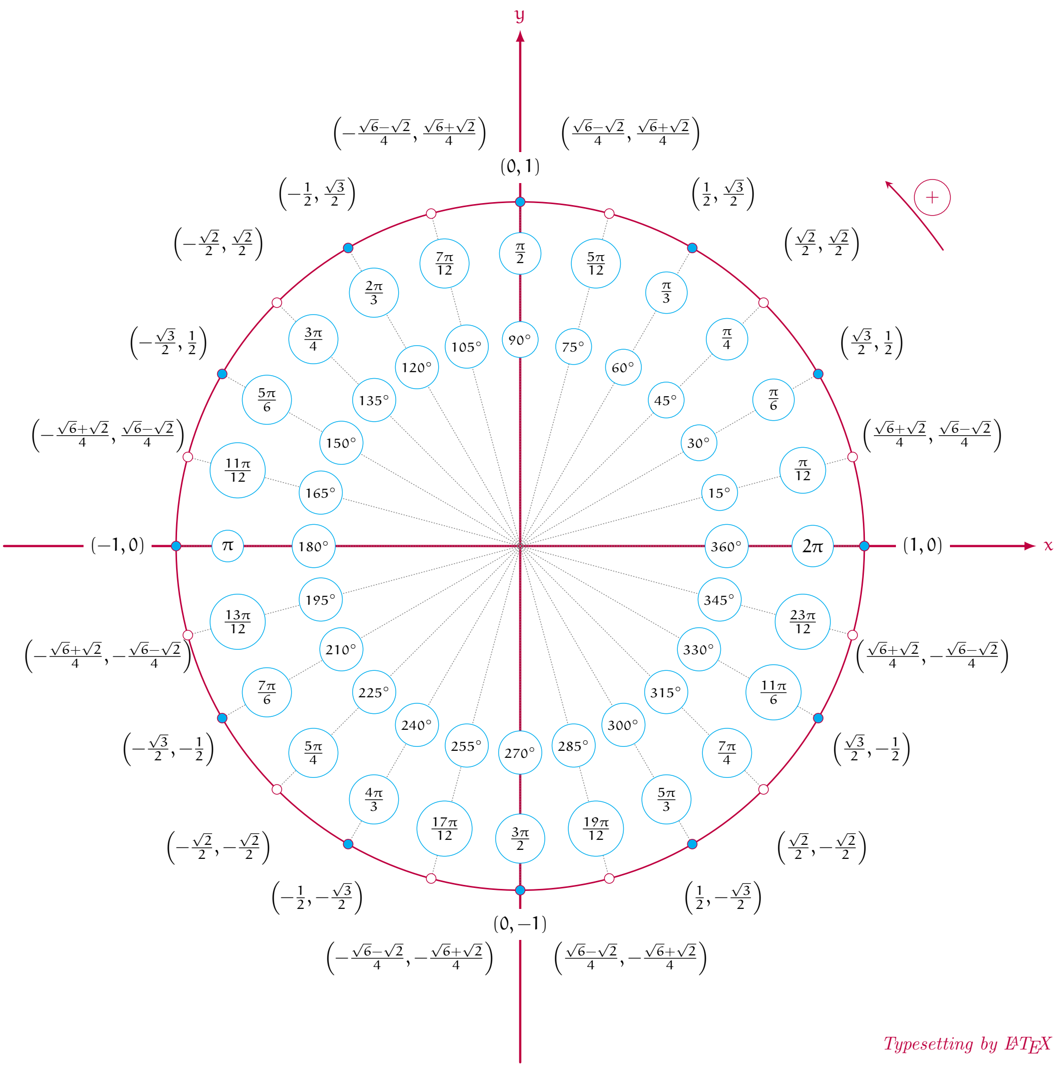
Analyse I

Mohamed HOUIMDI

Université Cadi Ayyad
Faculté des Scieces-Semlalia
Département de Mathématiques

Version septembre 2014



Typesetting by LaTeX

Table des matières

1 Nombres réels

1.1 Rappels sur les relations d'ordre

1.1.1 Définitions et exemples

Définition

Soit E un ensemble quelconque, non vide, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est définie par une partie non vide G de $E \times E$, appelée graphe de la relation $\mathcal{R}$.

Notations

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E définie par son graphe G.
Pour $(x, y) \in G$, on écrit $x \mathcal{R} y$ et on lit "x est en relation avec y".
Ainsi, pour chaque $x \in E$ et chaque $y \in E$, on aura

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow (x, y) \in G$$

Donc, une relation binaire sur E est définie par une condition nécessaire et suffisante pour que le couple (x, y) appartient à G.

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

Si donc G est le graphe de $\mathcal{R}$, alors on a par exemple, $(3, 12) \in G$, $(12, 3) \notin G$, $(5, 20) \in G$, $(7, 20) \notin G$, etc...

2. Soit X un ensemble quelconque, non vide et soit $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par,

$$A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

Si par exemple $X = \{a, b, c, d, e\}$ et si G est le graphe de $\mathcal{R}$, alors $(\{a, c\}, \{a, b, c\}) \in G$ par contre $(\{a, b, c\}, \{a, b, e\}) \notin G$.

3. Soit $E = \mathbb{Z}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E, par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \;\; x\mathcal{R}y \;\Longleftrightarrow\; y - x \in \mathbb{N}$$

Si donc G est le graphe de $\mathcal{R}$, alors on a par exemple, alors $(2, 5) \in G$, $(4, 7) \in G$, $(6, 3) \notin G$, etc...

Remarques

Si E est un ensemble fini, une relation binaire peut être définie à l'aide d'un diagramme orienté. Par exemple, le diagramme représenté dans la figure ci-dessus définit une relation binaire sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Une flêche allant de x vers y indique que x est en relation avec y : $1\,\mathcal{R}\,4$, $4\,\mathcal{R}\,1$, $3\,\mathcal{R}\,4$, $2\,\mathcal{R}\,2$,$\cdots$

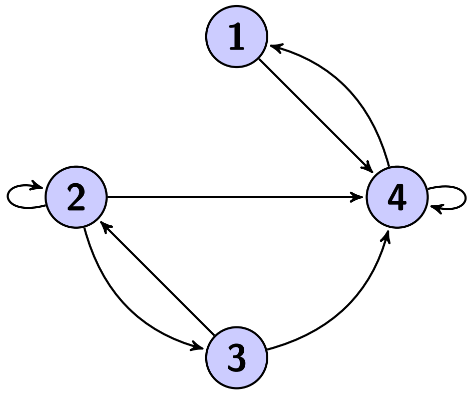
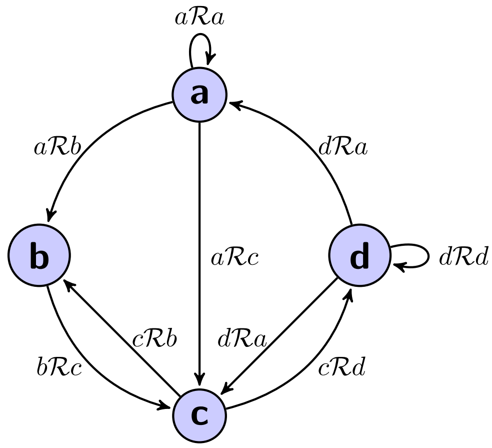


FIGURE 1.1 – $E = \{1, 2, 3, 4\}$



$F = \{a, b, c, d\}$

Définition

Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$.

i) On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive**, si $\forall x \in E,\ x\,\mathcal{R}\,x$.

ii) On dit $\mathcal{R}$ est **symétrique**, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$$

iii) On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ (x\,\mathcal{R}\,y \ \text{ et } \ y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow x = y$$

iv) On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive**, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E,\ (x\,\mathcal{R}\,y \ \text{ et } \ y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z$$

Exemples

1. $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X et $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par,

$$A\,\mathcal{R}\,B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

Alors, on vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

2. $E = \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par

$$x \mathcal{R} y \iff x \text{ divise } y$$

Alors $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

En effet,

i) Réflexivité

Soit $x \in E$, a-t-on $x \mathcal{R} x$?

On a $x = 1 \cdot x$, donc x divise x et par suite $x \mathcal{R} x$.

ii) Antisymétrie

Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, a-t-on $x = y$?

On a $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et il existe $k' \in \mathbb{N}$, tels que $y = kx$ et $x = k'y$, donc $y = kk'y$, comme $y \neq 0$, alors $kk' = 1$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$, donc $k = k' = 1$, par suite $x = y$.

iii) Transitivité

Soient $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$, tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, a-t-on $x \mathcal{R} z$?

On a $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et il existe $k' \in \mathbb{N}$, tels que $y = kx$ et $z = k'y$, donc $z = kk'x$, par suite, $x \mathcal{R} z$.

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est **une relation d'ordre** sur E, si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Notations

Dans toute la suite, toute relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, sera désignée par le signe $\leq$.

Donc pour $x \in E$ et $y \in E$ au lieu d'écrire $x \mathcal{R} y$ on écrit $x \leq y$.

Si E est muni d'une relation d'ordre $\leq$, on dit que $(E, \leq)$ est **un ensemble ordonné**.

La notation $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$.

Exemples

1. $E = \mathbb{Z}$ muni de la relation $\leq$ définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \leq y \iff y - x \in \mathbb{N}$$

Alors $(\mathbb{Z}, \leq)$ est un ensemble ordonné.

2. $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ muni de la relation $\leq$ définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \leq y \iff x \text{ divise } y$$

Alors $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

3. $E = \mathcal{P}(X)$, où X est un ensemble quelconque, muni de la relation $\leq$ définie par

$$\forall A \in E, \forall B \in E,\ A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

Alors $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

4. $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications d'un ensemble X vers $\mathbb{R}$, muni de la relation binaire $\leq$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R}),\ f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leq g(x)$$

Alors $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.
Dans cet exemple, pour $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} f < g &\Longleftrightarrow f \leq g \ \text{ et } \ f \neq g \\ &\Longleftrightarrow (\forall x \in X,\ f(x) \leq g(x)) \ \text{ et } \ (\exists x_0 \in X \ :\ f(x_0) \neq g(x_0)) \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$f > 0 \Longleftrightarrow (\forall x \in X,\ f(x) \geq 0) \ \text{ et } \ (\exists x_0 \in X \ :\ f(x_0) \neq 0)$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, on munit $\mathbb{R}^n$ de la relation définie par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1 \leq y_1) \\ \text{ou} \\ (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2) \\ \text{ou} \\ \vdots \\ \text{ou} \\ (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x_{n-1} = y_{n-1} \text{ et } x_n \leq y_n) \end{cases}$$

Alors $(\mathbb{R}^n, \leq)$ est un ensemble ordonné.
Cet ordre s'appelle l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$, il est équivalent à l'ordre pour lequel les mots sont classés dans un dictionnaire.

1.1.2 Ensembles totalement ordonnés

Définition

i) Une relation d'ordre $\leq$ est dite **totale**, si pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x$$

ii) Un ensemble **totalement ordonné** est un ensemble E muni d'une relation d'ordre totale.

iii) Si $(E, \leq)$ n'est pas totalement ordonné, on dit que $(E, \leq)$ est partiellement ordonné.

Remarque

Dans un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$, la négation de $x \leq y$ est $y < x$.

Exemples

1. $\mathbb{Z}$ muni de l'ordre naturel défini dans l'exemple précédent,

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$$

   est un ensemble totalement ordonné.

2. $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre défini dans l'exemple précédent, est totalement ordonné.

3. $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ordonné par division :

$$x \leq y \Longleftrightarrow y \ \text{ divise } \ x$$

   n'est pas un ensemble totalement ordonné.

4. $\mathcal{P}(X)$, où X est un ensemble de cardinal ≥ 2, ordonné par inclusion :

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

   n'est pas un ensemble totalement ordonné.

5. $E = \mathbb{C}$ muni de la relation $\leq$ définie pour $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, par

$$z \leq z' \iff (x \leq x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

   Alors $(\mathbb{C}, \leq)$ est totalement ordonné.

   Cet ordre s'appelle l'ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$.

6. $\mathbb{R}^n$ muni de l'ordre lexicographique est un ensemble totalement ordonné.

1.1.3 Plus grand élément - Plus petit élément

Définition

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie non vide de E et $a \in A$,

i) On dit que a est un plus grand élément de A, si $\forall x \in A,\ x \leq a$.

ii) On dit que a est un plus petit élément de A, si $\forall x \in A,\ a \leq x$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément), alors cet élément est unique.
En effet, supposons que $b \in A$ est un autre plus grand élément de A, alors on aura

$$a \leq b \text{ et } b \leq a$$

Donc, d'après l'antisymétrie de la relation $\leq$, on aura $a = b$.

Notations

Soit A une partie d'un ensemble ordonné.
Si A possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément), on note cet élément $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Exemples

1. $E = \mathcal{P}(X)$ ordonné par inclusion, où X est un ensemble non vide.
   Alors $\emptyset$ est le plus petit élément de E et X est le plus grand élément de E.
2. $E = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ ordonné par inclusion, où X est un ensemble de cardinal ≥ 2.
   Alors E n'admet ni plus grand élément, ni plus petit élément.
3. $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ordonné par la division.
   Alors E n'admet ni plus grand élément, ni plus petit élément.
4. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, comme le montre le théorème suivant :

Théorème

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Preuve

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin de l'axiome suivant, dit axiome de Peano ou principe de récurrence :
Soit A une partie de $\mathbb{N}$, telle que

i) $0 \in A$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Soit maintenant B une partie non vide de $\mathbb{N}$ et soit A la partie de $\mathbb{N}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x \in A \Longleftrightarrow \forall b \in B,\ x \leq b$$

Puisque $B \neq \emptyset$, alors on peut choisir $b \in B$, donc on voit que $b+1 \notin A$ et par suite, $A \neq \mathbb{N}$. Puisque $0 \in A$ et $A \neq \mathbb{N}$, alors A ne vérifie pas la deuxième condition de l'axiome précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$$

Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n_0 \in A$ et $n_0 + 1 \notin A$.
$n_0 + 1 \notin A$, donc il existe $b \in B$, tel que $b < n_0 + 1$ et puisque $n_0 \in A$, alors on aura

$$n_0 \leq b < n_0 + 1$$

Ainsi, on aura $0 \leq b - n_0 < 1$, donc $n_0 = b$, par suite b est un plus petit élément de B.

1.1.4 Borne supérieure - Borne inférieure

Définition

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

i) On dit que A est **majorée** dans E, s'il existe $x \in E$, tel que

$$\forall a \in A,\ a \leq x$$

Dans ce cas on dit que x est un majorant de A dans E.

ii) On dit que A est **minorée** dans E, s'il existe $x \in E$, tel que,

$$\forall a \in A,\ x \leq a$$

Dans ce cas, on dit que x est un minorant de A dans E.

iii) On dit que A est **bornée** si A est la fois majorée et minorée.

Notations

On note $M(A)$ l'ensemble de tous les majorants de A et $m(A)$ l'ensemble de tous les minorants de A. Alors on a

$$A \text{ majoré} \Longleftrightarrow M(A) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A \text{ minoré} \Longleftrightarrow m(A) \neq \emptyset$$

Définition

Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

i) Si A est majorée et si $M(A)$ possède un plus petit élément, alors cet élément s'appelle **la borne supérieure** de A et se note $\sup(A)$.

ii) Si A est minorée et si $m(A)$ possède un plus grand élément, alors cet élément s'appelle **la borne inférieure** de A et se note $\inf(A)$.

Remarques

Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. Par définition, on a $\sup(A)\in M(A)$ et $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A.
   On a aussi $\inf(A)\in m(A)$ et $\inf(A)$ est le plus grand minorant de A.
2. Un plus grand élément de A appartient toujours à A, tandis qu'une borne supérieure de A peut ne pas appartenir à A.
3. Une borne supérieure ou inférieure, s'il existe, est toujours unique.
4. Si A possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément), alors cet élément coincide avec sa borne supérieure (resp. inférieure).

Exemples

1. $A=[0,1]$, alors 0 est le plus petit élément de A, donc 0 c'est aussi la borne inférieure de A.
   On voit aussi que 1 est le plus grand élément de A, donc 1 est la borne supérieure de A.
2. $A=]0,1[$, dans ce cas A n'admet ni plus grand élément, ni plus petit élément. Par contre 0 est la borne inférieure de A et 1 est la borne supérieure de A.
3. $A=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$. Alors A n'admet ni plus grand élément, ni plus petit élément, ni borne supérieure, ni borne inférieure.
4. $E=\mathcal{P}(X)$ ordonné par inclusion, alors toute partie $\mathcal{A}$ de E, non vide et majorée (resp. minorée) possède une borne supérieure (resp. inférieure).
   En effet, supposons que $\mathcal{A}$ est majorée et soit $\Delta=\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}}A$, alors on vérifie facilement que Δ est la borne supérieure de $\mathcal{A}$.
   Si $\mathcal{A}$ est minorée, on prend $\Lambda=\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}}A$, alors Λ est la borne inférieure de $\mathcal{A}$.
5. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
   En effet, nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition

Soit $n\in\mathbb{N}$, alors toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par n, possède un plus grand élément.

Preuve

Soit A une partie majorée par n. Montrons que A possède un plus grand élément.

Pour cela, on procède par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, puisque A est majorée par 0 et A est non vide, alors $A = \{0\}$, donc 0 est le grand élément de A.

Supposons que toute partie non vide A de $\mathbb{N}$ majorée par n possède un plus grand élément.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par $n+1$. Deux cas sont donc possibles :

Si A est majorée par n, alors d'après l'hypothèse de récurrence, A possède un plus grand élément.

Si A n'est pas majorée par n, alors il existe $a \in A$, tel que $a > n$, donc $a \geq n+1$ et par suite, $a = n+1$, car $n+1$ est majorant de A. On en déduit donc que $n+1 \in A$ et que $n+1$ est un plus grand élément de A.

Caractérisation algèbrique de la borne supérieure

Soient $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, A une partie non vide de E et $x \in E$.

Alors x est la borne supérieure de A, si et seulement si,

i) $\forall a \in A,\ a \leq x$.

ii) $\forall y \in E,\ y < x \Longrightarrow \exists a \in A\ :\ y < a \leq x$.

Preuve

($\Longrightarrow$) Supposons que x est la borne supérieure de A. Alors, par définition, x est un majorant de A.

Soit $y \in E$, tel que $y < x$. Montrons qu'il existe $a \in A$, tel que $y < a \leq x$.

on a $y < x$, donc $y \notin M(A)$, car x est le plus petit élément de $M(A)$, donc y n'est pas un majorant de A, par suite il existe $a \in A$, tel que $y < a$. Ainsi, on a $y < a \leq x$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $(\forall a \in A,\ a \leq x)$ et $(\forall y \in E,\ y < x \Longrightarrow \exists a \in A\ :\ x \leq a < y)$.

Montrons que x est la borne supérieure de A. Pour cela, soit $M(A)$ l'ensemble de tous les majorants de A, alors on a $x \in M(A)$, donc $M(A) \neq \emptyset$.

Montrons que x est le plus petit élément de $M(A)$. Pour cela, il suffit de montrer que

$\forall y \in M(A),\ x \leq y$.

Puisque E est totalement ordonné, alors par absurde, on suppose qu'il existe $y \in M(A)$, tel que $y < x$, donc, par hypothèse, il existe $a \in A$, tel que $y < a \leq x$. Ce qui est absurde, car y est un majorant de A.

Remarques

Le théorème s'écrit sous la forme,

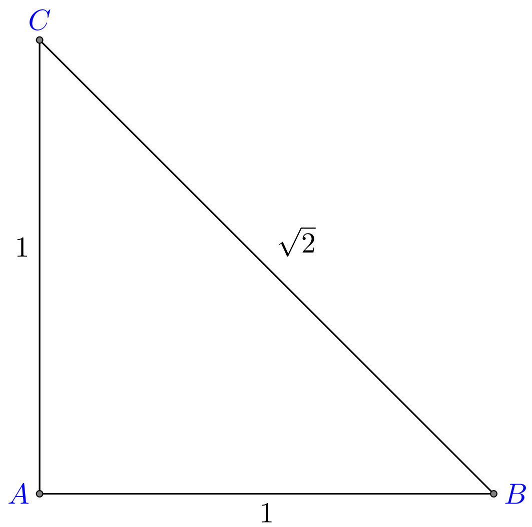
$$x = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq x \\ \text{et} \\ \forall y \in E,\ y < x \Longrightarrow \exists a \in A\ :\ y < a \leq x \end{cases}$$

On a aussi un théorème analogue pour la caractérisation de la borne inférieure d'une partie A d'un ensemble totalement ordonné :

$$x = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ x \leq a \\ \text{et} \\ \forall y \in E,\ x < y \Longrightarrow \exists a \in A\ :\ x \leq a < y \end{cases}$$

1.2 Insuffisance des nombres rationnels

D'après le théorème de Pythagore, on sait que si ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = AC = 1$, alors $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}$.



Cependant, comme le montre la proposition suivante, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc, il existe des nombres dans la nature qui ne sont pas des nombres rationnels, ainsi l'ensemble $\mathbb{Q}$ est insuffisant pour représenter toutes les mesures possibles de la nature, d'où la nécessité de construire un autre ensemble de nombres contenant $\mathbb{Q}$ dans lequel toutes les mesures possibles sont représentées.

Un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $n = p^2$.

Proposition

Soit n un nombre entier naturel qui n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve

Supposons, par absurde, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et il existe $q \in \mathbb{N}^*$, avec p et q premiers entre eux, tels que $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} = \frac{p}{q} &\Longrightarrow n = \frac{p^2}{q^2} \\
&\Longrightarrow p^2 = nq^2 \\
&\Longrightarrow q \text{ divise } p^2 \\
&\Longrightarrow q \text{ divise } p \quad (\text{car } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux}) \\
&\Longrightarrow \exists d \in \mathbb{N} \ : \ p = dq \\
&\Longrightarrow n = d^2
\end{aligned}$$

donc n est un carré parfait, ce qui est absurde.

Remarques

1. Ainsi, d'après la proposition précédente, on voit par exemple que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, etc.. ne sont pas des nombres rationnels.
2. $\mathbb{Q}$ présente un autre défaut fondamental qui réside dans le fait qu'une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ peut ne pas avoir de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, comme le montre l'exemple de la proposition suivante :

Proposition

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\}$. Alors A est une partie majorée de $\mathbb{Q}$ n'ayant pas de borne supérueire dans $\mathbb{Q}$.

Preuve

D'abord, il est clair que A est majorée dans $\mathbb{Q}$, car, par exemple, 2 est un majorant de A dans $\mathbb{Q}$. Supposons, par absurde, que A possède une borne supérieure m, avec $m \in \mathbb{Q}$.
D'après la proposition précédente, $m^2 \neq \sqrt{2}$, donc deux cas sont possibles $m^2 < \sqrt{2}$ ou $m^2 > \sqrt{2}$:
Si $m^2 < \sqrt{2}$, alors on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$, avec p assez grand, tel que $(m + \frac{1}{p})^2 < 2$, ce qui est absurde, car m est un majorant de A.
Si $m^2 > 2$, alors on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$, avec p assez grand, tel que $(m - \frac{1}{p})^2 > 2$, ce qui est absurde, car m est le plus petit des majorants de A.

1.3 Corps commutatifs totalement ordonnés

1.3.1 Définitions et propriètés de base

Rappelons que si E est un ensemble quelconque non vide, alors une loi interne sur E est définie par une application $\varphi : E \times E \longrightarrow E$. Dans ce cas, on convient de désigner $\varphi(x, y)$ par $x * y$, xTy, $x + y$, $x \cdot y$, xy, etc...

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble non vide, muni de deux lois internes, notées $+$ et $\times$. On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif, si

i) La loi $+$ est commutative,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \forall y \in \mathbb{K},\ \ x + y = y + x$$

ii) La loi $+$ est associative,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \forall y \in \mathbb{K},\ \forall z \in \mathbb{K},\ \ (x + y) + z = x + (y + z)$$

iii) La loi $+$ possède un élément neutre, noté $0_{\mathbb{K}}$,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \ x + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + x = x$$

iv) Tout élément $x \in \mathbb{K}$, possède un symétrique par rapport à la loi $+$, noté $-x$,

$$x + (-x) = (-x) + x = 0_{\mathbb{K}}$$

v) La loi $\times$ est commutative,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \forall y \in \mathbb{K},\ \ x \times y = y \times x$$

vi) La loi $\times$ est associative,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \forall y \in \mathbb{K},\ \forall z \in \mathbb{K},\ \ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

vii) La loi $\times$ possède un élément neutre, noté $1_{\mathbb{K}}$, avec $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \ x \times 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \times x = x$$

viii) Tout $x \in \mathbb{K}$, avec $x \neq 0_{\mathbb{K}}$, possède un inverse par rapport à la loi $\times$, noté x^{-1},

$$x \times (x^{-1}) = (x^{-1}) \times x = 1_{\mathbb{K}}$$

ix) La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$,

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \forall y \in \mathbb{K},\ \forall z \in \mathbb{K},\ \ x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

Quelques règles de calcul

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif, alors on a

1. $\forall x \in \mathbb{K},\ x \times 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \times x = 0_{\mathbb{K}}$.

   En effet, on a $0_{\mathbb{K}} \times x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \times x = 0_{\mathbb{K}} \times x + 0_{\mathbb{K}} \times x$, donc $0_{\mathbb{K}} \times x = 0_{\mathbb{K}}$.
2. $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ (-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y)$.

   En effet, on a $0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \times y = (x + (-x)) \times y = x \times y + (-x) \times y$,

   donc $(-x) \times y = -(x \times y)$.

   On a aussi $0_{\mathbb{K}} = x \times 0_{\mathbb{K}} = x \times (y + (-y)) = x \times y + x \times (-y)$,

   donc $x \times (-y) = -(x \times y)$.

   En particulier, on a $\forall x \in \mathbb{K},\ -x = (-1_{\mathbb{K}}) \times x$.
3. $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ (-x) \times (-y) = x \times y$.

Exemples

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\ :\ p \in \mathbb{Z}\ \text{ et }\ q \in \mathbb{N}^*\}$ muni des lois internes $+$ et $\times$ définies par

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$$

est un corps commutatif.

Notations

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif.

Pour $x \in \mathbb{K}$ et $y \in \mathbb{K}$, on pose $xy = x \times y$, $x - y = x + (-y)$, $0 = 0_{\mathbb{K}}$ et $1 = 1_{\mathbb{K}}$.

Définition

Un corps commutatif $(\mathbb{K},+,\times)$ est dit totalement ordonné, si $\mathbb{K}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\leq$, telle que

i) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, \forall z \in \mathbb{K},\ x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$;

ii) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ (x \geq 0\ \text{ et }\ y \geq 0) \Longrightarrow xy \geq 0$.

Dans ce cas, on dit que la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec les lois $+$ et $\times$.

Exemples

$(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps totalement ordonné.

Notations

Dans la suite, on pose

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K}\ :\ x \geq 0\},\ \mathbb{K}^*_+ = \{x \in \mathbb{K}\ :\ x > 0\}\ \text{ et }\ \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K}\ :\ x \leq 0\}$$

Sachons que $x > y$ signifie $y \leq x$ et $y \neq x$.

Remarques

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif totalement ordonné, alors on a

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ \ x\leq y &\Longleftrightarrow y-x\geq 0\\ &\Longleftrightarrow y-x\in\mathbb{K}^+\end{aligned}$$

En effet, si $x\leq y$, alors $x+(-x)\leq y+(-x)$, donc $y-x\leq 0$.
Si $0\leq y-x$ alors $0+x\leq (y-x)+x$, donc $x\leq y$.
Réciproquement, soit A une partie non vide de $\mathbb{K}$ et soit $B=\{-x\ :\ x\in A\}$, tels que

i) $0\in A$,

ii) $A\cap B=\{0\}$,

iii) $A\cup B=\mathbb{K}$,

iv) A est stable pour l'addition et pour la multiplication.

Alors $\mathbb{K}$ muni de la relation définie par

$$\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ x\leq y\ \Longleftrightarrow\ y-x\in A$$

est un corps totalement ordonné.

Proposition

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif totalement ordonné, alors on a les propriètés suivantes

1. $\forall x\in\mathbb{K},\ \ x\geq 0\Longleftrightarrow -x\leq 0.$
2. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ \ (x\geq 0\ \text{ et }\ y\geq 0)\Longrightarrow x+y\geq 0.$
3. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ \ (x>0\ \text{ et }\ y\geq 0)\Longrightarrow x+y>0.$
4. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ \ (x\leq 0\ \text{ et }\ y\leq 0)\Longrightarrow xy\geq 0.$
5. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\ \ (x\leq 0\ \text{ et }\ y\geq 0)\Longrightarrow xy\leq 0.$
6. $\forall x\in\mathbb{K},\ \ x^2\geq 0.$
7. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\forall z\in\mathbb{K},\forall t\in\mathbb{K};\ \ (x\leq y\ \text{ et }\ z\leq t)\Longrightarrow x+z\leq y+t.$
8. $\forall x\in\mathbb{K},\forall y\in\mathbb{K},\forall a\in\mathbb{K},\ \ (x\leq y\ \text{ et }\ a\geq 0)\Longrightarrow ax\leq ay.$

Preuve

1. Si $x\geq 0$, alors $0\leq x$ donc $0+(-x)\leq x+(-x)$ et ainsi on a $-x\leq 0$.
   La réciproque s'obtient de la même manière.
2. Si $0\leq x$, alors $0+y\leq x+y$, donc $y\leq x+y$. Donc si $0\leq y$, alors d'après la transitivité de la relation d'ordre, on a $0\leq x+y$.
3. On a $x\geq 0$ et $y\geq 0$, donc $x+y\geq 0$, donc il suffit de vérifier que $x+y\neq 0$. Pour cela on suppose que $x+y=0$, donc on aura $x=-y$, avec $y\geq 0$, donc $x\leq 0$, donc d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre, on $x=0$, ce qui est absurde.

4. Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et $-y \geq 0$, par suite, $(-x)(-y) \geq 0$. Or d'après les règles de calcul dans un corps commutatif, on a $(-x)(-y) = xy$.
5. Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \leq 0$ et $-y \geq 0$, donc $x(-y) \geq 0$. D'après les règles de calcul, on a $x(-y) = -xy$, donc $xy \leq 0$, car $-xy \geq 0$.
6. Soit $x \in \mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est totalement ordonné, alors on a $x \geq 0$ ou $x \leq$.
   Si $x \geq 0$, alors on a $x \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $x^2 \geq 0$.
   Si $x \leq 0$, alors on a $x \leq 0$ et $x \leq 0$, donc $x^2 \geq 0$.
7. Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x + z \leq y + z$ et $y + z \leq y + t$, donc d'après la transitivité de la relation d'ordre, on a $x + z \leq y + t$.
1. Exercice.

Remarques

1. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné, alors $1 > 0$.
   En effet, on a $1 = 1^2$, donc $1 \geq 0$, comme $1 \neq 0$, alors $1 > 0$.
2. $\mathbb{C}$ n'est pas un corps totalement ordonné.
   En effet, supposons, par absurde, qu'il existe une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{C}$, telle que $(\mathbb{C}, +, \times, \leq)$ soit un corps totalement ordonné.
   D'après la ramarque précédente, on a $1 > 0$, donc d'après la proposition précédente, $-1 < 0$.
   Or, on sait que $-1 = i^2$, donc $-1 \geq 0$, ce qui est absurde.

Notations

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.
Pour chaque $x \in \mathbb{K}$ et chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -(-n)x & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Alors, on vérifie facilement que

i) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \ (n+m)x = nx + mx$;

ii) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \ (nm)x = n(mx)$.

Proposition

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ n1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$.

Preuve

On procède par récurrence sur n, avec $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $n1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}}$, comme $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, alors $n1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$.

Supposons que $n1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ et montrons que $(n+1)1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$.

On a $(n+1)1_{\mathbb{K}} = n1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, avec $n1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, donc $(n+1)1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$.

Remarques

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné.

Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ n &\longrightarrow \varphi(n) = n1_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

1. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ n \neq 0 \Longrightarrow n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.
2. L'application φ vérifie les propriètés suivantes :

   i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z},\ \ \varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m)$;

   ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z},\ \ \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$;

   iii) φ est injective.

   La vérification de ces propriètés est laissée à titre d'exercice.
3. Puisque $\mathbb{Z}$ est infini et φ injective, alors $\varphi(\mathbb{Z})$ est aussi infini.
   On en déduit qu'un corps totalement ordonné est infini.
4. $\varphi(\mathbb{Z}) = \{n1_{\mathbb{K}}\ :\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie de $\mathbb{K}$ qui ressemble à $\mathbb{Z}$, dans le sens où on a

   i) $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ n1_{\mathbb{K}} + m1_{\mathbb{K}} = (m+n)1_{\mathbb{K}}$;

   ii) $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ (m1_{\mathbb{K}})(n1_{\mathbb{K}}) = (mn)1_{\mathbb{K}}$.

   Donc, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $n1_{\mathbb{K}} = n$, alors on peut dire que tout corps totalement ordonné contient $\mathbb{Z}$ et ainsi, on peut dire aussi que tout corps totalement ordonné contient $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Valeur absolue dans un corps commutatif totalement ordonné

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné.

Pour chaque $x \in \mathbb{K}$, la valeur absolue de x qu'on note $|x|$ est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Alors les propriètés usuelles d'une valeur absolue sont vérifiées, comme le montre la proposition suivante :

Remarques

1. $\forall x \in \mathbb{K},\ |x| = \max(x, -x)$.
2. $\forall x \in \mathbb{K},\ |-x| = |x|$.
3. $\forall x \in \mathbb{K},\ x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.

Proposition

i) $\forall x \in \mathbb{K},\ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

ii) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ |xy| = |x||y|$;

iii) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ |x+y| \leq |x| + |y|$;

iv) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Preuve

i) Trivial.

ii) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$, donc $|xy| = xy = |x||y|$.
Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \leq 0$, donc $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$, donc $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

iii) Si $x + y \geq 0$, alors $|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Si $x + y \leq 0$, alors $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.

iv) On a $x = (x-y) + y$, donc $|x| \leq |x-y| + |y|$, par suite $|x| - |y| \leq |x-y|$ $(*)$.
On a aussi $y = y - x + x$, donc $|y| \leq |y-x| + |x|$, par suite $|y| - |x| \leq |x-y|$ $(**)$.
D'après $(*)$ et $(**)$, on a $\max(|x|-|y|, |y|-|x|) \leq |x-y|$, donc $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

1.3.3 Corps commutatifs totalement ordonnés archimédiens

Propriètè d'Archimède

Définition

Un corps commutatif totalement ordonné $(\mathbb{K}, +, \times)$ est dit archimédien ou vérifie la propriètè d'Archimède, si

$$\forall x \in \mathbb{K}^+, \forall y \in \mathbb{K}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}\ :\ x < ny$$

Remarques

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatifs totalement ordonné archimédien, alors pour tout $x \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $x < n$.
En effet, comme $1_{\mathbb{K}} > 0$, il suffit d'appliquer la propriètè d'Archimède à x et $1_{\mathbb{K}}$.

Exemples

$\mathbb{Q}$ est un corps archimédien.
En effet, soient $x \in \mathbb{Q}^+$ et $y \in \mathbb{Q}_+^*$, alors $xy^{-1} \in \mathbb{Q}$, donc $xy^{-1} = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Comme $q \geq 1$, alors $\dfrac{p}{q} \leq p < p+1$, donc $xy^{-1} < p+1$, par suite, $x < (p+1)y$.

Partie entière

Proposition

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$, tel que

$$n \leq x < n+1$$

Dans ce cas, n s'appelle la **partie entière** de x et se note $[x]$ ou $\mathrm{E}(x)$.

Preuve

Si $x \geq 0$, on considère l'ensemble $A = \{m \in \mathbb{N} \ : \ m \leq x\}$.
Puisque $\mathbb{K}$ est archimédien, alors il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $x < p$.
Donc A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, car $0 \in A$ et A est majorée par p, par suite A possède un plus grand élément, qu'on note n.
Ainsi, on aura $n+1 \notin A$, donc $n \leq x < n+1$.
Si $x < 0$, on considère l'ensemble $A = \{m \in \mathbb{N} \ : \ m < -x\}$.
Puisque $\mathbb{K}$ est archimédien, alors il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $-x < p$.
Donc A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, car $0 \in A$ et A est majorée par p, par suite A possède un plus grand élément, qu'on note q.
Ainsi, on aura $q+1 \notin A$, donc $q < -x \leq q+1$, donc si on prend $n = -q-1$, alors $n \leq x < n+1$.
Montrons l'unicité de n. Pour ce la, soit m un autre entier tel que $m \leq x < m+1$.
Sopposons, par absurde que $m \neq n$, donc on peut supposer, par exemple, que $m < n$.
$m < n$, donc $m+1 \leq n$, donc $m+1 \leq x$, ce qui est absurde, car $x < m+1$.

Remarques

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, la partie entière de x, $\mathrm{E}(x)$, est l'unique entier vérifiant

$$\boxed{\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1}$$

Intuitivement, $\mathrm{E}(x)$ est l'entier le plus proche de x.

Corollaire

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique $(q,r) \in \mathbb{N}^2$, tel que

$$\boxed{m = qn + r} \quad \text{avec } 0 \leq r < n$$

Preuve

Posons $q = \left[\dfrac{m}{n}\right]$ et $r = m - qn$.

Comme $q \leq \dfrac{m}{n} < q+1$, alors $0 \leq m - qn < n$, donc on aura

$$m = qn + r \quad \text{avec } 0 \leq r < n$$

Remarques

L'expression $m = qn + r$, avec $0 \leq r < n$, s'appelle la division euclidienne de m par n.
q s'appelle le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n.

Proposition

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
Pour chaque $x \in \mathbb{K}$, on désigne par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, alors on a

i) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall m \in \mathbb{Z},\ m \leq x \Longrightarrow m \leq \mathrm{E}(x)$

ii) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall m \in \mathbb{Z},\ x < m \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \leq m - 1$

iii) $\forall x \in \mathbb{K},\ \mathrm{E}(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}\,;$

iv) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Z},\ \mathrm{E}(-x) = -\mathrm{E}(x) - 1\,;$

v) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K},\ \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) \leq \mathrm{E}(x+y) \leq \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) + 1.$

vi) $\forall x \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$

Preuve

i) Soient $x \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{Z}$, tels que $m \leq x$, donc $m < \mathrm{E}(x) + 1$ et par suite $m \leq \mathrm{E}(x)$.

ii) Soient $x \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{Z}$, tels que $x < m$, donc $\mathrm{E}(x) < m$ et par suite, $\mathrm{E}(x) \leq m - 1$.

iii) Trivial.

iv) Soit $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{Z}$, alors on a $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$.
Comme $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\mathrm{E}(x) < x < \mathrm{E}(x) + 1$, donc $-\mathrm{E}(x) - 1 < -x < -\mathrm{E}(x)$, par suite, on a $\mathrm{E}(-x) = -\mathrm{E}(x) - 1$.

v) Soient $x \in \mathbb{K}$ et $y \in \mathbb{K}$, alors on a $\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) \leq x + y$, donc d'après i),
$\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) \leq \mathrm{E}(x+y)$.
On a aussi $x + y < \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) + 2$, donc d'après ii), $\mathrm{E}(x+y) \leq \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) + 1$.

vi) Trivial.

Densité de $\mathbb{Q}$

Définition

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
On dit qu'une partie A de $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}$, si pour tout $x \in \mathbb{K}$ et pour tout $y \in \mathbb{K}$, avec $x < y$, il existe $a \in A$, tel que $x < a < y$.

Théorème

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
Alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.

Preuve

Soient $x \in \mathbb{K}$ et $y \in \mathbb{K}$, tels que $x < y$, montrons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $x < r < y$.
On a $y - x > 0$ et comme $\mathbb{K}$ est archimédien, alors il existe $m \in \mathbb{K}$, tel que $\dfrac{1}{y-x} < m$, donc $\dfrac{1}{m} < y - x$.
D'autre part, soit $n = \mathrm{E}(mx)$, donc $n \leq mx < n+1$, donc on voit que $\dfrac{n}{m} \leq x < \dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m}$.
Puisque $\dfrac{1}{m} < y - x$ et $\dfrac{n}{m} \leq x$, alors $\dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m} < y$.
Donc il suffit de prendre $r = \dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m}$.

1.3.4 Corps commutatifs totalement ordonnés archimidiens complets

Intervalles dans un corps totalement ordonné archimédien

Définition

Soient a et b deux éléments d'un corps $\mathbb{K}$ totalement ordonné archimédien.

i) On appelle intervalle fermé d'extremités a et b, la partie de $\mathbb{K}$ notée $[a,b]$ et définie par
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{K} \ : \ a \leq x \leq b\}$$

ii) On appelle intervalle ouvert d'extremités a et b, la partie de $\mathbb{K}$ notée $]a,b[$ et définie par
$$]a,b[= \{x \in \mathbb{K} \ : \ a < x < b\}$$

iii) On appelle intervalle semi ouvert à gauche d'extremités a et b, la partie de $\mathbb{K}$ notée $]a,b]$ et définie par
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{K} \ : \ a < x \leq b\}$$

iv) On appelle intervalle semi ouvert à droite d'extremités a et b, la partie de $\mathbb{K}$ notée $[a,b[$ et définie par
$$[a,b[= \{x \in \mathbb{K} \ : \ a \leq x < b\}$$

Remarques

On définit aussi les intervalles $[a,+\infty[,\ ]a,+\infty[,\ ]-\infty,a],\ ]-\infty,a[,$ et $]-\infty,+\infty[$ par

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{K}\ :\ x\geq a\}\quad\text{et}\quad]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{K}\ :\ x>a\}$$

$$]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{K}\ :\ x\leq a\}\quad\text{et}\quad]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{K}\ :\ x<a\}$$

$$]-\infty,+\infty[=\mathbb{K}$$

Propriètè des intervalles emboités

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien.
On dit que $\mathbb{K}$ possède la propriètè des intervalles emboités, si pour toute suite d'intervalles fermés $([a_n,b_n])_{n\geq 0}$, tels que

$$\forall n\geq 0,\ [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$$

il existe au moins $c\in\mathbb{K}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ c\in[a_n,b_n]$.
Si $\mathbb{K}$ possède la propriètè des intervalles emboités, on dit que $\mathbb{K}$ est complet.

Exemples

Le corps $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriètè des intervalles emboités.
En effet, si on pose, par exemple, $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ et $b_n=a_n+\frac{1}{n!}$, alors

$$\mathbb{Q}\cap\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]\right)=\emptyset$$

On vérifie facilement que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n<a_{n+1}$ $b_{n+1}\leq b_n$ et $a_n<b_n$. Donc on aura

$$\forall n\in\mathbb{N},\ [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$$

Supposons, par absurde, qu'il existe $\alpha\in\mathbb{Q}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha\in[a_n,b_n]$.
On a $\alpha>0$, donc il existe $p\in\mathbb{N}^*$ et il existe $q\in\mathbb{N}^*$, tel que $\alpha=\frac{p}{q}$.
Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq\alpha\leq b_n$, alors en particulier pour $n=q+1$, on a $a_{q+1}\leq\alpha\leq b_{q+1}$, donc $a_q<\alpha<b_q$, par suite, en multipliant par $q!$ et en tenant compte que $b_q=a_q+\frac{1}{q!}$, on aura

$$q!a_q<q!\alpha<q!a_q+1$$

Ce qui est absurde, car $q!a_q\in\mathbb{N}$ et $q!\alpha\in\mathbb{N}$.

Théorème

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien complet. Alors toute partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$ possède une borne supérieure.

Preuve

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$, $a \in A$ et b un majorant de A.
Si $b \in A$, alors b est un plus grand élément de A, donc b est la borne supérieure de A.
Si $b \notin A$, alors $a < b$. Dans ce cas pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble E_n des entiers $m \in \mathbb{N}$, tels que $a + m2^{-n}$ soit un majorant de A.
$(b-a)2^n > 0$ et $\mathbb{K}$ archimédien, donc il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $(b-a)2^n < m$, donc $b < a + m2^{-n}$.
Or b est un majorant de An donc $a + m2^{-n}$ est un majorant de A et par suite, $E_n \neq \emptyset$.
E_n est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc E_n possède un plus petit élément, noté p_n.
p_n est le plus petit élément de E_n, donc $p_n - 1 \notin E_n$, par suite

$$[a + (p_n - 1)2^{-n}, a + p_n 2^{-n}] \cap A \neq \emptyset$$

On a $a + p_n 2^{-n} = a + 2p_n 2^{-(n+1)}$, donc $2p_n \in E_{n+1}$, par suite $p_{n+1} \leq 2p_n$.
On a aussi $a + (p_n - 1)2^{-n} = a + (2p_n - 2)2^{-(n+1)}$, donc $2p_n - 2 \notin E_{n+1}$, par suite $2p_n - 2 < p_{n+1}$, donc $2p_n - 1 \leq p_{n+1}$.
Ainsi, on aura $2p_n - 1 \leq p_{n+1} \leq 2p_n$, donc $p_{n+1} = 2p_n$ ou $p_{n+1} = 2p_n - 1$, par conséquent, si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = a + (p_n - 1)2^{-n}$ et $b_n = a + p_n 2^{-n}$, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$$

Comme $\mathbb{K}$ est complet, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \in [a_n, b_n]$.
Montrons que α est un majorant de A. Pour cela, supposons par absurde que α n'est pas un majorant de A, donc il existe $x \in A$, tel que $\alpha < x$, donc $x - \alpha > 0$.
$x - \alpha > 0$ et $\mathbb{K}$ archimédien, donc il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $1_{\mathbb{K}} < m(x - \alpha)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $m \leq 2^n$, alors on a $1_{\mathbb{K}} < 2^n(x - \alpha)$, donc $2^{-n} < x - \alpha$.
Comme $\alpha \in [a_n, b_n]$, alors $a + (p_n - 1)2^{-n} \leq \alpha$, donc $a + p_n 2^{-n} < x$.
Or $a + p_n 2^{-n}$ est un majorant de A, donc x est un majorant de A, ce qui est absurde.
Montrons maintenant que α est le plus petit majorant de A. Pour cela, on suppose, par absurde, qu'il existe un majorant β de A, tel que $\beta < \alpha$, donc $\alpha - \beta > 0$, par suite, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\alpha - \beta > 2^{-n}$.
Comme $\alpha \in [a_n, b_n]$, alors $\beta < a + (p_n - 1)2^{-n}$, avec $a + (p_n - 1)2^{-n}$ n'est pas un majorant de A, donc β n'est pas un majorant de A, ce qui est absurde.

Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien complet. Alors toute partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$ possède une borne inférieure.

Preuve

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$ et soit $B = -A = \{-x \ :\ x \in A\}$. Alors B est une partie partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$, donc d'après le théorème précédent, B possède une borne supérieure α, donc $-\alpha$ est une borne inférieure de A.

Caractérisation de la borne supérieure

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien complet, A une partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) α est la borne supérieure de A.

ii) α est un majorant de A et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}$, avec $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, tel que

$$\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$$

Preuve

i) $\Longrightarrow$ **ii)** Supposons que α est la borne supérieure de A, alors par définition, α est un majorant de A.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}$, avec $\varepsilon > 0$, donc $-\varepsilon < 0$, par suite $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Puisque α est le plus petit majorant de A, alors $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, donc il existe $a \in A$, tel que $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.

ii) $\Longleftarrow$ **i)** Il suffit de montrer que α est le plus petit majorant de A. Pour cela, on suppose, par absurde, qu'il existe un majorant β de A, tel que $\beta < \alpha$, donc $\alpha - \beta > 0$, par suite, il existe $a \in A$, tel que $\alpha - (\alpha - \beta) < a$, donc $\beta < a$, ce qui est absurde, car β est un majorant de A.

Notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné, archimédien et complet et soit A une partie non vide de $\mathbb{K}$.
Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.
Si A n'est pas minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.
Donc si on pose $\overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et si on prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{K}$ à $\overline{\mathbb{K}}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{K}}, \ x \leq +\infty \ \text{ et } \ -\infty \leq x$$

alors on obtient le résultat suivant :

Corollaire

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{K}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Preuve

Soit A une partie non vide de $\overline{\mathbb{K}}$, alors deux cas sont possibles :
Si A possède un majorant dans $\mathbb{K}$, alors d'après le théorème précédent, A possède une borne supérieure dans $\mathbb{K}$, donc aussi dans $\overline{\mathbb{K}}$.
Si A ne possède aucun majorant dans $\mathbb{K}$, alors $\sup(A) = +\infty$, avec $+\infty \in \overline{\mathbb{K}}$.
De la même ma nière on montre que A possède une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{K}}$

Théorème

Il existe un unique corps commutatif totalement ordonné archimidien et complet.
Ce corps s'appelle le corps des nombres réels et se note $\mathbb{R}$.

Preuve

A admettre.

Remarques

1. En fait le corps $\mathbb{R}$ est unique à un isomorphisme près, c'est à dire, si $\mathbb{K}$ est un autre corps commutatif totalement ordonné archimidien et complet, alors il existe une application
$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les propriètés suivantes :
   i) φ est bijective ;
   ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ \ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
   iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ \ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
   iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ \ x \leq y \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.
   Dans ce cas, on dit que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ et $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ sont deux corps isomorphe. Pour plus d'informations sur les propriètés des isomorphismes, voir votre cours d'Algèbre I.
2. Rappelons les principales propriètés de $\mathbb{R}$:
   i) $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.
   ii) Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < ny$$
   iii) Le corps $\mathbb{R}$ possède la propriété des intervalles emboités :
   Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$, alors $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.
   iv) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
   v) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

1. Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $a + b \notin \mathbb{Q}$.
2. En déduire, en utisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que A est un intervalle de $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in A$, on a $[a, b] \subseteq A$.
(Indication : utiliser la borne supérieure et la borne inférieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$)

1.4 Exercices

Exercice

Pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit la relation binaire, notée $\leq_f$, par

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R},\;\; x \leq_f y \Longleftrightarrow (f(y) - f(x)) \geq |y - x|$$

1. Montrer que $\leq_f$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ordre défini par $\leq_f$ est total, si et seulement si,

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R},\;\; |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

3. Identifier la relation définie par $\leq_{Id_{\mathbb{R}}}$.

Exercice

Soit X un ensemble non vide et soit $\mathbb{R}^X$ l'ensemble de toutes les applications de X vers $\mathbb{R}$ muni de la relation binaire $\leq$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \forall g \in \mathbb{R}^X,\;\; f \leq g \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\;\; f(x) \leq g(x)$$

1. Vérifier que $\leq$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$. Cet ordre est-il total ?
2. Soit $f \in \mathbb{R}^X$. Les assertions "f est majorée" et "$\{f\}$ est majoré" sont-elles équivalentes ?
3. Soient f et g deux éléments distincts de $\mathbb{R}^X$. L'ensemble $\{f, g\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?
4. Montrer que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}^X$ possède une borne supérieure.

Exercice

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \;:\; 2 \leq n \leq 150\}$ muni de la relation d'ordre définie par la division :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\;\; x \leq y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

1. Est-ce que E est totalement ordonné ? Justifier votre réponse.
2. Soit A la partie de E définie par $A = \{12, 18, 24, 36\}$.

   a) Est-ce que A possède un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

   b)) Déterminer $m(A)$ l'ensemble des minorants de A. Est-ce que A possède une borne inférieure ?
   Si oui, déterminer cette borne inférieure.

   iii) Déterminer $M(A)$ l'ensemble des majorants de A. Est-ce que A possède une borne supérieure ?
   Si oui, déterminer cette borne supérieure.

Exercice

1. Soit $P(x) = x^3 - 21x - 90$. Montrer que 6 est l'unique racine réelle de P.
2. Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier.

Exercice

Montrer que $\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$ est un entier.

Exercice

Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$, que $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$
(Le nombre 2 apparaissant n fois sous le radical).

Exercice

Ecrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1] \,, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right[, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[, \quad \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right] , \quad \bigcap_{n=2}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$$

Exercice

Soient x et y deux nombres réels. Montrer que

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.
3. $\sqrt{|x-y|} \geq \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|$.
4. $\forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longleftrightarrow |x-z| + |z-y| = |x-y|$

Exercice

1. Soient $\in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels de l'intervalle $[0,1]$.
   Montrer qu'il existe $(i,j) \in \{0,1,\ldots,n\}^2$, avec $i \neq j$, tel que $|x_i - x_j| \leq \dfrac{1}{n}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe $q \in \{1,2,\ldots,n\}$, tels que
   $$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$
   (On pourra prendre $x_i = ix - [ix],\ i \in \{0,1,\ldots,n\}$).

Exercice

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, telles que $\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b$.

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
2. Montrer que

$$(\sup(A) = \inf(B)) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B \ :\ 0 < b - a < \varepsilon)$$

Exercice

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2}$$

Exercice

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{Q}$, tels que

i) $A \cup B = \mathbb{Q}$.

ii) $\forall a \in A, \forall b \in B$ on a $a \leq b$.

Montrer qu'il existe un nombre réel unique x, tel que

$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq x \leq b$$

Exercice

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments et soit $a \in A$.

1. Montrer que si $a < \sup(A)$ alors $\sup(A \setminus \{a\}) = \sup(A)$.
2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{a\}) < \sup(A)$ alors $\sup(A) = a$.

Exercice

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha = \sup(A)$. Montrer que si $\alpha \notin A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\alpha - \varepsilon, \alpha[$ contient une infinité d'éléments de A.

Exercice

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$$

Exercice

Soient $a > 0$, $b > 0$, avec $a \leq b$, et A la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$A = \{\frac{1}{ma} + \frac{1}{nb} \ : \ m \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que A possède un plus grand élément et que A est bornée.
2. Montrer, en utilisant la propriété d'Archimède, que A admet 0 pour borne inférieure.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in A$ et il existe $y_0 \in A$, tels que
$$0 < x_0 < \frac{1}{ka} + \varepsilon \ \text{ et } \ 0 < y_0 < \frac{1}{kb} + \varepsilon$$

Exercice

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit $A+B$, $-A$, $A-B$ et AB par

$$\begin{aligned} A+B &= \{a+b \,:\, a \in A \text{ et } b \in B\} \\ -A &= \{-a \,:\, a \in A\} \text{ et } A-B = A+(-B) \\ AB &= \{ab \,:\, a \in A \text{ et } b \in B\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $A+B$ est bornée et que

$$\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B) \text{ et } \inf(A+B) = \inf(A)+\inf(B)$$

2. Montrer que $-A$ est bornée et que $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.
3. Montrer que $A-B$ est borné et déteminer $\sup(A-B)$ et $\inf(A-B)$ en fonction de $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$ et $\inf(B)$.
4. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A\cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$. Que vaut $\inf(A\cup B)$?
5. On suppose que $A \subseteq \mathbb{R}_+$ et que $\sup(B) \geq 0$. Montrer que AB possède une borne supérieure et que $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$.
6. On suppose $A\cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A\cap B$ est bornée et que

$$\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A\cap B) \leq \sup(A\cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

Exercice

1. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que
   a) $A\cup B$ est bornée.
   b) $\sup(A\cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ et $\inf(A\cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
2. Soit $X = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
   a) Montrer que $X = A \cup B$ où $A = \left\{1+\dfrac{1}{2n} \,:\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \left\{-1+\dfrac{1}{2n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   b) Montrer que A et B sont bornés et déterminer $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$ et $\inf(B)$.
   c) En déduire que X est borné et déterminer $\sup(X)$ et $\inf(X)$.
   c) Est-ce que X admet un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

Exercice

Soit

$$E = \left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \,:\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\right\}$$

a) Montrer que E est borné et déterminer ses bornes supérieure et inférieure.

b) Etudier l'existence d'un plus petit et d'un plus grand élément de E.

Exercice

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure et la borne inférieure de A dans les cas suivants :

a) $A = \{\frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ m < 2n\}$;

b) $A = \{\frac{mn}{4m^2 + n^2} \ : , \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

c) $A = \{x + \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}_+^*\}$.

d) $A = \{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2m+1} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ m \in \mathbb{N}\}$.

e) $A = \{xy \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ et } \ |x| + |y| < 1\}$.

f) $A = \{\frac{m}{mn+1} \ : \ m \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

g) $A = \{\frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \ : \ m \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

h) $A = \{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{mn} \ : \ m \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que A est un intervalle, si et seulement si,
$$\forall x \in A, \forall y \in A, \ x \leq y \Longrightarrow [x, y] \subseteq A$$
2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que $I + J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que si $I \cap J \neq \emptyset$, alors $I \cap J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments et soit $a \in A$.

a) Montrer que si $a < \sup(A)$ alors $\sup(A \setminus \{a\}) = \sup(A)$.

b) Montrer que si $\sup(A \setminus \{a\}) < \sup(A)$ alors $a = \sup(A)$.

Exercice

Soit
$$A = \{\frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} \ : \ p \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ q \in \mathbb{N}^* \ \text{ tel que } \ p < q\}$$

a) Montrer que A est minorée par -3 et majorée par 2.

b) Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Exercice

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ [x] - [y] - 1 \leq [x - y] \leq [x] - [y]$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ [-x] = -[x] - 1$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}_-, \ n([x] + 1) \leq [nx] \leq n[x]$.

Exercice

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ [x+n] = [x] + n$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ [x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.
3. En déduire que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels, alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} [x_k] \leq \left[\sum_{k=1}^{n} x_k\right] \leq \sum_{k=1}^{n} [x_k] + n - 1$$

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ [x] = \left[\dfrac{[nx]}{n}\right]$.

Exercice

Montrer que

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq [nx] - n[x] \leq n-1$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left[\dfrac{1}{n}[nx]\right] = [x]$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[x + \dfrac{k}{n}\right] = [nx]$

Exercice

Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ \left[\dfrac{n-1}{2}\right] + \left[\dfrac{n+2}{4}\right] + \left[\dfrac{n+4}{4}\right] = n$.

Exercice

Soit n un entier ≥ 1, simplifier la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k}]$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{E}(2x-1) = \mathrm{E}(x-4)$.

Exercice

Soient a et b deux entiers, avec $b \neq 0$, et soit $x = a - \left[\dfrac{a}{b}\right] b$.
Montrer que x est le reste de la division euclidienne de a par b.

Exercice

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. En déduire que si p et q sont des entiers naturels premiers entre eux, alors

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{kp}{q}\right] = \sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kq}{p}\right] = \frac{(q-1)(p-1)}{2}$$

Exercice

Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, soit $f_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \mathrm{E}\left(\dfrac{x}{p}\right)$.

1. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f_p \circ \mathrm{E} = f_p$.
2. En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f_p \circ f_q = f_q \circ f_p = f_{pq}$.

Exercice

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left[\dfrac{x+k}{n}\right] = \left[\dfrac{[x]+k}{n}\right]$.
2. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \left[\dfrac{x+k}{n}\right] = [x]$.

Exercice

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\begin{cases} (m+1)^2 \equiv 1\ [4] & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m+1)^2 \equiv 0\ [4] & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $m = \mathrm{E}(\sqrt{4n+1})$.
   On suppose que $\sqrt{4n+2} \geq m+1$. Montrer que $4n+2 = (m+1)^2$ et en déduire une contradiction et que $\mathrm{E}(\sqrt{4n+1}) = \mathrm{E}(\sqrt{4n+2})$.
3. **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq \sqrt{n^2+n} \leq n + \dfrac{1}{2}$.

   b) Montrer que $\mathrm{E}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \mathrm{E}(\sqrt{4n+1})$.

Exercice

Montrer que $\forall x > 0,\ \mathrm{E}\left(\sqrt{\mathrm{E}(x)}\right) = \mathrm{E}(\sqrt{x})$.

Exercice

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x+1}{2}\right] - [x]$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = f(x)$$

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = [x]$.
3. En déduire une expression simple de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left[\dfrac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Exercice

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

i) $\left[\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2}\right] = \dfrac{x+1}{2}$.

ii) $\left[x + \dfrac{2}{3}\right] + \left[x + \dfrac{1}{2}\right] = 2[x]$.

iii) $[x] - 2\left[\dfrac{x}{2}\right] = 1$.

iv) $\left[\dfrac{2x-3}{3}\right] = \dfrac{2x-3}{3}$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \ \text{ et } \ f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.
3. Montrer que $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$ et en déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}^+,\ f(r) = r$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
6. En utilisant une démonstration par absurde et en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = x$.

Exercice

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose qu'il existe une bijection $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une suite d'intervalles emboités $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \notin [a_n, b_n]$.
2. En déduire que $[a, b]$ n'est pas dénombrable.

Exercice

Montrer que $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

1. Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$, alors $a+b \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, avec $x < y$.
   a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$, tel que $x+\sqrt{2} < r < y+\sqrt{2}$.
   b) En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant,

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(a,b) \in A^2$, tel que $a < x < b$;

ii) $\forall a \in A, \forall b \in A, \ \dfrac{a+b}{2} \in A$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante, telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
   Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x+y) = f(x) + f(y) \ \text{ et } \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ f(xy) = f(x)f(y)$$
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \geq 0 \Longrightarrow g(x) \geq 0$.
   b) En déduire que g est croissante.
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = x$.

Exercice

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$(A \text{ est dense dans } \mathbb{R}) \Longleftrightarrow A \cap]0,1[\neq \emptyset$$

Exercice

Soit $a \in \mathbb{Q}^+$, tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $|\dfrac{p}{q} - \sqrt{a}| \geq \dfrac{\alpha}{q^2}$.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $|x - \dfrac{p}{q}| \leq \dfrac{1}{q^2}$.

Exercice

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application croissante, on se propose de montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$, tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Pour cela, on considère l'ensemble $E = \{x \in [0,1] \ : \ x \leq f(x)\}$.

1. Montrer que E possède une borne supérieure, qu'on note a.
2. Supposons que $a < f(a)$. Montrer que $f(a) \in E$ et en déduire une contradiction.
3. Supposons que $a > f(a)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$, tel que $f(a) < x_0 < a$ et en déduire une contradiction.
4. Conclure.

Exercice

Soit G un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que $G \neq \{0\}$ et on pose

$$G_+^* = \{x \in G \ : \ x > 0\}$$

1. Montrer que G_+^* possède une borne inférieure α et que $\alpha \geq 0$.
2. On suppose que $\alpha > 0$.
   a) Montrer que si $\alpha \notin G$, alors il existe $x_1 \in G$ et il existe $x_2 \in G$, tels que $\alpha < x_1 < x_2 < 2\alpha$.
   b) En déduire que $\alpha \in G$ et que $\alpha\mathbb{Z} \subseteq G$.
   c) Soit $x \in G$. Montrer qu'il existe $n \in G$, tel que $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$ et en déduire que $x = n\alpha$.
   d) Déduire de ce qui précède que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\alpha = 0$ et on fixe un $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe $x \in G$, tel que $0 < x < \varepsilon$.
   b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$, tel que $|y - nx| < \varepsilon$.
   c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que $D = \{\frac{m}{2^n} \ : \ , \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et en déduire que D est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que
$$(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R}) \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$$
6. Soit $a \in \mathbb{R}$, tel que $\dfrac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.
   Montrer que $\{\cos(an) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(an) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1,1]$.

2 Suites numériques

2.1 Définition et propriètés d'une suite

2.1.1 Définition et exemples

Définition

Soit E un ensemble non vide. Une suite d'éléments de E est définie par une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$. Dans ce cas, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $u(n) = u_n$ et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E.
Si $E = \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.
Si $E = \mathbb{C}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n s'appelle le terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques

1. Dans le cas général, une suite d'un ensemble E est définie par une application $u : I \longrightarrow E$, où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$.
2. Si I est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors il existe une application bijective et strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$.
   En effet, puisque I est infinie, alors I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc I possède un plus petit élément n_0.
   I est infini, donc $I \setminus \{n_0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, par suite $I \setminus \{n_0\}$ possède un plus petit élément n_1 et on a $n_0 < n_1$.
   $I \setminus \{n_0, n_1\}$ est encore une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc $I \setminus \{n_0, n_1\}$ possède un plus petit élément n_2 et on a $n_0 < n_1 < n_2$.
   Ainsi, Comme I est infini, on construit, par récurrence, une suite $(n_k)_{k\geq 0}$, d'éléments de I, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, n_{k+1} est le plus petit élément de $I \setminus \{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.
   Donc, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(k) = x_k$, alors $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ est une application strictement croissante et bijective.
   Dans ce cas, on a $I = \{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ et $(u_n)_{n\in I} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en général définie par la donnée de deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + iy_n$$
   Dans ce cas, les propriètés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découlent de celles des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples

1. $([-n,n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$, c'est donc une suite de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est la suite définie par l'application
$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$n \longmapsto u(n) = [-n,n]$$
2. $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{Q}$, c'est la suite définie par l'application
$$u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$n \longmapsto u(n) = \frac{1}{n}$$
3. $(\sqrt{n-5})_{n\geq 5}$ est une suite réelle, c'est la suite définie par l'application
$$u : \mathbb{N}\setminus\{0,1,2,3,4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n) = \sqrt{n-5}$$
4. On peut aussi définir une suite à l'aide d'une relation de récurrence.
Les deux exemples suivants sont élémentaires et typiques :
   i) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique, s'il existe $r\in\mathbb{R}$, tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie par la relation de récurrence suivante :
$$u_0\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$
   Dans ce cas, u_0 s'appelle le premier terme et r la raison de la suite arithmétique.
   ii) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique, s'il existe $q\in\mathbb{R}$, tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie par la relation de récurrence suivante :
$$u_0\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$
   Dans ce cas, u_0 s'appelle le premier terme et q la raison de la suite géométrique.

2.1.2 Suites majorées, suites minorées et suites bornées

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\alpha$.

ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, s'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha\leq u_n$.

iii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, s'il existe $\alpha>0$, tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leq\alpha$.

2.1.3 Croissance - Décroissance - Monotonie

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
Si de plus, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
Si de plus, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

iii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, s'elle est ou bien croissante ou décroissante.

iv) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Longrightarrow u_n = u_p$$

Remarques

1. En fait, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. décroissante), s'il existe un entier $n_0 \geq 0$, tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0,\ n \geq m \implies u_n \geq u_m \ \ (\text{resp. } u_n \leq u_m)$$

2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
3. Toute suite constante est stationnaire, tandis que la réciproque n'est pas vraie.

Exemples

1. $u_n = |n-5|$ est croissante pour $n \geq 5$.
2. $u_n = \left[\dfrac{1}{n+1}\right]$ est une suite stationnaire qui n'est pas constante.

2.2 Convergence d'une suite

2.2.1 Définition et propriètés de la limite d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et soit $l \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l quand n tend vers l'infini ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers l'infini et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Remarques

1. En utilisant les quantificateurs logiques, la définition précédente, s'écrit sous la forme :

$$(\lim_{n\to\infty} u_n = l) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

ou encore sous la forme

$$(\lim_{n\to\infty} u_n = l) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Longrightarrow l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon)$$

2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, si et seulement si, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - l$ converge vers 0 :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to\infty} (u_n - l) = 0$$

3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l, si et seulement si, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \geq k$, tel que $|u_{n_k} - l| > \varepsilon$.
4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge vers aucune limite l est dite divergente.
   Donc, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, si et seulement si, pour tout $l \in \mathbb{K}$, il existe $\varepsilon > 0$, tel pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \geq k$, tel que $|u_{n_k} - l| > \varepsilon$.
5. Toute suite convergente est bornée.
   En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l et soit, par exemple, $\varepsilon = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq 1$$

   Comme $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, alors pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| \leq |l| + 1$.
   Soit $\alpha = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l| + 1\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq \alpha$.
6. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
   En effet, considèrons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| = 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l et appliquons la définition à $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq N \Longrightarrow u_n - \frac{1}{2} \leq l \leq u_n + \frac{1}{2}$$

   Donc pour $n = 2N$, on aura $\dfrac{1}{2} \leq l \leq \dfrac{3}{2}$ et pour $n = 2N+1$, on aura $-\dfrac{3}{2} \leq l \leq -\dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde, par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée divergente.
7. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$, car on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$$

   La réciproque n'est pas vraie, car, par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors on a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, tandis que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, car elle est constante.

Exemples

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^p}$ converge vers 0.
   En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors on doit chercher $N \in \mathbb{N}$, tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon$$
   Pour cela, remarquons que $\dfrac{1}{n^p} \leq \dfrac{1}{n}$, donc pour que $\dfrac{1}{n^p} \leq \varepsilon$, alors il suffit que $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$.
   Or, on a
   $$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$
   Donc si on pose $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, alors on aura le résultat.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n-1}{2n+3}$ converge vers $\dfrac{3}{2}$.
   En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors on a
   $$\begin{aligned} |u_n - \frac{3}{2}| \leq \varepsilon &\Longleftrightarrow \left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \left|\frac{-5}{4n+2}\right| \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \frac{5}{4n+2} \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon} \end{aligned}$$
   Donc, si on prend $N = \left[\dfrac{|5-2\varepsilon|}{4\varepsilon}\right] + 1$, alors pour tout $n \geq N$, on aura $n \geq \dfrac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, donc
   $$\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon$$
3. Soit $a \in \mathbb{K}^*$, avec $|a| < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n$ converge vers 0.
   En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors on a
   $$\begin{aligned} |u_n| \leq \varepsilon &\Longleftrightarrow |a^n| \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow |a|^n \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow n \ln|a| \leq \ln\varepsilon \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|} \quad (\text{car } \ln|a| < 0) \end{aligned}$$
   Donc, si on pose $N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right] + 1$, alors on aura le résultat.

Lemme

Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

Preuve

Par absurde, si on suppose $x \neq 0$, alors $|x| > 0$, donc pour $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$, on aura $|x| \leq \dfrac{|x|}{2}$, ce qui est absurde, car on aura $1 \leq \dfrac{1}{2}$.

Proposition

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite l, alors l est unique.

Preuve

Soit l' une autre limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier $p \geq 0$ assez grand, tel que

$$|u_p - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_p - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc on aura

$$|l - l'| \leq |l - u_p| + |u_p - l'| \leq \varepsilon$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|l - l'| \leq \varepsilon$, par suite $l - l' = 0$.

2.2.2 Extention de la notion de limite

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$$

ii) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n \leq -A$$

Remarques

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée. Tandis que la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{2n} = n \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 1$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $+\infty$.

Exemples

Soit $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$ converge vers $+\infty$.
En effet, on a $a > 1$, donc $a = 1 + b$, avec $b > 0$, donc pour $A > 0$, on aura

$$a^n \leq A \Longleftrightarrow (1+b)^n \leq A$$

Or $b > 0$, donc d'après la formule du binôme, on a $(1+b)^n \geq nb$.
Ainsi, pour que $a^n \geq A$, il suffit que $nb \geq A$, donc si on pose $N = \left[\dfrac{A}{b}\right] + 1$, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$$

2.2.3 Opération sur les limites

Addition

La somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ w_n = u_n + v_n$$

Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors la somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n}$$

Preuve

Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et montrons que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
Pour cela, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors pour $n \geq N$, on aura

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \varepsilon$$

Produit

Le produit de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ w_n = u_n v_n$$

Proposition

i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, avec $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Alors le produit $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty} u_nv_n = 0$$

ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Alors le produit $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(u_nv_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty} v_n}$$

Preuve

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour $n \geq N$, on a $|v_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$. Donc pour $n \geq N$, on a $|u_nv_n| = M|u_n| \leq \varepsilon$.

ii) Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et montrons que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.

On a $u_nv_n - ll' = u_nv_n - lv_n + lv_n - ll' = v_n(u_n - l) + l(v_n - l')$.

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et comme $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - l) = 0$, alors d'après i), on a $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(u_n - l) = 0$.
D'après i), on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} l(v_n - l') = 0$.
Ainsi, on déduit de ce qui précède, que $(u_nv_n - ll')_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty}(u_nv_n - ll') = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n = ll'$.

Proposition

i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et tel que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}}$$

ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et tel que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$. Alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}}$$

Preuve

i) Montrons d'abord que $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, avec $l \neq 0$, donc pour $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \frac{|l|}{2}$$

Comme $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow ||u_n| - |l|| \leq \frac{|l|}{2}$$

Par suite on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \frac{|l|}{2} \leq |u_n| \leq \frac{3|l|}{2}$$

Soit $M = \max\left(\frac{1}{|u_0|}, \frac{1}{|u_1|}, \dots, \frac{1}{u_{N-1}}, \frac{2}{|l|}\right)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{1}{u_n}\right| \leq M$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq M|l|\varepsilon$$

Donc pour $n \geq N$, on aura

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} \leq \frac{|u_n - l|}{M|l|} \leq \varepsilon$$

ii) D'après i), la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et comme $\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n}$, alors d'après la proposition précédente, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} u_n \frac{1}{v_n} = \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}$$

Multiplcation par un scalaire

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la suite $\lambda \cdot u$ par

$$\lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Proposition

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n}$$

Preuve

Supposons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors deux cas sont possibles :

Si $\lambda = 0$, alors la propriètè est trivial.

Si $\lambda \neq 0$, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|l|}$$

Donc pour $n \geq N$, on aura

$$|\lambda u_n - \lambda l| = |l||u_n - l| \leq \varepsilon$$

2.2.4 Lien entre suites réelles et suites complexes

Proposition

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, telle pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$, où x_n est la partie réelle de z_n et y_n est la partie imaginaire de z_n. Alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si et seulement si, sa partie réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa partie imaginaire $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. De plus, on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n}$$

Preuve

$(\Longrightarrow)$ Supposons que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l, avec $l = l_1 + il_2$.

Montrons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers l_1 et l_2.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |z_n - l| \leq \varepsilon$$

Or, on sait que $|x_n - l_1| \leq |z_n - l|$ et $|y_n - l_2| \leq |w_n - l|$, donc pour $n \geq N$ on a

$$|x_n - l_1| \leq \varepsilon \ \text{ et } \ |y_n - l_2| \leq \varepsilon$$

$(\Longleftarrow)$ Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, donc d'après la proposition précédente, $(iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} (iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n$$

2.2.5 Ordre de $\mathbb{R}$ et suite réelles

La proposition suivante exprime que la limite d'une suite réelle est compatible avec l'ordre du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Proposition

soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Preuve

Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, $l' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et supposons par absurde que $l > l'$, donc pour $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \ \text{ et } \ l' - \varepsilon < v_n < l' + \varepsilon)$$

Donc, en particulier, on aura $\dfrac{l + l'}{2} < u_N$ et $v_N < \dfrac{l + l'}{2}$, par suite $v_N < u_N$, ce qui est absurde, car par hypothèse on a $u_N \leq v_N$.

Le théorème suivant appelé théorème des gendarmes est très utiles en pratique pour établir la convergence d'une suite réelle.

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles, telles que

i) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n \leq u_n \leq w_n$,

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Preuve

Fixons $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow l - \varepsilon \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

Donc, si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow l - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$$

On en déduit donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Les exemples suivants illustres l'importance de ce théorème.

Exemples

1. Etudier de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{\sin n}{2}\right)^n$.
   On a $|\sin n| \leq 1$, donc
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \left(\frac{|\sin n|}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, alors d'après la propriété des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$
   On voit facilement que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$$
   On a $\dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}} = 1$.
   On a aussi $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.
   Ainsi, d'après la propriètè des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.
3. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$.
   En remplaçant tous les termes de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$ par $\dfrac{n}{n^2+1}$, puis par $\dfrac{n}{n^2+n}$, alors on aura
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$, alors d'après la propriété des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.
4. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$.
   En remlaçant les $n-2$ premiers termes de $1! + 2! + \cdots + (n-1)! + n!$ par $(n-2)!$, on aura
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ n! \leq n! u_n \leq (n-2)(n-2)! + (n-1)! + n! \leq n! + 2(n-1)!$$
   On en déduit donc que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1$, alors d'après la propriété des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

2.3 Critères de convergence

2.3.1 Suites monotones

Théorème de la convergence monotone

i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle **croissante et majorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle **décroissante et minorée**, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Preuve

i) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée.

Posons $l = \sup_{n\geq 0} u_n$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Soit $\varepsilon > 0$, alors par définition de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $l - \varepsilon < u_N \leq l$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et puisque $l = \sup_{n\geq 0} u_n$, alors pour $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq l$$

On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \Longrightarrow -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon$$

ii) Se démontre de la même manière.

Proposition

i) Toute suite croissante non majorée converge vers $+\infty$.

ii) Toute suite décroissante non minorée converge vers $-\infty$.

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée et soit $A > 0$.

Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq A$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N \geq A$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_n \geq u_N \geq A$$

Exemples

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

   En remarquant que pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k-1}$, alors pour $n \geq 2$, on a

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

   Or, on a pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k}$, donc $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} = 1 - \dfrac{1}{n}$, par suite on aura

   $$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

   On conclut donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq 2$.

2. Soit $a > 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   En effet, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1}$, avec $\dfrac{a}{n+1} \leq 1$ pour $n \geq [a]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0 et par suite elle est convergente.

3. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

   $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

   Montrons d'abord, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} < u_n$.

   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$, donc $\sqrt{2} < u_0$.

   Supposons que $\sqrt{2} < u_n$ et montrons que $\sqrt{2} < u_{n+1}$. Pour cela, on a

   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{2})^2$$

   Comme $u_n - \sqrt{2} > 0$, alors $u_{n+1} - \sqrt{2} > 0$. D'où le résultat.

   Montrons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Pour cela, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

   Comme $\sqrt{2} < u_n$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

   Nous avons donc établi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, donc d'après le théorème précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.

   On a $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, donc en passant à la limite, on aura $l = \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{2}{l}\right)$.

   On en déduit donc que $l^2 = 2$, et comme $l \geq \sqrt{2}$, alors $l = \sqrt{2}$.

2.3.2 Suites adjacentes

Définition

Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes, si

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemples

Les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$ sont adjacentes.

En effet, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On a aussi $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2n!}$,

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors

i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l et on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$$

Preuve

i) Supposons, par absurde, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N > v_N$, donc $u_N - v_N > 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, avec $n > N$, tel que

$$u_n - v_n < u_N - v_N$$

Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $u_n \geq u_N$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, donc $v_n \leq v_N$, ainsi on aura $u_N - v_N \leq u_n - v_n$, ce qui est absurde.

ii) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq v_0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

On a $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exemples

Pour tout nombre réel x, soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{[10^n x]}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{[10^n x]+1}{10^n}$$

Alors

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{[10^n x]}{10^n} \leq x < \dfrac{[10^n x]+1}{10^n}$.

En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} [10^n x] \leq 10^n x &\Longrightarrow 10[10^n x] \leq 10^{n+1} x \\ &\Longrightarrow 10[10^n x] \leq [10^{n+1} x] \\ &\Longrightarrow \frac{[10^n x]}{10^n} \leq \frac{[10^{n+1} x]}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier, $a_n \leq a_{n+1}$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a aussi

$$\begin{aligned} 10^n x < [10^n x] + 1 &\Longrightarrow 10^{n+1} x < 10[10^n x] + 10 \\ &\Longrightarrow [10^{n+1} x] < 10[10^n x] + 10 \\ &\Longrightarrow [10^{n+1} x] + 1 \leq 10[10^n x] + 10 \\ &\Longrightarrow \frac{[10^{n+1} x]+1}{10^{n+1}} \leq \frac{[10^n x]+1}{10^n} \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier, $b_{n+1} \leq b_n$, donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On a $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Nous avons donc établi que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, par suite, elles convergent vers la même limite. Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} [10^n x] \leq 10^n < [10^n] + 1 &\Longrightarrow \frac{[10^n]}{10^n} \leq x < \frac{[10^n]+1}{10^n} \\ &\Longrightarrow a_n \leq x < b_n \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \lim_{n\to\infty} b_n \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

Les nombres rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès.

Exemples

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ les deux suites définies par récurrence de la manière suivante :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } a_{n+1} = \frac{2}{b_{n+1}}$$

Montrons que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites adjacentes.
Pour cela, montrons d'abord, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $b_1 = \frac{3}{2}$ et $a_1 = \frac{4}{3}$, donc $0 < a_0 < a_1 < b_1 < b_0$.
Supposons que $0 < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ et montrons que

$$0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

On a $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} < \dfrac{b_n + b_n}{2}$, donc $b_{n+1} < b_n$.
On a $a_{n+1} = \dfrac{2}{b_{n+1}}$ et $b_{n+1} < b_n$, donc $a_{n+1} > \dfrac{2}{b_n}$, par suite $a_{n+1} > a_n$.
On a aussi

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2}{b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{4}{a_n + b_n} && (2.1)\\
&= \frac{(a_n + b_n)^2 - 8}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} \quad (\text{car } a_n b_n = 2) && (2.2)\\
&= \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} && (2.3)
\end{aligned}$$

donc $b_{n+1} - a_{n+1} > 0$.
On en déduit donc que $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$.
Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.
Pour cela, comme $a_0 = 1$, et $a_n \geq a_0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 1$ et comme $b_n > a_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 1$, par suite, on aura $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n > 2$, donc d'après (2.3), on a $b_{n+1} - a_{n+1} < \dfrac{(b_n - a_n)^2}{4}$.
On a aussi $b_n - a_n < b_0 - a_0$, avec $b_0 - a_0 = 1$, donc $b_n - a_n < 1$, par suite on aura

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{(b_n - a_n)^2}{4} < \frac{b_n - a_n}{4}$$

Donc, par récurrence, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n < \frac{b_0 - a_0}{4^n} = \frac{1}{4^n}$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ et que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite l.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n b_n = 2$, donc $l^2 = 2$ et comme $l > 0$, alors $l = \sqrt{2}$.

2.3.3 Suites de Cauchy

Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, réel ou complexe, est dite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \ \text{ et } \ m \geq N) \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Remarques

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, si et seulement si, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et il existe $m \in \mathbb{N}$, avec $n \geq N$ et $m \geq N$, tel que $|u_n - u_m| \geq \varepsilon$.

Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy réel ou complexe.
Fixons $\varepsilon > 0$, par exemple $\varepsilon = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \ \text{ et } \ m \geq N) \Longrightarrow |u_n - u_m| \leq 1$$

Donc pour $m = N$, on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - u_N| \leq 1$$

Comme $|u_n| - |u_N| \leq ||u_n| - |u_N|| \leq |u_n - u_N|$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq |u_N| + 1$$

On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Remarques

La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie, c'est à dire, une suite bornée n'est pas toujours de Cauchy, comme le montre l'exemple suivant :
la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy.
En effet, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} - u_{2n+1} = 2$, donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était de Cauchy, alors pour n assez grand, on aura $u_{2n} - u_{2n+1} \leq 1$, ce qui est absurde.

Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve

Exercice

Théorème

Toute suite de Cauchy est convergente.

Preuve

Supposons d'abord que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de Cauchy et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Pour cela, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons l'ensemble $A_n = \{u_k \ : \ k \geq n\}$.

Alors il est trivial que A_n est non vide et comme toute suite de Cauchy est bornée, alors A_n est borné, donc A_n possède une borne inférieure, qu'on note a_n, et une borne supérieure, qu'on note b_n.

Pour conclure, nous allons montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subseteq A_n$, donc $a_{n+1} \leq a_n$ et $b_n \leq b_{n+1}$, par suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $|u_p - u_q| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

D'autre part, comme $a_n = \inf(A_n)$ et $b_n = \sup(A_n)$, alors pour $n \geq N$, il existe $p \geq n$, tel que

$a_n \leq u_p < a_n + \dfrac{\varepsilon}{3}$ et il existe $q \geq n$, tel que $b_n - \dfrac{\varepsilon}{3} < u_q \leq b_n$.

Ainsi, on aura

$$|b_n - a_n| \leq |b_n - u_q| + |u_q - u_p| + |u_p - q_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

On déduit de ce qui précède que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite l.

Or on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$, donc d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

Si maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, avec $u_n = a_n + ib_n$, alors les inégalités

$$|a_n - a_m| \leq |u_n - u_m| \; et \; |b_n - b_m| \leq |u_n - u_m|$$

montrent que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, donc d'après ce qui précède, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2.4 Sous-suites - Valeurs d'adérence - Théorème de Bolzano-Weierstrass

2.4.1 Sous-suite ou suite extraite

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une sous-suite ou une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$, s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

Exemples

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, alors les suites $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}, \quad w_n = u_{2n+1}\ \ et\ \ x_n = u_{3n}$$

sont des suites extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Lemme

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq \varphi(n)$$

Preuve

On procède par récurrence sur n, avec $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $0 \leq \varphi(0)$.
Supposons que $n \leq \varphi(n)$ et montrons que $n+1 \leq \varphi(n+1)$.
Comme φ est strictement croissante, alors $n < \varphi(n+1)$, donc $n+1 \leq \varphi(n+1)$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\geq 0}$.

Preuve

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$, avec $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, et soit $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

φ est strictement croissante, donc $n \leq \varphi(n)$, donc pour $n \geq N$, on aura

$$|v_n - l| = |u_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon \quad (\text{car}\ \ \varphi(n) \leq N)$$

Remarques

Si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite convergente, alors en général $(u_n)_{n\geq 0}$ peut ne pas être convergente, comme le montre l'exemple suivant :
$u_n = (-1)^n$ est une suite divergente, tandis que la sous-suite $u_{2n} = 1$ converge vers 1.

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite, telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite l. Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Preuve

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = l$ et montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$$

Soit $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, alors pour $n \geq N$, deux cas sont possibles :
Si n est pair, avec $n = 2p$, alors $p \geq N_1$, donc $|u_{2p} - l| \leq \varepsilon$, par suite $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
Si n est impair, avec $n = 2p+1$, alors $p \geq N_2$, donc $|u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$ et ainsi $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite, telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
(Attention : ici on ne suppose pas que $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite).

2.4.2 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. On dit que $l \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, si $(u_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite qui converge vers l.

Exemples

1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.
En effet, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = -1$.

Remarques

Une suite peut avoir une infinité de valeurs d'adhérence. Par exemple, on montre (voir exercices) que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = \sin n$ est égal à l'intervalle $[-1, 1]$.

Théorème

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. Alors $l \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq N$, tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Preuve

($\Longrightarrow$) Supposons que $l \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq N$, tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, donc par définition, il existe une sous-suite $(v_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers l, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On a $\varepsilon > 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq N \Longrightarrow |u_{\varphi(k)} - l| \leq \varepsilon$$

Soit $n = \varphi(\max(N, N'))$, puisque φ est strictement croissante, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$, donc $n \geq \max(N, N') \geq N$, et comme $\max(N, N') \geq N'$, alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$, tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Montrons qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers l.

Pour cela, on procède par récurrence de la manière suivante :

Pour $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe n_0, tel que $|u_{n_0} - l| \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et $N = n_0 + 1$, il existe n_1, tel que $|u_{n_1} - l| \leq \varepsilon$.

Ainsi, par récurrence, on suppose que pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, n_k est construit, tel que $|u_{n_k} - l| \leq \varepsilon$, donc pour obtenir n_{k+1}, on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ et $N = n_k + 1$, donc, par hypothèse, il existe $n_{k+1} \geq N$, tel que $|u_{n_{k+1}} - l| \leq \varepsilon$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(k) = n_k$, alors $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, donc $(u_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(k)} - l| \leq \frac{1}{2^k}$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = l$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, si et seulement si, $(u_n)_{n\geq 0}$ possède une seule valeur d'adhérence.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée, telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Solution

Soit A l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, qlors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, A est non vide.
Si A est réduit à un seul point, alors A est un intervalle.
Si A n'est pas réduit à un seul point, soient $l_1 \in A$ et $l_2 \in A$, avec $l_1 < l_2$.
Montrons que $]l_1, l_2[\subseteq A$. Pour cela, pour $x \in]l_1, l_2[$, pour $\varepsilon > 0$ et pour $N \in \mathbb{N}$, on doit montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq N$, tel que $|u_n - x| \leq \varepsilon$.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors il existe $n_0 \geq N$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

Comme l_1 est une valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ et comme $x - l_1 > 0$, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, avec $n_1 \geq n_0$, tel que $|u_{n_1} - l_1| \leq x - l_1$, donc $u_{n_1} < x$.
Comme n_2 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ et comme $l_2 - x > 0$, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, avec $n_2 \geq n_1$, tel que $|u_{n_2} - l_2| \leq l_2 - x$, donc $x < u_{n_2}$.
Soit $E = \{m \in \mathbb{N}\ :\ n_1 \leq m \leq n_2 \text{ et } u_m \leq x\}$, alors $E \neq \emptyset$, car $n_1 \in E$, donc E est une partie, non vide et majorée, de $\mathbb{N}$, par suite E possède un plus grand élément, qu'on note n. Comme $n \in E$, alors $u_n \leq x$ et comme $n + 1 \notin E$, alors $x < u_{n+1}$.
Or on a $n \geq n_1 \geq n_0$, donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$, par suite $|u_n - x| \leq \varepsilon$, avec $n \geq n_0 \geq N$.

2.4.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Lemme

Soit $([a_n, b_n])_{n\geq 0}$ une suite d'intervalles emboités, tel que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors il existe un unique $l \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ l \in [a_n, b_n]$$

Preuve

$\mathbb{R}$ possède la propriété des intervalles emboités, donc il existe $l \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ l \in [a_n, b_n]$$

Montrons que l est unique. Pour cela, soit $l' \in \mathbb{R}$ vérifiant la même chose que l, alors on aura

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |l - l'| \leq b_n - a_n$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors $l = l'$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée. Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ possède au moins une sous-suite convergente.

Preuve

Pour construire une sous-suite convergente de $(u_n)_{n\geq 0}$, nous allons utiliser ce qu'on appelle le procédé de la dichotomie qui consiste à subdiviser un intervalle fermé donné afin d'obtenir une suite d'intervalles emboités.

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée, alors il existe deux réels a_0 et b_0, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq u_n \leq b_0$$

Appliquons donc le principe de la dichotomie à l'intervalle $[a_0, b_0]$. Pour cela, on considère les deux intervalles $[a_0, \dfrac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\dfrac{a_0+b_0}{2}, b_0]$, alors l'un au moins de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

On désigne par $[a_1, b_1]$ celui des deux intervalles qui contient une infinité de termes.

Considérons de nouveaux les deux intervalles $[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}]$ et $[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, alors l'un au moins de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Notons $[a_2, b_2]$ celui qui contient une infinité de termes et considérons les deux intervalles $[a_2, \dfrac{a_2+b_2}{2}]$ et $[\dfrac{a_2+b_2}{2}, b_2]$, alors l'un au moins de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on note cet intervalle $[a_3, b_3]$.

Ainsi, par récurrence, on construit une suite décroissante d'intervalles emboités $([a_n, b_n])_{n\geq 0}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n = \frac{a_0 - b_0}{2^n}$$

et tel que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Pour $k = 0$, on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} \in [a_0, b_0]$.

Pour $k = 1$, comme $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes, alors on peut choisir $n_1 \in \mathbb{N}$, avec $n_1 > n_0$, tel que $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

Pour $k = 2$, comme $[a_2, b_2]$ contient une infinité de termes, alors on peut choisir $n_2 \in \mathbb{N}$, avec $n_2 > n_1$, tel que $u_{n_2} \in [a_2, b_2]$.

Ainsi, par récurrence, si on suppose que n_k est construit, tel que $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$.

Comme $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de termes, on peut choisir $n_{k+1} > n_k$, tel que $u_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons $\varphi(k) = n_k$, alors $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application croissante, donc $(u_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Puisque $\mathbb{R}$ vérifie la propriété des intervalles emboités et puisque $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, alors il existe un unique $l \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \geq 0$, $l \in [a_n, b_n]$.

Ainsi, on aura

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |u_{\varphi(k)} - l| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Donc, $u_{\varphi(k)_{k\geq 0}}$ est une suite convergente et on a $\lim\limits_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = l$.

2.5 Exercices

Exercice

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n.

a) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + n$.

b) $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 2$, $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$.

c) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2(n+2)u_{n+1} = 3(n+1)u_n$.

Exercice

Soit $(x_n)_{n\geq O}$ une suite réelle convergente vers l.
La suite $([x_n])_{n\geq 0}$ est-elle convergente ?

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer qu'il existe une permutation $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, telle que la suite $(u_{\sigma(n)})_{n\geq 0}$ est décroissante.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

Exercice

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$ et tel que $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$.
Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 1$.

Exercice

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, tels que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} = ab$$

Exercice

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sin((3+\sqrt{5})^n \pi)$, est convergente.

Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(n\alpha) \ \text{ et } \ v_n = \cos(n\alpha)$$

a) Montrer que si l'une des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ converge, alors l'autre converge aussi.

b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont divergentes.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) En déduire une démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = [a_n, b_n]$ et on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subseteq I_n$.
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ et que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = [\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n]$$

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$.
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$$

Exercice

Soient $a > 0$, $b > 0$, avec $a < b$, $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites réelles définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite l et que $l = \sqrt{ab}$.

Exercice

Soit x un nombre réel et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par u_0, u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \ \text{ et }\ w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. Etudier, suivant les valeurs de u_0 et u_1, la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite lorsqu'elle existe.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

1. Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut ne pas converger.
2. Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
3. Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
4. Montrer que les suites $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ sont convergentes.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\ u_{n+m} \leq u_n u_m$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\{\dfrac{u_n}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice

Soient α un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \alpha$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2(n^2+n+1)+nu_n}{(n+1)^2}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, bornée et déterminer sa limite l.
2. Trouver une relation simple entre $u_{n+1} - l$ et $u_n - l$.
3. En déduire la valeur de u_n en fonction de α et de n.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels éléments de $]0,1[$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} > \dfrac{1}{4}$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Montrer que
   i) Si $l < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
   ii) Si $l > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
   iii) Si $l = 1$ alors tout est possible.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
   a) Montrer que $\sqrt[n]{u_n}$ converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.
   b) Etudier la réciproque.
   c) Déterminer la limite des suites suivantes,

$$\sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^{n}},\quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},\quad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Exercice

Etudier la convergence des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},\quad u_n = \frac{n!}{n^n},\quad u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}],\quad u_n = n^{-1+(-1)^n}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k+1}},\quad u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$$

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$$

1. **a)** Exprimer u_n à l'aide de factoriels.

   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = (n+1)u_n^2$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et en déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite déléments de $\mathbb{Q}$ définie par

$$x_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \geq 0,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$$

Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et que $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Exercice

Soient $a>0$, $b>0$, avec $a<b$, $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites réelles définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite.

Exercice

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \ \text{ et } \ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

a) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$, où p est un nombre réel ≥ 2.

b) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

c) $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n$.

Exercice

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2}{u_n}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{2} < u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes et déterminer l, la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - l \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$.
7. Déterminer $p \in \mathbb{N}$, tel que $|u_p - l| \leq 10^{-3}$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = -\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ -2 < u_n < 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n + 2)$.
   a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.
   c) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Si la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge, on dit que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Césaro.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Césaro et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.
2. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque n'est pas toujours vraie.
3. Montrer que si $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone, alors la réciproque est vraie.

Exercice

Soient a et b deux nombres réels, tels que $0 < a \leq b$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = a + b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a + b + \frac{ab}{u_n}$$

1. On suppose que $a < b$.

   a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante minorée par b.

   b) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n - b}{u_n - a}$.

      i) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique.

      ii) Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n en fonction de a, b et n.

      iii) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

2. On suppose que $a = b$.

   a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   b) Calculer u_n en fonction de a et n et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice

1. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, telles que

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$;

   ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;

   iii) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

   Montrer que $A = \{u_n - v_m \ :\ (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Montrer que

   a) Soit $A = \{u_n - [u_n] \ :\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que A est dense dans $[0, 1]$.

   b) Soit $B = \{\sin u_n \ :\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que B est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par

$$u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n + 2(n^2 + n - 1)}{(n+1)^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq 2$ et en déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. **a)** Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer une relation entre $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$.

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice

1. **a)** Montrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n-1 \text{ radicaux})$$

   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \quad (n-1 \text{ radicaux})$$

2. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$, ($n$ radicaux).

Exercice

A chaque suite bornée $(u_n)_{n\geq 0}$, on associe les deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \inf_{m\geq n} u_m \quad \text{et} \quad y_n = \sup_{m\geq n} u_m$$

1. Montrer que

   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq u_n \leq y_n$.

   b) $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\geq 0}(\inf\limits_{m\geq n} u_m)$.

   Cette limite s'appelle la limite inférieure de $(u_n)_{n\geq 0}$ et se note $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

   b) $(y_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\geq 0}(\sup\limits_{m\geq n} u_m)$.

   Cette limite s'appelle la limite supérieure de $(u_n)_{n\geq 0}$ et se note $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, si et seulement si, $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

3. **a)** Montrer que $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

   b) Montrer que si l est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, alors $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n \leq l \leq \limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$.

4. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites bornées.

   a) Montrer que

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} u_n + \liminf_{n\longrightarrow\infty} v_n \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}(u_n+v_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty}(u_n+v_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} u_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} v_n$$

   Donner un exemple où les inégalités ci-dessus sont strictes.

   b) Montrer que

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\longrightarrow\infty} u_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\longrightarrow\infty}(-u_n) = -\limsup_{n\longrightarrow\infty} v_n$$

   c) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} u_n \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} v_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n\longrightarrow\infty} u_n \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} v_n$$

Exercice

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites à termes strictement positifs, telles que $(u_n)_{n\geq 0}$ soit croissante, $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

Exercice

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Montrer que qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = u_N$.

Exercice

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$
2. Soient a et b deux nombres réels positifs et soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par

$$u_0 = a,\ \ v_0 = b,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \ \text{ et } \ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

a) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq v_n$.

b) Soit $w_n = u_n - v_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} w_n$.

c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

d) En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite.
La limite commune de ces deux suites s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b, on la note $\mathrm{M}(a,b)$.

e) Déterminer $M(a,a)$ et $M(0,b)$.

g) Montrer que

i) $\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{M}(b,a)$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(a,b)$.

iii) $\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{M}\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

iv) $\sqrt{ab} \leq \mathrm{M}(a,b) \leq \dfrac{a+b}{2}$.

On montre que $\mathrm{M}(a,b) = \dfrac{\pi}{I(a,b)}$, avec

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$$

3 Propriètés topologiques de la droite rélle

3.1 Ouvert - Fermé - Voisinage

Définition

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, si A vérifie l'une des deux propriètés suivantes :

i) $A = \emptyset$, ou

ii) Pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$.

On dit que A est un fermé de $\mathbb{R}$, si le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus A$, est un ouvert.

Exemples

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}$.
2. Si a et b sont deux nombres réels, alors $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   En effet, soit $x \in]a, b[$, alors $x - a > 0$ et $b - x > 0$. Donc, si on choisit ε, tel que
   $$0 < \varepsilon < \min(x-a, b-x)$$
   alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq]a, b[$.
   Si $x \in]a, +\infty[$ et si on choisit ε, tel que $0 < \varepsilon < x - a$, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq]a, +\infty[$.
   Si $x \in]-\infty, a[$ et si on choisit ε, tel que $0 < \varepsilon < a - x$, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq]-\infty, a[$.

Proposition

i) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

ii) La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Preuve

i) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $m \geq 2$, des ouverts de $\mathbb{R}$.

Montrons que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_m$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_m$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, on a $x \in A_i$.

Comme A_i est un ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$, tel que $]x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i[\subseteq A_i$.

Soit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_m$.

ii) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts.

Montrons que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors il existe $i \in I$, tel que $x \in A_i$. Puisque A_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A_i$ et comme $A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Corollaire

i) La réunion d'un nombre fini de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

ii) L'intersection d'une famille quelconque de fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve

i) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$, des fermés de $\mathbb{R}$, alors on sait que

$$\mathbb{R} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cap (\mathbb{R} \setminus A_2) \cap \ldots \cap (\mathbb{R} \setminus A_m)$$

D'après la proposition précédente, $(\mathbb{R} \setminus A_1) \cap (\mathbb{R} \setminus A_2) \cap \ldots \cap (\mathbb{R} \setminus A_m)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

ii) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$, alors on sait que

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i)$$

D'après la proposition précédente, $\bigcup\limits_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Soient a et b deux nombres réels, alors $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, on a $[a, b] = \mathbb{R} \setminus](-\infty, a[\cup]b, +\infty[)$ donc $[a, b]$ est le complémentaire d'un ouvert et par suite, $[a, b]$ est fermé.
   On a aussi $[a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, a[$ et $]-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus]a, +\infty[$,
   donc $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le singleton $\{x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   En effet, on a $\{x\} =]-\infty, x] \cap [x, +\infty[$, donc $\{x\}$ est l'intersection de deux fermés et par suite, $\{x\}$ est un fermé.
3. Toute partie finie de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   En effet, soit A une partie finie de $\mathbb{R}$.
   Si $A = \emptyset$, alors A est fermé.
   Si $A \neq \emptyset$, avec $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, alors $A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$, donc A est une réunion d'un nombke fini de fermés et par suite, A est un fermé.
4. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, on a $\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$.

Remarques

1. Une intersection d'une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$, n'est pas toujours un ouvert de $\mathbb{R}$, comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}]-\varepsilon, \varepsilon[= \{0\}$$

2. Une réunion d'une famille quelconque de fermés de $\mathbb{R}$, n'est pas toujours un fermé de $\mathbb{R}$, comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} [\varepsilon, 1] =]0, 1]$$

Définition

Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

i) On dit que V est un voisinage de x, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$.

ii) On dit que V est un voisinage de $+\infty$, s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $]a, +\infty[\subseteq V$.

iii) On dit que V est un voisinage de $-\infty$, s'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $]-\infty, a[\subseteq V$.

Remarques

1. Si A est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in A$, A est un voisinage de x.
2. Si V_1 et V_2 sont deux voisinages de x, alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x.
3. Si V est un voisinage de x et si $V \subseteq W$, alors W est aussi un voisinage de x.

3.2 Adhérence - Intérieur - Fermeture

3.2.1 Adhérence

Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

i) On dit que x est un point d'adhérence de A, si pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

ii) On dit que x est un point d'accumulation de A, si pour tout voisinage V de x, on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

iii) On dit que x est un point isolé de A, si $x \in A$ et s'il existe un voisinage V de x, tel que
$V \cap A = \{x\}$.

Remarques

1. Si $x \in A$, alors x est un point d'adhérence de A.
2. Si x est un point d'accumulation de A, alors x est un point d'adhérence de A.

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle adhérence de A, qu'on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points d'dhérence de A.

Remarques

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.
Alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$$

Proposition

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a

i) $A \subseteq \overline{A}$.

ii) $\overline{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.

Preuve

i) Trivial.

ii) Pour montrer que $\overline{A}$ est fermé, il suffit de montrer que $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ est ouvert.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.

$x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$, donc $x \notin \overline{A}$, donc par définition, il existe un voisinage V de x, tel que $V \cap A = \emptyset$.

V est un voisinage de x, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$.

On a aussi $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \overline{A} = \emptyset$, car si $a \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, alors $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de a, avec $V \cap A = \emptyset$, donc $a \notin \overline{A}$.

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \overline{A} = \emptyset$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.

Montrons, maintenant que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Pour cela, soit F un fermé de $\mathbb{R}$, tel que $A \subseteq F$, on doit donc montrer que $\overline{A} \subseteq F$.

Supposons, par absurde, qu'il existe $x \in \overline{A}$, tel que $x \notin F$, comme F est un fermé, alors $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \setminus F$.

Ainsi, on aura $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap F = \emptyset$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$, ce qui est absurde, car $x \in \overline{A}$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Corollaire

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors

$$A \text{ est fermé} \Longleftrightarrow \overline{A} = A$$

Preuve

($\Longrightarrow$) Supposons que A est fermé, puisque $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, alors $\overline{A} \subseteq A$ et puisque $A \subseteq \overline{A}$, alors $A = \overline{A}$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\overline{A} = A$, comme $\overline{A}$ est un fermé, alors A est un fermé.

Exemples

1. Soient a et b deux nombres réels, alors on a

$$\overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$$

On a aussi

$$\overline{]a,+\infty[} = [a,+\infty[\text{ et } \overline{]-\infty,a[} =]-\infty,a]$$

2. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ et tous les points de $\mathbb{Z}$ sont des points isolés.
En effet, $\mathbb{Z}$ est fermé, donc $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.
Si maintenant $n \in \mathbb{Z}$, alors on voit facilement que

$$\left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Z} = \{n\}$$

donc n est un point isolé.
On a aussi $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ et tous les points de $\mathbb{N}$ sont des points isolés.

Proposition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$, alors

i) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

ii) $x \in \overline{A}$, si et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Preuve

i) ($\Longrightarrow$) Supposons que $x \in \overline{A}$ et soit $\varepsilon > 0$, alors $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de x, donc $V \cap A \neq \emptyset$.

($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.
Soit V un voisinage de x, alors par définition, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$ et comme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$, alors $V \cap A \neq \emptyset$.

ii) ($\Longrightarrow$) Supposons que $x \in \overline{A}$ et montrons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de A, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.
$x \in \overline{A}$, donc d'après i), pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.
Donc, en particulier pour tout entier $n \geq 0$, il existe $a_n \in A$, tel que $a_n \in \left]x - \frac{1}{2^n}, x + \frac{1}{2^n}\right[$. Ainsi, on obtient une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - x| \leq \frac{1}{2^n}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

($\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de A, telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Montrons que $x \in \overline{A}$. Pour cela, soit V un voisinage de x, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$. Or, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow a_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$$

On en déduit donc que pour $n \geq N$, $a_n \in V$, donc $V \cap A \neq \emptyset$.

Théorème

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, si et seulement si, $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Preuve

($\Longrightarrow$) Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$ et montrons que $\overline{A} = \mathbb{R}$.

A est dense dans $\mathbb{R}$, donc par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, avec $x < y$, il existe $a \in A$, tel que $x < a < y$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$, alors on a $x-\varepsilon < x+\varepsilon$, donc d'après la densité de A dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in A$, tel que $x-\varepsilon < a < x+\varepsilon$, donc $x \in \overline{A}$, par suite $\overline{A} = \mathbb{R}$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\overline{A} = \mathbb{R}$ et montrons que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, avec $x < y$. Montrons qu'il existe $a \in A$, tel que $x < a < y$. Puisque $]x, y[$ est un ouvert et $\frac{x+y}{2} \in]x, y[$, alors $]x, y[$ est un voisinage de $\frac{x+y}{2}$. Comme $\overline{A} = \mathbb{R}$, alors $\frac{x+y}{2} \in \overline{A}$, donc $]x, y[\cap A \neq \emptyset$.

3.2.2 Intérieur

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $x \in A$.

On dit que x est un point intérieur de A, s'il existe un voisinage V, tel que $V \subseteq A$.

On note $\mathring{A}$ l'ensemble de tous les points intérieurs de A.

Remarques

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $x \in A$, alors on a

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists\varepsilon > 0 :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$$

Proposition

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $\mathring{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert inclus dans A.

Preuve

Soit $x \in \mathring{A}$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathring{A}$

$x \in \mathring{A}$, donc d'après la remarque précédente, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$.

Comme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un ouvert, alors pour tout $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de y contenu dans A, par suite $y \in \mathring{A}$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, avec $O \subseteq A$. Montrons que $O \subseteq \mathring{A}$.

Soit $x \in O$, puisque O est un ouvert, alors il existe un voisinage V de x, tel que $V \subseteq O$ et comme $O \subseteq A$, alors $V \subseteq A$, donc $x \in \mathring{A}$.

Exemples

1. Si $I = [a, b]$, $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$, alors $\mathring{I} =]a, b[$.
2. $\mathring{\mathbb{N}} = \mathring{\mathbb{Z}} = \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

3.2.3 Frontière

Définition

On définit la frontière d'une partie A de $\mathbb{R}$, par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarques

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, la frontière de A est un fermé de $\mathbb{R}$.

En effet, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathring{A})$, donc $\mathrm{Fr}(A)$ est l'intersection de deux fermés et par suite $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé.

Exemples

1. Si $I = [a, b]$, $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$, alors $\mathrm{Fr}(I) = \{a, b\}$.
2. Si $I =]a, +\infty[$ ou $I =]-\infty, a[$, alors $\mathrm{Fr}(I) = \{a\}$.
3. $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

3.3 Exercices

Exercice

Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont ouvertes ou fermées puis déterminer l'adérence, l'intérieur et la frontière de ces parties :

i) $[3, +\infty[\cup [1, 2]$.

ii) $\{2\} \cup]3, +\infty[$.

iii) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

iv) $\{0\} \cup \{\frac{1}{2^n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

v) $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\operatorname{acc}(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de A.

1. Montrer que $\operatorname{acc}(A)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\operatorname{acc}(A) \cup A$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que

a) $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ et $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ et trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

c) $A \overset{\circ}{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq A \overset{\circ}{\cup} B$ et trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

d) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. A-t-on toujours $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$?

Exercice

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$x \in \operatorname{Fr}(A) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset \ \text{ et } \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$$
2. $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(\mathbb{R} \setminus A)$.
3. A fermé $\Longleftrightarrow \operatorname{Fr}(A) \subseteq A$.
4. A ouvert $\Longleftrightarrow \operatorname{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. $\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B) = \emptyset \Longrightarrow A \overset{\circ}{\cup} B = \mathring{A} \cup \mathring{B}$
6. **a)** $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.

   b) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Longrightarrow \operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$

Exercice

Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a
$$\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{a \in A} \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[$$

Exercice

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de nombres rationnels, tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x_{n+1} \ \text{ et } \ x - \frac{1}{n+1} \leq x_n \leq x$$
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite croissante de nombres rationnels et que tout nombre réel est limite d'une suite décroissante de nombres rationnels.

Exercice

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, tel que

i) $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \ :]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq A$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \ (\forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Longrightarrow x \in A$.

Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Exercice

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles, telles que

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$$

1. Montrer que $A = \{u_n - v_m \ : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $B = \{u_n - [u_n] \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.
   (On pourra utiliser la question précédente, avec $v_n = n$).
3. Montrer que $E = \{\sin(u_n) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.
   (On pourra utiliser la question 1, avec $v_n = 2n\pi$).

Exercice

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, telles que $\overline{A}\cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ et telles que $A \cup B$ est fermé. Montrer que A et B sont fermés.

Exercice

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ ayant un seul point d'accumulation a.

a) Montrer que A est dénombrable.

b) On pose $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Exercice

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on pose

$$\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}} \ \text{ et } \ \beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$$

1. Montrer que les applications α et β sont croissantes par rapport à l'inclusion de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. **a)** Montrer que si A est ouvert alors $A \subseteq \alpha(A)$ et si A est fermé alors $\beta(A) \subseteq A$.

   b) En déduire que $\alpha \circ \alpha = \alpha$ et $\beta \circ \beta = \beta$.
3. Construire une partie A de $\mathbb{R}$, telle que les cinq ensembles A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ soient deux à deux distincts.

4 Fonctions numériques

4.1 Limite d'une fonction

4.1.1 Définition et propriètés de la limite d'une fonction

Définition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in \overline{I}$.

i) Soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

ii) On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0, si pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A$$

iii) On dit que f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0, si pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

Remarques

En utilisant la notion de voisinage, la définition précédente peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $x_0 \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l lorsque x tend vers x_0 et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si pour tout voisinage W de l, il existe un voisinage V de x_0, tel que $f(V \cap I) \subseteq W$.

En effet, supposons que la première définition est vérifiée.

Soit W un voisinage de l, alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subseteq W$. La première définition est vérifiée, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Donc, si on pose $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, alors on voit que $f(V \cap I) \subseteq W$.

Réciproquement, supposons que la deuxième définition est vérifiée.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $W =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, alors il existe un voisinage V de x_0, tel que $f(V \cap I) \subseteq W$.

Comme V est un voisinage de x_0, alors il existe $\alpha > 0$, tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq V$ et ainsi on aura

$$\forall x \in I, \ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Unicité de la limite

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in \overline{I}$. Si f possède une limite l lorsque x tend vers x_0, alors l est unique.

Preuve

Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l'$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ et il existe $\beta > 0$, tels que

$$\forall x \in I, \ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ |x - x_0| \leq \beta \Longrightarrow |f(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, alors on aura

$$\forall x \in I, \ |x - x_0| \leq \gamma \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ |f(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, on aura

$$\forall \varepsilon > 0, \ |l - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On en déduit donc que $l = l'$.

4.1.2 Extention de la notion de limite

Cas où I n'est pas majoré

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On suppose que I n'est pas majoré.

i) Si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que

$$\forall x \in I, \ x \geq A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

ii) On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que

$$\forall x \in I, \ x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$$

iii) On dit que f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que

$$\forall x \in I, \ x \geq B \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

Cas où I n'est pas minoré

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On suppose que I n'est pas minoré.

i) Si $l \in \mathbb{R}$, on dit que f a pour limite l lorsque x tend vers $-\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \leq -A \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

ii) Si I est non minoré, on dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \leq -B \Longrightarrow f(x) \geq A$$

iii) On dit que f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \leq -B \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

Remarques

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors l est unique.
2. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, alors l est unique.

4.1.3 Opérations sur les limites

Somme

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I. Alors la fonction $f + g$ est définie par

$$\forall x \in I,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Proposition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + l'$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |(f+g)(x) - (l+l')| \leq \varepsilon$$

On a $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \beta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a aussi $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \gamma \Longrightarrow |g(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\alpha = \min(\beta, \gamma)$, alors on a

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |(f+g)(x) - (l+l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Multiplication par un scalaire

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction λf est définie par

$$\forall x \in I,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Proposition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |(\lambda f)(x) - \lambda l| \leq \varepsilon$$

On a $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

Donc pour $x \in I$, avec $|x - x_0| \leq \alpha$, on aura

$$|(\lambda f)(x) - \lambda l| = |\lambda||f(x) - l|$$

produit

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I, alors la fonction fg est définie par :

$$\forall x \in I,\ (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Lemme

Soient I une partie bornée de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors il existe $\alpha > 0$ et il existe $M > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x)| \leq M$$

Preuve

Fixons un $\varepsilon > 0$, par exemple $\varepsilon = 1$, alors il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq 1$$

Comme $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$, alors pour tout $x \in I$, avec $|x - x_0| \leq \alpha$, on a

$$|f(x)| \leq |l| + 1$$

Donc il suffit de prendre $M = 1 + |l|$.

Remarques

1. Le lemme précédent, se traduit par :

   Si I est borné et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ possède une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0, avec $x_0 \in \overline{I}$, alors f est borné sur un voisinage de x_0.
2. Si I n'est pas majoré et si f possède une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors il existe $A > 0$ et il existe $M > 0$, tel que

   $$\forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x)| \leq M$$

   Dans ce cas, on dit que f est bornée sur un voisinage de $+\infty$.
3. Si I n'est pas minoré et si f possède une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$, alors il existe $A > 0$ et il existe $M > 0$, tel que

   $$\forall x \in I,\ x \leq -A \implies |f(x)| \leq M$$

   Dans ce cas, on dit que f est bornée sur un voisinage de $-\infty$.

Proposition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur I, telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$. Alors

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = ll'}$$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |(fg)(x) - ll'| \leq \varepsilon$$

On a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, donc, d'après le lemme précédent, il existe $M > 0$ et il existe $\alpha_1 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_1 \Longrightarrow |f(x)| \leq M$$

Il existe aussi $\alpha_2 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_2 \Longrightarrow |f(x) - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2|l|}$$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, donc il existe α_3, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_3 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors pour tout $x \in I$, tel que $|x - x_0| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - ll'| &= |f(x)g(x) - ll'| \\
&= |f(x)g(x) - lg(x) + lg(x) - ll'| \\
&\leq |g(x)||f(x) - l| + |l||g(x) - l'| \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + |l|\frac{\varepsilon}{2|l|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Inverse et quotient

Lemme

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, avec $l \neq 0$. Alors il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \Longrightarrow f(x) \neq 0$$

Preuve

On a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $l \neq 0$, donc pour $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \frac{|l|}{2}$$

Comme $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$, alors on aura

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha &\Longrightarrow ||f(x)| - |l|| \leq \frac{|l|}{2} \\
&\Longrightarrow -\frac{|l|}{2} \leq |f(x)| - |l| \leq \frac{|l|}{2} \\
&\Longrightarrow \frac{|l|}{2} \leq |f(x)| \leq \frac{3|l|}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in I,\ x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \Longrightarrow f(x) \neq 0$.

Proposition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.
On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, avec $l \neq 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \frac{1}{l}}$$

Preuve

On a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, avec $l \neq 0$, donc d'après le lemme précédent, il existe α_1, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_1 \Longrightarrow f(x) \neq 0$$

D'après la démonstration précédente, il existe $m > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_1 \Longrightarrow |f(x)| \geq m$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\alpha_2 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha_2 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq m|l|\varepsilon$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors pour $x \in I$, avec $|x - x_0| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{l}\right| &= \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| \\
&= \frac{|f(x) - l|}{|f(x)||l|} \leq \frac{m|l|\varepsilon}{m|l|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

4.1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers l.

Preuve

($\Longrightarrow$) Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de I qui converge vers a.

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon$$

On a $\varepsilon > 0$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On a $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| \leq \alpha$$

Donc, pour $n \geq N$, on a $|x_n - a| \leq \alpha$, donc $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$.

($\Longleftarrow$) Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $f(x_n)$ converge vers l.

Montrons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Pour cela, supposons par absurde que $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in I$, avec $|f(x_\alpha) - l| > \varepsilon$. Donc en particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si on prend $\alpha = \dfrac{1}{2^n}$, alors il existe $x_n \in I$, tel que

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - l| > \epsilon$$

Donc, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq l$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

4.1.5 Limite à droite - Limite à gauche

Définition

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $x_0 \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.

i) On dit que f admet l comme limite à droite au point x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

ii) On dit que f admet l comme limite à gauche au point x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarques

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.
Réciproquement, Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existent, et si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Exemples

$f(x) = \mathrm{E}(x)$, alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{x \to m^+} f(x) = m$ et $\lim\limits_{x \to m^-} f(x) = m - 1$.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

4.1.6 Limite et ordre de $\mathbb{R}$

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie I non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

a) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, et il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ f(x) \geq 0$. Alors $l \geq 0$.

b) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$ et il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ f(x) \leq g(x)$. Alors $l_1 \leq l_2$.

c) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, avec $l > 0$. Alors il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ f(x) > 0$.

d) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ f(x) \leq g(x)$. Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

e) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ et il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ f(x) \leq g(x)$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Preuve

a) Supposons, par absurde, que $l < 0$ et soit $\varepsilon = -l$, alors $\varepsilon > 0$, donc il existe $\alpha_1 > 0$,tel que

$$\forall x \in I,\ |x-a| < \alpha_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Or f est positive au voisinage de a, donc il existe $\alpha_2 > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha_2 \Longrightarrow f(x) \geq 0$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, alors pour $x \in I$, tel que $|x-a| < \alpha$, on a

$$f(x) \geq 0 \text{ et } l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = -l$, donc on aura $f(x) \geq 0$ et $2l < f(x) < 0$. Ce qui est absurde.

b) Il suffit d'appliquer a) à la fonction $h(x) = g(x) - f(x)$.

c) Supposons que $l > 0$ et soit $\varepsilon = l$, alors il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \Longrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = l$, donc si on pose $V =]a-\alpha, a+\alpha[$, alors V est un voisinage de a et on a

$$\forall x \in V \cap I,\ 0 < f(x) < 2l$$

d) Exercice.

e) Exercice.

Remarques

Dans la proposition précédente, on peut remplacer l'expression :

Il existe un voisinage V de a, tel $\forall x \in V \cap I$, par :

Il existe $\alpha > 0$, tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$. Si $a \in \mathbb{R}$

Il existe $A > 0$, tel que $\forall x \in]A, +\infty[\cap I$. Si $a = +\infty$

Il existe $A < 0$, tel que $\forall x \in]-\infty, A[\cap I$. Si $a = -\infty$

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies sur une partie non vide I de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$, telles que

i) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.

ii) Il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Preuve

Montrons que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$, pour cela, soit $\varepsilon>0$, alors il existe $\alpha_1>0$, tels que

$$\forall x\in I,\ |x-a|\leq \alpha_1 \Longrightarrow |g(x)-l|\leq\varepsilon$$

et il exste $\alpha_2>0$, tel que

$$\forall x\in I,\ |x-a|\leq \alpha_2 \Longrightarrow |h(x)-l|\leq\varepsilon$$

Soit $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, alors pour $x\in I$, tel que $|x-a|\leq\alpha$, on aura

$$l-\varepsilon\leq g(x)\leq f(x)\leq h(x)\leq l+\varepsilon$$

Ainsi on voit que

$$\forall x\in I,\ |x-a|\leq \alpha \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$$

Remarques

1. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide I de $\mathbb{R}$, tel que I ne soit pas majoré. On suppose que

   i) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$.

   ii) Il existe $A>0$, tel que $\forall x\in I,\ x>A\Longrightarrow g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

   Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. (Exercice)

2. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide I de $\mathbb{R}$, tel que I ne soit pas minoré. On suppose que

   i) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=l$.

   ii) Il existe $A>0$, tel que $\forall x\in I,\ x<-A\Longrightarrow g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

   Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$. (Exercice)

3. Soient f et g deux fonctions définies sur une partie non vide I de $\mathbb{R}$ et $a\in\overline{I}$. On suppose que f est bornée au voisinage de a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.
   En effet, comme f est bornée au voisinage de a, alors il existe un voisinage V de a et il existe $M>0$, tels que $\forall x\in V\cap I,\ |f(x)|\leq M$.
   Donc on aura
   $$\forall x\in V\cap I,\ 0\leq|f(x)g(x)|\leq M|g(x)|$$
   avec $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a
   $$\lim_{x\to a}|f(x)g(x)|=0$$

4.1.7 Comparaison locale des fonctions

Fonction dominée par une autre fonction

Définition

Soient f et g deux fonctions définies définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, s'il existe une fonction b définie au voisinage de a, telle que

i) b soit bornée au voisinage de a.

ii) $f(x) = b(x)g(x)$ au voisinage de a.

Remarques

1. Si f est dominée par g au voisinage de a, alors il existe $M > 0$ et il existe un voisinage V de a, tel que

$$\forall x \in V, \ |f(x)| \leq M|g(x)|$$

En effet, soit b une fonction définie et bornée au voisinage de a, donc il existe un voisinage V_1 de a et il existe $M > 0$, tel que

$$\forall x \in V_1, \ |b(x)| \leq$$

Il existe aussi un voisinage V_2 de a, tel que $\forall x \in V_2, \ f(x) = b(x)g(x)$. Soit $V = V_1 \cap V_2$, alors on a

$$\forall x \in V, \ |f(x)| = |b(x)g(x)| = |b(x)||g(x)| \leq M|g(x)|$$

Si f est dominée par g au voisinage de a, alors il existe $M > 0$ et il existe un voisinage V de a, tel que

$$\forall x \in V, \ |f(x)| \leq M|g(x)|$$

En effet, soit b une fonction définie et bornée au voisinage de a, donc il existe un voisinage V_1 de a et il existe $M > 0$, tel que

$$\forall x \in V_1, \ |b(x)| \leq$$

Il existe aussi un voisinage V_2 de a, tel que $\forall x \in V_2, \ f(x) = b(x)g(x)$.
Soit $V = V_1 \cap V_2$, alors on a

$$\forall x \in V, \ |f(x)| = |b(x)g(x)| = |b(x)||g(x)| \leq M|g(x)|$$

Remarques

2. Si g est non nulle au voisinage de a, alors f est dominée par g, si et seulement si, $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
En effet, si on suppose que g est non nulle au voisinage de a et si f est dominée par g au voisinage de a, alors il existe un voisinage V de a et il existe une fonction b définie et bornée sur V, tel que $\forall x \in V,\ g(x) \neq 0$ et $f(x) = b(x)g(x)$. Donc $\forall x \in V,\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = b(x)$, par suite $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
Réciproquement, si $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a, alors il existe un voisinage V de a, tel que $\dfrac{f}{g}$ soit bornée sur V. Soit b la fonction définie sur V, par $b(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, alors b est bornée sur V et on a $\forall x \in V,\ f(x) = b(x)g(x)$.

Fonction négligeable devant une autre fonction

Définition

Soient f et g deux fonctions définies définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a, s'il existe une fonction α définie au voisinage de a, telle que

i) $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

ii) $f(x) = \alpha(x)g(x)$ au voisinage de a.

Remarques

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. (Exercice)

Notation de Landau

Soient f et g deux fonctions définies définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = \mathrm{O}_a(g(x))$.
Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$.

Exemples

1. $f(x) = \mathrm{O}_a(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a.
2. $f(x) = \mathrm{o}_a(1) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
3. Si $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$ alors $f(x) = \mathrm{O}_a(1)$.
4. Si g est non nulle sur un voisinage de 0 et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = \mathrm{O}_a(g(x))$.

4.1.8 Fonctions équivalentes

Définition

Soient f et g deux fonctions définies définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, et en écrit $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a ou $f(x) \sim_a g(x)$, s'il existe une fonction h définie au voisinage de a, telle que

i) $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$.

ii) $f(x) = h(x)g(x)$ au voisinage de a.

Remarques

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a, si et seulement si, $f(x) - g(x) = \mathrm{o}(g(x))$ au voisinage de a.
3. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$ au voisinage de a.

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinade de a et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

ii) Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinade de a, alors $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a.

Preuve

i) Soit h une fonction définie au voisinage de a, tel que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a, tel que $\forall x \in V,\ f(x) = h(x)g(x)$.

Donc on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (hg)(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

ii) Supposons, par exemple, que g est positive au voisinage de a, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\,,\ g(x) \geq 0$$

Soit h une fonction définie au voisinage de a, tel que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a, tel que $\forall x \in V,\ f(x) = h(x)g(x)$. Comme $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, alors il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall x \in V,\ |x - a| \leq \beta \Longrightarrow |h(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

Soit $\varepsilon = \min(\alpha, \beta)$, alors pour $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, on aura $g(x) \geq 0$ et $\dfrac{1}{2} \leq h(x) \leq \dfrac{3}{2}$.

Donc $\dfrac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{3g(x)}{2}$, par suite $\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\,,\ f(x) \geq 0$.

Equivalents classiques au voisinage de 0

Soit u une fonction définie au voisinage de 0, telle que $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$

1. $\ln(1+u(x)) \sim u(x)$ et $(e^{u(x)} - 1) \sim u(x)$.
2. $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $\sinh u(x) \sim u(x)$ et $tanhu(x) \sim u(x)$.
3. $\arcsin u(x) \sim u(x)$ et $arctanu(x) \sim u(x)$.
4. $\cos u(x) \sim 1$, $\cos u(x) - 1 \sim -\dfrac{u(x)^2}{2}$, $\cosh u(x) \sim \dfrac{u(x)^2}{2}$ et $\arccos u(x) - \dfrac{\pi}{2} \sim -u(x)$.

Exercice

Soit I une partie non vide $\mathbb{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, par

$$\forall f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\ f\,\mathcal{R}\,g \Longleftrightarrow f \sim g \text{ au voisinage de } a$$

est une relation d'équivalence.

4.2 Propriètés des fonctions continues

4.2.1 Continuité en un point

Définition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.

i) On dit que f est continue au point x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

ii) On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout point de I.

Remarques

f est continue sur I, si seulement si,

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ :\ \forall y \in I,\ |y - x| \leq \alpha \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Proposition

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors

i) f est continue au point a, si et seulement si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ii) f est continue au point a, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Preuve

i) C'est une conséquece directe des définitions de la limite et de la continuité.

ii) C'est une conséquence de i) et de la caractérisation séquentielle de la limite.

4.2.2 Prolongement par continuité

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $I \setminus \{a\}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et on considère la fonction g définie sur I par

$$\forall x \in I,\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, avec $l = g(a)$ et comme f est continue sur $I \setminus \{a\}$, alors g est continue sur I. Dans ce cas, g s'appelle le prolongement par continuité de f au point a.

Exemples

1. f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, donc f possède un prolongement par continuité au point 0 défini par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
2. f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, avec $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$, donc f est prolongeable par continuité au point 1 :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
3. f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \exp(\frac{x+1}{(x+2)^2})$, alors f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{-2\}$ et on a $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$, donc f admet un prolongement par continuité au point -2.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs des réels a, b, c, f est continue sur $\mathbb{R}$?

4.2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur une partie I non vide de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
On suppose que f et g sont continues au point a. Alors

i) $f+g$ est continue au point a.

ii) fg estcontinue au point a.

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue au point a.

iv) On suppose qu'il existe un voisinage V de a, tel que $\forall x \in V \cap I,\ g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues au point a.

Preuve

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de I, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

i) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$.
Donc $f+g$ est continue au point a.

ii) On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}(fg)(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = f(a)g(a) = (fg)(a)$. Donc fg est continue au point a.

iii) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda f)(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda f(x_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda f(a) = (\lambda f)(a)$.
Donc λf est continue au point a.

iv) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{g}\right)(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{g(x_n)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)} = \dfrac{1}{g(a)} = \left(\dfrac{1}{g}\right)(a)$.

Donc $\dfrac{1}{g}$ est continue au point a.

Exercice

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur I.

1. Montrer que $|f|$ est continue sur I.
2. Montrer que $\sup(f,g)$ est continue sur I.
   (On pourra utiliser le fait que $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$)

4.2.4 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermidiaires (T.V.I)

Première version du T.V.I

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur I. Alors pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, tels que $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [a,b]$, tel que $f(c) = 0$.

Preuve

Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, alors il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$.
Supposons donc que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$. Comme $f(a)f(b) < 0$, alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, donc on peut supposer, par exemple, que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
Soit $A = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) \leq 0\}$, alors A est non vide, car $a \in A$, et A est majoré par b, donc A possède une borne supérieure, notée c.
On a $c = \sup(A)$, donc pour tout entier $n \geq 0$, il existe $x_n \in A$, tel que $c - \dfrac{1}{2^n} < x_n \leq c$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$, comme f est continue au point c, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$ et comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \leq 0$, alors $f(c) \leq 0$.
Pour achever la démonstration, on va montrer que $f(c) \geq 0$. Pour cela, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = c + \dfrac{b - c}{2^n}$, comme $f(b) > 0$ et $f(c) \leq 0$, alors $c < b$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $c < y_n \leq b$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > c$, avec $c = \sup(A)$, donc $f(y_n) > 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = c$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(c)$, donc $f(c) \geq 0$.

Exemples

1. Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$, tel que $f(c) = c$.
En effet, on considère la fonction éfinie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(a) \in [a, b]$ et $f(b) \in [a, b]$, alors $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$, donc d'après le T.V.I, il existe $c \in [a, b]$, tel que $g(c) = 0$, par suite $f(c) = c$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Alors il existe au moins un $c \in \mathbb{R}$, tel que $f(c) = 0$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$$
Donc si on choisit $a \geq B$, on aura $f(a) \geq A > 0$
On aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, donc pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq -B \Longrightarrow f(x) \leq -A$$
Donc si on choisit $b \leq -B$, on aura $f(b) \leq -A < 0$.
Ainsi, nous avons montré qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et il existe $b \in \mathbb{R}$, tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, donc d'après le T.V.I, il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f(c) = 0$.
On montre de la même manière que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un $c \in \mathbb{R}$, tel que $f(c) = 0$.

Exemples

3. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair, alors P possède au moins une racine réelle.
   En effet, soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$, avec $a_n \neq 0$ et n impair, un polynôme à coefficients réels. Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $P(\alpha) = 0$.
   Pour cela, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$
   Alors on sait que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$
   Donc, d'après la remarque précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f(\alpha) = 0$.
   Or, par définition, on sait que $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n = f(\alpha)$, donc $P(\alpha) = 0$.

Deuxième version du T.V.I

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un seul point, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors pour tout $a \in I$ et pour tout $b \in I$, avec $a < b$ et pour y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $(\min(f(a), f(b)) \leq y \leq \max(f(a), f(b)))$, il existe $x \in [a, b]$, tel que $f(x) = y$.

Preuve

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, tel que y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - y_0$. Alors il est clair que g est continue sur I, comme y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors $g(a)g(b) \leq 0$, donc d'après la première version du $T.V.I$, il existe $x_0 \in [a, b]$, tel que $g(x_0) = 0$, donc $f(x_0) = y_0$.

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve

La démonstration de ce corollaire est une conséquence de la deuxième version du théorème des valaurs intermédiaires et de la proposition suivante :

Proposition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors A est un intervalle de $\mathbb{R}$, si et seulement si,
$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in A$$

Preuve

$(\Longrightarrow)$ Trivial.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que

$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in A$$

Si A est borné, soient $a = \inf(A)$, $b = \sup(A)$ et $z \in]a, b[$. donc d'après la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, il existe $x \in A$ et il existe $y \in A$, tels que $a \leq x < z$ et $z < y \leq b$, donc $x < z < y$, par suite $z \in A$. Ainsi on voit que $]a, b[\subseteq A \subseteq [a, b]$, donc on aura

$$A =]a, b[,\quad A = [a, b[,\quad A =]a, b] \text{ ou } A = [a, b]$$

Si A est minoré et A n'est pas majoré, soient $a = \inf(A)$ et $z \in]a, +\infty[$, alors d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $x \in A$, tel que $a \leq x < z$. Comme A est non majoré, alors il existe $y \in A$, tel que $z < y$, par suite, on a $x < z < y$, avec $x \in A$ et $y \in A$, donc $z \in A$. Ainsi, on a $]a, +\infty[\subseteq A \subseteq [a, +\infty[$, par conséquent on a

$$A =]a, +\infty[\text{ ou } A = [a, +\infty[$$

Si A n'est pas minoré et A est majoré, soient $a = \sup(A)$ et $z \in]-\infty, a[$, alors il existe $y \in A$, tel que $z < y \leq a$. Comme A n'est pas minoré, alors il existe $x \in A$, tel que $x < z$, ainsi on voit que $x < z < y$, donc $z \in A$, par suite on a $]-\infty, a[\subseteq A \subseteq]-\infty, a]$, donc on aura

$$A =]-\infty, a[\text{ ou } A =]-\infty, a]$$

Si A n'est pas minoré et A n'est pas majoré, alors on voit facilement que $A = \mathbb{R}$.

Théorème du maximum

Théorème du maximum

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors

i) f est bornée sur $[a, b]$.

ii) Si $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, alors il existe $\alpha \in [a, b]$ et il existe $\beta \in [a, b]$, tels que $f(\alpha) = m$ et $f(\beta) = M$.

Remarques

Le théorème précédent exprime qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve

i) Posons $I=[a,b]$, alors on sait qu'une fonction f est bornée sur I, si et seulement si, f est majorée et f est minorée :

$$\exists m\in\mathbb{R},\ \exists M\in\mathbb{R}\ :\ \forall x\in I,\ m\leq f(x)\leq M$$

Supposons que f n'est pas majorée sur I, donc pour tout $k\in\mathbb{R}$, il existe $x\in I$, tel que $f(x)>k$. Donc en particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in I$, tel que $x_n>n$.

On a $\forall n\in\mathbb{N},\ a\leq x_n\leq b$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, par suite, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins une sous-suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers l, avec $l\in I$. f étant continue au point l, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=f(l)$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f(y_n)>n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)=+\infty$, ce qui est absurde. Donc f est majorée et de la même manière on montre que $-f$ est majorée, par suite f est minorée, donc f est bornée.

ii) Supposons, par absurde, que $\forall x\in I,\ f(x)\neq m$ et considérons la fonction g définie sur I par

$$\forall x\in I,\ g(x)=\frac{1}{f(x)-m}$$

g est donc une fonction définie et continue sur I, car f est continue sur I et $\forall x\in I,\ f(x)-m\neq 0$, par suite g est bornée.

D'autre part, d'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $k>0$, il existe $x\in I$, tel que $m\leq f(x)<m+\dfrac{1}{k}$, donc $0\leq f(x)-m<\dfrac{1}{k}$, par conséquent, on a $\dfrac{1}{f(x)-m}>k$. Nous avons donc établis que pour tout $k>0$, il existe $x\in I$, tel que $g(x)>k$, donc g n'est pas majorée, ce qui est absurde car g est bornée. Donc il existe $\alpha\in I$, tel que $f(\alpha)=m$.

De la même manière, en considérant la fonction h définie sur I par $h(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, on montre qu'il existe $\beta\in I$, tel que $f(\beta)=M$.

Remarques

1. Si $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue et si I n'est pas pas fermé borné, alors en général f n'est pas bornée.
   Par exemple $f:]0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, alors $f(]0,1])=[1,+\infty[$, donc f n'est pas bornée.
2. Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
   Alors $f([a,b])=[m,M]$.

4.2.5 Théorème de la fonction monotone

Définition

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

i) On dit que f est croissante sur I, si

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

ii) On dit que f est strictement croissante sur I, si

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

iii) On dit que f est décroissante sur I, si

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

iv) On dit que f est strictement décroissante sur I, si

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

v) On dit que f est monotone, si f est croissante ou f est décroissante.

vi) On dit que f est strictement monotone, si f est strictement croissante ou si f est strictement décroissante.

Remarques

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors

$$f \text{ est monotone} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, \forall y \in I,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \\ \text{ou} \\ \forall x \in I, \forall y \in I,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \end{cases}$$

$$f \text{ est strictement monotone} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in I, \forall y \in I,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \\ \text{ou} \\ \forall x \in I, \forall y \in I,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$$

Proposition

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective.

Preuve

On sait que f est injective, si et seulement si,

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

Soient $x \in I$ et $y \in I$, tels que $x \neq y$, comme f est strictement monotone, alors on a $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$, donc $f(x) \neq f(y)$, par suite, f est injective.

Remarques

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si f est continue sur I, alors la réciproque de la proposition précédente est vraie, comme le montrer le théorème suivant :

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
On suppose que f est injective, alors f est strictement monotone.

Preuve

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme

Soient I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est strictement monotone, si et seulement si, pour tout $x \in I$, pour tout $y \in I$ et pour tout $z \in I$, tels que $x < z < y$, $f(z)$ compris strictement entre $f(x)$ et $f(y)$.

Preuve

Si I est réduit à un seul élément, alors le résultat est trivial.
On suppose que I n'est pas réduit à un seul point et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, tel que $x_0 < y_0$, comme f est injective, alors $f(x_0) \neq f(y_0)$. On peut donc supposer, par exemple, que $f(x_0) < f(y_0)$ et montrer que f est strictement croissante.
Soient $x \in I$ et $y \in I$, tels que $x < y$, montrons que $f(x) < f(y)$.
Si $x = x_0$ et $y \neq y_0$, alors deux cas sont possibles :
Si $x_0 < y < y_0$, alors $f(y)$ compris strictement entre $f(x_0)$ et $f(y_0)$ et puisque $f(x_0) < f(y_0)$, alors $f(x_0) < f(y)$.
Si $x_0 < y_0 < y$, alors $f(y_0)$ compris strictement entre $f(x_0)$ et $f(y)$ et puisque $f(x_0) < f(y_0)$, alors $f(x_0) < f(y)$
Si $x \neq x_0$ et $y = y_0$, alors de la même manière on montre que $f(x) < f(y_0)$.
Si $x \neq x_0$ et $y \neq y_0$, alors plusieurs cas sont possibles :
Si $x < y < x_0 < y_0$, alors $f(x_0)$ compris strictement entre $f(y)$ et $f(y_0)$ et puisque $f(x_0) < f(y_0)$, alors $f(y) < f(x_0)$, on a aussi $f(y)$ compris strictement entre $f(x)$ et $f(x_0)$ et comme $f(y) < f(x_0)$, alors $f(x) < f(y)$.
Si $x < x_0 < y < y_0$, alors $f(x_0) < f(y) < f(y_0)$ et $f(x_0)$ compris strictement entre $f(x)$ et $f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.

Si $x < x_0 < y_0 < y$, alors $f(y_0)$ compris strictement entre $f(x_0)$ et $f(y)$ et comme $f(x_0) < f(y_0)$, alors $f(y_0) < f(y)$, on a aussi $f(x_0)$ compris strictement entre $f(x)$ et $f(y_0)$, donc pour la même raison on a $f(x) < f(x_0)$, donc $f(x) < f(y)$.
Si $x_0 < x < y_0 < y$, alors $f(x_0) < f(x) < f(y_0)$ et $f(y_0)$ compris strictement entre $f(x)$ et $f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.
Si $x_0 < x < y < y_0$, alors on a $f(x_0) < f(x) < f(y_0)$ et $f(x)$ compris strictement entre $f(x_0)$ et $f(y)$, donc $f(x) < f(y)$.

Preuve du théorème

Supposons que I est un intervalle et que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue injective.
Supposons, par absurde, que f n'est pas monotone, alors d'après le lemme précédent, il existe $x \in I$, il existe $y \in I$ et il existe $z \in I$, tels que $x < z < y$ et tels que $f(z)$ ne compris pas strictement entre $f(x)$ et $f(y)$. Comme f est injective et $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$, donc on peut supposer, par exemple, que $f(x) < f(y)$, par suite on a $f(z) < f(x) < f(y)$ ou $f(x) < f(y) < f(z)$.
Si $f(z) < f(x) < f(y)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in I$, tel que $z < a < y$ et $f(a) = f(x)$. Or f est injective, donc $a = x$, par suite $z < x$, ce qui est absurde.
Si $f(x) < f(y) < f(z)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in I$, tel que $x < b < z$ et $f(b) = f(y)$, donc $b = y$, par suite $y < z$, ce qui est absurde.

Théorème de la fonction monotone

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et $J = f(I)$. Alors

i) J est un intervalle et $f : I \longrightarrow J$ est bijective.

ii) f^{-1} est strictement monotone sur J et a le même sens de monotonie que f.

iii) f^{-1} est continue sur J.

Preuve

i) f est continue, donc l'image par f d'un intervalle est un intervalle, donc J est un intervalle. Comme f est strictement monotone, alors f est injective, donc
$f : I \longrightarrow f(I)$ est bijective.

ii) Supposons, par exemple, que f est strictement croissante et montrons que f^{-1} est aussi strictement croissante. Soient $x \in I$ et $y \in I$, tels que $f(x) < f(y)$, alors on a $x < y$, car sinon on aura $y < x$ et comme f est strictement croissante, alors $f(y) < f(x)$, ce qui est absurde. Donc f^{-1} est strictement croissante.

iii) Montrons que f^{-1} est continue sur J, pour cela soit $y_0 \in J$ et soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall y \in J,\ |y - y_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$$

$y_0 \in J$, donc il existe $x_0 \in I$, tel que $f(x_0) = y_0$. On suppose que x_0 n'est pas un point extrème de I et que ε est assez petit, tel que $x_0 + \varepsilon \in I$ et $x_0 - \varepsilon \in I$.
On a $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$ et f strictement croissante, donc $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$.
Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, alors on $y_1 < y_0 < y_2$.
Soit $\alpha = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$ et soit $y \in J$, tel que $|y - y_0| \leq \alpha$, alors $y_1 \leq y \leq y_2$. Comme f^{-1} est strictement croissante, alors $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$, avec $f^{-1}(y_1) = x_0 - \varepsilon$ et $f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon$, donc
$x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_O + \varepsilon$, avec $x_0 = f^{-1}(y_0)$, donc $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$.

4.2.6 Continuité uniforme

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur I, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Remarques

1. La notion de continuité uniforme est une notion globale tandis que la notion de continuité est une notion locale.
2. A l'aide des quantificateurs les définitions de la continuité uniforme et de la continuité s'écrivent sous la forme :
   f est uniformément continue, si et seulement si,
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ :\ \forall x \in I, \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
   f est continue, si et seulement si,
   $$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ :\ \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
3. Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.
4. Si f est continue sur I, alors en général, f n'est pas uniformément continue sur I, comme le montre les exemples suivants :
   i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$, tandis que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   En effet, soit $\epsilon = 1$. Montrons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et il existe $y \in \mathbb{R}$, tels que $|x - y| \leq \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
   Pour cela, on remarque que si $x = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ et $y = \dfrac{1}{\alpha}$, alors on a $|x - y| = \alpha$ et $|x^2 - y^2| = 2 + \alpha^2 > 1$.

ii) $g :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$, alors g est continue sur $]0,1]$, tandis que f n'est pas uniformément continue.

En effet, soit $\epsilon = 1$. Montrons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]0,1]$ et il existe $y \in]0,1]$, tels que $|x-y| \leq \alpha$ et $|g(x) - g(y)| > \varepsilon$.

Pour cela, comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \ \text{ et } \ m \geq N) \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \alpha$$

Donc pour $n > N$, si on pose $x = \dfrac{1}{n}$ et $y = \dfrac{1}{n+2}$, alors on aura

$$|x-y| \leq \alpha \ \text{ et } \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 2 > 1$$

Théorème de Heine

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.
Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Preuve

Supposons, par absurde, que f n'est pas uniformément continue, donc il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [a,b]$ et il existe $y \in [a,b]$, tels que $|x-y| \leq \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ et il existe $y_n \in [a,b]$, tels que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{2^n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq x_n \leq b$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(z_n)_{n\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$, qui converge vers un élément l de $[a,b]$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x_{\varphi(n)}$ et soit $(w_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = y_{\varphi(n)}$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n - w_n| = |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{\varphi(n)}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$, alors $(w_n)_{n\geq 0}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$.

f est continue, donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(l)$ et

$\lim\limits_{n\to\infty} f(w_n) = f(l)$, par suite,

$$\lim_{n\to\infty} |f(z_n) - f(w_n)| = 0$$

ce qui est absurde, car $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon$.

Fonctions lipschitziennes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est lipschitzienne de rapport k ou que f est k-lipschitzienne sur I, s'il existe $k > 0$, tel que

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Si de plus si $0 < k < 1$, on dit que f est une fonction contractante.

Remarques

1. Toute fonction k-lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.
   En effet, pour chaque $\varepsilon > 0$, si on prend $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$, alors on aura

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue sur I, alors, en général, f n'est pas lipschitzienne sur I comme le montre l'exemple suivant :
   Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, tandis que f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
   En effet, Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$, alors on a

$$|x - y| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2$$

   donc on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

   Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha = \varepsilon^2$, alors on aura

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+,\ |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$$

   Ainsi, on voit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Supposons, par absurde, que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, alors il existe $k > 0$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$$

   Donc, en particulier, pour $y = 0$, on aura $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{k} \leq \sqrt{x}$, donc

$$0 < \frac{1}{k} \leq \lim_{x \to 0} \sqrt{x}$$

   ce qui est absurde, car $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. Donc f n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

4.3 Dérivabilité

4.3.1 Dérivabilité en un point - Fonction dérivée

Définition

i) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un seul point, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point x_0, si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle la dérivée de f au point x_0 et se note $f'(x_0)$, $Df(x_0)$ ou encore $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

ii) Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. Dans ce cas, la fonction notée f' définie sur I par

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{aligned}$$

S'appelle la dérivée de f sur l'intervalle I.

Remarques

1. f est dérivable au point x_0, si et seulement, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

2. f est dérivable au point x_0, si et seulement si, il existe $L \in \mathbb{R}$ et il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$, tels que

$$\forall h \in \mathbb{R},\ f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + h\alpha(h)$$

$\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$, donc $h\alpha(h) = \mathrm{o}(h)$, donc f est dérivable au point x_0, si et seulement si, il existe $L \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall h \in \mathbb{R},\ f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + \mathrm{o}(h)$$

ou encore

$$\forall x \in I,\ f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$$

Donc dans ce cas, on a $f'(x_0) = L$.

3. Si f est dérivableau point x_0, alors f est continue au point x_0.
En effet, supposons que f est dérivable en x_0, alors on aura

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, par suite f est continue au point x_0.

4. Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan euclidien, on considère le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et pour $x \in I$, on considère le point M de coordonnées $(x, f(x))$. Alors on sait que la droite (M_0M) passant par les points M_0 et M a pour pente le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Donc lorsque x tend vers x_0, le point M s'approche de M_0 et la droite (M_0M) s'approche de la tangente à la courbe de f au point M_0 et le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x)$, par suite la tangente au point M_0 a pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

4.3.2 Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

i) On dit que f est dérivable à droite au point x_0, si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Dans ce cas, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle la dérivée à droite de f au point x_0 et se note $f'_d(x_0)$.

ii) On dit que f est dérivable à gauche au point x_0, si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Dans ce cas, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle la dérivée à droite de f au point x_0 et se note $f'_g(x_0)$.

Remarques

1. f est dérivable au point x_0, si et seulement si, f est dérivale à droite et à gauche au point x_0 et on a $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
2. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) au point x_0, alors la courbe de f possède une demi tangente à droite (resp. à gauche) au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.
3. Si f est dérivable à droite et à gauche au point x_0 et si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, on dit que le point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux de la courbe de f.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x|$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cependant, f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = 1$ et f est dérivable à gauche en 0 et on a $f'_g(0) = -1$. Donc l'origine est un point anguleux de la courbe de f.

4.3.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f et g deux fonctions dérivables au point x_0. Alors

i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable au point x_0 et on a

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

ii) La fonction fg est dérivable au point x_0 et on a

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

iii) Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et $\frac{1}{g}$ est dérivable au point x_0 et on a

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x)^2}$$

iv) Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et $\frac{f}{g}$ est dérivable au point x_0 et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Preuve

i) On a

$$\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{x-x_0}=\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\beta\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Donc $\alpha f+\beta g$ est dérivable au point x_0 et on a $(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$.

ii) On a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}&=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\&=g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

Donc par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on voit que fg est dérivable au point x_0 et on a $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

iii) Comme $g(x_0)\neq 0$ et g continue au point x_0, alors on sait qu'il existe $\alpha>0$, tel que $\forall x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[,\ g(x)\neq 0$ et on a

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=-\frac{1}{g(x_0)g(x)}\times\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Donc par passage à la limite lorsque x tend vers x_0, on voit que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable au point x_0 et on a $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=-\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

iv) Se déduit facilement de ii) et iii).

4.3.4 Dérivée de la composée - Dérivée de la réciproque

Proposition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:J\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $x_0\in I$, on suppose que

i) $f(I)\subseteq J$.

ii) f est dérivable au point x_0 et g dérivable au point $f(x_0)$

Alors $g\circ f$ est dérivable au point x_0 et on a

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Preuve

On a
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Comme f est continue au point x_0, alors $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, donc par passage à la limite, on voit que $g\circ f$ est dérivable au point x_0 et on a $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$.

Théorème

Soient I et J deux intervalles $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective. Soit $x_0 \in I$, on suppose que f est dérivable au point x_0.

Alors f^{-1} est dérivable au point $f(x_0)$, si et seulement si, $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Preuve

On a

$$\lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Comme f est continue au point x_0 et f^{-1} continue au point $f(x_0)$, alors $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, si et seulement si, x tend vers x_0, donc on en déduit que

$$\lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Et comme

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Donc,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Ainsi, on voit que $\displaystyle\lim_{f(x)\to f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$ existe, si et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable au point x_0, si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.

On a $\forall x \in I,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$, donc si $f'(x_0) \neq 0$, alors d'après la dérivée d'une fonction composée, $(f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 1$, donc on aura

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Remarques

1. Si on pose $y_0 = f(x_0)$, alors on aura
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
2. Soient I et J deux intervalles $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective. On suppose que
   i) f est dérivable sur I.
   ii) $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$.
   Alors f^{-1} est dérivable sur J et on a $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

4.3.5 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arc cosinus

Soit $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$, alors on sait que f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et $f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$, donc d'après le théorème de la fonction monotone,
$f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective et sa réciproque est continue sur $[-1, 1]$. La fonction réciproque de f s'appelle la fonction arc cosinus et se note arccos, donc la fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ et on a

$$(\forall y \in [-1, 1],\ \arccos y = x) \iff (x \in [0, \pi] \ \text{ et } \ y = \cos x)$$

De plus, on a aussi

$$\forall y \in [-1, 1],\ \cos(\arccos(y)) = y \ \text{ et } \ \forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos x) = x$$

On sait que $f'(x) = -\sin x$, donc $f'(0) = f'(\pi) = 0$ et $\forall x \in]0, \pi[,\ f'(x) \neq 0$, donc d'après le théorème précédent, la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour $y \in]-1, 1[$, avec $y = \cos x$, on a
$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = \frac{1}{-\sin x}$$
Or, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, par suite on a

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Fonction arc sinus

Soit $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin x$, alors on sait que f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$, donc d'après le

théorème de la fonction monotone, $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$ est bijective et sa réciproque est continue sur $[-1,1]$.
La fonction réciproque de f s'appelle arc sinus et se note arcsin, donc la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et on a

$$(\forall y \in [-1,1],\ \arcsin y = x) \Longleftrightarrow \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } y = \sin x\right)$$

On a aussi

$$(\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin y) = y \text{ et } \forall x \in [0,\pi],\ \arcsin(\sin x) = x$$

On sait que $f'(x) = \cos x$, donc $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) \neq 0$, par suite, la fonction arcsin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $y = \sin x$, on a

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Or, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$, donc $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ et ainsi, on aura

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Remarques

D'après ce qui précède, on remarque que $\forall x \in [-1,1],\ \arccos'(x) = -\arcsin'(x)$, donc si on pose $f(x) = \arccos x + \arcsin x$, alors $\forall x \in [-1,1],\ f'(x) = 0$, donc f est constante, par suite, on a

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\forall x \in [-1,1],\ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Fonction arc tangente

Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, alors on sait que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la fonction monotone, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est bijective et sa fonction réciproque est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de f s'appelle arc tangente et se note arctan, donc la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan y = x) \Longleftrightarrow \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } y = \tan x\right)$$

On a aussi

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan y) = y \ \text{ et } \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan x) = x$$

On sait que $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) \neq 0$, par suite, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $y \in \mathbb{R}$, avec $y = \tan x$, on a

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Remarques

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc f est constante, par suite, on a $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4.3.6 Fonctions hyperboliques - Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction cosinus hyperbolique et fonction argument cosinus hyperbolique

On appelle fonction cosinus hyperbolique, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Alors on voit facilement que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$, $f'(0) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) \neq 0$, donc d'après le théorème de la fonction monotone, $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est bijective et sa réciproque est continue sur $[1, +\infty[$.
La fonction réciproque de f s'appelle argument cosinus hyperbolique et se note argch, donc la fonction argch est définie sur $[1, +\infty[$ et on a

$$(\forall y \in [1, +\infty[,\ \mathrm{argch}(y) = x) \Longleftrightarrow (x \in [0, +\infty[\ \text{ et } \ y = \cosh x)$$

On a aussi

$$\forall y \in [1, +\infty[,\ \cosh(\mathrm{argch} y) = y \ \text{ et } \ \forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{argch}(\cosh x) = x$$

Comme $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) \neq 0$, alors la fonction argch est dérivable sur $]1,+\infty[$.
Pour le calcul de la dérivée de la fonction argch, remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^{2}=1$$

et remarquons aussi que

$$\forall x \in\ [0,+\infty[,\ \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} \geq 0$$

Donc, on en déduit que

$$\forall x \in\ [0,+\infty[,\ \cosh'(x)=\sqrt{\cosh^{2} x-1}$$

Soit $y \in]1,+\infty[$, avec $y=\cosh x$, où $x \in]0,+\infty[$, alors on a

$$\operatorname{argch}'(y)=\frac{1}{\cosh'(x)}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^{2} x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^{2}-1}}$$

Fonction sinus hyperbolique et fonction argument sinus hyperbolique

On appelle fonction sinus hyperbolique, la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\sinh x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Alors on voit facilement que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la fonction monotone, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et sa réciproque est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction réciproque de f s'appelle argument sinus hyperbolique et se note argsh, donc la fonction argsh est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\forall y \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh} y=x) \Longleftrightarrow (x \in \mathbb{R}\ \text{ et }\ y=\sinh x)$$

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh'(x) \neq 0$, donc la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $y \in \mathbb{R}$, avec $y=\sinh x$, on a

$$\operatorname{argsh}'(y)=\frac{1}{\sinh'(x)}$$

Or, d'après la remarque prédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^{2}=1$$

Donc on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh'(x)=\sqrt{1+\sinh^{2} x}$, par suite, on aura

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(y)=\frac{1}{\sqrt{1+y^{2}}}$$

Fonction tangente hyperbolique et fonction argument tangente hyperbolique

On appelle fonction tangente hyperbolique, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Alors on voit facilement que est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$, par suite, d'après le théorème de la fonction croissante $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ est bijective et sa fonction réciproque est continue sur $]-1, 1[$.
La réciproque de tanh s'appelle la fonction argument tangente hyperbolique et se note argth, donc la fonction argth est définie sur $]-1, 1[$ et on a

$$(\forall y \in]-1, 1[,\ \text{argth} y = x) \Longleftrightarrow (x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \tanh x = y)$$

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \neq 0$, donc la fonction argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour $y \in]-1, 1[$, avec $y = \tanh x$, on a

$$\text{argth}'(y) = \frac{1}{\tanh'(x)} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Remarques
Les fonctions hyperboliques vérifient des formules analogues à celles vérifiées par les fonctions trigonométriques. Le tableau suivant contient les principales formules trigonométriques et hyperboliques :

Formules trigonométriques	Formules hyperboliques
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 - \sinh^2 x = 1$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + cosh x \sinh y$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - cosh x \sinh y$
$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	$\cosh x + \cosh y = 2\cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$	$\cosh x - \cosh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$
$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$	$\sinh x + \sinh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$	$\sinh x - \sinh y = 2\cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

4.4 Dérivées des fonctions usuelles

Fonctions	ensemble de définition	Dérivées
$x^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x = \mathrm{e}^{a \ln x} \quad a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2 x$
$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$1 - \tanh^2 x$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1, 1[$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in]-1, 1[$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{argsh} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argch} x$	$[1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x \in]1, +\infty[$
$\mathrm{argth} x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{1-x^2} \quad x \in]-1, 1[$

4.4.1 Dérivées d'ordre supérieur

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On pose $f^{(0)} = f$.
Si f est dérivable sur I, on pose $f^{(1)} = f'$, et on dit que f est dérivable jusqu'à l'ordre 1.

Si f' est dérivable sur I, on pose $f^{(2)} = f''$, et on dit que f est dérivable jusqu'à l'ordre 2.

Ainsi, par récurrence sur $n \geq 1$, si f est dérivable jusqu'à l'ordre n, on pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

1. On dit dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, si
   i) f est dérivable jusqu'à l'ordre n sur I.
   ii) $f^{(n)}$ est continue sur I
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^n$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}^n(I\,,\,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
On note $\mathscr{C}^\infty(I\,,\,\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
Ainsi, on voit que $\mathscr{C}^0(I\,,\,\mathbb{R}) = \mathscr{C}(I\,,\,\mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur I.

Remarques

1. Pour tout entier $n \geq 0$, $(\mathscr{C}^n(I\,,\,\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif, unitaire et non intègre.
2. Pour tout entier $n \geq 0$, $(\mathscr{C}^n(I\,,\,\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pour la loi externe définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathscr{C}^n(I\,,\,\mathbb{R}),\ \forall x \in I,\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Formule de Leibnitz

Soient f et g deux fonctions n fois dérivales sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

Preuve

On procède par récurrence sur n, avec $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on sait que $(fg)' = f'g + fg' = fg' + f'g = \sum\limits_{k=0}^{1} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

Supposons la propriètè vraie jusqu'à l'ordre n, alors on aura

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= [(fg)^{(n)}]' \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k) f^{(k)} g^{(n-k)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad (\text{car } \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n+1}^k)
\end{aligned}$$

4.4.2 Extremums d'une fonction dérivable

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

i) On dit que x_0 est un minimum local de f sur I, s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \ \text{ et } \ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x_0) \leq f(x)$$

ii) On dit que x_0 est un maximum local de f sur I, s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \ \text{ et } \ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x_0) \geq f(x)$$

iii) On dit que x_0 est un extremum local de f sur I, si x_0 est un minimum local de f ou si x_0 est un maximum local de f sur I.

Remarques

1. Si $\forall x \in I,\ f(x_0) \leq f(x)$, on dit que x_0 est un minimum global de f sur I.
2. Si $\forall x \in I,\ f(x_0) \geq f(x)$, on dit que x_0 est un maximum global de f sur I.
3. Si x_0 est un minimum global de f ou si x_0 est un maximum global de f, on dit que x_0 est un extremum global de f.
4. Si x_0 est un extremum global de f, alors x_0 est un extremum local de f, tandis que la réciproque n'est pas vraie.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 1$ et soit $x_0 = 1$, alors 1 est un minimum local de f sur $\mathbb{R}$, tandis que 1 n'est pas un minimum local de f sur $\mathbb{R}$. Cependant, 1 est un minimum global de f sur $[0, 2]$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que

i) f est dérivable au point x_0,

ii) x_0 est un extremum local de f sur I.

Alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve

f est dérivable au point x_0, donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

par suite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existent}$$

et on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Or, x_0 est un extremum local de f, donc on peut supposer, par exemple, que x_0 est un minimum local, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \ \text{ et } \ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \ f(x_0) \leq f(x)$$

Donc, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0]$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, par suite,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

On a aussi, pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, par suite,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

On en déduit donc que $f'(x_0) = 0$.

Remarques

1. La condition $f'(x_0) = 0$ est une condition nécessaire pour que f possède un extremum local de f.
   Cette condition est en général n'est pas suffisante pour que f possède un extremum local au point x_0.
   Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$, alors on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local de f.
2. Le théorème précédent concerne seulement les fonction dérivables.
   Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ possède un minimum local au point 0 sans être dérivable au point 0.

4.4.3 Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

Soient $m = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup_{x\in I} f(x)$, où $I = [a, b]$, alors deux cas sont possible :
Si $m = M$, alors f est constante, donc $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
Si $m \neq M$, alors ou bien $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$, donc on peut supposer, par exemple, que $f(a) \neq m$. Comme f est continue sur $[a, b]$, alors d'après le théorème du maximum, il existe $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = m$. Donc c est un minimum local de f, par suite, d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Preuve

On considère la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

Preuve

Alors il est clair que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

De plus, on a

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b]$, tel que $g'(c) = 0$. On en déduit donc que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Inégalité des accroissements finis

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

On suppose qu'il existe deux réels m et M, tel que $\forall x \in]a,b]$, $m \leq f'(x) \leq M$. Alors on a

$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$$

Preuve

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Comme $m \leq f'(c) \leq M$, alors on aura

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$$

Corollaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que

i) f est continue sur I,

ii) f est dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I,

iii) Il existe $k > 0$, tel que $\forall x \in \mathring{I}$, $|f'(x)| \leq k$.

Alors f est une fonction k-lipschitzienne sur I.

Preuve

Soient $x \in I$ et $y \in I$, avec $x \neq y$, alors on peut supposer, par exemple, que $x < y$.
f est donc continue sur $[x, y]$ et f dérivable sur $]x, y[$, car $[x, y] \subseteq I$ et $]x, y[\subseteq \mathring{I}$, et on a

$$\forall z \in]x, y[, \ -k \leq f'(z) \leq k$$

Donc d'après le corollaire précédent, on a $-k(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq k(y-x)$, par suite, on a

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

Donc f est une fonction k-lipschitzienne sur I.

Théorème des accroissements finis généralisé

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors il existe $x_0 \in]a, b[$, tel que

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

Preuve

On considère la fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

Alors on voit facilement que $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]a, b[$, tel que $\varphi'(x_0) = 0$. Ainsi on aura

$$(g(b) - g(a))f'(x_0) - (f(b) - f(a))g'(x_0) = 0$$

Règle de l'Hospital

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que

i) $\forall x \in I, \ g(x) \neq 0$.

ii) f et g sont dérivables sur $\mathring{I}$ et $\forall x \in \mathring{I}, \ g'(x) \neq 0$.

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Preuve

D'abord on voit qu'on peut prolonger f et g par continuité au point x_0, en posant $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Soit $x \in I$, avec $x_0 < x$, alors f et g sont continues sur $[x_0, x]$ et dérivables sur $]x_0, x[$, donc d'après le théorème précédent, il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - (x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0^+} c_x = x_0$, alors on aura

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$$

De la même manière, on montre que $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ et ainsi on voit que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Remarques

Si f et g sont n fois dérivables sur $\mathring{I}$, telles que

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} f^{(n-1)}(x) = 0.$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} g^{(n-1)}(x) = 0.$

iii) $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall x \in \mathring{I},\ g^{(k)}(x) \neq 0.$

iv) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = l.$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Exemples

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2 \cos x} = \dfrac{1}{2}.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{1}{6}.$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1 + x} - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-1}{(1 + x)^2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = ?$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(1-\cos x))'}{(x^4)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin(1-\cos x)}{4x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{4x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{4x^2} \quad (\text{car } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(1-\cos x))'}{(4x^2)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos(1-\cos x)}{8x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1-\cos x)}{8}=\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

4.4.4 Sens de variation d'une fonction

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors

i) f est constante $\iff (\forall x \in I,\ f'(x) = 0)$.

ii) f est croissante $\iff (\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0)$.

iii) f est strictement croissante $\iff (\forall x \in I,\ f'(x) > 0)$.

iv) f est décroissante $\iff (\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0)$.

v) f est strictement décroissante $\iff (\forall x \in I,\ f'(x) < 0)$.

Preuve

Soient $x \in I$ et $y \in I$, avec $x \leq y$, donc f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$, tel que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$$

On en déduit que si $f' = 0$, alors $f(x) = f(y)$.
Si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$, alors $f(x) \leq f(y)$, donc f est croissante.
Ainsi, les autres cas se démontre de la même manière.

4.4.5 Formules de taylor

Formule de Taylor-Lagrange

Soient a et b deux nombres réels, tels que $a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la quantité $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ est apprlée reste de Lagrange.

Preuve

On considère la fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$$

où A est une constante qui sera choisis de telle manière que $\varphi(a) = 0$. f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$, donc φ est dérivable sur $[a, b]$ et on a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(n+1)(b-x)^n \end{aligned}$$

De plus on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $\varphi'(c) = 0$. Donc, on aura $-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + A(n+1)(b-c)^n = 0$, par suite, $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Ainsi, on aura

$$0 = \varphi(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-a)^k - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Par conséquent, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

Remarques

Dans la démonstration précédente, on a pas utilisé le fait que $a < b$, donc si $b < a$, il existe encore $c \in]b, a[$, tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Corollaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout $a \in I$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, tel que $a + h \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$, tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Preuve

Remarquons d'abord que si $[a, b]$ est un intervalle, alors on a

$$c \in \ [a, b] \Longleftrightarrow \exists \theta \ \in [0, 1] \ : \ c = a + \theta(b-a)$$

On a aussi

$$c \in]a, b[\Longleftrightarrow \exists \theta \ \in]0, 1[: \ c = a + \theta(b-a)$$

Donc pour $a \in I$ et pour $h \in \mathbb{R}$, tel que $a + h \in I$, si on pose $b = a + h$, on aura le résultat.

Remarques

Dans le cas où $a = 0$, la formule de Taylor-Lagrange s'appelle la formule de Taylor-MacLaurin :

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors on a

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Preuve

Soit $x \in I$, avec $x \neq x_0$, alors on peut supposer que $x_0 < x$, donc f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[x_0, x]$, donc d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \left(\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

On pose $\alpha(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$, comme $f^{(n)}$ est continue et comme $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$, alors
$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, par suite, on a

$$\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

$$\frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Application aux extremums

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $x_0 \in I$, tel que $f'(x_0) = 0$.

i) Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum local de f.

ii) Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum local de f.

iii) Si $f''(x_0) = 0$ on ne peut rien conclure.

Preuve

i) Comme $f'(x_0) = 0$, alors d'après la formule de Taylor-Young, on a

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\alpha(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

Puisque $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, alors pour $\varepsilon = \dfrac{f''(x_0)}{4}$, il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall x \in I,\ x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[\Longrightarrow -\frac{f''(x_0)}{4} < \alpha(x) < \frac{f''(x_0)}{4}$$

Donc pour tout $x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, on a

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+(x-x_0)^2\alpha(x) \\
&\geq \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2-\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2 \\
&\geq \frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Donc $\forall x \in]x_0-\beta, x_0+\beta[,\ f(x) \geq f(x_0)$, par suite, x_0 est un minimum local de f.

ii) Se démontre de la même manière.

iii) Par exemple si on considère la fonction $f(x)=x^4$, alors $x_0=0$ est un minimum local de f, tandis que $f''(0)=0$ et si on considère la fonction $g(x)=x^3$, alors on a $f'(0)=f''(0)=0$, tandis que 0 n'est ni minimum local, ni maximum local de g.

4.5 Développents limités

Les développements limités permettent l'approximation d'une fonction donnée au voisinage d'un point par une fonction polynôme. Plus le degré de ce polynôme est élevé, plus l'approximation est meilleure.

Pour étudier une fonction au voisinage d'un point, par exemple le calcule de limite ou la recherche d'équivalent, on remplace souvent les fonctions considérées par leurs développements limités.

4.5.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \overline{I}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développent limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 et il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall x \in V,\ f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Dans ce cas, la fonction polynôme $a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ s'appelle la partie principale du développement limité.

Notations

Un développement limité d'ordre n d'une fonction f au voisinage de x_0 se note $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Remarques

1. Rappelons que $\mathrm{o}((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\alpha(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.
2. Si f est continue au point x_0, alors f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de x_0.

   En effet, si on pose $\alpha(x) = f(x) - f(x_0)$ et $a_0 = f(x_0)$, alors on aura

   $$f(x) = a_0 + \alpha(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$$

3. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 0$, alors on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$. Dans ce cas, on prolonge f en posant $f(x_0) = a_0$.
4. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 0$, alors f est continue au point x_0.
5. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 1$, alors f est dérivable en x_0.

Attention

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, avec $n \geq 2$, ceci n'entraine pas toujours que $f''(x_0)$ existe, comme le montre l'exemple élémentaire suivant :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$, par contre f n'est pas deux fois dérivable en 0, car on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \quad \text{n'existe pas}$$

Cependant, si on pose $\alpha(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ et on a

$$f(x) = x^2\alpha(x) = \mathrm{o}(x^2)$$

donc f possède un développent limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Remarques

Si on pose $g(x) = f(x+x_0)$, alors f admet un développement limité au voisinage de x_0, si et seulement si, g admet un développement limité au voisinage de 0. Ainsi, dans la suite on s'intéresse uniquement aux développent limités au voisinage de 0.

Exemples

D'après la formule de Taylor, toute fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle ouvert I, admet un développement limité d'ordre n au voisinage de tout point $x_0 \in I$ et on a :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Proposition

i) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.

ii) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 et si f est paire, alors la partie principale de son développement ne comporte que des puissances paires.

iii) Si f admet un développement limité au voisinage de x_0 et si f est impaire, alors la partie principale de son développement ne comporte que des puissances impaires.

Preuve

i) Supposons que sur un voisinage V de x_0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \\ &= b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

Posons $P(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + \ldots + (a - n - b_n)(x - x_0)^n$, alors on voit facilement que $P(x) = (x - x_0)^n \alpha_0(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_0(x) = 0$, par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = 0$, donc $a_0 - b_0 = 0$.
En dérivant, on voit aussi que $P'(x) = (x - x_0)^{n-1} \alpha_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_1(x) = 0$, par suite $\lim\limits_{x \to x_0} P'(x) = 0$, donc $a_1 - b_1 = 0$.
Ainsi, par récurrence on voit que $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on $P^{(k)} = (x - x_0)^{n-k} \alpha_k(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha_k(x) = 0$, par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} P^{(k)}(x) = 0$, donc $a_k - b_k = 0$.

ii) Supposons f est paire et que sur un voisinage V de x_0, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Comme f est paire, alors on aussi

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1(x - x_0) + \cdots + (-1)^n a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Donc d'après l'unicité du développent limité, on a $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = (-1)^k a_k$, donc si k est impair, alors on voit que $a_k = 0$.

iii) Se démontre de la même manière que ii).

4.5.2 Opération sur les développements limités

Somme et multiplication par un scalaire

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de x_0, telles que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 et on a

$$(\alpha f+\beta g)(x) = (\alpha a_0+\beta b_0)+(\alpha a_1+\beta b_1)(x-x_0)+\ldots+(\alpha a_n+\beta b_n)(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Preuve

La démonstration de cette proposition est une conséquence directe de l'unicité d'un développement limité.

Produit

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de x_0, telles que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) = P_n(x) + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n) = Q_n(x) + \mathrm{o}((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, dont la partie principale est obtenue on ne conservant dans le produit P_nQ_n que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Preuve

La démonstration est encore une conséquence de l'unicité d'un développement limité.

Exemples

Développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $\exp x \sin x$.
Les fonctions $\exp x$ et $\sin x$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, donc pour avoir leurs développements limités, il suffit d'appliquer la formule de Taylor, ainsi on aura

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}(x^3)$$

On a $\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}\right)\left(x - \dfrac{x^3}{3!}\right) = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \mathrm{o}(x^3) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$
Donc, on a $\exp x \sin x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.

Développent limité d'une fonction composée

Nous savons que tout développent limité d'une fonction f au voisinage de x_0 se ramène à un développent limité au voisinage de 0 de la fonction g, avec $g(x) = f(x + x_0)$. Donc, pour simplifier le calcul, dans la proposition suivante on ne considère que des développents limités au voisinage de 0.

Proposition

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, avec $0 \in I$ et $0 \in J$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(I) \subseteq J$ et $f(0) = 0$. On suppose que f et g admettent des développents limités d'ordre n au voisinage de 0 dont les parties principales sont P_n et Q_n.
Alors $g \circ f$ admet un développent limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie principale est obtenu on ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Preuve

f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage V_1 de 0, tel que $\forall x \in V_1,\ f(x) = P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$.
g admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, donc il existe un voisinage W de 0, tel que $\forall y \in W,\ g(y) = Q_n(y) + \mathrm{o}(y^n)$.
Comme f admet un développement limité au voisinage de 0, alors f est continue en 0 et comme $f(0) = 0$ et W est un voisinage de 0, alors il existe un voisinage V_2 de 0, tel que $f(V_2) \subseteq W$.
Soit $V = V_1 \cap V_2$ et soit $x \in V$, donc $x \in V_1$ et $f(x) \in W$, par suite on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = Q_n(f(x)) + \mathrm{o}(x^n) = Q_n(P_n(x) + \mathrm{o}(x^n)) + \mathrm{o}(x^n)$$

Or, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on voit facilement que $(P_n(x)+\mathrm{o}(x^n))^k = P_n(x)^k+\mathrm{o}(x^n)$.
Par suite, on aura

$$\forall x \in V,\ (g \circ f)(x) = (Q_n \circ P_n)(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

Ainsi, on aura

$$\forall x \in V,\ (g \circ f)(x) = (Q_n \circ P_n)(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

Donc on ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les termes de degré inférieur ou égal à n, on aura le résultat.

Remarques

En fait, la proposition précédente s'énnonce dans le cas général de la manière suivante :

Proposition

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(I) \subseteq J$, $x_0 \in I$ et $f(x_0) = y_0$. On suppose que f admet un développent limité d'ordre n au voisinage de x_0 et g admet un développent limité d'ordre n au voisinage de y_0 dont les parties principales sont P_n et Q_n.
Alors $g \circ f$ admet un développent limité d'ordre n au voisinage de x_0, dont la partie principale est obtenu on ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples

Calculons le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $\mathrm{e}^{\cos x}$.
Dans ce cas, on a $f(x) = sin(x)$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$, avec $f(0) = 1$, donc on doit chercher d'abord le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $g(x) = \mathrm{e}^x$.
On a $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$, donc $\mathrm{DL}_3(1)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \mathrm{o}((x-1)^3))$$

On a $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$, donc en remplaçant x par $1 - \dfrac{x^2}{2}$ dans le $\mathrm{DL}_3(1)$ de e^x et on ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 3, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \mathrm{e}\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

Rappels

1. Division euclidienne suivant les puissances croissantes :

   Rappelons que si A et B sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) formé de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tel que

   $$A = BQ_n + X^{n+1}R_n, \quad \text{avec } \deg(Q_n) \leq n$$

   Donc, en particulier, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) formé de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tel que

   $$1 = PQ_n + X^{n+1}R_n, \quad \text{avec } \deg(Q_n) \leq n$$

   Par exemple, faisons la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 de 1 par $1 + X$:

   $$\begin{array}{rrrrr|l}
   1 & & & & & 1 + X \\ \cline{6-6}
   -1 & -X & & & & 1 - X + X^2 - X^3 \\ \cline{1-2}
   & -X & & & & \\
   & X & +X^2 & & & \\ \cline{2-3}
   & & X^2 & & & \\
   & & -X^2 & -X^3 & & \\ \cline{3-4}
   & & & -X^3 & & \\
   & & & X^3 & +X^4 & \\
   & & & & X^4 &
   \end{array}$$

Rappels

Donc $1 = (1 + X)(1 - X + X^2 - X^3) + X^4$, on a $Q_3 = 1 - X + X^2 - X^3$ et $R_3 = 1$.
Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on voit que la division euclidienne suivant les puissance croissante à l'ordre n de 1 par $1 + X$, est définie par :

$$1 = (1 + X)\sum_{k=0}^{n}(-1)^n X^n + X^{n+1}, \quad \text{avec} \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n X^n + X^{n+1} \quad \text{et} \quad R_n = 1$$

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, alors d'après ce qui précède on a

   $$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n x^n + \frac{x^{n+1}}{x+1} \quad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \quad (\text{car } \frac{x^{n+1}}{x+1} = \mathrm{o}(x^n))$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\dfrac{1}{1+x}$ admet un développement limité d'odre n au voisinage de 0.

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de parties principales P_n et Q_n, telles que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.

Alors la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie principale est égale au quotient de la division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n.

Preuve

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P_n(x)+\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)+\mathrm{o}(x^n)} \\
&= \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{P_n(x)+\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)+\mathrm{o}(x^n)} - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \\
&= \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \frac{(Q_n(x)-P_n(x))\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)^2+Q_n(x)\mathrm{o}(x^n)}
\end{aligned}$$

Comme $Q_n(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, alors on voit facilement que

$$\frac{(Q_n(x)-P_n(x))\mathrm{o}(x^n)}{Q_n(x)^2+Q_n(x)\mathrm{o}(x^n)} = \mathrm{o}(x^n)$$

La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n)Q_n(x) + x^{n+1}R_n(x)$$

Donc $\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^{n+1}\dfrac{R_n(x)}{Q_n(x)} = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + \mathrm{o}(x^n)$

Exemples

1. Calculons le développement limité de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

   On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$

   La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de $x - \dfrac{x^3}{6}$ par $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ donne :

$$\begin{array}{rrrr|l}
x & -\frac{x^3}{6} & & & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{5-5}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & x + \frac{x^3}{3} \\ \cline{2-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{24} & & \\
 & -\frac{x^3}{3} & \frac{x^5}{6} & -\frac{x^7}{72} & \\ \cline{3-4}
 & & \frac{x^5}{8} & -\frac{x^7}{72} &
\end{array}$$

Donc $x-\dfrac{x^3}{6}=\left(x+\dfrac{x^3}{3}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)+x^5\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{x^2}{72}\right)$, ainsi on aura

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^4)$$

2. Calculons le développement limité de $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
   On a $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$ et $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)$.
   La division euclidienne suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de
   $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$ par $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ donne :

$$\begin{array}{cccccccc|l}
1 & +x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & +\frac{x^4}{24} & & & & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \cline{9-9}
-1 & & +\frac{x^2}{2} & & -\frac{x^4}{24} & & & & 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2} \\ \cline{1-5}
 & x & +x^2 & +\frac{x^3}{6} & & & & & \\
 & -x & & +\frac{x^3}{2} & & -\frac{x^5}{24} & & & \\ \cline{2-6}
 & & x^2 & +\frac{2}{3}x^3 & & -\frac{x^5}{24} & & & \\
 & & -x^2 & & +\frac{x^4}{2} & & -\frac{x^6}{24} & & \\ \cline{3-7}
 & & & \frac{2}{3}x^3 & +\frac{x^4}{2} & -\frac{x^5}{24} & -\frac{x^6}{24} & & \\
 & & & -\frac{2}{3}x^3 & & +\frac{x^5}{3} & & -\frac{x^7}{36} & \\ \cline{4-8}
 & & & & \frac{x^4}{2} & +\frac{7}{24}x^5 & -\frac{x^6}{24} & -\frac{x^7}{36} &
\end{array}$$

Le quotient de cette division euclidien est égal à $1+x+x^2+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{x^4}{2}$, donc

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}(x^4)$$

Remarques

Le quotient $\dfrac{f}{g}$ peut admettre un développent limité au voisinage de x_0, même si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Par exemple $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ possède un développent limité d'ordre n au voisinage de 0, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}(x^n)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\mathrm{o}(x^{n-1})}$$

Puis pour n donné, faites la division euclidienne suivant les puissances croissantes.

4.5.3 Développents limités usuels au voisinage de 0

Fonctions	Développeents limités
e^x	$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\mathrm{o}(x^n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}+\mathrm{o}(x^n)$
$\sinh x$	$x+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+3})=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\cosh x$	$1+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$
$\sin x$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+3})=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\cos x$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$
$(1+x)^\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}$	$1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^\alpha,\ \alpha=-1$	$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2-x^3+\cdots+x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k}+\mathrm{o}(x^n)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=(x+1)^\alpha,\ \alpha=-\dfrac{1}{2}$	$1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}x^n+\mathrm{o}(x^n)$
$\arctan x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+3})=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\arcsin x$	$x+\dfrac{1}{2\times 3}x^3+\cdots+\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)\times(2n+1)}x^{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\arccos x$	$\dfrac{\pi}{2}-x-\dfrac{1}{2\times 3}x^3-\cdots-\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)\times(2n+1)}x^{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\mathrm{argth}x$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$
$\mathrm{argsh}x$	$x-\dfrac{1}{2\times 3}x^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)\times(2n+1)}x^{2n+1}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$

4.5.4 Utilisation des développements limités

Recherche d'équivalent simple - Calcul de limites

Proposition

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point x_0 de partie principale $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ non nulle.
Soit $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p \neq 0$, alors $f(x)$ est équivalent à $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.

$$f(x) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)$$

Preuve

Comme p est le plus petit entier ≥ 0, tel que $a_p \neq 0$, alors qu voisinage de x_0, on a

$$f(x) = a_p(x - x_0)^p + a_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Donc, on voit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_p(x - x_0)^p}{a_p(x - x_0)^p} = 0$$

Donc $f(x)$ est équivalent à $a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.

Remarques

Rappelons que si f est équivalent à g au voisinage de x_0, alors on écrit $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.
Rappelons aussi que si $f_1(x) \sim_{x_0} g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_{x_0} g_2(x)$, alors $(f_1f_2)(x) \sim_{x_0} (g_1g_2)(x)$ et $\dfrac{f_1}{f_2}(x) \sim_{x_0} \dfrac{g_1}{g_2}(x)$.
Ainsi, pour chercher un équivalent de $(fg)(x)$ ou de $\dfrac{f}{g}(x)$ au voisinage de x_0, il suffit de chercher un équivalent de $f(x)$ et de $g(x)$ au voisinage de x_0.

Exemples

1. On a $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)$ au voisinage de 0, donc

$$\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

2. On a $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ au voisinage de 0, donc

$$\sin x \sim_0 x$$

3. Cherchons un équivalent simple de $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ au voisinage de 0.

   On a

$$\begin{aligned}1-\cos(1-\cos x) &= 1-\cos\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\mathrm{o}(x^4)\\ &= \frac{x^4}{8}+\mathrm{o}(x^4)\end{aligned}$$

   Donc $1-\cos(1-\cos x)\sim_0 \dfrac{x^4}{8}$, par suite $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}\sim_0 \dfrac{1}{8}$.

Remarques

Rappelons que si $f(x)\sim_{x_0} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
Donc pour chercher $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, il suffit, en utisant les développements limités, de chercher un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de x_0.

Caractérisation d'extremums

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et admettant un développent limité d'ordre n, avec $n\geq 2$, au voisinage d'un point $x_0\in I$, de partie principale

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Supposons qu'il existe $k\in\{2,\ldots,n\}$, tel que $a_k\neq 0$ et soit $p\in\{2,\ldots,n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p\neq 0$, alors on a la proposition suivante :

Proposition

i) Si x_0 est un extremum de f, alors $a_1=0$.

ii) Réciproquement, supposons que $a_1=0$, alors on a

   a) Si p est pair et si $a_p>0$, alors x_0 est un minimum local de f.

   b) Si p est pair et si $a_p<0$, alors x_0 est un maximum local de f.

   c) Si p est impair, alors x_0 n'est pas un extremum de f.

Preuve

i) f possède un développent limité d'ordre n, avec $n\geq 2$, au voisinage de x_0, donc f est continue et f dérivable au point x_0 et on a $f(x_0)=a_0$ et $f'(x_0)=a_1$.

Preuve

Comme x_0 est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$, donc $a_1 = 0$.

ii) $p \in \{2, \ldots, n\}$ est le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, donc

$$(f(x) - f(x_0)) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)^p$$

par suite, sur un voisinage V de x_0, $f(x) - f(x_0)$ et $a_p(x - x_0)^p$ ont même signe, donc on aura le résultat :

a) Si p est pair et $a_p > 0$, alors $\forall x \in V,\ f(x) - f(x_0) \geq 0$, donc x_0 est un minimum local de f.

b) Si p est pair et $a_p < 0$ et, alors $\forall x \in V,\ f(x) - f(x_0) \leq 0$, donc x_0 est un maximum local de f.

c) Si p est impair, alors $a_p(x - x_0)^p$ change de signe, donc dans ce cas, x_0 n'est pas un extremum.

Exemples

1. Soit $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$, alors il facile de voir qu'au voisinage de 0, on a $f(x) = x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, donc d'après la proposition précédente, on a $f(0) = f'(0) = 0$ et 0 est un minimum local de f.
2. Soit $f(x) = \sin x - \ln(1 + x) + \cos x - 1$, alors au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)) + (-\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)) \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition précédente, on a $f(0) = f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum local de f.

Position d'une courbe par rapport à une tangente

Soient I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et admettant un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage d'un point $x_0 \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$, de partie principale

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$$

Supposons qu'il existe $k \in \{2, \ldots, n\}$, tel que $a_k \neq 0$ et soit $p \in \{2, \ldots, n\}$ le plus petit entier, tel que $a_p \neq 0$, alors on a la proposition suivante :

Proposition

i) f est prolongeable par continuité au point x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.

ii) Le prolongement obtenu est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = a_1$.

iii) La droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ et on a

a) Si p est pair et $a_p > 0$, alors le graphe de f est au-dessus de sa tangente en x_0.

b) Si p est pair et $a_p < 0$, alors le graphe de f est en-dessous de sa tangente en x_0.

c) Si p est impair, alors le graphe de f traverse sa tangente en x_0 et dans ce cas, on dit que f possède un point d'inflexion en x_0.

Preuve

i) f possède un développent limité d'ordre n, avec $n \geq 2$, au voisinage de x_0, donc $\lim_{x \to x_0} = a_0$, par suite se prolonge par continuité au point x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.

ii) On a $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - a_0}{x - x_0} = a_1$, donc f est dérivable au point x_0 et on a $f'(x_0) = a_1$.

iii) La tangente au point x_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0)$. On a $(f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)) \sim_{x_0} a_p(x - x_0)$, donc $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ et $a_p(x - x_0)$ ont même signe sur un voisinage V de x_0. On en déduit donc que

a) Si p est pair et $a_p > 0$, alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \geq 0$ sur V, donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente en x_0.

b) Si p est pair et $a_p < 0$, alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \leq 0$ sur V, donc le graphe de f est en-dessous de sa tangente en x_0.

c) Si p est impair, alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ change de signe à droite et à gauche de x_0, donc le graphe de f traverse sa tangente en x_0.

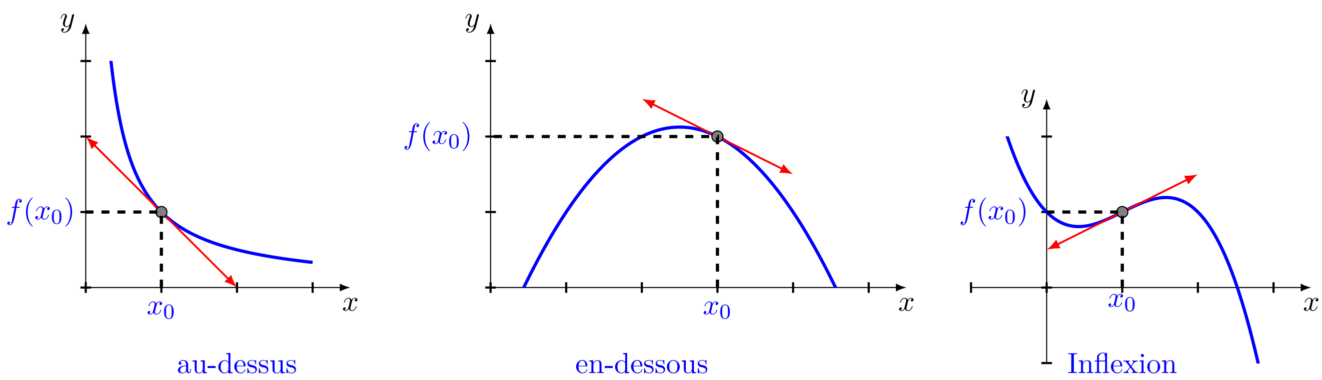


FIGURE 4.1 – Différentes positions d'un graphe par rapport à sa tangente

4.5.5 Développents limités généralisés

Développents limités généralisés au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définit sur I et soit $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas et qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $\lim_{x\to x_0} x^m f(x)$ existe.

On désigne par p le plus petit entier ≥ 1 tel que $\lim_{x\to x_0} x^p f(x)$ existe, alors on a la définition suivante :

Définition

On dit que f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de x_0, si la fonction g définie par $g(x) = x^p f(x)$ admet un développement limité d'ordre $n+p$ au voisinage de x_0

Remarques

Si f admet un développement limité généralisé d'ordre n au voisinage de x_0, alors il $a_0, a_1, \ldots, a_{n+p} \in \mathbb{R}$, et il existe un voisinage V de x_0, tels que pour tout $x \in V$, on a

$$g(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{p+n}(x-x_0)^{p+n} + \mathrm{o}((x-x_0)^{p+n})$$

Donc, on aura

$$f(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^p} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(x-x_0)} + a_p + a_{p+1}(x-x_0) + \ldots + a_{p+n}(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

Exemples

Développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
On a $\lim_{x\to 0} xf(x) = 1$ et on a

$$\begin{aligned}
x\frac{\cos(x)}{\sin x} &= \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \mathrm{o}(x^5)}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\mathrm{o}(x^5)} \\
&= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)} \\
&= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^4}{45} + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Donc le développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de 0 est donné par

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{45} + \mathrm{o}(x3)$$

On en déduit donc que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

Développents limités généralisés au voisinage de l'infini

Définition

Soit $f:]a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur $]a,+\infty[$. On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n au voisinage de $+\infty$, s'il existe $a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, tel que

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarques

1. Dans la définition, on a $\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\frac{1}{x^n}\alpha(x)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$.
2. Un développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ est aussi appelé un développement asymptotique.
3. Une fonction f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$, si et seulement si, la fonction g définie par $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité au voisinage de 0. Dans ce cas, si au voisinage de 0 on a

$$g(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\mathrm{o}(x^n)$$

Alors au voisinage de $+\infty$ on aura

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

4. On définit de la même manière un développement limité généralisé au voisinage de $-\infty$ d'une fonction f définie sur $]-\infty,a[$.

Exemples

1. Développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Soit $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$. Au voisinage de $+\infty$, on a $x>0$, donc $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x-x^2}$, par suite, g admet un développent limité généralisé au voisinage de 0 et on a

$$\begin{aligned}g(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x-x^2}&=\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}\right)\\&=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)(1+x+x^2+\mathrm{o}(x^2))\\&=\frac{1}{x}\left(1+x+x^2+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)\\&=\frac{1}{x}+1+\frac{3}{2}x+\mathrm{o}(x)\end{aligned}$$

Donc au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x)=1+x+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

De la même manière pour un développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $-\infty$, on considère toujours la fonction $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme au voisinage de $-\infty$, on peut supposer que $x<0$, donc $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2-x}$.
On en déduit donc de ce qui précède qu'un développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $-\infty$ de f est donné par :

$$f(x)=1-x-\frac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Développement asymptotique d'ordre 1 au voisinage de $\pm\infty$ de

$$f(x)=x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Soit $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, alors on a $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$, donc g admet un développent limité généralisé au voisinage de 0 et on a

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{1}{x^2}\arctan\left(x-x^2+x^3-\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\ &=\frac{1}{x^2}\left(x-x^2+\frac{2}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right)\\ &=\frac{1}{x}-1+\frac{2}{3}x+\mathrm{o}(x)\end{aligned}$$

Donc au voisinage de $\pm\infty$, on a

$$f(x)=x-1+\frac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Recherche d'asymptotes obliques

Définition

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soient $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$.

Remarques

1. De la même manière on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$, si $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0$
2. Si f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, d'équation $y=ax+b$,

alors on a

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

2. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$, on dit que la droite d'équation $y = c$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
3. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de x_0.
4. En pratique pour chercher les asymptotes obliques d'une fonction f au voisinage de $\pm\infty$, il suffit de faire un développement asymptotique de f au voisinage de $\pm\infty$ sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^p} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec } p \geq 1$$

Dans ce cas, la fonction f a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ et la position du graphe de f par rapport à son asymptote se déduit du signe de $\dfrac{c}{x^p}$ au voisinage de l'infini.

Exemples

1. Recherche d'asymptotes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

D'abord la fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $+\infty$ est donné par :

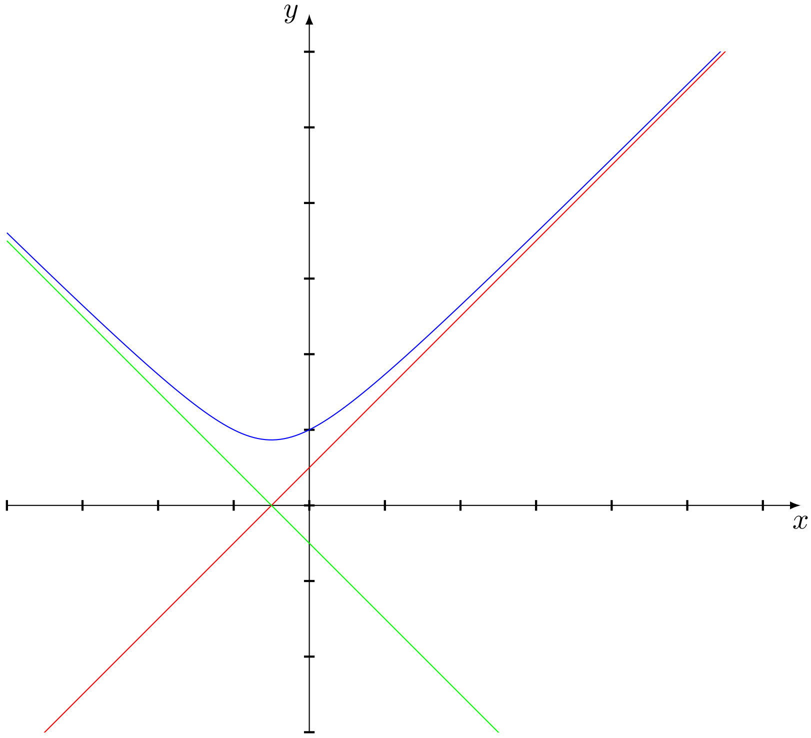
$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $-\infty$ est donné par :

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

La représentation graphique de f est donné par :



2. Recherche des asymptotes de la fonction f définie sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Le tableau de variation de f est donné par :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

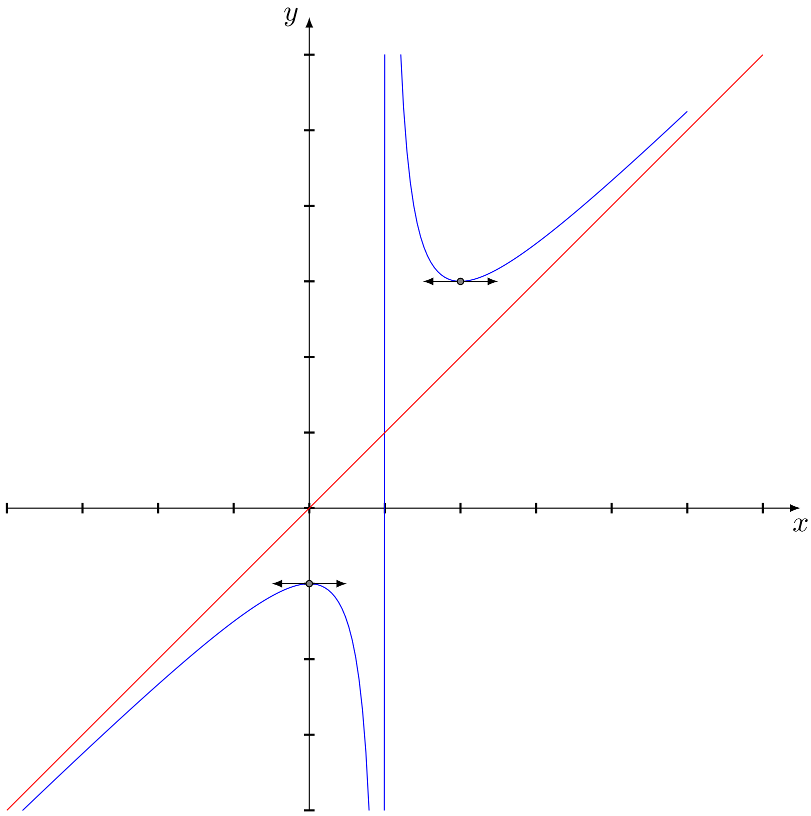
Le développement asymptotique d'ordre 1 de f au voisinage de $\pm\infty$ est donné par :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y=x$ est une asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.

On a aussi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=1$ est aussi une asymptote à la courbe de f.

Ainsi, la courbe représentative de f est donnée par :



4.6 Fonctions convexes

4.6.1 Définition de la convexité

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

i) On dit que f est convexe sur I, si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in I$, avec $x < y$, on a

$$\forall t \in [0,1] \;\; f((1-t)x + ty)) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

i) On dit que f est concave sur I, si pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in I$, avec $x < y$, on a

$$\forall t \in [0,1] \;\; f((1-t)x + ty)) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$$

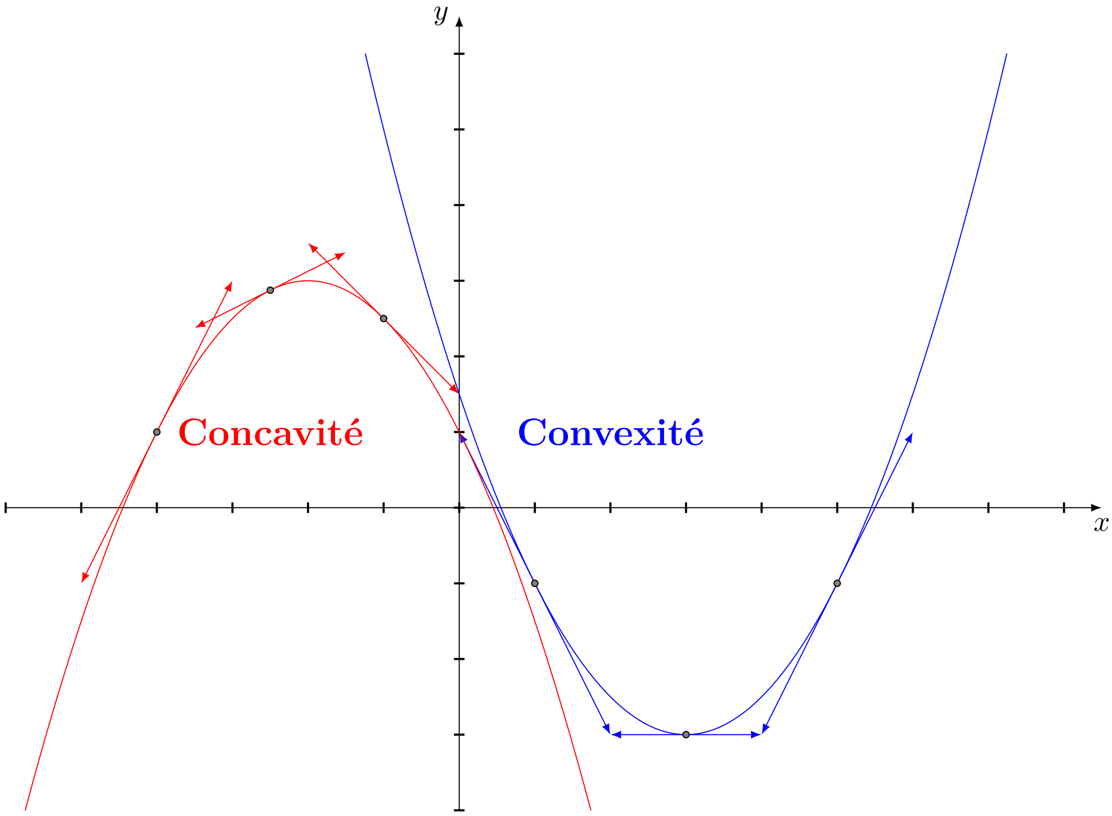
Remarques

1. f est convexe, si et seulement si, $-f$ est concave.
2. Si f est convexe sur I, alors d'après la définition, on a

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \;\; f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

3. Si f est convexe, alors pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in I$, avec $x < y$, la courbe

de f sur l'intervalle $[x, y]$ est en-dessous du segment joignant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ et toutes les tangentes sont en-dessous de la courbe de f.



4.6.2 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Lemme1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe sur I, si et seulement si,

$$\forall x \in I; \forall y \in I, \forall z \in I,\ x < y < z \Longrightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Preuve

$(\Longrightarrow)$ Supposons que f est convexe sur I et soient $x, y, z \in I$, tels que $x < y < z$.

Comme $y \in]x, z[$, alors $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$, avec $\lambda = \dfrac{y - x}{z - x}$, donc $\lambda \in]0, 1[$.

Comme f est convexe, alors $f(y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(z)$.

Donc $(1 - \lambda)f(y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda(f(z) - f(y))$.

On a $\lambda = \dfrac{y - x}{z - x}$ et $1 - \lambda = \dfrac{z - y}{z - x}$, donc on aura

$$(z-y)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)(f(z)-f(y))$$

Par suite, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$(\Longleftarrow)$ Supposons que pour tout $x, y, z \in I$, avec $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Puis montrons que f est convexe sur I.

Pour cela, pour $x, z \in I$, avec $x < z$, et pour $\lambda \in [0,1]$, on doit montrer que

$$f((1-\lambda)x + \lambda z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$$

Si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, alors il est trivial que $f((1-\lambda)x+\lambda f(z)) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(z)$.

Donc on peut supposer que $\lambda \in]0,1[$. Soit $y = (1-\lambda)x + \lambda z$, alors on a $x < y < z$, donc, par hypothèse, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

avec $y - x = \lambda(z-x)$ et $z - y = (1-\lambda)(z-x)$, donc on aura

$$(1-\lambda)(f(y)-f(x)) \leq \lambda(f(z)-f(y))$$

par suite, on a $f(y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$.

Lemme2

Soit f une fonction définit sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour chaque $a \in I$, on considère la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{a\},\ \varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Alors f est convrxe sur I, si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction φ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Preuve

$(\Longrightarrow)$ Soient $x \in I \setminus \{a\}$ et $y \in I \setminus \{a\}$, avec $x < y$. Pour montrer que $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$, on considère trois cas :

Cas où $x < y < a$, alors on a $y \in]x, a[$, donc $y = (1-\lambda)x + \lambda a$, avec $\lambda \in]0,1[$.

Comme f est convexe, alors $f(y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(a)$.

Donc $f(y)-f(a) \leq (1-\lambda)(f(x)-f(a))$, avec $1-\lambda = \dfrac{a-y}{a-x}$.
Ainsi, on aura $\dfrac{f(y)-f(a)}{a-y} \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{a-x}$.
On en déduit donc que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$, par suite $\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y)$.
Le cas où $a < x < y$ est identique au cas précédent, il suffit de remplacer, dans la démonstration, x par a et a par x.
Cas où $x < a < y$, dans ce cas on obtient le résultat en applquant le lemme précédent.

Théorème

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors

i) f est dérivable à droite et à gauche sur I.

ii) f est continue sur I.

Preuve

i) Soit $x_0 \in I$. Montrons que f est dérivable à droite et à gauche de x_0.

I est un intervalle ouvert, donc il existe $a, b \in I$, tel que $a < x_0 < b$. Soit g la fonction définie sur $[a,b] \setminus \{x_0\}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

alors d'après le lemme précédent, g est croissante sur $[a,b] \setminus \{x_0\}$ et elle est majorée par $f(b)$ et minorée par $f(a)$, donc g possède une limite finie à droite et à gauche au point x_0, par suite f est dérivable à droite et à gauche au point x_0.

ii) f est dérivable à droite et à gauche au point x_0, donc f est continue à droite et à gauche au point x_0, par suite f est continue au point x_0.

4.6.3 Caractérisation de la convexité

Théorème

Soit f une fonction définit et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe, si et seulement si, f' est croissante sur I.

Preuve

$(\Longrightarrow)$ Supposons que f est convexe et montrons que f' est croissante.

Pour cela, pour $a \in I$ et $b \in I$, avec $a < b$, on considère les fonctions φ_a et φ_b définies respectivement sur $I \setminus \{a\}$ et sur $I \setminus \{b\}$ par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{et} \quad \varphi_b(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Alors, on a $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \varphi_a(x)$.

Or d'après le lemme précédent, φ_a est croissante et on a $a < b$, donc $f'(a) \le \varphi_a(b)$.

On a aussi $f'(b) = \lim\limits_{x \to b} \varphi_b(x)$, donc $\varphi_b(a) \le f'(b)$, car φ_b est croissante.

Comme $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$, alors $f'(a) \le f'(b)$ et par suite, $'f$ est croissante.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que f' est croissante et montrons que f est convexe.

Pour cela, d'après le lemme1, il suffit de montrer que si $a \in I$, $b \in I$ et $c \in I$, avec $a < b < c$, alors on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $]a, b[$ puis sur $]b, c[$, on voit qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ et il existe $\beta \in]b, c[$, tels que

$$f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a) \quad \text{et} \quad f(c) - f(b) = f'(\beta)(c - b)$$

Ainsi, on aura

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\beta)$$

Or f' est croissante et on a $\alpha < \beta$, donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$.

Corollaire

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe, si et seulement si, pour tout $x \in I$, on a $f''(x) \ge 0$.

Preuve

La démonstration de ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent, car on sait qu'une fonction dérivable sur un intervalle I est croissante, si et seulement si, sa dérivée est positive sur I.

4.6.4 Quelques inégalités de convexité

Inégalité de la tangente

Théorème

Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I. Alors on a

$$\boxed{\forall a \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)}$$

Preuve

Si $x = a$, alors l'inégalité est trivial.
Si $x \neq a$, on considère la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Alors on sait, d'après le lemme2, que φ_a est croissante et on a que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \varphi_a(x)$.
Donc si $x > a$, alors $f'(a) \leq \varphi_a(x)$, par suite, on obtient le résultat.
Ei si $x < a$, alors $f'(x) \geq \varphi_a(x)$, et comme $x - a < 0$, alors on a le résultat.

Exercice

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que

$$\forall a \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$$

Montrer que f est convexe.

Inégalité de Jensen

Théorème

Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et n un enteir ≥ 2. Alors pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n$ éléments de I et pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels positifs vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

Et en particulier, on a

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}}$$

Preuve

On procède par récurrence sur n, avec $n \geq 2$.
Pour $n = 2$, le résultat est vrai d'après la définition de la convexité.
Supposons que la propriètè est vraire pour n et montrons qu'elle est aussi vraie pour $n+1$.
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des éléments de I et soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ des nombres réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Montrons que

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

pour cela, posons $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$, alors deux cas sont possibles :
Si $\lambda = 0$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $\lambda_i = 0$, donc dans ce cas le résultat est trivial, car $\lambda_{n+1} = 1$, donc $f(\lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$.
Si $\lambda \neq 0$, pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, posons $\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda}$, donc on aura $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
Comme I est un intervalle, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in I$. Ainsi on aura

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + (1-\lambda) x_{n+1}\right) \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right) \\
&\leq \lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \quad (\text{car } f \text{ est convexe}) \\
&\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + (1-\lambda) f(x_{n+1}) \quad (\text{car pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \lambda \alpha_i = \lambda_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

Le cas particulier s'obtient en posant $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.

Exemples

La fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, donc pour tout entier $n \geq 2$, en appliquant l'inégalité de Jensen pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, on aura

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Inégalités des moyennes arithmétique et géométrique

Théorème

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs, alors leur moyenne arithmétique est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique :

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

Preuve

La fonction $\ln(x)$ a pour dérivée seconde $-\dfrac{1}{x^2}$, donc $\ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$, par suite, on a

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)}{n}$$

Donc en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres de l'inégalité, on aura le résultat.

Remarques

En remplaçant dans l'inégalité précédente chaque x_i par $\dfrac{1}{x_i}$, on obtient ce qu'on appelle l'inégalité des moyennes harmonique et géométrique :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Ainsi, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$$

Inégalité de Hölder

Théorème

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs, p et q deux nombres réels strictement positifs, tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors on a

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Preuve

Soient u et v deux nombres réels strictement positifs, comme $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, alors la concavité de la fonction ln permet d'écrire

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q\right)\geq\frac{1}{p}\ln(u^p)+\frac{1}{q}\ln(v^q)$$

avec $\geq\dfrac{1}{p}\ln(u^p)+\dfrac{1}{q}\ln(v^q)=\ln(uv)$, ainsi on obtient

$$uv\leq\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q$$

Posons $A=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ et pour chaque $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, posons $u_i=\dfrac{a_i}{A}$ et $v_i=\dfrac{b_i}{B}$, alors on aura

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},\ u_iv_i\leq\frac{1}{p}u_i^p+\frac{1}{q}v_i^q$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}{AB}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i^p=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}{A^p}=1$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i^p=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q}{B^q}=1$$

Comme $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, alors on aura le résultat

Inégalité de Minkowski

Théorème

Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ des nombres réels strictement positifs et p un réel, avec $p>1$. Alors on a

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Preuve

Posons $q=\dfrac{p}{p-1}$, alors $q>0$ et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, donc d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

On a aussi

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

En faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Donc en simplifiant, on aura

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

4.7 Exercices

4.7.1 Limites - Continuité

Exercice

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} x^2\left(\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{2}{x}\right)\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)+x}{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)-x}$$

Exercice

Soit $f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f est majorée, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe et on a $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\sup\limits_{x\in[a,b[} f(x)$.
2. Montrer que si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$.
3. Enoncé un résultat analogue pour une fonction décroissante $f:]a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$
4. En déduire que si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors pour tout point x_0 de $]a,b[$, f possède une limite à droite et une limite à gauche au point x_0 et on a $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\leq f(x_0)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Exercice

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.
Montrer que si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

Notations de Landau

Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de x_0, avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Montrer que

1. Si $f_1(x) = \mathrm{o}(g(x))$ et $f_2 = \mathrm{o}(g(x))$ alors $f_1(x) + f_2(x) = \mathrm{o}(g(x))$ au voisinage de x_0.
2. Si $f_1(x) = \mathrm{O}(g(x))$ et $f_2 = \mathrm{O}(g(x))$ alors $(f_1 + f_2)(x) = \mathrm{O}(g(x))$ au voisinage de x_0.
3. Si $f_1(x) = \mathrm{o}(g_1(x))$ et $f_2 = \mathrm{o}(g_2(x))$ alors $(f_1 f_2)(x) = \mathrm{o}((g_1 g_2)(x))$ au voisinage de x_0.
4. Si $f_1(x) = \mathrm{O}(g_1(x))$ et $f_2 = \mathrm{O}(g_2(x))$ alors $(f_1 f_2)(x) = \mathrm{O}((g_1 g_2)(x))$ au voisinage de x_0.

Fonctions équivalentes

Soient f, f_1, g, g_1 des fonctions définies au voisinage de x_0, avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

1. Montrer que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de x_0, si et seulement si,
   $f(x) - g(x) = \mathrm{o}(g(x))$
2. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si f est dérivable en x_0, alors $f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0.
3. On suppose que $f(x) \sim g(x)$ et $f_1(x) \sim g_1(x)$ au voisinage de x_0. Montrer que
   a) $(fg)(x) \sim (f_1 g_1)(x)$ au voisinage de x_0.
   b) Si $f_1(x)$ ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors $g_1(x)$ ne s'annule pas au voisinage de x_0 et on a
   $$\frac{f(x)}{f_1(x)} \sim \frac{g(x)}{g_1(x)}$$
   c) Si f et g sont positives et ne s'annulent pas dans un voisinage de x_0, alors poue tout $\alpha > 0$, on a $f(x)^\alpha \sim g(x)^\alpha$ au voisinage de x_0.

Exercice

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x - [x]}, \quad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}, \quad h(x) = [x] + (x - [x])^2$$

Exercice

Etudier la continuité de la fonction suivante

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x-1)\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

Exercice

1. Etudier la continuité et les prolongements éventuels des fonctions suivantes

$$f(x) = 1 - x\left[\frac{1}{x}\right],\quad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},\quad h(x) = x - [x] - (x - [x])^2$$

2. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

soit prolongeable par continuité au point 0.

Exercice

Déterminer a et b pour que la fonction suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ (ax+b)^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Exercice

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors f est constante.
2. Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors f est constante sur I.
3. Montrer, plus généralement, que si $\mathbb{R} \setminus f(I)$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors f est constante.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction, telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

Montrer que $f = Id_{[0,1]}$ ou $f = 1 - Id_{[0,1]}$.

Fonctions périodiques

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $G(f) = \{T \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$. Rappelons que f est dite périodique, si $G(f) \neq \{0\}$ et si $T \in G(f)$, on dit que T est une période de f et que f est périodique de période T ou que f est T-périodique.

1. Montrer que $G(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $G(f) = \mathbb{R}$, si et seulement si, f est constante.
3. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et soit f la fonction indicatrice de G. Montrer que $G(f) = G$.
4. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ un homomorphisme de groupes. Vérifier que $G(f) = \ker(f)$.
5. Soit f une fonction périodique. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que f admet une limite à gauche ou une limite à droite au point a et que $G(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
6. Soit f une fonction périodique non constante. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que f soit continue à gauche ou à droite de a. Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}$, tel que $G(f) = T\mathbb{Z}$.

Exercice

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, telles que

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad f(b) = b$$

montrer qu'il existe $c \in [a,b]$, tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f\left(x_0 + \dfrac{T}{2}\right) = f(x_0)$.

Fonctions lipschitziennes

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

   a) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \dfrac{|a|}{1+a^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

   b) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x \neq y$, on a $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq 1$

   c) En déduire que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

   a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{|x^2 - y^2|}{|x| + |y|}$.

   b) Montrer que g est 1-lipschitzienne sur une partie de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

3. Soit f une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle non vide I.

   a) Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$, tel que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq k|x| + C$.

   b) En déduire que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Continuité uniforme

1. Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sont finies.

   Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ soit finie.

   Montrer que f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$.

Exercice

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continue, avec $a < b$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in [a, b]$, tel que

$$\frac{1}{n} f(a) + \frac{n-1}{n} f(b) = f(x_n)$$

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, telle $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geq 0$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$, avec $0 \leq l < 1$?.
Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$.
montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. On suppose qu'il existe $a > 0$, tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$$

Montrer que f est bijective.

Exercice

Pour chaque entier $n \geq 2$, soit f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique x_n, tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n + 3x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement croissante.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1]$, tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $f_{n+1} \leq f_n$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante puis qu'elle est convergente.
5. Déteminer la limite l de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
6. Mêmes questions pour la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g_n(x) = x^n + x^2 - 1$.

? Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. **a)** Montrer que f est paire et étudier les variations de f.

   b) Montrer qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$, tel que $f(l) = l$ et justifier que $0 \leq l \leq \dfrac{1}{2}$.

   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$$

   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

   b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq |u_n - l| \ \text{ et } \ |u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

   c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

   d) Déterminer un entier naturel n, tel que u_n soit une valeur approchée à 0.5×10^{-3} près.

? Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

1. **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n}$$

   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1$.

   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$.

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

   d) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}$.

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

? Exercice

Pour chaque entier $n \geq 3$, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variation de g_n.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{x} > \ln(x)$.
3. **a)** Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ possède une solution unique α_n dans $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Montrer que $\forall n \geq 3$, $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

? Exercice

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, telles que

$$g \circ f = f \circ g$$

On se propose de montrer qu'il existe $l \in [0,1]$, tel que $f(l) = g(l)$. Pour cela on suppose, par absurde, que $\forall l \in [0,1],\ f(l) \neq g(l)$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$, tel que $f(\alpha) = \alpha$.
2. On pose $h = f - g$. Montrer que h est de signe constant.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = \alpha \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$$

   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = u_n$

   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

   d) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite l, avec $l \in [0,1]$. (On ne cherchera pas à calculer l).
4. **a)** Montrer que $f(l) = l$.

   b) Montrer que $g(l) = l$.

   c) En déduire une contradiction.

? Exercice

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, telles que

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) + m < g(x)$.

? Exercice

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $m > 0$, tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) > m$.

? Exercice

1. Soient a et b deux nombres réels, tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application continue.

   En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$, tel que $f(\alpha) = \alpha$.

2. Soient $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues sur $[0, 1]$, telles que $g \circ f = f \circ g$. On pose $A = \{x \in [0, 1] \ : \ f(x) = x\}$

   a) Montrer que A est non vide et que A possède une borne supérieure, qu'on note M, et une borne inférieure, qu'on note m.

   b) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de A qui converge vers une limite l. Montrer que $l \in A$.

   c) Montrer que $M \in A$ et $m \in A$.

   d) Montrer que $g(A) \subseteq A$.

   e) Montrer que $g(M) \leq f(M)$ et $f(m) \leq g(m)$.

   f) Déduire de ce qui précède, qu'il existe $\beta \in [0, 1]$, tel que $f(\beta) = g(\beta)$.

4.7.2 Dérivabilité

? Exercice

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur $[0, 1]$ et soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que g soit dérivable sur $[0, 1]$.

? Exercice

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = 0$, $f \geq 0$ et telle que

$$\exists a > 0 \ : \ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leq af(x)$$

Montrer que f est nulle. (On pourra utiliser la fonction $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{ax}$).

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet une dérivée symétrique en 0, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \text{ existe et est finie}$$

a) Montrer que si f est dérivable en 0, alors f admet une dérivée symétrique en 0 et la calculer.

b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } \ x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b et c pour que f soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Est-ce que, dans ce cas, f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?

Théorème de Darboux

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, tels que $I \cap J \neq \emptyset$.
   Montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour $a \in I$ et $b \in I$, avec $a < b$, on considère les fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } \ x \neq a \\ f'(a) & \text{si } \ x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } \ x \neq b \\ f'(b) & \text{si } \ x = b \end{cases}$$

   a) Montrer que g et h sont continues sur $[a, b]$.

   b) Montrer que $g([a, b]) \cap h([a, b]) \neq \emptyset$ et en déduire que $g([a, b]) \cup h([a, b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que $g([a, b]) \subseteq f'([a, b])$ et $h([a, b]) \subseteq f'([a, b])$

   c) On suppose que $f'(a) < f'(b)$. Déduire de ce qui précède que pour tout $y \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $x \in]a, b[$, tel que $f'(x) = y$.

Théorème de Darboux, deuxième démonstration

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soient $a \in I$ et $b \in I$, avec $a < b$ et $f'(a) \neq f'(b)$, alors quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$. Pour $c \in]f'(a), f'(b)[$, on considère la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - cx$.

1. Montrer que g est minorée et que g atteint son minimum en un point d de $[a, b]$.
2. Montrer que $d \neq a$ et $d \neq b$ et en déduire que d est un minimum local de g.
3. Déduire de ce qui précède que $f'(d) = c$.

4.7.3 Théorème de Rolle

Exercice

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

   Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $f(\alpha) = 0$.
2. En déduire que si P est un polynôme à coefficients réels de degré impair, alors P possède au moins une racine réelle.

Exercice

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice

Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré n, avec $n \geq 2$.

1. Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que si P possède n racines réelles deux à deux distinctes, alors P' possède $n - 1$ racines réelles deux à deux distinctes.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$. On considère la fonction g définie sur $]0, a]$, par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

a) Montrer que g' s'annule sur $]0, a[$.

b) En déduire qu'il existe $x_0 \in]0, a[$, tel que la tangente de f au point x_0 passe par l'origine.

Exercice

Soient a, b et c trois nombres réels. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$, tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui s'annule une infinité de fois sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$, tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Exercice

Soient b un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[0, b]$ et dérivable sur $]0, b]$, telle que $f(0) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b, avec $a < b$, tels que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$, tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) > 0$.
Montrer que si α et β sont deux nombres réels strictement positifs, alors il existe $c \in]0, 1[$, tel que

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \frac{f'(c-1)}{f(c-1)}$$

On pourra utiliser la fonction $g(x) = f(x)^{\alpha} f(x-1)^{\beta}$.

Exercice

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1[$, telle que f s'annule en trois points deux à deux distincts de $]0,1[$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$, tel que $f''(c) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]0,1[$, telle que f s'annule en $n+1$ points deux à deux distincts de $]0,1[$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$, tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
3. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, $n \geq 1$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tels que $a \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq b$ et $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$.
   Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$, tel que
   $$f(t) = \frac{(t-a_1)(t-a_2)\ldots\ldots(t-a_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

Exercice

Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$, telles pour tout $x \in]a,b[$, on a $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b[$, on a $g(x) \neq g(b)$. (On pourra faire un raisonnement par absurde et on appliquera le théorème de Rolle).
2. En considèrant la fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
   $$\forall x \in [a,b],\ h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$$
   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
3. On suppose que $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = l$$
4. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$, tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$, telle que

$$f(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad f(b) = f'(b)$$

En appliquant le théorème de Rolle à des fonctions bien choisies, montrer que

a) Il existe $c \in]a,b[$, tel que $f'(c) = f''(c)$

b) Il existe $d \in]a,b[$, tel que $f(d) = f''(d)$.

Exercice

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

On pourra utiliser la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{2}\left(f'(a) + f'(t)\right) + \frac{(t-a)^3}{12} K$$

où la constante K sera choisis telle que $\varphi(b) = 0$

4.7.4 Théorème des accroissements finis

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $x \in]a,b[$, tel que $\alpha f(x) + f'(x) = 0$

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$.

1. On suppose que $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que $f''(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = f'(b) = 0$.
   Montrer qu'il existe $x_1 \in]a,b[$ et il existe $x_2 \in]a,b[$, avec $x_1 \neq x_2$, tels que

$$f''(x_1) = f''(x_2)$$

Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $0 < a < b$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Exercice

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels, tels que

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \ldots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

Monter que le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ a au moins une racine dans $]0, 1[$.

Exercice

Montrer que chacune des équations suivantes possède une seule racine réelle :

a) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$,

b) $3^x + 4^x = 5^x$

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0; 2]$, deux fois dérivable sur $]0, 2[$, telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(2) = 2$$

Montrer qu'il existe $a \in]0, 2[$, tel que $f''(a) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$, tel que

$$\forall x \in]a, b[, \ |f''(x)| \leq M$$

Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b[$.

Exercice

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, avec $a_n > 0$, un polynôme réel ayant n racines réelles deux à deux distinctes et soit $Q(X) = P(X)^2 - P'(X)$. Montrer que

a) Si n est impair, alors Q possède exactement $n+1$ racines réelle deux à deux distinctes.

b) Si n est pair, alors Q possède exactement n racines réelle deux à deux distinctes.

4.7.5 Formules de taylor - Développents lmités

Exercice

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 de la fonction cosinus hyperbolique sur l'intervalle $[0, a]$.
2. Montrer que
$$0 \leq \text{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!}\text{ch}(a)$$
3. En déduire que
$$\frac{433}{384} \leq \text{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Exercice

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange entre 1 et t, montrer que pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a
$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln t < t - 1$$

Exercice

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor-Young, établir
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a)$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. Soient $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$, tels que tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq M_1$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

1. Soient $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange au intervalles $[x - \alpha, x]$ et $[x, x + \alpha]$, montrer que
$$|f'(x)| \leq \frac{M_1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}M_2$$
2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq \sqrt{2M_1M_2}$$

Exercice

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0)=0$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x) - xf'(0)| \leq M\frac{x^2}{2}$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.
2. En déduire que f est nulle.
3. Le résultat reste-t-il vrai, si on suppose que P est de degré pair ?

Exercice

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et il existe $M > 0$, tel que $\forall x \in]0,1[,\ |f''(x)| \leq M$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \frac{M}{2}$$

Exercice

Soit f une fonction ce classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telle que

i) Il existe $A > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leq A$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 et que pourtant $f''(0)$ n'existe pas.

4.7.6 Fonctions convexes

? Exercice

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que

$$\forall x \in I, \forall y \in I,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe sur I.

? Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est strictement croissante, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que si f est bornée, alors elle est constante.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, alors f est positive.
4. Montrer que si f est dérivable, alors f' est continue.
5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ x < y < z \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0$$

? Exercice

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f, alors a est un minimum global.

? Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable.
On suppose qu'au voisinage de 0, on a

$$f(x) = a + bx + \frac{cx^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et que $f''(0) = c$.

Exercice

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. En utilisant l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique, montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Exercice

En utilisant l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique, montrer que

i) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, \forall c \in \mathbb{R}^+,\ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$

ii) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, \forall c \in \mathbb{R}^+,\ (a+b+c)^3 \geq 27abc.$

iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}.$

Exercice

Montrer que

$$\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}_+^*,\ x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

Exercice

Soit $f(x) = \ln(\ln(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est concave sur son domaine de définition.
3. En déduire que

$$\forall a \in]1, +\infty[, \ \forall b \in]1, +\infty[,\ a < b \Longrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

4.7.7 Equations fonctionnelles

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = \dfrac{f(x)}{2} + 3.$
2. Montrer que f' est constante.
3. Déterminer la fonction f.

Exercice

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriètés suivantes :

i) f est continue sur $\mathbb{R}$.

ii) f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

1. **a)** Montrer que la fonction nulle est dans $\mathscr{E}$.

   b) Montrer que la fonction cos est dans $\mathscr{E}$.

   c) Si $f \in \mathscr{E}$ et si $\omega \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $f_\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_\omega(x)=f(\omega x)$ est dans $\mathscr{E}$.

2. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que

   a) $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

   b) Si $f(0)=0$, alors f est identiquement nulle.

   c) Si $f(0)=1$, alors f est une fonction paire.

   d) Si $f(0)=1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2-1$.

   e) S'il existe $a \in \mathbb{R}^*$, tel que $f(a)=0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x-2a)=-f(x)$.
   En déduire que f est $4a$-périodique.

3. On suppose dans toute la suite que $f \in \mathscr{E}$ et que $f(0)=1$.

   a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Soit $A=\{x \in \mathbb{R}_+^* \ :\ f(x)=0\}$.
   Montrer que A possède une borne inférieure, qu'on note a.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$, tel que $a \leq x_n < a+\dfrac{1}{2^n}$ et en déduire que $f(a)=0$ et que $a>0$.

   d) montrer que $\forall x \in [0,a[,\ f(x)>0$.

4. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x)=\cos(\omega x)$, avec $\omega=\dfrac{\pi}{2a}$ et on suppose toujours que $f \in \mathscr{E}$ et que $f(0)=1$.

   a) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=2\left[f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2-1$.
   En déduire que pour tout $q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$.

   b) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)=g\left(\dfrac{pa}{2^q}\right)$.

   c) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite $(u_q)_{q\geq 0}$ de terme général $u_q=\dfrac{a}{2^q}\left[\dfrac{2^q x}{a}\right]$ converge vers x et que $f(u_q)=g(u_q)$.

   d) En déduire de ce qui précède que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ [1 - f(x)f(y)]f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si f admet une limite lorsque x tend vers l'infini, alors cette limite est nulle.
4. Montrer que f est impaire.
5. On pose $A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ f(x) = 0\}$.
   a) Montrer que A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   b) Montrer que si $x \in A$, alors $\dfrac{x}{2} \in A$.
6. On suppose, par absurde, que $A = \{0\}$.
   a) Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f(a) > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) > 0$.
   b) Que peut-on dire s'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $f(a) < 0$?
   c) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $f(x-y)$ et $f(x$à $- f(y)$ ont même signe.
   d) En déduire que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
   e) En utilisant la question 3, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
7. **a)** Montrer qu'il existe $a \in A$, avec $a > 0$.
   b) Soit $a \in A$, avec $a > 0$. Montrer que
      i) $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a}{2^n} \in A$.
      ii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \dfrac{ma}{2^n} \in A$.
   c) Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{a\left[\dfrac{2^n x}{a}\right]}{2^n}$$

   Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. En déduire que $x \in A$.
   d) Conclure.

? Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(1) = 0$, $f'(0) > 0$ et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f'(f(x))) = 1$$

a) Justifier que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que f est strictement monotone.

c) Montrer qu'il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$.

d) Déterminer f.

? Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, telle que

i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

ii) $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$.

a) Montrer que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$.

b) Déterminer f.