RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université d'Alger 1 (Alger), Faculté des Sciences,

Département de Mathématiques et Informatique.

Cours d'analyse mathématique 1

Présenté par : **Kamal BACHOUCHE**

Maître de Conférences

Département de Mathématiques et Informatique

Faculté des Sciences, Université d'Alger 1, Alger.

Alger, le 27/09/2016.

e-mail : bachouchetudiant2016@gmail.com

Ce cours polycopié présente le contenu du cours d'Analyse 1. Il est composé de 6 chapitres :

1. Corps des nombres réels.
2. Suites réelles.
3. Limites et continuité des fonctions.
4. Dérivation.
5. Développements limités.
6. Fonctions circulaires réciproques.

أهلا بكم في كلية العلوم، جامعة الجزائر1، بن يوسف بن خدة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

نطلب منكم العمل والصبر، ونتمنى لكم سنة جامعية مُوفقة

الجزائر، في 2016/09/27

د/ كمال باشوش

Chapitre 1

Corps des nombres réels

1.1 Introduction

Rappelons d'abord, les ensembles suivants :
$\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels $= \Big\{0, 1, 2, 3, ...\Big\}$,
$\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs $= \Big\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\Big\}$,
$\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels $= \Big\{x; \quad x = \dfrac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\Big\}$.

1.2 Opérations dans $\mathbb{R}$

On munit $\mathbb{R}$ de deux lois internes ; l'addition $(+)$ et la multiplication $(.)$, et d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifient les axiomes suivants, pour tous $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$:

1. $x + y = y + x$ (l'addition est commutative),
2. $x + (x + y) = (x + y) + z$ (l'addition est associative),
3. il existe un réel noté par 0 (l'élément neutre de l'addition) tel que $x + 0 = 0$,
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $(-x) \in \mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = 0$,
5. $x.y = y.x$,

6. $x.(y.z) = (x.y).z$,
7. il existe un réel noté par 1 ($\neq 0$) (l'élément neutre de la multiplication) tel que $1.x = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
8. pour tout $x \neq 0$, il existe un réel noté x^{-1} tel que $x.x^{-1} = 1$,
9. $x.(y+y) = x.y+x.z$ (distributivité de la multiplication sur l'addition),
10. on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, (on dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné),
11. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$, (la relation $\leq$ est réflexive),
12. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, on obtient de $x \leq y$ et $y \leq x$ que $x = y$ (la relation $\leq$ est antisymétrique),
13. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, on obtient de $x \leq y$ et $y \leq z$ que $x \leq z$ (la relation $\leq$ est transitive),
14. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, on obtient de $x \leq y$ que $x+z \leq y+z$, (l'addition est compatible avec la relation $\leq$),
15. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, on obtient de $x \leq y$ avec $0 < z$ que $x.z \leq y.z$, (la multiplication est compatible avec la relation $\leq$),
16. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, on a $x.y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

On résume toutes ces propriétés dans la proposition suivante :

Proposition 1.1. $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un corps commutatif.*

1.3 Ensembles bornés

1.3.1 Borne supérieure - Borne inférieure

Définition 1.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que*

1. *A est majorée, s'il existe un réel M tel que $\forall\, x \in A, \quad x \leq M$.*
   Le réel M est appelé majorant de A.

2. *A est minorée, s'il existe un réel m tel que $\forall\, x \in A, \quad m \leq x$.*
   Le réel m est appelé majorant de A.
3. *A est bornée, si elle est majorée et minorée à la fois.*

Exemple 1.1. *On va le voir à l'amphithéâtre.*

Remarque 1.1. *D'après ce qui précède, tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de A, il en existe une infinité et le plus petit des majorants est appelé la borne supérieure de A. Il est noté* $\sup(A)$.

L'existence de $\sup(A)$ est assuré par l'axiome suivant :

Proposition 1.2 (Axiome de la borne supérieure)**.** *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
De même, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Définition 1.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Le réel α est* ***la borne supérieure*** *de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants de A. S'il existe on le note* $\sup(A)$.
2. *Le réel β est* ***la borne inférieure*** *de A si β est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants de A. S'il existe on le note* $\inf(A)$.

Exemple 1.2. *On va le voir à l'amphithéâtre.*

Remarque 1.2. 1. *Si $M = \sup(A)$, alors on a*

$$\Big(\forall\, x \in A,\, x \leq M\Big) \quad \textit{et} \quad \Big(M \leq M',\ \textit{pour tout majorant } M' \textit{ de } A\Big).$$

2. *Si $m = \inf(A)$, alors on a*

$$\Big(\forall\, x \in A,\, m \leq x\Big) \quad \textit{et} \quad \Big(m' \leq m,\ \textit{pour tout minorant } m' \textit{ de } A\Big).$$

Proposition 1.3 (Caractérisation de la borne supérieure - inférieure)**.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et soit $M \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $M = \sup(A)$,
2. (a) $\forall\, x \in A, \quad x \leq M$,

   (b) $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad (y < M \Longrightarrow \exists\, x \in A,\, y < x)$,
3. (a) $\forall\, x \in A, \quad x \leq M$,

   (b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in A, \quad M - \varepsilon < x \leq M$.

De même, on a

Proposition 1.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et soit $m \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $m = \inf(A)$,
2. (a) $\forall\, x \in A, \quad m \leq x$,

   (b) $\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad (y > m \Longrightarrow \exists\, x \in A,\, y > x)$,
3. (a) $\forall\, x \in A, \quad m \leq x$,

   (b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in A, \quad m \leq x < m + \varepsilon$.

Proposition 1.5. *1. Si la borne supérieure existe, elle est unique.*

2. Si la borne inférieure existe, elle est unique.

1.3.2 Maximum - Minimum

Définition 1.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que le réel α est le plus grand élément de A (ou le maximum de A) si*

$$\alpha \in A \text{ et } \quad \forall\, x \in A,\, x \leq \alpha.$$

   Si ce α existe, il est unique, on le note $\max(A)$.

2. *On dit que le réel β est le plus petit élément de A (ou le minimum de A) si*
$$\beta \in A \textit{ et } \quad \forall\, x \in A,\, \beta \leq x.$$
Si ce β existe, il est unique, on le note $\min(A)$.

Remarque 1.3. 1. *Si* $\sup(A)$ *existe avec* $\sup(A) \in A$*, alors* $\sup(A) = \max(A)$.

2. *Si* $\inf(A)$ *existe avec* $\inf(A) \in A$*, alors* $\inf(A) = \min(A)$.

1.4 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x par
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x. & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposition 1.6. *Pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes*

1. $0 \leq |x|, \quad |-x| = |x|, \quad (|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0)\,,$
2. $-|x| \leq x \leq |x|,$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|,$ *(inégalité triangulaire)*
4. $|xy| = |x|.|y|,$
5. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$
6. *pour* $\alpha \geq 0$*, on a* $(|x| \leq \alpha) \Leftrightarrow (-\alpha \leq x \leq \alpha),$
7. $\sqrt{x^2} = |x|.$

Proposition 1.7. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante*
$$(A \textit{ est bornée}) \Leftrightarrow \Big(\exists k > 0, \forall\, x \in A, \quad |x| \leq k\Big).$$

1.5 Propriété d'Archimède

Proposition 1.8.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad x < n.$$

Proposition 1.9. $\mathbb{R}$ *est archimédien, i.e.*

$$\forall\, x > 0,\, \forall\, y \in \mathbb{R},\, \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad nx > y.$$

Cette propriété permet de définir la partie entière d'un nombre réel.

Définition 1.4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif, la partie entière, notée $E(x)$ (ou $[x]$) tel que*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Exemple 1.3.

$$E(2.4) = 2,\ E(-2.4) = -3,\ E(2/3) = 0,\ E(6) = 6.$$

1.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

• Le voisinage

Définition 1.5. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un voisinage de x_0, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha[\subset A$.*

Remarque 1.4. *1. Tout nombre réel admet une infinité de voisinages.*

2. On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.

3. Si A est un voisinage de x_0, on écrit $A \in \mathcal{V}(x_0)$.

4. On a $]x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha[\in \mathcal{V}(x_0)$.

Exemple 1.4. $[1,\, 5[\in \mathcal{V}(2)$, $[1,\, 5[\notin \mathcal{V}(1)$.

Pour la densité, on a le théorème suivant

Théorème 1.1. *1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*

2. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

Le théorème suivant est le principe de Cantor des intervalles emboîtés.

Théorème 1.2. *Supposons qu'à tout entier naturel n on associe un intervalle fermé $I_n = [a_n, b_n]$ tel que pour tout n on a $I_{n+1} \subset I_n$. Alors*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Exemple 1.5. *1. Soit $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$. On a $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n = \{0\}$.*

2. Soit $I_n = \left]0, \dfrac{1}{n+1}\right[$. On a $I_{n+1} \subset I_n$, mais $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset$.

1.7 Exercices

Exercice 1.1. *Montrer que*

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + \min\{|y|, |x+y|\}$.
4. $(\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq x < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.2. *Soient A et B deux ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$, montrer que :*

1. $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B)$.
2. $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
3. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
4. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

Exercice 1.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
On définit : $-A = \{-x; x \in A\}$. Montrer que si A est borné, alors $\sup(-A) = -\inf(A)$ *et* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Exercice 1.4. *Déterminer, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes*
$A_1 = [0, 1[, A_2 =]-2, 7] \cup \{11\}, A_3 = \Big\{-\frac{1}{x} : 1 \leq x \leq 2\Big\}$,
$A_4 = \Big\{2 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\Big\}$, $A_5 = \Big\{\frac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}$,
$A_6 = \Big\{\sup(\frac{1+n}{n}, \pi + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\Big\}, A_7 = \Big\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}$,
$A_8 = \Big\{\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\Big\}$.

Exercice 1.5. *Soit $A = \{x^2 + y^2 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; xy = 1\}$.*

1. *Déterminer la borne inférieure de A.*

2. *L'ensemble A est-il majoré ?*

Exercice 1.6. *Soit* $[x]$ *la partie entière de* x*, montrer que :*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$.
3. *Est-ce-que* $[x+y] = [x] + [y]$ *et* $[xy] = [x][y]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *?*
4. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z}\,; \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}. \end{cases}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : \left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$.

Exercice 1.7. *Soient* $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ *n'étant pas tous nuls. Soit*

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2.$$

Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est négatif et en déduire que :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{1/2}.$$