.$ Donc la fonction $t \to x(t)$ décroit de 2 à $\sqrt{2}/2$ et $t \to y(t)$ croit de 0 à $\sqrt{2}/2$.

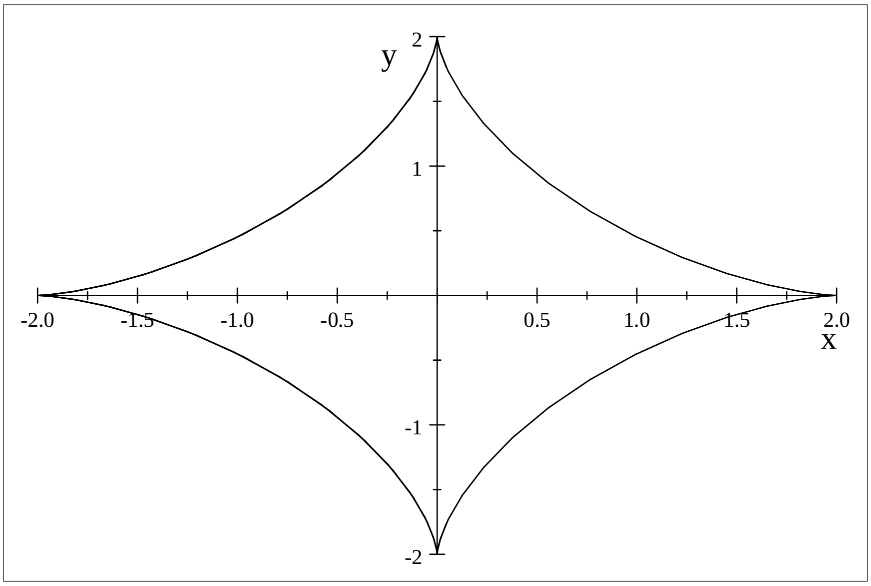
5) Le point $f(0)$ est le seul point stationnaire de la courbe sur $[0, \pi/4].$ Effectuons un dl au voisinage de 0 d'ordre 4 des fonctions $t \to 2\cos^3 t$ et $t \to 2\sin^3 t,$ on a:

$$f(t) = \left(2\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+o(t^5)\right)^3, 2\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)^3\right) = (2-3t^2+\tfrac{7}{4}t^4+o(t^5), 2t^3+o(t^4)) =$$

$$= (2,0)+t^2(-3,0)+t^3(0,2)+o(t^4)$$

On a donc: $x''(0) = -6,\ y''(0) = 0, x'''(0) = 0, y'''(0) = 6$, d'où $p = 2.$ De plus les vecteurs $(-6,0) = -6\vec{i}$ et $(0,6) = 6\vec{j}$ sont linéairement indépendants donc $q = 3.$ p étant pair et q impair le point $f(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

6) Allure du support de la courbe:



Remarques

1) Pour le calcul des dl (par exemple dans l'exercice1) il est déconseillé d'uiliser la formule de Taylor-Young en calculant les dérivées successives.

2) Poser $u = \cos x$ dans l'exercice 2) n'est pas le bon choix car u tend vers 1 quand x tend vers 0.

3) Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite à l'infini(Ex 3).