Notes de Cours d'Analyse 1

Filière SMIA

Suites numériques et Fonctions

Mme S. AMRAOUI

2016 / 2017

Table des matières

Chapitre 1

LES NOMBRES RÉELS

1.1 Ensembles ordonnés

1.1.1 Définitions, exemples

Définition 1.1. 1. On dit qu'un ensemble E non vide est ordonné s'il est muni d'une relation R, entre éléments de E qui satisfait

i) $\forall x \in E$, xRx (réflexivité),

ii) $\forall x, y \in E$, $(xRy$ et $yRx) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)

iii) $\forall x, y, z \in E$, $(xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$ (transitivité).

On dit que R est une relation d'ordre et on note par (E, R) un ensemble ordonné.

Exemples 1.1.1

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Si E est un ensemble, $(P(E), \subset)$ est un ensemble ordonné.

Définition 1.1.2. On dit qu'un ensemble ordonné E est muni d'un ordre total si tous les éléments de E sont comparables, c'est à dire :

\

$$\forall x; y \in E \text{ on a } x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

Exemples 1.1.2

1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.
2. Si E est un ensemble, $(P(E), \subset)$ n'est pas totalement ordonné.

1.1.2 Eléments remarquables d'un ensemble ordonné.

On note dans la suite toute relation d'ordre par $\leq$.

Définition 1.1.3 Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E

i) Un élément $M \in E$ (respectivement $m \in E$) est dit majorant (respectivement minorant) de A si :

$\forall x \in A$ on a $x \leq M$ (respectivement $m \leq x$).

ii) Si A admet un élément majorant (respectivement minorant) , on dit que A est majoré (respectivement minoré).

iii) Si A est majoré et minoré, on dit que A est borné.

L'ensemble des majorants (respectivement minorants) de A sera noté $M(A)$ (respectivement $m(A)$).

iv) On dit que A admet un plus grand élément (respectivement plus petit élément) et on note $\max(A)$, s'il admet un majorant (respectivement un minorant) qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_0 = \max(A) \in A$ tel que $a \leq a_0$ (respectivement $a \geq a_0$) pour tout $a \in A$.

Exemples 1.1.3 .

1. Dans $(\mathbb{Z}, \leq)$ et $(\mathbb{Q}\ , \leq)$ on a $M(\mathbb{Z}) = \emptyset$, $M(\mathbb{Q}) = \emptyset$ et il n'y a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.

2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, on a $M\left([0,1]\right) = M\left(]0,1]\right) = M\left([0,1[\right) = M\left(0,1[\right) = [1, \infty[$ et $m\left([0,1]\right) = m\left(]0,1]\right) = m\left([0,1[\right) = m\left(0,1[\right) =]-\infty, 0]$.

3. L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de $\leq$ admet zéro comme plus petit élément.

4. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Toute partie non vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (respectivement un plus petit élément).

Remarque 1.1.1 Si l'ensemble $A \cap M(A)$ (respectivement $A \cap m(A)$) est non vide, alors il est réduit à un seul élément et cet élément est $max(A)$ (respectivement $\min(A)$). On a donc : $\begin{array}{l} A \cap M(A) = \max(A) \\ A \cap m(A) = \min(A) \end{array}$

En effet, $a, a' \in A \cap M(A) \Rightarrow a \leq a'$ et $a' \leq a$. Par suite $a = a'$.

Définition 1.1.4.

i) On appelle borne supérieure dans E, d'une partie A non vide majorée de $(A, \leq)$, le plus petit des majorants (s'il existe). Il est noté par $\sup\limits_E(A)$.

ii) On appelle borne inférieure dans E, d'une partie A non vide minorée de $(A, \leq)$, le plus grand des minorants (s'il existe). Il est noté par $\inf\limits_E(A)$.

Nous avons : $\sup\limits_E(A) = \min(M(A))$ et $\inf\limits_E(A) = \max(m(A))$

Remarque 1.1.2

$\max(A) \in A$, $\sup\limits_E(A) \notin A$ en général. De même $\min(A) \in A$, $\inf\limits_E(A) \notin A$ en général.

Proposition 1.1. 1. Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

i) Si $\max(A)$ existe, alors $\sup\limits_E(A)$ existe et $\sup\limits_E(A) = \max(A)$.

ii) Si $\sup\limits_E(A)$ existe et $\sup\limits_E(A) \in A$, alors $\max(A)$ existe et $\max(A) = \sup\limits_E(A)$

(Enoncé analogue pour $\min(A)$ et $\inf\limits_E(A)$).

Démonstration.

i) Si $\max(A)$ existe, on a $\max(A) = A \cap M(A)$. Il en résulte que $M(A) \neq \emptyset$. Soit donc $x \in M(A)$. Nous avons $(\forall a \in A\ x \geq a) \Rightarrow x \geq \max(A)$.

Par conséquent $\max(A) \in M(A) \cap \min(M(A)) = \{\min(M(A)\}$.
On en déduit que $\max(A) = \min(M(A))$.
ii) On a $\sup_E(A) = \min(M(A)) \in M(A)$ et $\sup_E(A) \in A$.
Par suite $\sup_E(A) \in A \cap M(A)$ et alors $\sup_E(A) = \max(A)$.

1.2 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, ...\}$.
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels : c'est l'ensemble des fractions $\left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$
.

Tout rationnel s'écrit sous la forme, dite irréductible $\frac{p}{q}, q \neq 0$ avec p et q premiers entre eux.

L'ensemble $\mathbb{N}$ possède les propriétés suivantes :
• Tout élément n a un successeur,
• $n < n' \Leftrightarrow n + 1 \leq n'$ est le successeur de n pour l'ordre, il n'y a rien entre les deux,
• Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

De même tout élément de $\mathbb{Z}$ a un successeur, mais $\mathbb{Z}$ n a pas de plus petit élément.

Remarque 1.2.1

Entre deux rationnels $q < p$ quelconques il y a une infinité de rationnels. En effet $p = \frac{p+q}{2}$ est un nombre rationnel et vérifie $q < p' < p$. Ainsi de suite, on peut en construire une infinté entre q et p.

Avec cette remarque, on voit qu'aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de successeur dans Q. En effet, si on considère l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{Q}; p > q\}$, alors A n'a pas de plus petit élément. Sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire p' tel que $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

1.3 Les nombres réels

1.3.1 Introduction

L'équation $x^2 = a$ n'a pas toujours de solutions dans $\mathbb{Q}$. Par exemple $\sqrt{2} \notin Q$. En effet , supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}, q \neq 0$ avec p et q premiers entre eux. On a alors $p^2 = 2q^2$. Par conséquent, p^2 est pair, donc p l'est aussi et ainsi $p = 2k$. Donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ et $2k^2 = q^2$. Par suite q est pair. Ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

On construit alors, l'ensemble des réels qui contient l'ensemble des nombres rationnels Q et d'autres réels qui sont dit irrationnels.

Il existe de nombreuses constructions de $\mathbb{R}$ (que nous n'aborderons pas dans ce cours). Nous nous contenterons d'étudier les propriétés essentielles (axiomes) des nombres réels , lesquelles propriétés sont à la base de toute l'analyse mathématique. Le premier axiome est que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ et le second est que R est ordonné et possède une propriété dite de la borne supérieure. L'ensemble R possède d'autres propriétés que peuvent être démontrés en utilisant les axiomes précédents.

1.3.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

On munit l'ensemble R de deux lois de composition internes l'addition et la multiplication.

L'addition

Cette loi vérifie les propriétés suivante :
- Associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x + (y + z) = (x + y) + z$
- Admet un élément neutre noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$
- Tout élèment admet un opposé : $\forall x \in \mathbb{R},\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$
- Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$

L'ensemble des réels muni de l'addition est un groupe commutatif.

La multiplication

L'ensemble $\mathbb{R}^*$(ensemble des réels privé de 0), muni de la multiplication, est un autre groupe commutatif.
- Associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x.(y.z) = (x.y).z$
- Élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x.1 = 1.x = x$
- Inverse : : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x.\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right).x = 1$
- Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x.y = y.x$
- Distributivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$

L'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.

1.3.3 L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps ordonné

On définit sur une relation d'ordre, noté $\leq$. Cette relation d'ordre est total car deux réels quelconques peuvent toujours être comparés.

Pour des raisons de commodité, on utilise aussi couramment les notations $\geq, >, <$

Notation :

$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$

$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$

$x < y \Leftrightarrow x \geq y$ et $x \neq y$

On utilise aussi les ensembles de réels notés $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}, \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$et $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$.

La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication entre réels positifs.

• $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
• $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
• $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+$, $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$
• $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+$, $x < y \Rightarrow xz < yz$

Comme conséquence de ces relations de compatibilité, on obtient les règles suivantes qui permettent de combiner des inégalités.

$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$

On peut donc ajouter deux inégalités de même sens (attention : on ne peut pas ajouter deux inégalités de sens opposés ni soustraire deux inégalités de même sens).

On peut multiplier deux inégalités de même sens, si elles concernent des réels positifs ou nuls. (attention : on ne peut pas multiplier deux inégalités de sens opposés, ni diviser des inégalités de même sens, ni multiplier des inégalités qui concernent des réels négatifs.

1.3.4 Propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1 Propriété de la borne supérieure (respectivement inférieure)

On dit qu'un ensemble ordonné E possède la propriété de la borne supérieure si toute partie non vide majorée (respectivement minorée) de E possède une borne supérieure (respectivement inférieure).

Question : Est-ce vrai pour $\mathbb{Z}$? pour $\mathbb{Q}$?

Donnons des réponses partielles :

C'est vrai pour $\mathbb{Z}$: toute partie majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément, c'est donc sa borne supérieure.

C'est faux pour $\mathbb{Q}$, considérons $A = \{x \ \ /x \in \mathbb{Q}$ et $x^2 < 2\}$; la partie A est majorée dans $\mathbb{Q}$, mais n'admet pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$. Sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire p' tel que $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

Définition 1.3.2. On appelle corps des nombres réels et on le note par $(\mathbb{R}, +, .)$, tout corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale , compatible avec l'addition vérifiiant la propriété de la borne supérieure.

$(\mathbb{R}, +, .)$ vérifie donc les propriétés suivantes :
1/ $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.
2/ $(\mathbb{R}, +, .)$ est muni d'une relation d'ordre totale , compatible avec l'addition
3/ Toute partie non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

1.3.5 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition 1.3.4. La valeur absolue d'un nombre réel x est le nombre réel positif, noté par $|x|$ et défini par : $|x| = \sup(x, -x)$, ou encore

$$|x| \quad = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x \\ -x & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

De la définition résulte immédiatement les propriétés suivantes :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |-x|$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \ -|x| \leq x \leq |x|$
c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x| = |y| \Longleftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$
d) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^{+}, \quad |x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
e) $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
f) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |xy| = |x|\,|y|$
g) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x+y| \leq |x| + |y|$(inégalité triangulaire).

Montrons g) , si x et y sont de même signe, cette relation est évidente.

Supposons par exemple $x \leq 0 \leq y$, alors $\quad x + y \leq y \leq y + |x|$, ou encore $x + y \leq |y| + |x|$.

De même $\quad x + y \geq x \geq x - |y|$, c'est à dire $x + y \geq -|x| - |y|$.

h) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$. (La propriété *h*) est une conséquence de *g*).

1.3.6 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$*.*

Théorème 1.3.1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les propriétés 1. et 2. suivantes sont équivalentes :

1. $M = \sup(A)$
2. *i*) $\forall x \in A, x \leq M.$
ii)$\forall \varepsilon > 0$,$\exists x \in A$,$x > M - \varepsilon.$

En effet : La propriété *i*) exprime que M est un majorant de A. La négation de 2/ s'écrit : $\quad \exists \varepsilon > 0$,$\forall x \in A, x \leq M - \varepsilon$.

C'est à dire que $M - \varepsilon$ est un majorant de A et M ne serai pas le plus petit.

Réciproquement : Si M vérifie 2, M est un majorant de A et 2**.** signifie qu'il ne peut y avoir de majorant plus petit.

On a une caractérisation analogue pour la borne inférieure, plus précisément :

Théorème 1.3.2 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1/ $m = \inf(A)$
2/*i*) $(\forall x \in A), x \geq m.$
ii)$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A, \ x \prec m + \varepsilon.$

1.3.7 Propriété d'Archimède

Définition, théorème

Théorème 1.3.3. Le corps $\mathbb{R}$ vérifie la propriété d'Archimède, c'est à dire :

A tout couple de nombre réel x et y $(x > 0)$ on peut associer un entier naturel n tel que $nx > y$.

Démonstration.

Soient x et y deux nombres réels avec $x > 0$. Si $y < 0$, on a $nx > y$ pour tout entier naturel n. De même si $y < x$, L'inégalité est vérifié pour $n = 1$. Supposons alors que $0 < x < y$ et notons par A l'ensemble $A = \{nx, n \in \mathbb{N}\}$. Supposons que A est majoré par y et soit M la borne supérieure de A. Nous avons pour tout entier n, $(n+1)x \leq M$. Par conséquent $nx \leq M - x$. Il en résulte que $M - x$ est un majorant de A et M n'est pas la borne supérieure.

Applications : Partie entière d'un nombre réel.

Théorème 1.3.4. Pour tout nombre réel x , il existe un unique entier relatif n tel que, $n \leq x < n + 1$.

Démonstration. Soit x un nombre réel. D'après la propriété d'Archimède il existe un entier naturel n_0 tel que $n_0 > x$. Pour tout entier relatif tel que $p \leq x$ on a $p < n_0$. Ainsi l'ensemble $\{p \in Z, p \leq x\}$ est majoré donc admet un plus grand élément. Soit n cet élément. Ce dernier vérifie bien $n \leq x < n + 1$.

Définition 1.3.5. L'entier relatif n donné par le théorème 1.4.2. est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.

1.3.8 Densité dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.6 . Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si pour tous réels a et b tel que $a < b$, il existe au moins un élément $d \in D$ tel que $a < d < b$.

Théorème 1.3.5. Soient D une partie dense dans $\mathbb{R}$, a et b deux réels tels que $a < b$. Il existe une infinité d'éléments de D entre a et b.

Démonstration *:* Soit $A = \{d \in D\ ,\ a < d < b\}$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$, A est non vide. Supposons que A est fini. Il existe, alors un entier $n > 0$ tel que $A = \{d_1, d_2, d_3, ..., d_n\}$.

Soit d le plus petit des nombres $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$. Les deux réels a et d sont distincts et il n'existe aucun élément de D compris entre a et d. Ce qui contredit le fait que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3.6. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration .

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $n > \dfrac{1}{b-a}$, ou encore $(b - a) > \dfrac{1}{n}$. De même, il existe un entier naturel p tel que $p \geq nb$. Soit q le plus petit entier tel que $q \geq nb$, alors $\dfrac{q-1}{n}$ vérifie $a < \dfrac{q-1}{n} < b$. En effet $q - 1 < nb$, c'est à dire $\dfrac{q-1}{n} < b$. D'autre part $\dfrac{q-1}{n} > a$, sinon, on aurait $b - a \leq \dfrac{q}{n} - \dfrac{q-1}{n}$, c'est à dire $b - a \leq \dfrac{1}{n}$.

2. Soient a et b deux réels tel que $a < b$.

i) Si $a \in \mathbb{Q}$, on considère les réels $\sqrt{2}$ et $b - a$. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} < n(b - a)$. Par suite $a < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b$ et $a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est un irrationnel car $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$.

ii) Si $a \notin \mathbb{Q}$, on considère les réels 1 et $b-a$. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que$1 < n(b-a)$. Par suite $a < a+\frac{1}{n} < b$ et $a+\frac{1}{n}$ est un irrationnel car $a \notin \mathbb{Q}$.

Remarque 1.3.1. Entre deux réels a et b, il existe une infinité de rationnels et une une infinité d'irrationnels compris entre a et b.

1.3.9 Approximation décimale d'un nombre réel.

Parmi les rationnels, les décimaux ont un rôle pratique important, leur intérêt est d'approcher les réels d'aussi près que l'on veut, ce qui permet les calculs sur les réels.

Définition 1.3.7.
Un réel d est un nombre décimal s'il existe un entier naturel n tel que $10^n d \in \mathbb{Z}$.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux.
On a l'inclusion : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple : $\dfrac{3}{4} = 0,75 \in D$, mais $\dfrac{1}{3} \notin D$.
Attention $\mathbb{D}$ n'est pas un corps : 3 est un décimal mais non 1/3.
Soit x un réel, et n un entier. Considérons la partie entière de $10^n x$. On a

$$E\left(10^n x\right) \leq 10^n x < E\left(10^n x\right) + 1$$

Ainsi :

$$10^{-n} E\left(10^n x\right) \leq x < 10^{-n} E\left(10^n x\right) + 10^{-n}$$

Le nombre décimal $d_n = 10^{-n} E\left(10^n x\right)$ est l'approximation de x par défaut à 10^{-n} près.

On remarque que les nombres décimal d_n et d_{n+1} coïncident jusqu'à la dernière décimale de d_n.

Exemple 1.3.1. Si $x = \pi$, $d_0 = 3, d_1 = 3.1$, $d_2 = 3.14$, $d_3 = 3.141$ ...

Réciproquement, on se donne une suite de décimaux (d_n) telle que
i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n d_n \in \mathbb{N}$ et
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $d_n \leq d_{n+1} \leq d_n + 10^{-n}$
Alors la suite (d_n) détermine un réel x tel que pour tout n, $d_n \leq x \leq d_n+10^{-n}$.

1.3.10 Intervalles de $\mathbb{R}$

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si elle vérifie

$$x, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

Les différents intervalles.

Dans ce qui suit, on désigne par a et b deux nombres réels tels que $a < b$. L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est constitué des ensembles suivants :

i) $\mathbb{R}$ lui même et l'ensemble $\emptyset$ et les ensembles

ii) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ dit intervalle ouvert borné,

iii) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$ ou $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$ dits intervalles ouverts non bornés.

iv) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ dit intervalle fermé borné ,

v) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$ ou $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$ dits intervalles fermés non bornés,

vi) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ ou $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ dits intervalles semi ouverts bornés.

Propriétés des intervalles

1) Si I est un intervalle ouvert alors, pour tout $x \in I$, I contient un intervalle ouvert de centre x (i.e. de la forme $]x - \alpha, x + \alpha[$).

2) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et s un réel tel que $0 < s < b - a$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ks \in]a, b[$.

.

3) Si on exclut le cas de l'intervalle $[a, a] = \{a\}$, tous les autres intervalles contiennent une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

1.4 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1. On appelle droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où -∞ et + ∞ sont des éléments distincts, n'appartenant pas à $\mathbb{R}$.

Les opérations sur $\mathbb{R}$ s'étendent en partie à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

i) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty$, $x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty$, $x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty$.

Remarque 1.4.1 . Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty).0$, $0.(+\infty)$, $(-\infty).0$ et $0.(+\infty)$ ne sont pas définies.

1.4.2 Propriétés de $\overline{\mathbb{R}}$.

a) $\overline{\mathbb{R}}$ est totalement ordonné par la relation $\leq$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq x$ et $x \leq +\infty$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \leq y$ ou $y \leq x$ ($\leq$ est l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$).

b) - ∞ (respectivement$+\infty$) est le plus petit (respectivement le plus grand) élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.4.1 : Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Démonstration : Soit A une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$.

1^{er} cas : A admet un majorant et un minorant respectivement distincts de $+\infty$ et de $-\infty$. Dans ce cas, A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

$2^{ème}$ cas : A n'admet pas d'autres majorants (respectivement minorants) que $+\infty$ et $-\infty$. Dans ce cas, A admet $+\infty$ (respectivement - ∞) comme borne supérieure (respectivement inférieure).

1.5 Exercices

Exercice 1. 1.

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.2

1. Montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel.

2. Montrer qu' un entier nature q tel que q^2 soit un multiple de 3 est aussi un multiple de 3. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

3. Soient a, b et c trois entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$. Montrer que $a=b=c=0$.

Exercice 1. 3.

Ecrire la représentation décimale de $x=\frac{8386}{495}$; quelle est la 1999ème décimale de ce nombre ?

Montrer que le nombre $y=3,21575757...$ est rationnel ; écrire y sous la forme $y=\frac{p}{q}$où p et q sont deux entiers premiers entre eux (On pourra calculer 10^2y-y).

Exercice 1. 4.

Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel ω vérifiant, pour tout $n \geq 1$, l'encadrement : :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}<\omega<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}$$

Exercice 1.5.

Soient x et y des réels tels que $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$. Trouver des encadrements de $x-y$, $\sqrt{x^2}$ et $\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$.

Exercice 1. 6.

Soient a, b, m, m', M' des nombres réels tels que $m \leq a \leq M$ et $m' \leq b \leq M'$

1. A-t-on $|a| \leq max(m, M)$? Sinon, donner un majorant de $|a|$.

2. Donner un encadrement de $|ab|$.

Exercice 1.7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (On vous demande d'utiliser les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et non d'étudier les variations d'une fonction) :

1. $|x-3|+|x+4|\leq 7$
2. $0\leq \dfrac{x}{x^2-1}\leq 1$
3. $\dfrac{x-1}{x+1}\leq x^2-.x+1$
4. $0\leq \sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\leq .1$

Exercice 1.8 .
Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$|x+1|<\dfrac{5}{2}$ et $\sqrt{x^2+x-2}>1+\dfrac{x}{2}$

Exercice 1.9.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ bornée non vide, montrer que :
$\sup\{|x-y| \quad / \quad (x,y)\in A\in A\}=\sup(A)-\inf(A).$

Exercice 1. 10.
Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :
$A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $B=]0,1[\cap\mathbb{Q}$, $C=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n^2}\ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $D=\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\ \ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$,
$E=\left\{n^2+\frac{1+(-1)^n}{n}\ \ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $F=\left\{E\left(x\right)+E\left(\frac{1}{x}\right)\ /\ x>0\right\}$ et $G=\left\{\dfrac{p-q}{p+q+1}/(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}\text{avec } p\geq q\right\}$.

Exercice 1. 11.
Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note
$A+B=\{a+b\ /\ a\in A,b\in B\}$
1. Montrer que $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$.
2. Montrer que $\sup\left(A+B\right)=\sup A+\sup B$.

Exercice 1. 12.
Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$.
Répondre en justifiant par vrai ou faux
1. $A\subset B\Rightarrow\sup A\leq\sup B$,
2. $A\subset B\Rightarrow\inf A\leq\inf B$,
3. $\sup\left(-A\right)=-\inf A$;
4. $\sup A+\inf B\leq\sup\left(A+B\right)$.

Exercice 1.13
Soient a et b deux nombres réels donnés. Démontrer les équivalences :
1. $a\leq b\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ ,a\leq b+\varepsilon\right)$
2. $a=0\Leftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0\ ,|a|\leq\varepsilon\right)$

Exercice 1.14.

Soit $0 < x < 2$ un réel donné.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b appartenant à $]0,1[$ tels que $x = a+b$.

2. Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b appartenant à $]0,1[$ tels que $x = a+b$.

Exercice 1.15.

Pour tout réel a non nul, on pose $I_a = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < \dfrac{|a|}{2}\}$.

1. Décrire en termes d'encadrements, puis en termes d'intervalles, l'ensemble I_a (défini ci-dessus en termes de valeur absolue). Hachurer sur la droite réelle l'ensemble I_a pour différentes valeurs de a.vérifier que pour tout $x \in I_a$, alors x est non nul et a le même signe que a.

2. dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (justifier les réponses) :

i) $\exists\ m > 0$ tel que $\forall x \in I_a, (|x| > m)$

ii) $\exists\ M > 0$ tel que $\forall\ x \in I_a, \left(\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < M\right)$

Exercice 1.16.

Montrer que pour tout x réel on a les encadrements suivants :

1. $1 \leq \left|4 + 3\cos(\dfrac{xe^x}{x^2+1})\right| \leq 7$

2. $\left|\dfrac{\cos x - 3}{5 - sinx|}\right| \leq 1$

Exercice 1.17. Démontrer les implications suivantes :

1. $|x-2| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x^3 - .3x + 6}{x^2 - 16}\right| < 6$

2. $|x| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x + sinx}{x^7 + x - 3}\right| \leq 2$

3. $|x+1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x^3+1)sin(\frac{1}{x}) + (x+1)cos^3(1+e^x)}{4x + sin(\pi\frac{x}{2})}\right| < \dfrac{19}{4}|x+1|$

4. $|x| < 1$ et $|y| < 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-1}{y + sinx + 4}\right| < 2$

Exercice 1.18.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a l'encadrement :
$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - .\sqrt{n-1})$

2. En déduire un encadrement de la somme $\sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

3. Quelle est la partie entière de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100000}}$?

Exercice 1.19.

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x+3}$ sur l'intervalle $]-5.01, -4.99[$.

2. Etant donné un nombre strictement positif ε , trouver un voisinage V de-5 (qui dépend de ε) tel que $\left|\dfrac{x+5}{x+3}\right| < \varepsilon$ pour $x \in V$.

3. Montrer que pour x dans un voisinage de $+\infty$ on a $\left|\dfrac{x+7}{x^2-64}\right| < 10^{-10}$.

Exercice 1. 20. Montrer que
1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$..
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, E(-x) = -E(x) - 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, E(x+a) = E(x) + a$.

Exercice 1.21
Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 1.22
1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$E(x) + E(-x) = -1 \text{ si } x \notin Z \text{ et } E(x) + E(-x) = 0 \text{ si } x \in Z.$$
2. En déduire que si p et q sont deux entiers naturels premier entre eux alors :
$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(\frac{kp}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 1.21
Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$, montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} .E\left(x + \dfrac{k}{n}\right) = E(nx)$.

Exercice 1.22
1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $E\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) = E\left(\sqrt{4n+2}\right)$
2. Soit $n \in N^*$, calculer : $\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\sqrt{k}\right)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(\dfrac{k+3\sqrt{k}}{k}\right)$

Exercice 1.23
Soit $x > 0$ et $n \in N^*$ Montrer que :$\sum\limits_{k=1}^{n-1} .E\left(\dfrac{x+k}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 1.24
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux familles de réels.
1. Démontrer la formule :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (x_i y_i - x_j y_j)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2$$
2. En déduire l'inégalité de Gauchy - Shwarz :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2.$$

Exercice 1.25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de $\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Exercice 1.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de$[0, 1]$. Etablir que l'un au moins des deux produits $\prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i)$ est inférieur ou égale a 2^{-n}.

Exercice 1.27 .

Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que **:** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+n}$

Chapitre 2

SUITE DES NOMBRES REELS

2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1 Une suite de $\mathbb{R}$ est une application f de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On notera $f(n)$ par u_n et par (u_n) la suite elle même. C'est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'élément de $\mathbb{R}$, u_n, est dit terme général de la suite.

Remarques 2.1.1 Une suite peut être donnée

- sous forme explicite, ce sont les suites du type : $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique de la variable réelle x

ou bien

- sous forme récurrente, ce sont les suites définies par la donnée de leurs premiers termes et d'une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.1.2 Suites monotones

Définition 2.1.2 Une suite (u_n) est dite croissante (respectivement décroissante) si elle vérifie :

$$n \geq n' \Rightarrow \ u_n \geq u_{n'} \text{ (respectivement } n \leq n' \Rightarrow \ u_n \leq u_{n'}).$$

Elle est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $u_n = u_p$, (u_n) est dite stationnaire à partir du rang p

Remarque 2.1.2

$-$ Une suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si elle vérifie :

$$\forall\, n \quad u_{n+1} \geq u_n \text{ (respectivement } \ u_{n+1} \leq u_n)$$

Le sens de variation d'une suite est donc donnée par le signe de $u_{n+1} - u_n$

$-$ Si $\forall\, n$, $u_n > 0\,$; la suite est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

2.1.3 Suite bornée

Définition 2.1.3

(u_n) est dite majorée si $\quad \exists\, M \in \mathbb{R}\ /\ u_n \leq M$

(u_n) est dite minorée si $\quad \exists\, m \in \mathbb{R}\ /\ u_n \geq m$

(u_n) est dite bornée si $\quad \exists\ M, m \in \mathbb{R}\ /\ \ m \leq u_n \leq M$

Exemples 2.1.1 :

(u_n) avec $u_n = 2^n$ est croissante mais n'est pas majorée.

(u_n) avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est bornée mais n'est pas monotone.

2.1.4 Opérations sur les suites réelles

On additionne, multiplie des suites comme on sait le faire pour les fonctions, simplement en additionnant, multipliant leurs valeurs.

On dira que la suite somme des suites (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $u_n + v_n$

On appelle produit de ces deux suites et on note par $(u_n)\ .\ (v_n)$, la suite dont le terme général est $u_n\ .\ v_n$.

On écrira :$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$, $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.

Si $\alpha \in\ \mathbb{R}$, le produit de α par la suite (u_n) est la suite de terme général (αu_n).

On écrira : $\quad (\alpha u_n) = \alpha(u_n)$.

2.2 Limite d'une suite

2.2.1 Suites convergentes et suites divergentes.

Etudier une suite, c'est essentiellement se demander si elle converge, si elle tend vers l'infini ou si elle ne fait ni l'un ni l'autre. Il faut ensuite s'intéresser à la valeur de cette limite et, si on le peut, à la rapidité de la convergence vers cette limite.

Définition 2.2.1 Suite convergente, suite divergente.

On dit qu'une suite de nombres réels (u_n) est convergente et admet pour limite le nombre réel l si à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier naturel N_ε tel que, pour tout entier naturel $n > N_\varepsilon$ on ait : $|u_n - l| < \varepsilon$.

On note alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

On a alors

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists \quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \quad : (\ n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\ )$

Si N_ε convient pour ε, il en est de même pour $N' > N_\varepsilon$.

Une suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Remarques 2.2.1 :

1. Modifier les premiers termes de la suite ne change ni la convergence de la suite ni, si elle existe, sa limite.

2. Dans la définition, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.

Exercice 2.2 : Soit $(u_n)_{n>0}$ de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, montrez que cette suite tend vers 0 et explicitez le N en fonction de ε.

Définition 2.2.2.

On dit qu'une suite de nombres réels (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si et seulement si, pour tout $A \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un entier naturel N tel que $u_n > A$ (respectivement $u_n < -A$) pour tout $n > N$.

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$).

Exemple 2.2.2 : La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ tend bien vers $+\infty$ au sens de cette définition, puisque (en prenant $A > 0$), $n > \sqrt{A}$ implique $n^2 > A$, il suffit donc de prendre $N = E(\sqrt{A}) + 1$.

Ces définitions vont nous servir à établir le théorème suivant :

Théorème 2.2.1

On a les propriétés suivantes :

1. Une suite (u_n) a au plus une limite, finie ou infinie.
2. Si la suite (u_n) admet une limite finie, alors elle est bornée.

Démonstration :

1. Supposons que la suite (u_n) admet deux limites l et l', avec $l \neq l'$. Soit $\varepsilon > 0$.Puisque , $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, : $\exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \Rightarrow \; |u_n - l| < \varepsilon$.

De même , $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l'$ entraîne : $\exists N' \in \mathbb{N}^* : n > N \Rightarrow \; |u_n - l'| < \varepsilon$.

En particulier, si $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{4}$, pour tout $n > N'' = \max(N, N')$, on a :

$0 < |l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$

Par suite $l = l'$.

2 Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel l . Pour $\varepsilon > 0$,

$\exists N \in \mathbb{N}, \quad (n > N \Rightarrow \; |u_n - l| < \varepsilon)$.

Or $|u_n|$ - $|l| \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, donc $n > N \Rightarrow \; |u_n| < \varepsilon + |l|$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq \sup\{\varepsilon + |l|, |u_0|, |u_1|, ... |u_N|\}$.

Remarque 2.2.2. Une condition nécessaire de convergence d'une suite est qu'elle soit bornée. La réciproque est fausse en général.

2.2.2 Limite et opérations

Proposition 2.2.1.

1. Si deux suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$, leur somme $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$, leur différence$(u_n - v_n)$ converge vers $l - l'$ et leur produit $(u_n v_n)$ converge vers ll' .

2. Si une suite (u_n) converge vers l et si α est un réel , alors la suite (αu_n) converge vers αl.

2. Si une suite (u_n) converge vers $l \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$ et la suite $(\frac{1}{u_n})$ est bien défini à partir de ce rang et a pour limite $\frac{1}{l}$.

Démonstration. Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers l et l', On se donne un réel $\varepsilon > 0$.

a) La somme et la différence

La suite (u_n) converge vers l, donc $\exists N \in \mathbb{N}$: $(n > N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2})$

De même la suite (v_n) converge vers l', donc

$\exists N' \in \mathbb{N}$: $(n > N \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2})$

Soit $N\varepsilon = \sup(N, N')$.

On a alors, puisque $|(u_n + v_n) - (l + l')| < |u_n - l| + |v_n - l|$,

$n > N\varepsilon \Rightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon$.

De même, puisque : $|(u_n - v_n) - (l - l')| < |u_n - l| + |v_n - l|$

$n > N\varepsilon \Rightarrow |(u_n - v_n) - (l - l')| < \varepsilon$.

b) Le produit

1^{er} cas : $ll' = 0$ Supposons par exemple que $l = 0$. La suite (v_n) étant convergente est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $|v_n| < M$. D'autre part, la suite (u_n) converge vers 0, donc

$\exists N \in \mathbb{N}$: $(n > N \Rightarrow |u_n| \prec \frac{\varepsilon}{M}$.

On en déduit que : $n > N \Rightarrow |u_n v_n| \prec \varepsilon$. La suite $(u_n v_n)$ a donc pour limite 0.

$2^{ème}$ cas : $ll' \neq 0$

Il suffit de voir que: $u_n v_n - ll' = v_n(u_n - l) + l(v_n - l')$

En particulier si $v_n = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite (αu_n) converge vers αl.

c) Le quotient

La suite (u_n) étant convergente , Il existe un entier naturel N_1 tel que :

$$n > N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{|l|}{2}.$$

Par conséquent : $n > N_1 \Rightarrow l - \frac{|l|}{2} < u_n < l + \frac{|l|}{2}$

On en déduit que : $|u_n| > \frac{|l|}{2}$ dès que $n > N_1$

Or on a $\frac{1}{l} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - l}{l u_n}$.

Par suite : $n > N_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < 2\frac{|u_n - l|}{l^2}$.

La suite (u_n) est convergente, il existe un entier naturel N tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n - l| \prec \frac{\varepsilon\, l^2}{2}.$$

On a alors $n > \sup(N_1, N) \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon$.

Proposition 2.2.2. Si une suite (u_n) tend vers $+ \infty$ (respectivement - ∞) et si (v_n) est une suite minorée(respectivement majorée), alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞).

Démonstration. Soient (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) une suite minorée. Il existe $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \geq M_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $M \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow u_n > M - M_0.$$

Par conséquent $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \quad (n > N \Rightarrow u_n + v_n > M)$.

Corollaire 2.2.1.

1. Si deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ (respectivement - ∞) leur somme $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞).

2. Si (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞) et (v_n) est une suite convergente, leur somme $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞).

Proposition 2.2. 4.

1. Si (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞) et (v_n) est une suite qui converge vers v, alors leur produit tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞) si $v > 0$ et vers - ∞ (respectivement $+\infty$).

2. Si (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞), alors la suite $\frac{1}{u_n}$ converge vers 0.

2. Si (u_n) est une suite qui converge vers 0 et $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$) alors la suite $\frac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞).

4. Si (u_n) est une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) est une suite telle que $u_n \leq v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.

Démonstration :

1. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) une suite qui converge vers $v > 0$. Il existe un entier naturel $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > N_1 \Rightarrow \ 0 < \tfrac{v}{2} < v_n < \tfrac{3v}{2}.$$

Soit $A > 0$. Il existe un entier naturel $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2 \Rightarrow \ u_n > 2\frac{A}{v}$.

Pour tout $n > \sup(N_1, N_2)$, nous avons : $u_n v_n > A$.

2. Etant donné $\varepsilon > 0$, Il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow \ u_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Par conséquent $$n > N \Rightarrow \ \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

Les propriétés **2.** et **4**. sont immédiates.

Les résultats sur les opérations de limites sont résumés dans le tableau suivant :

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n\ v_n$	$\dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{u_n}{v_n}$
l	l'	$l+l'$	ll'	$\dfrac{1}{l'}$ si $l' \neq 0$ $+\infty$ si $l' = 0^+$ $-\infty$ si $l' = 0^-$	$\frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$ ∞ du signe de l si $l' = 0^+$et $l \neq 0$ ∞ du signe de $-l$ si $l' = 0^-$et $l \neq 0$ indéterminé si $l = l' = 0$
$+\infty$	l'	$+\infty$	$\pm\infty$ si $l' \neq 0$ indéterminé si $l' = 0$	0	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ du signe de l si $l \neq 0$ indéterminé si $l' = 0$	$\dfrac{1}{l}$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	indéterminé
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$	0	indéterminé

Exemple 2.2.3 : Démontrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{n^6 + n^5 + 71n^2 - 80n + 7}{-80n + 75n^6 - 9000n^5 - 97000n + 8} \text{ tend vers } \frac{1}{5}.$$

On écrit u_n sous la forme :

$$u_n = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{71}{n^4}-\frac{80}{n^5}+\frac{7}{n^6}}{-\frac{80}{n^5}+75-\frac{9000}{n}-\frac{97000}{n^3}+\frac{8}{n^6}}$$

Le numérateur, somme de 1 et de termes qui tendent vers 0 (car chacun est produit d'une constante par un terme qui tend vers 0), tend vers 1 ; pour la même raison, le dénominateur tend vers 5 , le quotient tend donc vers $\frac{1}{5}$

Exercices 2.2.2 :

1. Montrer que (u_n) avec $u_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+n}$ tend vers $+\infty$. On précisera avec soin les résultats utilisés.

2. Trouver la limite des suites $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\dfrac{(-1)^n cos(n)}{n}$.

2. Démontrer, le résultat suivant sur la limite d'une fraction rationnelle

Si P et Q sont deux polynômes dont les termes de plus haut degré sont respectivement $a_p x^p$ et $b_m x^m$, alors

$u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ a même limite que $\dfrac{a_p x^p}{b_m x^m}$.

Autrement dit, si le terme général d'une suite se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en n, elle a même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré.

2.2.3 Limite d'une suite positive

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni des lois $+, \times$ et d'une relation d'ordre $\leq$ entretenant deux à deux des rapports donnés au chapitre précédent ; on vient de voir les liens qui pouvaient exister entre limite et somme, limite et produit, voyons à présent les liens qui existent entre limite et relation d'ordre.

Théorème 2.2.2
Si (u_n) est une suite convergente à termes positifs, sa limite l est positive.

Démonstration *:* On va établir ce théorème par l'absurde, à partir de la définition de la convergence. Si (u_n) admet une limite $l < 0$, on prend $\varepsilon = -l$.

Il existe alors N tel que, pour tout $n > N$, on ait $|u_n.l| < \varepsilon = -\frac{l}{2}$; on en déduit, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $u_n < l + \varepsilon = \frac{l}{2} < 0$

Les termes u_n seraient négatifs après le rang N, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Si on ne peut avoir $l < 0$, c'est donc que $l > 0$.

Dans la question posée avant la proposition, tout ce qu'on peut affirmer c'est qu'une suite convergente à termes strictement positifs a une limite $l \geq 0$.

Attention , ona si $\forall\ n,\ u_n > 0$, alors $l \geq 0$.

Corollaire 2.2.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers l et l'. On suppose que $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $l \leq l'$.

En effet : Il suffit de considérer la suite $w_n = v_n - u_n$ et appliquer le théorème 3.2.2.

2.3 Critères de convergence

2.3.1 Théorèmes d'encadrement

On va maintenant énoncer deux théorèmes importants, le premier nous permettant de dire qu'une suite converge, le second de prouver qu'une suite tend vers $+\infty$.

Théorème 2.3.3 Premier théorème de comparaison
Si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites telles que (u_n)et (v_n) convergent vers la même limite l et qu'en plus on ait les inégalités $u_n \leq w_n \leq v_n$ alors (w_n) converge vers l.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le corollaire 2.2.1.

Théorème 2.3.4 Second théorème de comparaison
Soient deux suites (v_n)et (w_n) telles que (v_n) tende vers $+\infty$ et que l'on ait en outre, pour tout n ,$v_n \leq w_n$,
alors la suite (w_n) tend vers $+\infty$.

On laisse aux lecteurs le soin d'étabir cette démonstration et le soin d'énoncer son analogue lorsque (v_n) tend vers -∞

Exercices 2.3.4 :

1.Montrer que la suite (u_n) avec $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ converge.

2. Montrer que Si une suite (u_n) converge vers l, la suite $(|u_n|)$ est convergente et sa limite est vers $|l|$.

2.3.2 Critères de la convergence monotone

En s'appuyant sur la propriété de la borne supérieure, on va démontrer le théorème des suites monotones bornées, qui permet de savoir si une suite est convergente sans connaître sa limite.

.

Ce théorème permet affirmer qu'une suite converge sans donner aucun renseignement sur sa limite. Mais si la suite est récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, une fois que l'on a montré l'existence de la limite, on est sûr qu'elle vérifie l'équation $l = f(l)$ (passer à la limite dans les deux membres).

Théorème 2.3.5.

i) Toute suite croissante et majorée est convergente.

ii) Toute suite décroissante minorée est convergente.

iii) Toute suite croissante (respectivement décroissante) et non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement - ∞).

Démonstration.

i) Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Posons : $A = \{(u_n, n \geq 0\}$.

A étant une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée admet une borne supérieure que nous notons par l. D'après la caractérisation de la borne supérieure, nous avons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \quad l - \varepsilon < u_n \leq l.$$

(u_n) étant croissante, on a $u_n \leq u_N$ si $n < N$.

Par conséquent : $n > N \Rightarrow l - \varepsilon < u_n < l$.

Ou encore : $n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

La démonstration est la même pour ii).

3) Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit A un réel strictement positif. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n > A$. Comme la suite est croissante, pour tout $n > N$, nous avons $u_n > A$.

Remarques 2.3.3 .

1. Ce Théorème ne permet pas de connaître la limite.
2. Une suite peut avoir une limite infinie sans être croissante ou décroissante.
3. Une suite qui tend vers $+\infty$ (respectivement$-\infty$) n'est pas bornée mais une suite qui n'est pas bornée ne tend pas nécessairement vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exercices 2.3.5 (résolu) :

1. Une suite croissante est convergente ou bien tend vers $+\infty$.

2. Etudier la convergence de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $u_0 = 7$; quelle est sa limite ?

Solution :

1. Soit (u_n) une suite croissante, si (u_n) est majorée, il suffit d'appliquer le théorème 3.2.5 . Sinon, soit B quelconque donné, puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, B n'est pas un majorant, donc il existe n_1 tel que $u_{n_1} > B$, mais alors pour tout $n > n_1$ on a $u_n > u_{n_1} > B$, c'est bien la définition de tendre vers $+\infty$.

2. vérifiions tout d'abord que la suite est bien définie. u_0 est positif donc $2+u_0 > 0$ admet une racine carrée qui, par définition, est elle-même positive ; de même, si $u_n > 0$, $2+u_n > 0$ et sa racine carrée existe et est positive. On peut donc calculer les u_n et ils sont minorés par 0. On a par ailleurs :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_{n-1}}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_{n-1}}\right)}{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}$$
$$= \frac{u_n - u_n - 1}{\sqrt{2+u_n} + \sqrt{2+u_{n-1}}}$$

et $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}, \ldots$, du signe de $u_1 - u_0$ donc négatif et la suite est décroissante. Etant décroissante et minorée, elle converge et sa limite vérifie $l = \sqrt{l+2}$ dont la seule solution est 2.

Proposition 2.3.5. Toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est minorée (respectivement majorée).

Démonstration. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. On se donne un réel positif A. Il existe, alors, un entier naturel N tel que $u_n > A$ pour tout $n > N$.

Par conséquent : $u_n > \inf(A, u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ pour tout n.

2.4 Suites adjacentes.

2.4.1 Suites adjacentes

Définition 2.6.1 Deux suites (u_n) et (v_n) sont dite adjacentes si (u_n) est croissante , (v_n) est décroissante et la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème 2.6.1. Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite l . De plus on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$

Démonstration. On note par (w_n) la suite de terme général $w_n = (v_n - u_n)$.

On a $(w_{n+1} - w_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$.

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante donc la suite (w_n) est décroissante. Puisque elle a comme limite 0, il en résulte que pour tout entier n, $u_n \leq v_n$. La suite (v_n) est décroissante, donc la suite (u_n) est majorée par v_0 . Or elle est croissante donc elle converge vers une limite u qui vérifie $u_n \leq u$.De même , la suite (v_n) converge puisqu'elle est décroissante, minorée par u_0 et sa limite vérifie $v \leq v_n$

Les limites u et v vérifient $u \leq v$. Mais comme la suite (w_n) converge vers $v - u = 0$, on a $u = v$.

Exemple 2.6.1. On considère les deux suites définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!.n}$$

Il est facile de montrer que

1. (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$

2. (v_n) est croissante car

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!.\,(n+1)} - \dfrac{(n+1)}{(n+1)!.n} = \dfrac{1}{(n+1)!\,(n+1)\,n}$

2. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n \leq v_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!.n} = 0.$

2.4.2 Segments emboîtés

Etant donné deux nombres réels, on désigne par $[a, b]$ l'ensemble de $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \ \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

L'ensemble $[a, b]$ est dit segment d'extrémités a et b. Par définition la longueur du segment $[a, b]$ est le réel $b - a$

A deux suites adjacentes u_n et (v_n), on associe la famille de segments

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [u_n, v_n]$$

Il est clair que $\qquad I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset .... \supset I_n \supset ......$

On dit que la famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de segments emboîtés de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers zéro. Comme les deux suites ont la même limite l, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Réciproquement, pour toute suite de segments emboîtés de $\mathbb{R}$ dont la longueur tend vers zéro, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et ont comme limite commune l'intersection de tous les I_n.

2.5 Suites de CAUCHY

Définition 2.5.1 Une suite (u_n) est dite de CAUCHY si elle vérifie la propriété, dite de Cauchy :

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : ((p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q > N \Rightarrow \ |u_p - u_q| < \varepsilon).$$

Exemples 2.5.1

1. La suite géomètrique $(k^n)\,, 0 < k < 1$, est de cauchy, en effet

Pour $p > q$, $|k^p - k^q| = k^q \ |k^{p-q} - 1| < k^q$.

Soit $N = \dfrac{E\,(\ln \varepsilon)}{E\,(\ln k)} + 1$,on a $p > q > N \Rightarrow |k^p - k^q| < \varepsilon$.

2. La suite $(\ln n)$ n'est pas de cauchy, en effet $|\ln p - \ln 2p| = \ln 2$

Théorème 2.5.1. Toute suite réelle de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle de Cauchy.
Soit $\varepsilon = 1$, alors il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $u_{N_1} - 1 < u_n < u_{N_1} + 1$. Donc la suite (u_n) est bornée.

Théorème 2.5.1. Une suite de $\mathbb{R}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration.
i) Supposons que la suite (u_n) est convergente.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ dès que $n > N$.
Ainsi, si n et m sont tel que $n > N$ et $m > N$, on q
$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |v_n - l| < \varepsilon$.
ii) Réciproquement, supposons que la suite (u_n) est de Cauchy.
Premiére étape : la suite (u_n) est de Cauchy donc elle est bornée .
Seconde étape : construction de deux suites
On pose $U_n = \{(u_p, p \geq n\}$, la suite (U_n) est une suite décroissante au sens de l'inclusion d'ensembles non vides: $U_{n+1} \subset U_n$.
Pour tout entier U_n est borné et non vide ; on pose $a_n = \inf(U_n), b_n = \sup(U_n)$.
On a ainsi défini deux suites (a_n) et (b_n) qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$.
Troisième étape : les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes
Or on sait que si A et B sont des parties bornées, non vides de $\mathbb{R}$ et si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$, donc
l'inclusion $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \subset U_n$, entraîne, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
La suite (a_n) est donc croissante, la suite (b_n) décroissante et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.
Il reste donc à montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$
On écrit $b_n - a_n = (b_n - u_n) + (u_n - a_n)$.
La condition de Cauchy s'écrit : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^* : ((p, n) \in \mathbb{N}^2$, $p > n > \mathbb{N} \Rightarrow u_n - \varepsilon < u_p < u_n + \dfrac{\varepsilon}{2})$
d'où l'on déduit $\sup\limits_{p>n} u_p < u_n + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\inf\limits_{p>n} u_p > u_n - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a donc $\forall n > N$, $0 \leq b_n - u_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $0 \leq u_n - a_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où $\forall n > N$, $b_n - a_n < \varepsilon$.
Les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes, elles ont donc une limite commune, la double inégalité $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$: entraîne alors la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 2.5.1. La suite définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$ est-elle de Cauchy ?

On a bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0, mais cela n'est pas suffisant, la condition doit etre vérifiée pour tous les couples p, q assez grands. Or ici, on a l'inégalité $u_{2n} - u_n > \dfrac{1}{2}$; il y aura donc toujours des couples pour lesquels la majoration par ε ne sera pas vérifiée. La suite ainsi construite n'est pas de Cauchy, elle ne converge donc pas.

Exemple 2.5.1 La suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ est convergente.
En effet, montrons qu'elle est de Cauchy.
On a $u_{n+p} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + ... + \dfrac{1}{(n+p)!}$
Or $(n+p)! \geq 2^{n+p-1}$
donc $0 \leq u_{n+p} - u_n \leq \dfrac{1}{2^n} + ... + \dfrac{1}{2^{n+p-1}} = \dfrac{1}{2^n}\left(1 + ... + \dfrac{1}{2^{p-1}}\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \dfrac{1}{2^p}\right)$
Puisque $\dfrac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \dfrac{1}{2^p}\right)$ tend vers 0 pour n , p assez grands, la suite (u_n) est de Cauchy.

2.6 Théorème de BALZANO- WIERSTRASS

Définition 2.4.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E. On dit que la suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n), ou encore, une sous suite de (u_n) s'il existe une application φ, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.4.1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n$. Les suites définies par $v_n = 2n$ et $w_n = 2n + 1$ sont des suites extraites de (u_n).

Lemme 2.4.1

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors, pour tout entier naturel n , on a $n \leq \varphi(n)$.

Preuve : soit P_n l'inégalité $n \leq \varphi(n)$. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geq 0$ et P_0 est vérifiée. Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. L'application $\boldsymbol{\varphi}$ étant strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$; comme elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$. On a ainsi montré le lemme par récurrence.

Proposition 2.4.1. Si une suite (u_n) tend vers une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de la suite (u_n) tend vers l.

Démonstration.

Cas où $l \in \mathbb{R}$. On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On suppose que $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est strictement croissante. On a toujours $\varphi(n) \geq n$ d'après le lemme 3.3.1. Donc, si $n \geq N$, $|v_n - l| = \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Cas où $l = +\infty$. On se donne $A > 0$. Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. Si $n \geq N$ alors $\varphi(n) \geq N$, d'où $v_n = u_{\varphi(n)} \geq A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Le cas $l = -\infty$ se traite de la même façon.

Remarque 2.4.1. La réciproque de la Proposition 2.4.1 n'est pas toujours vraie.

Cette proposition est souvent utilisée pour montrer qu'une suite n'est pas convergente : on extrait une sous-suite qui est divergente, ou bien on extrait deux sous-suites de limites distinctes :

Exemple 2.4.1 : Soit (u_n) avec $u_n = (-1)^n$, les deux sous-suites extraites (v_n) avec $v_n = u_{2n}$ et (w_n) avec $w_n = u_{2n+1}$ sont convergentes de limites respectives 1 et - 1, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

Définition 2.4.2

i) On dit que le nombre réel l est une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l.

ii) On dit que la suite (u_n) admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$) pour valeurs d'adhérence si elle est non majorée (respectivement non minorée).

Exemple 2.4.2

La suite (u_n) avec $u_n = (-1)^n$ admet $+1$ et -1 comme valeurs d'adhérence.

Proposition 2.4.2. De toute suite numérique on peut extraire une suite monotone.

Démonstration.

Soit (u_n) une suite numérique et soit $I = \{k \in \mathbb{N}, u_k \leq u_n \ , \ \forall n \geq k\}$.

Si I est infini, on peut écrire I sous la forme $I = \{k_1, k_2, ...\}$ avec $k_1 < k_2 < ...$

La suite (u_n) est alors croissante.

Si I est fini ou vide, il existe un entier N tel que pour tout $k > N$, il existe un entier $N \geq k$ tel que $u_n \leq u_k$.

On pose $k_1 = N$, il existe un entier k_2 , $u_{k_2} \leq u_{k_1}$ et ainsi de suite. On construit alors une sous suite décroissante.

Théorème 2.4.1 (BALZANO- WIERSTRASS).

De toute suite réelle bornée (u_n) on peut extraire une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente

Autrement dit, toute suite réelle bornée (u_n) admet une valeur d'adhérence.

Démonstration.

On construit la suite extraite par dichotomie c'est à dire en coupant successivement en 2, les intervalles contenant une infinité de termes de la suite.

Il s'agit d'une démonstration par dichotomie.

Soit une suite réelle (u_n) bornée et soient deux réels a et b tels que l'on ait, $a \leq u_n \leq b$ pour tout entier : tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle fermé et borné $[a, b]$. On note $I_0 = [a, b]$ et $\varphi(0) = 0$

On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$ et on considère les deux intervalles $[a, c]$, $[c, b]$fermés bornés . Des deux ensembles $\{n \in N, u_n \in [a, c]\}$, $\{n \in N, u_n \in [c, b]\}$ l'un au moins est infini. On désigne par I_1celui des deux intervalles qui contient une infinité de termes de la suite (u_n) et par $\varphi(1)$ le plus petit entier tel que $u_{\varphi(1)}$ appartienne à I_1 (dans le cas où les deux intervalles contiennent une infinité de termes on en choisit arbitrairement un). La longueur de I_1 est égale à $\dfrac{b-a}{2}$ et l'ensemble $\{n \in N, u_n \in I_1\}$ est infini. On pose $v_1 = u_{\varphi(1)}$.

On recommence alors sur I_1 ce qui a été fait sur I_0 ; en considérant le milieu de I_1 on fait apparaitre deux intervalles dont l'un, au moins, contient une infinité de termes de la suite . On désigne par cet intervalle I_2 et par $\varphi(2)$ le plus petit entier strictement supérieur à $\varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)}$ appartienne à I_2 .

La longueur de I_2 est égale à $\dfrac{b-a}{2^2}$; on pose $v_2 = u_{\varphi(2)}$.

On définit ainsi par récurrence une suite d'intervalles (I_n) et une suite de réels (v_n) extraite de la suite (u_n) telles que :

$I_0 = [a, b]$ et $v_0 = u_0$ et pour tout entier n.

On définit I_{n+1} à partir de I_n par les conditions :

• $I_{n+1} \subset I_n$ et la longueur de I_{n+1} est la moitié de celle de I_n.

• I_n contient une infinité de termes de la suite (u_n)

On définit la suite $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ telle que la fonction φ est strictement croissante et $u_{\varphi(n)+1} \in I_{n+1}$

La suite (v_n) est bien extraite de la suite (u_n) . De plus la longueur de I_n est égale à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

On montre que la suite (v_n) est de Cauchy.

Soit ε un réel strictement positif et soit N un entier tel que $\dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$. Pour $n \geq N$ on a $v_n \in I_n \subset I_N$, d'où, pour tout couple d'entiers vérifiant $n \geq N, p \geq N$, $|v_n - v_p| \leq \dfrac{b-a}{2^N} < \varepsilon$

On a donc construit une suite (v_n) extraite de la suite (u_n) qui est une suite de Cauchy et donc convergente.

2.7 Annexe : Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 2.7.1 Suite arithmétique

Une suite (u_n) est appelée une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que, pour tout n, on ait

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre r s'appelle la raison de la suite.

Il est aisé d'en déduire que $u_n = u_0 + nr$.

Cette égalité peut se généraliser par $u_n = u_p + (n-p)\, r$

Il est également facile de démontrer que si $r > 0$ la suite tend vers $+\infty$, si $r < 0$, la suite tend vers $-\infty$ et qu'une suite arithmétique est convergente si et seulement si sa raison est nulle (c'est une suite stationnaire).

Proposition 2.7.1 Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 $(u_n = u_0 + nr.)$; alors, la somme S_n des n premiers termes de la suite (u_n) est donnée par

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

Démonstration : On a

$$2S_n = u_0 + ... + u_n = (u_0+u_n) + (u_1+u_{n-1}) + ... + (u_p+u_{n-p}) + ... + (u_n+u_0)$$

or $u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$

ainsi $S_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

Application : On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 1+2+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Définition 2.7.2 Suite géométrique

Une suite (u_n) est appelée une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que, pour tout n, on ait :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le nombre q s'appelle la raison de la suite.

Il est immédiat qu'alors $u_n = u_0 q^n$.

Proposition 2.7.2 Convergence d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$\rightarrow$ Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0.

$\rightarrow$ Si $q = 1$, la suite (u_n) converge vers u_0 (elle est stationnaire).

$\rightarrow$ Si $q = -1$, la suite (u_n) diverge.

$\rightarrow$ Si $q > 1$, la suite (u_n) tend vers l'infini avec le signe de u_0.

$\rightarrow$ Si $|q| > 1$, la suite $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration :

Si $q > 1$, on écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$, on en déduit par la formule du binôme que $q^n = (1+a)^n > 1 + na$; le terme de droite tend vers $+\infty$, il en est donc de même pour q^n par le théorème de comparaison. Il ne reste plus qu'à multiplier par u_0 pour conclure.

Le même raisonnement est valable pour le dernier point de l'énoncé.

Si $|q| < 1$, alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donc, d'après ce qui précède, $\dfrac{1}{|q|^n}$ tend vers $+\infty$; il s'ensuit que q^n tend vers 0.

Proposition 2.7.3 Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 $(u_n = u_0 q^n)$; alors, la somme des n premiers termes de la suite (u_n) est donnée par

$S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Si que $|q| < 1$ (S_n)est une suite qui admet $\dfrac{u_0}{1-q}$ comme limite.

Démonstration : On a $S_n = u_0 \left(1 + q + ... + q^n\right)$

En multipliant par $1-q$, on obtient immédiatement $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ puisque $q \leq 1$. Il reste à faire tendre n vers l'infini.

Application On a $1 + a + a^2.... + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

On peut maintenant démontrer un critère dit de d'Alembert :

Proposition 2.7.4 Critère de d'Alembert
Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers une limite $l < 1$, la suite (u_n) converge vers 0;
Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers une limite $l > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Démonstration : Donnons la démonstration de la première partie. Soit ε tel que $l + \varepsilon < 1$;
il existe n_0 tel que, pour $n > n_0$, on a :

$$0 \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq k = l + \varepsilon < 1,$$

c'est-à-dire $|u_{n+1}| \leq k\,|u_n|$
et donc en particulier : $0 \leq |u_{n_0+p}| \leq k^p\,|u_{n_0}|$
comme k^p tend vers 0, on en déduit le résultat.
La seconde partie se démontre de façon similaire.

2.8 Exercices

Exercice 2. 1 .
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2.2
Soit x un nombre réel fixe.
1. Etudier la suite $u_n = \frac{1}{n}\, E(nx)$, $E(a)$ désignant la partie entière de a)
2. $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}\right)$

Exercice 2.3
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n(m) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{nm} \frac{1}{k}$
1. Montrer que $u_n(m)$ est monotone puis qu'elle converge , soit $L(m)$ sa limite

2. Monter que $L(pq) = L(p) + L(q)\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.

Exercice 2.4

Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.
Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite
En déduire que (u_n) converge

Exercice 2.5 .

Soit (u_n) la suite définie par :
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$
1. Montrer que, pour tout n, $u_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$
2. Quelle est la limite de u_n ?

Exercice 2.6

Montrer que la suite de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ diverge vers $+\infty$

Exercice 2.7

Soit (u_n) la suite définie par :
$u_0 = 0$
$u_{n+1} = \sqrt{2 + 3u_n}$
1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
3. Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 2.8

Soit (u_n) une suite, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 2.9 .

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 4 \end{cases}$$

1. Quel est le sens de variation de (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 6$. Montrer que (v_n)est une suite géométrique.
Quelle est sa raison ?
3. Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 2.10

On définit une suite par la donnée de son premier terme $u_0 \in [-1, 1]$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$$

1. Vérifier que la suite (u_n) est bien définie. Montrer qu'elle est monotone et étudier sa convergence.

2. Montrer qu'il existe un unique réel $\xi \in [0, \pi]$ tel que $u_0 = \cos \xi$

3. Montrer que $\forall n \in N$, $u_n = cos\left(\frac{\xi}{2^n}\right)$

En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n(1 - u_n)$

Exercice 2.11

Calculer :

1. $a + a^2 + ... + a^{36}$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} a + a^2 + ... + a^{n+3}$

Exercice 2.12

θ est un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$

Montrer que les suites u et v définies par :

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^n}$$

$$v_n = 2^{n+1} \tan \frac{\theta}{2^n}$$

sont adjacentes. Calculer leur limite.

Exercice 2.13

Tracer la courbe représentative de $x \to \sin x$. s'aider du dessin pour résoudre l'équation

$\sin(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$. On admettra que $\sin x < x$ pour $x > 0$, donc, en particulier, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Calculer la limite de cette suite.

Exercice 2. 14

Montrer que toute suite de CAUCHY est bornée.

Exercice 2.15

Montrer que si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite d'une suite de CAUCHY (u_n) et si cette suite extraite converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 2.16 .

Vérifier que la suite (u_n) définie par :

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

n'est pas une suite de Cauchy (calculer et minorer $u_{2n} - .u_n$).

Exercice 2.17 .
Soit (x_n) une suite convergente et L sa limite on suppose que $L \notin \mathbb{N}$
1. Montrer que $E(L) < x_n < E(L)+1$ a partir d'un certain rang.
2. En déduire que $(E(x_n))$converge vers $E(L)$

Exercice 2.18 Moyenne de Cesaro :
1. Soit (u_n) une suite convergente vers un nombre réel l , montrer alors que : $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$ converge aussi vers l.
2. Montrer qu'on a aussi le même résultat si $l = +\infty$.

Exercice 2.19
On pose $u_n = \cos n, v_n = \sin n$
Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n
Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0
Conclure que (u_n) et (v_n) ne peuvent pas converger

Exercice 2.20.
On considère la suite récurrente définie par : u_0 donné ; $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{4}$
Tracer la représentation graphique de la fonction $x \to x^2 + \dfrac{1}{4}$.
Vérifier qu'elle coupe la première bissectrice (d'équation $y = x$) en un unique point $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
Utiliser cette représentation graphique pour donner les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) converge.

Exercice 2.21
Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par

$$u_0 = 1, u_1 = \tfrac{1}{2}, \forall n \geq 2 \quad u_n = u_{n-1} - \frac{1}{8}u_{n-2}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0, u_n = \frac{1}{2}\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^n$.
2. Démontrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
3. On considère la suite (v_p) définie par $v_p = \sum\limits_{k=0}^{p} u_k$ (pour $p \in \mathbb{N}$).
   a) déduire de 1° une expression de v_p.
   b) En conclure que (v_p) est convergente et calculer sa limite.
   c) Calculer $\lim\limits_{p \to \infty} v_p$ à partir de la définition de (u_n)

Exercice 2.22

Soit (a_n) une suite , on pose $b_n = a_n + 2a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $b_n \to 0 \Longrightarrow a_n \to 0$.

2. Montrer que $(b_n\ )$converge entraîne que (a_n) converge. Préciser la limite de a_n en fonction de celle de b_n .

Dans toute la suite du problème on pose : $u_0 = u_1 = \frac{3}{2}, u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}}$,

3. Quelle est la limite éventuelle de (u_n).

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{3} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1$

5. On pose dans cette question $a_0 = u_0, a_n = u_n - u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = a_n + 2a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que b_n converge ,calculer sa limite , en déduire celle de a_n

Exercice 2.23 :

On pose : $u_0 = u_1 = 1, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2. On pose :$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $v_{n+2} = \dfrac{v_n + v_{n+1}}{2\left(2 + v_{n+2}\right)}$

b) En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{|v_n| + |v_{n+1}|}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

3. On pose $x_0 = |v_0|, x_1 = |v_1|, x_{n+2} = \dfrac{x_n + x_{n+1}}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $|v_n| \leq x_n \leq (0,8)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire : $\lim\limits_{+\infty} x_n$.

Exercice 2.24. *Moyenne arithmico-géometrique :*

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a > b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

1. Montrer que ces suites sont bien définies

2. Montrer qu'elles sont adjacentes , on note par $M(a, b)$ leurs limite communes appelle moyenne *arithmico - géométrique* de a et b

3. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|a_n^2 - b_n^2\right| \leq \dfrac{1}{2b^2}\left(\dfrac{b-a}{2b^2}\right)^{2^n}$

4. Donner une majoration de $a_n - M(a, b)$ et $M(a, b) - b_n$ en fonction de a, b, n

5. En déduire une valeur approche par défaut et une par excès de $M(2, 1)$ à $10^{-5} près$.

Exercice 2.25. *Calcul approche de π a l'aide de la méthode de Viete*

1. Soit $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$,montrer que les suites $(2^n \sin(\dfrac{\theta}{2^n}))$ et $(2^n \tan(\dfrac{\theta}{2^n}))$ sont adjacentes , calculer leurs limites communes

2. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites définies par : $u_0 = 0, v_0 = 2, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, v_{n+1} = 2v_n$, montrer que $v_n(2 - u_n) \to \pi$

Exercice 2.26

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

Montrer que ces suites sont bien définies et adjacentes.
Calculer leurs limites communes.

Exercice 2.27
Soit $((p_n),(q_n)) \in (\mathbb{N}^{*\mathbb{N}})$ tel que$\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers une limite finie $l \notin Q$,on suppose $q_n \nrightarrow +\infty$
a) Montrer qu'on peut extraire de q_n une sous suite bornée.
b) Montrer qu'on peut extraire de q_n et p_n deux sous suites convergentes.
c) En déduire qu'on peut extraire de q_n et p_n deux sous suites stationnaires.
En déduire une contradiction puis conclure.

Exercice 2.28 *Trisection de l'angle :*
Soit $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$,
1. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$
2. On pose $u_0 = \sin(\theta), u_{n+1} = u_n + \dfrac{4}{27}u_{n+1}^3$, montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2.29
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ tel que $a < b$, on pose $u_0 = a, u_1 = b, u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}$
1. Montrer $(u_{2n}),(u_{2n+1})$ que suites sont adjacentes.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en déduire $\lim u_n$.

Chapitre 3

FONCTIONS REELLES D'UNE VARIABLE REELLE : LIMITES, CONTINUITE

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 On appelle fonction numérique sur un ensemble A, toute application f définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, f est dite fonction numérique d'une variable réelle ou encore fonction réelle d'une variable réelle.

L'ensemble des fonctions numériques définie sur un ensemble A sera noté par $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.2 Domaine de définition de f :

Le domaine de définition de f est l'ensemble noté D_f des réels x tel que $f(x)$est défini.

Exemples 3.1.1

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $D_f = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\cup}]n\pi, (n+1)\pi[$

Définition 3.1.3 Graphe d'une fonction :

Le graphe de f est l'ensemble noté G_f donné par :

$$G_f = \{(x, f(x)) \ \ / \ \ x \in D_f\}$$

C'est une partie de $\mathbb{R}^2$.

Exemples 3.1.2

1. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, $G_f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \ \ / \ \ x \in \mathbb{R}^*\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{*2} \ \ / \ \ xy = 1\right\}$
c'est une hyperbole.

2.Si $f(x) = x^2$, $G_f = \left\{\left(x, x^2\right) \ \ / \ \ x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ y = x^2\right\}$
c'est une parabole.

Exercice 3.1.1 : Préciser le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes

$f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_4(x) = \ln x$, $f_5(x) = \tan x$

Exercice 3.1.2 Quelles sont les fonctions dont le graphe est une droite ?

3.1.2 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 3.1.4

1. On définit sur l'ensemble $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ deux lois internes la somme et le produit :

La somme de deux foncions numériques f et g est la fonction, noté $f+g$ définie par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Le produit de deux foncions numériques f et g est la fonction, noté $f\times g$ (ou fg) définie par $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$.

2. On définit aussi sur l'ensemble $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ une loi externe, le produit d'un nombre réel par une fonction numérique : Soient α un réel et f une fonction numérique. On définit la fonction $\alpha.\,f$ par $(\alpha.f)(x)=\alpha f(x)$.

On vérifie aisément que $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.5 On dit que deux fonctions f_1 et f_2 sont égales sur une partie A de $\mathbb{R}$ si $f_1(x)=f_2(x) \quad \forall x\in A$

On écrit alors $f_1=f_2$ sur A

3.1.3 Fonction bornée

Définition 3.1.6

1. Une fonction numérique f définie sur un ensemble A est dite majorée si l'ensemble $f(A)$ est majoré. Ce qui entraine qu'il existe un nombre réel C tel que pour tout $x\in A$, on ait $f(x)\leq C$.

2. Une fonction numérique f définie sur un ensemble A est dite minorée si l'ensemble $f(A)$ est minoré. Ce qui entraine qu'il est existe un nombre réel c tel que pour tout $x\in A$, on ait $f(x)\geq c$.

3. Si une fonction f est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est bornée.

Exemple 3.1.3. La fonction $f(x)=\sin x$ est bornée.

Si une fonction f est majorée alors l'ensemble $f(A)$ admet une borne supérieure M qu'on appellera borne supérieure de la fonction f. On note $M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$.

De même, Si une fonction f est minorée alors l'ensemble $f(A)$ admet une borne inférieure m qu'on appellera borne inférieure de la fonction f. On note $m=\inf\limits_{x\in A} f(x)$

Le nombre M est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$i)$ $\forall x\in A\ ,\ f(x)\leq\ M$

$ii)$ $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists x_0\in A\ ,\ f(x_0)>M-\varepsilon.$

De même le nombre m est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

$i)$ $\forall x\in A\ ,\ f(x)\geq m$

$ii)$ $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists x_0\in A\ ,\ f(x_0)<m+\varepsilon.$

Remarques 3.1.1. Une fonction f est minorée sur un ensemble A si et seulement si la fonction $-f$ est majorée sur A et nous avons

$$\inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} (-\ f(x))$$

2. Une fonction définie sur un intervalle borné n'est pas forcément bornée. C'est le cas par exemple de la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]0,1]$.

3.1.4 Fonction paire et fonction impaire

Définition 3.1.4 Une fonction numérique f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite paire si : $\forall x \in A$, $f(-x) = f(x)$. Elle est dite impaire si : $\forall x \in A$ tel que $-x \in A$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarques 3.1.2

1. Une fonction constante est paire.
2. Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire.
3. Si une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est impaire et si $0 \in A$, alors $f(0) = 0$. Mais f peut être impaire sans qu'elle soit définie en 0.
4. Le graphe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Le graphe d'une fonction impaire admet l'origine comme centre de symétrie.

Exemples 3.1.3. Les fonctions x^2 et $\cos x$ sont paires, les fonctions x^3et $\sin x$ sont impaires

3.1.5 Fonction périodique

Définition 3.1.5 une fonction numérique f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre T tel que : $\forall x \in A$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarques 3.1.3

1. Si T est une période pour f, tout nombre de la forme kT où $k \in \mathbb{Z}$ est une période pour f.
2. Pour construire le graphe d'une fonction périodique de période T , il suffit de construire l'arc relatif à $[\alpha, \alpha+T[, \alpha$ quelconque. Le reste se déduit par des translations parallèles à l'axe des abscisses.

Exemples 3.1.5

1. La fonction $f(x) = x - E(x)$ est périodique car : $f(x+1) = f(x)$.
2. Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π

3.2 Notion de limite

3.2.1 Définitions -Exemples

Notion de voisinage

On appelle voisinage d'un point x de $\mathbb{R}$, tout sous ensemble V de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x. On note par $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Nous avons, donc

$V \in V(x) \Rightarrow \exists I$ ouvert , $x \in I \subset V$.

Exemple 3.2.1 . Pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de x.

Remarque 3.2.1. Si $V \in V(x)$ et $V \subset W$, alors $W \in V(x)$.
En effet, $V \in V(x) \Rightarrow \exists O$ ouvert , $x \in O \subset V$.
Or $V \subset W$ donc $x \in O \subset W$.

Limites finies

Soit f une fonction numérique définie sur un voisinage A d'un point x_0 sauf peut être au point x_0

Définition 3.2.1

1.On dit que f admet l comme limite réelle au point x_0 si et seulement si

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0,\ (x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f\ (x) \quad = l$

2. **Limite à droite et à gauche en un point**

a) On dit que f admet une limite l réelle quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures (ou à droite de x_0) si et seulement si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \ \eta > 0\ ,\ (\ x \in A\ ,\ x \neq x_0, \quad x_0 < x < x_0 + \eta\ ) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette limite est dite limite à droite de f en x_0.

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f\ (x) \quad = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \ = l$

b) On dit que f admet une limite quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures (ou à gauche de x_0) si et seulement si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ ,\ (\ x \in A\ ,\ x \neq x_0,\ x_0\ -\ \eta < x < x_0\ ) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Cette limite est dite limite à gauche de f en x_0

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0 x < x_0} f(x) \quad = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \quad = l$

Fonction de limite infinie en un point

Définition 3.2.2

1. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0, (x \in A, x \neq x_0,\ |x - x_0|\ < \eta) \Rightarrow\ f(x) > B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad = +\infty$

2. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0, (x \in A, x \neq x_0,\ |x - x_0|\ < \eta) \Rightarrow\ f(x) < -B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad = -\infty$

3. On dit que f tend vers $+\ \infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0 (x \in A, x_0 < x < x_0 + \eta) \Rightarrow f\ (x) > B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

4. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0, (x \in A, x_0 < x < x_0 + \eta) \Rightarrow f\ (x) < -B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Fonction de limite finie à l'infini

Définition 3.2.3

1. On dit que f admet comme limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ C > 0, (x \in A, x > C) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. On dit que f admet comme limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, (x \in A, x < -C) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0,\ (x \in A,\ x_0 - \eta < x < x_0) \Rightarrow f(x) > B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

4. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures si

$$\forall\ B > 0, \exists\ \eta > 0,\ (x \in A, x_0 - \eta < x < x_0) \Rightarrow f(x) < -B$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

Fonction de limite infinie à l'infini

Définition 3.2.4

1.On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ C > 0,\ (x \in A, x > C) \Rightarrow\ f(x) > B$$

2. On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ C > 0,\ (x \in A, x < -C) \Rightarrow\ f(x) > B$$

3. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ C > 0,\ (x \in A, x > C) \Rightarrow\ f(x) < -B$$

4. On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall\ B > 0, \exists\ C > 0,\ (x \in A, x < -C) \Rightarrow\ f(x) < -B$$

Remarques 3.2.2.

1. Dans chacun des neuf cas précédents, toute inégalité stricte peut être remplacée par une inégalité large.

2. Si $x_0 \in A$ et si f admet une limite réelle l au point x_0, $f(x_0)$ peut être différent de l.

3. Une fonction peut ne pas admettre de limite.

Exemples 3.2.2.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,1[\\ 2 \text{ si } \quad x = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 2$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 2 \text{ si } \; x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Pour tout $x_0 \in [0,1]$, la fonction f n'admet pas de limite.

3.2.2 Théorèmes sur les limites

Théorème 3.2.1 . Si une fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en un point x_0, cette limite est unique.

Démonstration. Supposons que $x_0 \in \mathbb{R}$ et que f admet deux limites l et l' avec $l \neq l'$ en un point x_0. Supposons, par exemple, $l > l'$.

Alors, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $(x \in A, |x - x_0| < \eta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{l-l'}{4}$.
De même il existe $\eta_2 > 0$ tel que $(x \in A, |x - x_0| < \eta_2) \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{l-l'}{4}$.
Soit $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$, alors :

$$|f(x) - l| + |f(x) - l'| < \tfrac{l-l'}{2} \text{ dés que} |x - x_0| < \eta$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire nous avons : $|l - l'| < \frac{l-l'}{2}$.

Si x_0 est infini, on fait le même raisonnement.

Théorème 3.2.2 . Si une fonction f admet en un point x_0,une limite à droite $l \in \mathbb{R}$ et une limite à gauche $l' \in \mathbb{R}$ et que $l = l'$ alors f admet au point x_0, l comme limite

3.2.3 Caractérisation des limites à l'aide des suites

Théorème 3.2.2 Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Une fonction f admet une limite quand x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de A qui tend vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers l.

Démonstration. Supposons que f admet une limite réelle quand x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$(x \in A, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.)$

Soit (u_n) une suite de points de A qui tend vers x_0 , il existe $N > 0$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - x_0| < \eta$.

Par suite : $\forall n > N$, $|f(u_n) - l| < \varepsilon$. C'est à dire que la suite $(f(u_n))$ converge vers l

Réciproquement, Supposons que pour toute suite (u_n) de points de A qui tend vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers l et que f n'admet pas de limite quand x tend vers x_0. Il existe, alors, un réel ε positif tel que pour tout $n > 0$, il existe un élément u_n de A tel que : $|u_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$ (A) .

La suite (u_n) ainsi construite tend vers x_0 , donc la suite $(f(u_n))$ converge vers l, c'est à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$\forall n > N, |f(u_n) - l| < \varepsilon.$

Mais ceci contredit (A) . La démonstration est analogue lorsque x_0 tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple.3.2.2 la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

En effet, si on considère les suites définies par $u_n = \frac{1}{n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, on aura $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.

3.2.4 Critère de CAUCHY

Théorème 3.2.3. Pour que f admet une limite au point $x_0 \in \mathbb{R}$ il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ ,\ (x \in A, x' \in A, |x - x_0| < \eta$ et $|x' - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Démonstration. Supposons que f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, si ε est u_n réel positif $\exists\, \eta > 0$, $(x \in A, |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

Par suite si $x \in A, x' \in A$,

$(|x - x_0| < \eta$ et $|x' - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Réciproquement, Supposons que le critère de Cauchy soit vérifiée. Soit ε un réel positif , il existe $\eta > 0$ tel que $x \in A, x' \in A, |x - x_0| < \eta$ et

$|x' - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Soit (u_n) une suite de points de A qui tend vers x_0, alors il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N, |u_n - x_0| < \eta$.

Il en résulte que si $p > N$ et $q > N$, $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon.$

La suite $(f(u_n))$ est donc de Cauchy et par suite elle converge .

Remarque 3.2.3 . Nous avons un critère analogue quand x tend vers l'infini.

3.2.5 Règles de calcul sur les limites

Somme de deux fonctions

Soient f , g deux fonctions numériques, définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Supposons que les fonctions f et g admettent des limites réelles au point x_0 , alors nous avons : $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

ii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (resp.$-\infty$) , alors $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \infty$ $(resp. -\infty)$

iii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $(resp. -\infty)$ et si g est bornée, alors $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty \quad (resp. -\infty \quad)$

Produit de deux fonctions *i*) Supposons que les fonctions f et g admettent des limites réelles au point x_0 , alors nous avons $\lim_{x\to x_0} fg(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$

ii) Pour tout réel α, $\lim_{x\to x_0} \alpha\ f(x) \ = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)$

iii) Si on suppose que g est borné et si $\lim_{x\to x_0} f(x) \quad = 0$, alors $\lim_{x\to x_0} fg(x) = 0$.

iv) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \varepsilon\infty\ et \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0, alors \lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \varepsilon'\infty$

avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = +1$ Si f et g ont le même signe et $\varepsilon' = -1$ dans le cas contraire.

Exemple 3.2.3 $\lim_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$ puisque $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$

Inverse d'une fonction *i*) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x).}$

ii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$ (le signe étant celui de la limite de f) .

iii) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, et si $|g(x)|$ est minorée par un nombre strictement positif, alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple 3.2.4 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} = 0$ puisque $2 + \sin\frac{1}{x} \geq 1$

Composée de deux fonctions

Théorème 3.2.3. Soit f une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g une application d'une partie B de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $f(A) \subset B$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ Alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad = l \text{ et } \lim_{y\to l} g(y) = m \Rightarrow \lim_{x\to x_0} gof(x) = m.$$

Démonstration

Puisque $\lim_{y\to l} g(y) = m$,on a

$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_1 > 0,(y \in B, |y - l| < \eta_1) \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon.$

A η_1 on associe un nombre η_2 tel que
$x \in A, |x - x_0| < \eta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < \eta_1$
Or $\quad x \in A \Rightarrow f(x) \in B$. Il en résulte

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0,(x \in A, |x - x_0| < \eta_2) \Rightarrow |g(f(x)) - m| < \varepsilon.$$
.

Exemple 3.2.5 . $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 2x^4 + 1} = 1$

3.2.6 Limites et ordre

Théorème 3.2.5. Soient f , g deux fonctions numériques, définie sur un un voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Si $f \leq g$ sur A et si les limites existent au point x_0, alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$
ii) Si $f \leq g$ sur A et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ Alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

iii) Si $f \leq g \leq h$ sur A et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque.3.2.4 Les inégalités strictes donnent en général des inégalités larges.

Exemple 3.2.6 Déterminons $\lim_{x \to 0} \sin x \, E\left(\frac{1}{x}\right)$

Par définition de la partie entière on a $\qquad E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \leq E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

Ainsi $\quad \frac{1}{x} - 1 \leq E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

Prenons pour voisinage de 0, l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et distinguons deux cas :

$-x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[, \quad \sin x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} - \sin x < \lim_{x \to x_0} \sin x \, E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin x}{x}$

et on conclut dans ce cas
$$\lim_{x \to 0, x<0} \sin x \, E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

On refait une démonstration du même genre si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et on arrive à la même conclusion

Théorème 3.2.6. Soit f une fonction numérique, définie sur un un voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, admettant une limite réelle l en x_0. Soient c et d deux nombres réels.

i) Si $c < l$, alors au voisinage du point x_0, nous avons $c < f(x)$.

ii) Si $l < d$, alors au voisinage du point x_0, nous avons $f(x) < d$.

iii) Si $c < l < d$, alors au voisinage du point x_0, nous avons $c < f(x) \quad < d$.

Théorème 3.2. 7. Soit f une fonction numérique, définie sur un un voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, admettant une limite réelle l en x_0 . Soient c et d deux nombres réels.

i) Si $c \leq f\ (x)$, au voisinage du point x_0, alors nous avons $c \leq l$
ii) Si $f(x) \leq d$, au voisinage du point x_0, alors nous avons $l \leq d$
iii) Si $c \leq f(x) \leq d$, au voisinage du point x_0, alors nous avons $c \leq l \leq d$.

3.3 Fonctions monotones

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1

i) Une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite croissante sur A si elle conserve la relation d'ordre, c'est à dire :

$$\forall\ x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Elle est dite strictement croissante sur A si

$$\forall\ x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ii) Une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite décroissante sur A si $\forall\ x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f\ (\ x_1) \geq f\ (\ x_2)$.

Elle est dite strictement décroissante sur A si

$$\forall\ x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f\ (\ x_1) > f\ (\ x_2)$$

iii) Une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite monotone sur A si elle est croissante sur A ou décroissante sur A.

Elle est dite strictement monotone sur A si elle est strictement croissante sur A ou strictement décroissante sur A.

Exemple 3.3.1 La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, \infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$. Mais elle n'est pas strictement monotone sur son domaine de définition $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Exercice 3.3.1 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont monotones ?
$f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = |x|\ ,\ f_4(x) = x^2,\ f_5(x) = x^3,$

Remarques 3.3.1

1. Si f est une fonction croissante, la fonction $-f$ est décroissante.

2. Si f et g sont deux fonctions définies et croissantes (resp. décroissantes) sur une même partie A de $\mathbb{R}$, alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante).

Si f et g sont toutes les deux monotones sans autre précision, on ne peut rien conclure pour $f + g$.

3. Si f et g sont deux fonctions définies, positives et croissantes sur une même partie A de $\mathbb{R}$, alors fg est croissante.

4. Soient f une fonction numérique définie d'une partie A de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur une partie B de $\mathbb{R}$ tel que $f(A) \subset B \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont toutes deux croissantes, ou décroissantes, gof est croissante.

Si l'une des fonctions f et g est croissante, tandis que l'autre est décroissante, gof est décroissante

3.3.2 Propriétés des fonctions monotones

Théorème 3.3.1 Toute fonction monotone sur un intervalle fermé borné est borné sur cet intervalle.

En effet : Soit f une fonction monotone sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Si elle est croissante nous avons,

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Si elle est décroissante nous avons, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Remarque 3.3.2. Si la fonction f est monotone sur un intervalle ouvert, elle n'est pas nécessairement bornée.

Exemple 3.3.2 : la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[0, 1[$ est monotone mais n'est pas bornée.

3.4 Continuité des fonctions numériques

3.4.1 Définitions

Définition 3.4.1. Une fonction f est dite continue en un point x_0 Si f a une limite au point x_0 et si cette limite est $f(x_0)$. Autrement dit, f est continue au point x_0 si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0\ ,\ (\ x \in A\ , |x - x_0| < \eta\ ) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Définition 3.4.2. Une fonction f est dite continue sur A si elle est continue en tout point $x_0 \in A$

Exemples 3.3.1.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0, puisqu'elle n'a pas de limite en ce point.

2.La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est continue en 0. En effet, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \neq 0, x \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$, $|g(x)| \leq |x| < \varepsilon$.

3.4.2 Caractérisation de la Continuité avec les suites

Théorème 3.4.1. Soit f une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in A$. La fonction f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de A qui tend vers x_0 la suite $(\ f(x_n)\ )$ converge vers $f(\ x_0\ )$.

En effet, il suffit d'utiliser le théorème de caractérisation des limites par les suites.

Exemple 3.4.2 Pour $x > 0$ la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ n'est pas continue en o. En effet, Considérons les deux suites définies par $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

Ces deux suites convergent vers 0 mais $f(x_n) \to 0$ et $f(y_n) \to 1$

3.4.3 Règles de calcul sur les fonctions continues

Somme, produit et inverse

Proposition 3.4.1

i) Si f et g sont deux fonctions continues en un point x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$, $f-g$, fg et αf sont continues au point x_0 .

ii) Si f est continue en un point x_0 et $f(x_0) \neq 0$, on peut définir la fonction $\frac{1}{f}$ sur un voisinage de x_0 , puisqu'il existe un voisinage de x_0 où f ne prend pas la valeur 0. En effet, supposons par exemple $f\ (x_0) > 0$, la continuité entraine que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0\ ,\ (\ x \in A\ ,|x - x_0| < \eta\ ) \Rightarrow\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

En particulier, si $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x \in]x - \eta, x + \eta[) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \quad < 3\frac{f(x_0)}{2}.$$

Par conséquent $f(x) > 0$ pour tout $x \in]x - \eta, x + \eta[$.

On en déduit que : si f et g sont deux fonctions continues en un point x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$est continue au point x_0.

Composition

Proposition 3.4.2. Soient f une fonction numérique définie d'une partie A de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur une partie B de $\mathbb{R}$ tel que $f(A) \subset B \subset \mathbb{R}$.

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f\ (\ x_0\ )$ alors gof est continue en x_0.

Exemple 3.4.3. Soit h une fonction numérique définie sur un intervalle I de centre 0 et continue en un point x_0 de I. Si h est paire ou impaire, elle est continue au point $-x_0$. En effet, $h = gof$ où f est la fonction $f : x \to -x$ et g est la fonction $g : y \to -h(y)$.

Les opérations sur les limites ont des conséquences immédiates concernant les opérations sur les fonctions continues.

3.4.4 Continuité à droite, Continuité à gauche.

Nous avons défini la notion de limite à droite et de limite à gauche d'une fonction f en un point x_0 . Nous en déduisons la notion de continuité à droite et continuité à gauche.

Définition 3.4.6. On dit qu'une fonction f définie en un point x_0 est continue à droite (respectivement à gauche) si elle admet une limite à droite $f(x_0+0)$ (respectivement à gauche $f(x_0 - 0)$) en x_0 et si cette limite est égale à $f\ (\ x_0\ )$.

Exemple.3.4.4 La fonction $f(x) = E(x)$ est continue à droite en tout point $n \in \mathbb{Z}$, mais elle n'est pas continue à gauche en ces points.

Remarque 3.4.3. Une fonction f peut ne pas être continue en un point x_0 et admettre une limite à droite $f(x_0 + 0)$ et une limite à gauche $f(x_0 - 0)$ en x_0 identiques.

Exemple 3.4.5 . Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$.

La fonction f n'est pas continue en $x_0 = 0$ et pourtant $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 1$.

Théorème 3.4.2. Une fonction f est continue en un point x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0

3.4.5 Discontinuité d'une fonction

Une fonction numérique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite discontinue en un point $x_0 \in A$ si elle n'est pas continue en x_0. Autrement dit si :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \eta > 0\ ,\ \exists\, x \in A : |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

On dit que f possède en x_0 une discontinuité de première espèce si $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ existent et ne sont pas égaux. La différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ est dite amplitude de cette discontinuité ou saut de la fonction f en x_0. la valeur de $f\ (\ x_0\ )$ peut être différente de $f(x_0 + 0)$ ou $f(x_0 - 0)$.

Si $f(x_0 + 0)$ ou $f(x_0 - 0)$ n'existe pas, on dit que f possède en x_0 une discontinuité de deuxième espèce.

Exemples.3.4.6

1) Soit $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 3$

g possède en x_0 une discontinuité de première espèce en $x_0 = 0$ et nous avons $f(x_0 + 0) = 1$, $f(x_0 - 0) = -1$.

L'amplitude de la fonction f en 0 est 2.

2) Soit $h(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$.

h possède en x_0 une discontinuité de deuxième espèce en $x_0 = 0$ car $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ n'existent pas.

3.4.6 Prolongement par continuité

Théorème 3.4.3. Soit f une fonction définie sur $A - \{x_0\}$ et admettant une limite en x_0. Considérons la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x)$ si $x \in A - \{x_0\}$ et $\varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Alors, la fonction φ est continue en x_0 .

Définition 3.4.3. **l**a fonction φ définie dans le Théorème 4.4.3 est appelée prolongement de f par continuité au point x_0 .

Exemple 3.5.6 . Considèrons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Le prolongement de f par continuité au point 0 est la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

3.4.7 Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème 3.4.4. Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m. C'est à dire que :

$$\exists\ x_1 \in [a, b],\ f(x_1) = M \text{ et } \exists\ x_2 \in [a, b],\ f(x_2) = m$$

Démonstration .i) Supposons que f n'est pas bornée on peut alors trouver une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ telle que : $|f(x_n)| > n$.

D'après le théorème de Balzano $-$Weierstrass (voir théorème 3.3.1), il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge. Soit l sa limite. l est dans $[a, b]$ puisque $(x_{\varphi(n)})$ est dans $[a, b]$. f est continue , en particulier en l, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$

Mais ce résultat est en contradiction avec le fait que

$$\left|f(x_{\varphi(n)})\right|) > \varphi(n) \geq n$$

qui entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$. La fonction f est donc bornée.

ii) La fonction f est bornée. Elle admet donc une borne supérieure M et une borne inférieure m. Supposons, par exemple, que M n'est pas atteinte sur $[a, b]$. C'est à dire : $\forall\ x \in [a, b], f(x) \neq M$

Considérons, alors la fonction g définie sur $[a, b]$ par : $g = \dfrac{1}{M - f}$

La fonction g est continue et strictement positive sur $[a, b]$. D'après i) , g est bornée. Elle admet donc une borne supérieure M'.

Il en résulte que $\forall\ x \in [a, b],\ f(x) \ > M - \dfrac{1}{M'}$.

M ne serait pas, alors, la borne supérieure.

On démontre d'une manière analogue que la borne inférieure est atteinte.

Remarques. 3.4.3

1) Si f n'est pas continue, M ou m peuvent ne pas exister, par exemple, soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$.
La fonction f est définie sur $[0, 1]$ mais n'admet pas de borne supérieure

2) La continuité est une condition suffisante pour qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné soit bornée et atteigne ses bornes. Mais ce n'est pas une condition nécessaire comme le montre l'exemple suivant : Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x$ si $x \in]0, 1[$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Cette fonction n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que sa borne inférieure 0 et sa borne supérieure 1 sont atteintes.

3.4.8 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème 3.4.5.

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$. Supposons que $f(a)\ f(b) < 0$, alors, il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde. Nous supposons que : $f(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$.

Sur un et un seul des intervalles deux $[a, \frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2}, b]$, f prend aux extrémités des valeurs de signe contraire. Soit $[a_1, b_1]$ cet intervalle. En réitérant le raisonnement, nous obtenons une suite de segments emboités :

$[a,b]$, $[a_1,b_1]$,........$[a_n,b_n]$

telle que $f(a_n)\ f(b_n) < 0$.

Soit α la limite commune des suites adjacentes (a_n) et (b_n).

On a $f(\alpha) \neq 0$.

Soit donc ε tel que $|f(\alpha)| > \varepsilon$

Puisque f est continue, on peut associer à ε un entier N tel que

$$x \in [a_N, b_N] \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

On en déduit que $f(a_N)$ et $f(b_N)$ sont du même signe que $f(\alpha)$.Ce qui contredit la construction des intervalles $[a_n, b_n]$.

Remarque. 3.4.4 Le théorème 4.4.5 n'est pas vraie, en général, si f n'est pas définie sur un intervalle, par exemple, soit f la fonction définie sur $A = \{-1, 1\}$ qui est fermé borné par $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$.

La fonction f est continue sur A, $f(1)f(-1) < 0$ et $\forall\ x \in A \quad f(x) \neq 0$.

Théorème 3.4.6 . **Théorème de la valeur intermédiaire**

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$. Soit k un nombre réel compris entre les bornes de f sur $[a,b]$. Il existe, alors, au moins un élément c de $[a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration. 1) Si $k = m$ ou $k = M$, d'après le théorème 4.4.4

$$\exists\ x_1 \in [a,b],\ f(x_1) = M \text{ et } \exists\ x_2 \in [a,b],\ f(x_2) = m.$$

2) Si $m < k < M$, nous appliquons le théorème 4.4.5 à la fonction g définie sur $[x_1, x_2]$ (ou $[x_1, x_2]$) par $g(x) = f(x) \quad - k$.

Remarques 3.4.6.

1) La continuité est une condition suffisante pour qu'une fonction sur un intervalle fermé borné possède la propriété de la valeur intermédiaire, mais ce n'est pas une condition nécessaire. Par exemple, soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Cette fonction n'est pas continue en 0 et possède la propriété de la valeur intermédiaire.

2) Le théorème 4.4.6 n'est pas vraie, en général, si f n'est pas continue. En effet, considérons, par exemple, la fonction f définie sur $[0,2]$ par :

$$f(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ , } f(x) = -x+4 \text{ si } 1 < x \leq 2.$$

Cette fonction n'est pas continue en 1. Sa borne inférieure 0 est atteinte, sa borne supérieure 3 n'est pas atteinte. Elle prend les valeurs 1 et 2 mais ne prend aucune valeur comprise entre 1 et 2.

3.5 Continuité et monotonie

3.5.1 Préliminaires

Considérons une fonction numérique définie sur un intervalle I. Nous nous intéressons à l'existence éventuelle de la fonction réciproque f^{-1}. Il est clair que l'application $f : I \to f(I)$ est surjective. Si f est injective, f admet une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$.

Remarque 3.5.1. Une fonction peut admettre une fonction réciproque sans être continue.

Exemple.3.5.1. La fonction $f :[0,1] \to [0,1]$, définie par : $f(x) = x$ si $x \in]0,1[$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ est bijective et non continue.

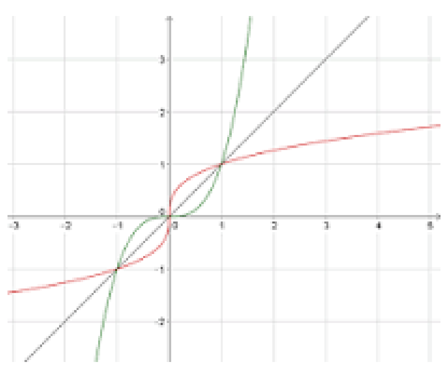
Interprétation graphique.

Soient Γ_1 et Γ_2 les représentations graphiques de f et f^{-1} dans un repère orthonormé. Soit $M(x,y)$ un point de Γ_1 et M' le point de cordonné (y,x) . M' est un point de Γ_2, M et M' sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Nous avons donc : $M \in \Gamma_1 \Longleftrightarrow y = f(x)$, $x \in I$

$$\Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ , } y \in J$$
$$\Longleftrightarrow M \in \Gamma_1$$

Γ_1, Γ_2 sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



3.5.2 Continuité des fonction réciproques

Théorème 3.5.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Les affirmations suivantes sont équivalentes

1. f est strictement monotone
2. f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$

Démonstration.

Le théorème des valeurs intermédiaires établi précédemment prouve que f est surjective. Montrons alors que f est injective. Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I. Nous avons alors $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.

Par conséquent $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

La fonction f est donc injective. La réciproque est immédiate

Conséquence. Si f est strictement monotone ; il existe une fonction f^{-1} , définie sur $f(I)$ à valeurs dans I.

Nous avons

$$y = f(x) \quad , x \in I \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in f(I)$$

La fonction f^{-1} est strictement monotone et de même sens de variation que f.

En effet La fonction f^{-1} est strictement croissante, puisque $y_1 - y_2$ et $f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)$ sont de même signe. En effet si $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, $(x_1 - x_2)$ et $(f(x_1) - f(x_2))$ sont de même signe et

$$\frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Remarque 3.5.2. Toute fonction continue strictement monotone est une bijection. Mais, une fonction peut être bijective, strictement monotone sans être continue.

Exemple 3.5.2 . La fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$ est bijective et n'est pas continue au point 1.

3.6 Exercices

Exercice 3.1 Calculer si elles existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}, \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}; \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\ln(1+x) - \ln(1-x)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(\ln\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 3.2 Soit $f(x) = 1 + x + x^2 \sin^2 x, \; x > 0$.

Etudier les limites des fonctions suivantes :

$$\frac{f(x)}{x^3}, \; \frac{f(x)}{x^2}, \; \frac{f(x)}{x}, \; \frac{f(x)}{e^x}.$$

Exercice 3.3 Montrer en revenant à la définition que $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{4\}$

Exercice 3.4

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x) = \begin{cases} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

b) $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$g(x) = \dfrac{x \sin \pi x}{E(x)}.$

Exercice 3.5 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que

$f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 3.6

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 3.7

Soit f une application de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ périodique telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = l$.

Exercice 3.8

Soit $I = [0, 1]$; et f une application croissante de I dans I. On pose $A = \{x \in I, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

1. $A \neq \varnothing$,
2. $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
3. A posséde une borne inférieure $a \in I$.
4. $f(a) = a$:

(Toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 3.9

Soient a et b deux réels, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} a \cos x \text{ si } x \leq 0 \\ e^x + b \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que f soit continue en 0 ?

Exercice 3.10

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = g(x).$$

Montrer que $f(x) = g(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.11

On considère la fonction $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x - E(x)$.

1. Déterminer une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que $g(u_n) = 0$, $\forall n$.

2. Déterminer une suite (v_n) tendant vers $+\infty$ telle que $g(v_n) = \dfrac{1}{2}, \forall n$.

3. La fonction g admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

Exercice 3.12. On considère les fonctions suivantes

$f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x-1}, x \neq 1$; $g(x) = \cos(\pi x) + |x| \cos\left(\dfrac{1}{\pi x}\right), x \neq 0; h(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ et $k(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Sur quels ensembles peut on prolonger ces fonctions par continuité ?

Exercice 3.13 Soit f une fonction numérique telle que f soit continue en $0, f(1) = 1$ et vérifiant la relation

$$(f(x+y) - f(x) - f(y))^2 = 4f(x) \, f(y)$$

1. Etablir que

a) $f(0) = 0$ et f est paire

b) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $f(2x) = 0$ ou $f(2x) = 4f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.Montrer que

$$|f(x+y) - f(x)| \leq 2\sqrt{f(x) \, f(y)} + f(y)$$

En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.14 Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 3.15

Soit $a; b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone.

Exercice 3.16

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Chapitre 4

DERIVABILITE DES FONCTIONS NUMERIQUES

4.1 Définitions

Définition 4.1.1.

1. On dit que f est dérivable en un point $a \in I$ si la fonction, définie sur $I-\{a\}$, par $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Lorsque elle existe, cette limite , qui est alors unique, est un élément de $\mathbb{R}$. On appelle cette limite dérivée de f au point a et on la note par $f'(a)$.

Nous avons donc $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Si on pose $h=x-a$, on voit que $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. L'application $f' : x \in I \to f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f.

On utilise parfois la notation $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$.

Exemples 4.1.1.

1.Une fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle.

2. Une fonction affine $f(x)=ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante a.

Définition 4.1.2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.$i)$ On dit que f est dérivable à droite en un point $a \in I$ si la fonction, définie sur $I-\{a\}$, par $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite, finie, lorsque x tend vers a. On note cette limite par $f'_d(a)$.

Nous avons donc $f'_d(a). = \lim\limits_{x\to a, x>a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$ii)$ On dit que f est dérivable à gauche en un point $a \in I$ si la fonction définie sur $I-\{a\}$, par $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche, finie, lorsque x tend vers a. On note cette limite par $f'_g(a)$.

Nous avons donc $f'_g(a) = \lim\limits_{x\to a, x<a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Remarque 4.1.1. En général, nous n'avons pas

$$f'(a+0) = f'_d(a),\ f'(a-0) = f'_g(a)$$

Exemple 4.1.2. Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Nous avons , $f'_d(0) = 0$ et $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 par valeurs positives.

Théorème 4.1.1. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour que f soit dérivable en un point $a \in I$, il faut et il suffit que f soit dérivable à droite et dérivable à gauche au point a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Nous avons alors : $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

4.2 Propriétés des fonctions dérivables

4.2.1 Continuité

Théorème 4.2.1. Si f est dérivable au point $a \in I$ alors f est continue en a.

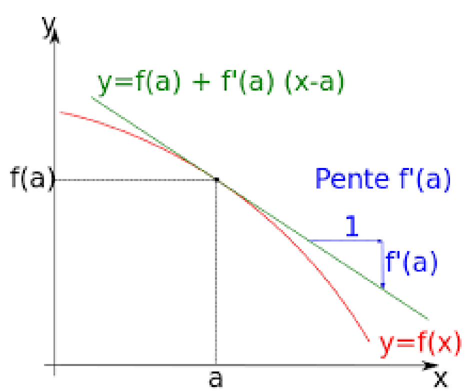
En effet, considérons la fonction α, définie sur I, par $\alpha(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - l$ si $x \neq a$ et $\alpha(a) = 0$. La fonction α est continue au point a car $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Il en résulte que f est aussi continue au point a, puisque
$f(x) = f(a) + (x - a)\,(l + \alpha(x))$.

Remarque 4.2.1. La réciproque du théorème 4.6.2 n'est pas vraie en général.

Exemple 4.2.1. La fonction $f(x) = |x|$ est continue au point zéro mais elle n'est pas dérivable en ce point.

4.2.2 Propriétés géométriques des fonctions dérivables



Théorème 4.2.2 Une fonction f est dérivable en un point a si et seulement si son graphique Γ admet au point de coordonnées a, $y = f(a)$ une tangente non

parallèle à l'axe Oy. La dérivée $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en M_0 à Γ. L'équation de cette tangente est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

4.3 Extremum local d'une fonction

Définition 4.3.1. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f admet en un point a de I un maximum (respectivement un minimum) local s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap I$

$f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$).

On dit que f admet en un point a de I un extremum local si elle admet un maximum local ou un minimum local.

Théorème 4.3.2. Si une fonction numérique f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admet en un point a de I un extremum local et si elle est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple que f admet au point a un maximum local alors nous avons $f'_d(a) \leq 0$ et $f'_g(a) \geq 0$. Comme f est dérivable en a,

$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$. Il en résulte que $f'(a) = 0$.

Remarques.4.3.1

1. L'existence d'un extremum local en un point a n'entraîne pas l'existence de la dérivée en ce point, par exemple la fonction $f(x) = |x|$ admet au point 0 un minimum local mais n'est pas dérivable en ce point.

2. Une fonction peut être dérivable en un point a vérifiant $f'(a) = 0$ sans qu'elle admette un extremum local en ce point, par exemple $f(x) = x^3$ est dérivable en 0, la dérivée en 0 est nulle et n'admet pas d'extremum local en ce point.

4.4 Opérations sur les fonctions dérivables en un point

4.4.1 Somme et produit des fonctions dérivables

Théorème 4.4.1. Soient f et g deux fonctions, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables en un point a de I.

i) Les fonctions $f+g$,$f-g$ et fg sont dérivables au point a et nous avons :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a),$$
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\ ,$$

ii) Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable au point a et nous avons

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}, .$$

iii) Si α est un nombre réel , $\alpha\ f$ est dérivable a et nous avons

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)\ ,\ d(\alpha f)_a = \alpha . d\prime_a$$

4.4.2 Composée de deux fonctions dérivables

Théorème 4.4.2. Soient f une fonction dérivable en un point a et g une fonction dérivable au point $f(a)$. La fonction gof est alors dérivable au point a et nous avons $(gof)' = g'(f(a)) \times f'(a)$

Exemple.4.4.1

1. La fonction $\tan x$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition et $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2.. La fonction $\ln x$ est dérivable sur $]0, \infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

.

4.4.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 4.4.3. Soit f une fonction continue, strictement monotone d'un intervalle I dans intervalle J, dérivable en un point $a \in I$ et vérifiant $f'(a) \neq 0$. La fonction réciproque $f^{\ -1}$ est alors dérivable au point $y_0 = f(a)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Démonstration. Nous devons chercher la limite , quand y tend vers y_0 de $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$. Or, si $f^{-1}(y) = x$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)}$

De plus, puisque f^{-1} est continue, x tend vers a quand y tend vers y_0 . Par conséquent : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ tend vers $\dfrac{1}{f'(a)}$quand y tend vers y_0.

Remarque.4.4.2 Le théorème de dérivation des fonctions composées permet de retrouver la valeur de la dérivée de la fonction réciproque , mais ne permet pas d'établir son existence.

.

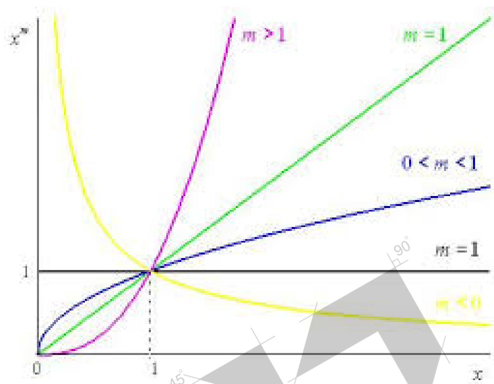
Théorème 4.4.4. Soit f une fonction numérique définie, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I . La fonction réciproque $f^{\ -1}$ est définie continue et strictement monotone sur $f(I)$. De plus, Si f' ne s'annule pas sur I, $f^{\ -1}$ est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$.

4.5 Fonctions réciproques des fonctions usuelles

4.5.1 Fonctions puissances.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Elle admet donc une fonction réciproque que nous noterons par $x \to \sqrt[m]{x}$ ou $x \to x^{\frac{1}{m}}$

Si $m \in \mathbb{Z}$, nous poserons par définition $x^m = \dfrac{1}{x^{-m}}$.



Si $r \in \mathbb{Q}$, On pose $r = \frac{p}{q}$ et on définit le nombre $x^{\frac{p}{q}}$ par $x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$

La fonction $x \in \mathbb{R}^{*+} \to x^r$où $r = \frac{p}{q}$, p et q des entiers est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. Sa dérivée est donnée par$(x^r)'(x) = rx^r - 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

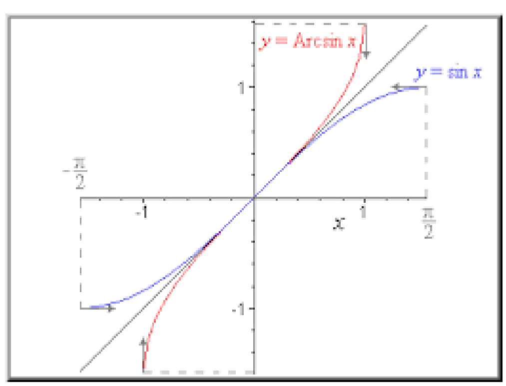
4.5.2 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

La fonction $f : x \to \sin x$ est continue, strictement monotone sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. Nous pouvons donc définir la fonction réciproque $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to g(y) = \arcsin y \in [-1, 1]$

Nous avons

$$(y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (x = \arcsin y, -1 \leq y \leq 1).$$



La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Sa dérivée est donnée par

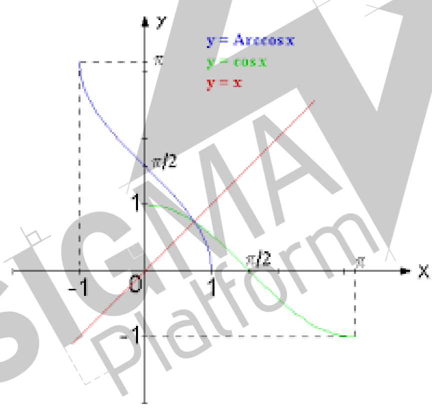
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pour tout $x \in]-1,1[$.

En effet, nous avons $(\arcsin)'x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Il suffit alors de tenir compte des formules suivantes : $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$, $\sin(\arcsin x) = x$ et $\cos(\arcsin x) \geq 0$.

Fonction arccos

La fonction $f : x \to \cos x$ est continue, strictement monotone sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $f([0, \pi]) = [-1, 1]$. Nous pouvons donc définir la fonction réciproque : $y \in [0, \pi] \to g(y) = \arccos y \in [-1, 1]$.Nous avons :

$$(y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi) \Leftrightarrow (x = \arccos y, -1 \leq y \leq 1).$$



La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. Sa dérivée est donnée par $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

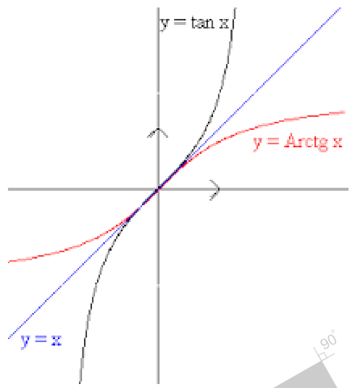
Remarque. 4.5.1. La fonction $x \to \arcsin x + \arccos x$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable en tout point de $]-1,1[$ et sa dérivée est nulle en chaque point de $]-1,1[$. De plus $\arcsin 0 = 0$ et $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Fonction arctan

La fonction $f : x \to \tan x$ est continue, strictement monotone sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f(]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[) = R$. Nous pouvons donc définir la fonction réciproque : $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to g(y) = \arctan y \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$(y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (x = \arctan y, y \in \mathbb{R})?$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ Sa dérivée est donnée par $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

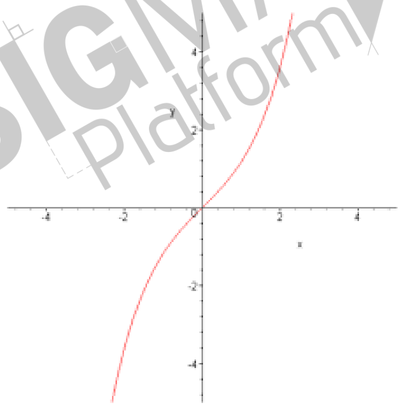


On définit de la même façon la fonction $y \in]0, \pi[\rightarrow \ g(y) = arccotany \in \mathbb{R}$.

4.5.3 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Fonctions hyperboliques

$i)$ Sinus hyperbolique l'application $\quad sh\ x : x \rightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.



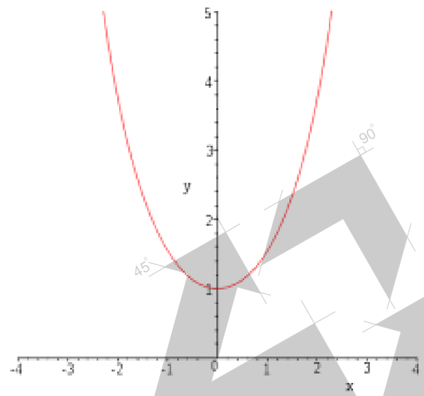
$ii)$ Cosinus hyperbolique l'application $\quad ch\ x : x \rightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$iii)$ Tangente hyperbolique l'application $\quad th\ x : x \rightarrow \dfrac{shx}{chx}$.

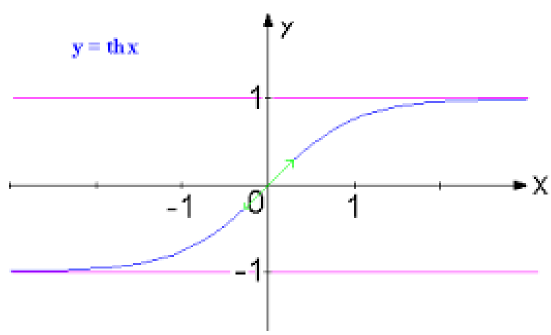
Ces trois fonctions sont définies continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.

Les applications ch, sh et th permettent de développer une trigonométrie, dite trigonométrie hyperbolique, analogue à celle connue. Plus précisément, on établit aisement les formules suivantes :

$cht+\ sht = e^t$; $ch^2t-\ sh^2t = 1$; $\quad sh(a+b) = shachb + chashb$;



y
x



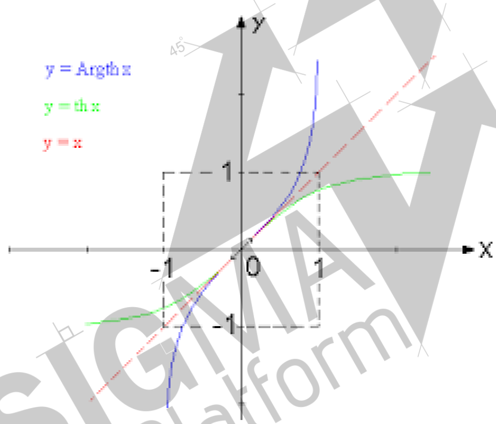
y = th x
Y
X
1
-1
0

$sh(a-b) = shachb - chashb$; $\quad ch(a+b) = chachb + shashb$;
$ch(a-b) = chachb - shashb$;
$th(a+b) = \frac{tha+thb}{1+thathb}$; $th(a-b) = \frac{tha-thb}{1-thathb}$

Fonctions hyperboliques réciproques

La fonction $f : x \to \ shx$ est continue, strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc définir sur $\mathbb{R}$ sa fonction réciproque appelé argument sinus hyperbolique et noté arg sh. Ainsi, nous avons :

$$(y = shx, x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x = \arg shy, y \in \mathbb{R}).$$



La fonction $\arg sh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\arg sh)'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : x \to \ chx$ est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$. Nous pouvons donc définir sur $[1, +\infty[$ sa fonction réciproque appelé argument cosinus hyperbolique et noté arg ch. Ainsi, nous avons :

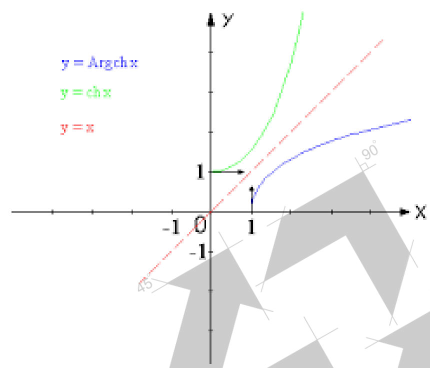
$$(y = chx, < x \in \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow (x = \arg chy, y \in [1, +\infty[).$$

La fonction $\arg ch$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^+$ et $(\arg ch)'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

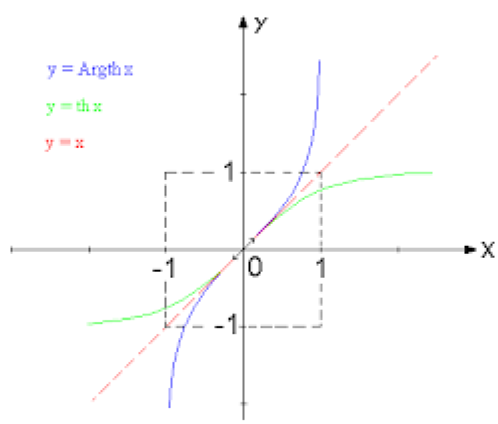
La fonction $f : x \to \ thx$ est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Nous pouvons donc définir sur $]-1, 1[$ sa fonction réciproque appelé tangente hyperbolique et noté arg th. Ainsi, nous avons :

$$(y = thx, < x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x = \arg thy, y \in]-1, 1[)$$

La fonction $\arg th$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $(\arg th)'x = \frac{1}{1-x^2}$ pour tout $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.



y
y = Argch x
y = ch x
y = x
1
x
-1
0
1
-1



y
y = Argth x
y = th x
y = x
1
x
-1
0
1
-1

Les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide d'expressions logarithmiques. Plus précisément, nous avons : $\arg ch\, t = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$; $\arg sh\, t = \ln(t+\sqrt{t^2+1})$; $\arg th\ t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$.

Vérifiions par exemple la première égalité :

Soit $t \in [1,+\infty[$. Posons $x = \arg ch\ t$. On a $t = chx$ et $x \geq 0$. Il en résulte $shx = \sqrt{t^2-1}$ ($sh^2t = ch^2t-$ 1 et $shx \geq 0$). Par conséquent,

$e^t = cht+\ sht = t+\sqrt{t^2-1}$ et $x = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$.

4.6 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

4.6.1 Théorème de Rolle

Théorème 4.6.1. Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Il existe, alors, un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Comme f est une fonction continue sur u_n $[a,b]$,

$f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Si f est constante sur $[a,b]$, $f'(x) = 0$ pour tout point x de $[a,b]$. Si f n'est pas constante, m ou M est diffèrent de $f(a)$. Supposons, par exemple que $f(a) \neq M$. Comme f est continue sur $[a,b]$, la borne supérieure M est atteinte. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$. Puisque $M > f(a) = f(b)$, c est distinct de a et b. C'est à dire que $c \in]a,b[$. La fonction f est donc dérivable en c et admet un maximum en c. Il résulte du théorème 4.6.4 que $f'(c) = 0$.

Remarque 4.6.1 . Les hypothèses faites sont bien nécessaires pour la validité du théorème comme le montrent les exemples suivants

Exemples.4.6.1

1. Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 0$. Cette fonction est continue, dérivable sur $[0,1[$ et il n'existe aucun point c de $]0,1[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$f(x) = x$ si $x \in [0,\frac{1}{2}]$ et $f(x) = -x+1$ si $x \in [\frac{1}{2},1]$.

Cette fonction est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ sauf au point $\frac{1}{2}$ et il n'existe aucun point c de $]0,1[$ qui vérifie $f'(c) = 0$.

Le théorème de Rolle s'étend au cas de limites infinies, plus précisément, il s'étend aux cas suivants.

Théorème 4.6.2. Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty \text{ (resp. - } \infty \text{).}$$

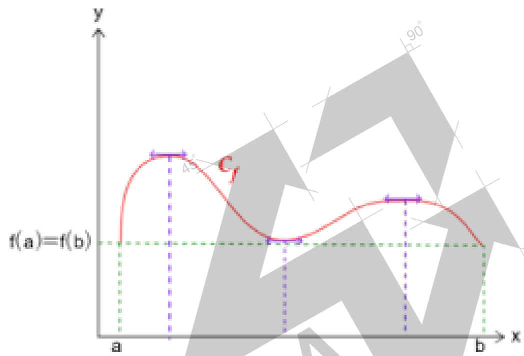
Il existe, alors, un élément $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 4.6.4. Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty\ ,a]$)

dérivable sur $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty\ ,a[$) et vérifiant $f(a)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ (respectivement $f(a)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$).

Il existe, alors, un élément $c\in]a,+\infty[$ (respectivement $]-\infty\ ,a[$ tel que $f'(c)=0$.

Interprétation graphique : Si une fonction prend la même valeur en deux points distincts a et b, il existe un point où la tangente est horizontale. ce point n'est pas forcément unique.



Exemple d'application :

Montrer que si un polynôme P a n racines réelles simples $\alpha_1,...,\alpha_n$ telles que $\alpha_1<...<\alpha_n$ alors le polynôme P' a $n-1$ racines réelles simples $\beta_1,...,\beta_n$ telles que $\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<..<\alpha_i<\beta_{i+1}<...<\beta_{n-1}<\alpha_n$

En effet : le polynôme est définie continue sur $[\alpha_1,\alpha_2]$, dérivable sur $]\alpha_1,\alpha_2[$ et vérifie $P(\alpha_1)=P(\alpha_2)$. Il existe, alors, un élément $\beta_1\in]\alpha_1,\alpha_2[$tel que $P'(\beta_1)=0$.

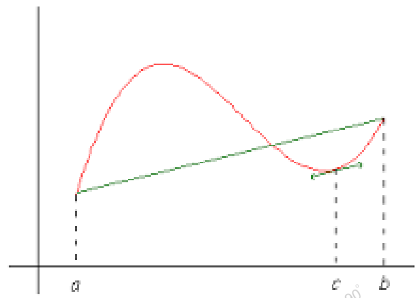
On recommence cette démonstration pour tous les autres intervalles $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ et on met en évidence $n-1$ racines réelles distinctes de P'. Comme $\deg P=n-1$, P'a au plus $n-1$ racines réelles distinctes.

4.6.2 Théorème des accroissements finis

L'interprétation géométrique du théorème de Rolle suggère une généralisation dans le cas ou f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ mais ne vérifie pas nécessairement $f(a)=f(b)$. Dans un tel cas, nous obtenons l'existence d'un point du graphe de f d'abscisse $c\in]a,b[$ tel que le graphe de f soit parallèle en ce point à la corde (A,B) ou A et B sont les points d'abscisses respectives a et b.

Théorème 4.6.4. Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Il existe, alors, un élément $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Démonstration. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[a,b]$, par



Théorème des accroissements finis

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$et vérifie $g(a) = g(b)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de ROLLE à la fonction g.

Le théorème des accroissements finis s'écrit encore :

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe, alors, un élément $\theta \in]0, 1[$ tel que $\quad f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$.

Application du théorème des accroissements finis

Théorème 4.6.5. Dérivabilité des fonctions monotones

Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I. La fonction f est, alors,

constante si et seulement si $\quad f'(x) = 0$ pour tout x $\in I$,
croissante si et seulement si $\quad f'(x) \geq 0$ pour tout x $\in I$ et
décroissante si et seulement si $\quad f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration.

Une fonction constante sur I a une dérivée nulle sur I. Réciproquement, soit f une fonction dérivable sur I et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Il en résulte que $f(x_2) = f(x_1)$, puisque $f'(c) = 0$.

Une fonction dérivable croissante (respectivement décroissante) sur I a en tout point une dérivée positive (respectivement négative). Réciproquement, soit f une fonction dérivable sur I et ayant une dérivée positive (respectivement négative) en tout point de I. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$.

Il en résulte que $\quad \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ (respectivement $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$), puisque f a une dérivée positive (respectivement négative) en tout point de I.

Remarque.4.6.2 Si f est dérivable et est de dérivée strictement positive en tout point de I, f est strictement croissante sur I . La réciproque est fausse en général. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$.

4.6.3 Théorème des accroissements finis généralisés

Théorème 4.6.6. Soient f et g deux fonctions définies continues sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et tel que $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a, b[$. Il existe, alors, un élément $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. Puisque $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a, b[$, $g(b) \neq g(a)$.

Considérons la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe, alors, un élément $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Ce qui donne le résultat désiré.

Application : Règles de l'hôpital

1**ère** Règle de l'hôpital. Soient f et g deux fonctions définies continues sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et g est telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a, b[$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a. Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ tend aussi vers l.

Démonstration. Si l est fini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in]a, a + \eta[, \ |\frac{f'(t)}{g'(t)} - l| < \varepsilon.$$

Soit x est un élément quelconque de $]a, a + \eta[$. D'après le théorème 5.5.6, Il existe un élément $c \in]a, x[\cap]a, a + \eta[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Il en résulte que pour tout $x \in]a, a + \eta[$, $|\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l| < \varepsilon$.

Si l est infini, nous avons pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$\forall t \in]a, a + \eta[$, $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} > A$ ou $\frac{f'(t)}{g'(t)} < -A$.

En utilisant le théorème 5.5.6, on obtient $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} > A$ ou $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} < -A$.

Exemple 4.6.2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1$

$2^{ième}$ Règle de l'hôpital. Soient f et g deux fonctions définies continues et dérivables sur un intervalle $]a, b[$, vérifiant $g'(x) \neq 0$ pour tout x dans $]a, b[$ et

$$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = \lim_{x \to a, x > a} g(x) = \infty$$

On suppose que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tend vers une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, quand x tend vers a. Alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend aussi vers l.

Démonstration. Si l est fini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, y[\ , |\frac{f'(x)}{g'(x)} - l| < \varepsilon.$$

Or il existe un réel c tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Autrement dit $f(x) = (g(x) - g(y))\dfrac{f'(c)}{g'(c)} + f(y)$.

Ainsi $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \dfrac{g(y)}{g(x)}\right)\dfrac{f'(c)}{g'(c)} + \dfrac{f(y)}{g(x)}$

Or $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{g(y)}{g(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(y)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = l$,si $c \in]a, y[$donc $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exemple 4.6.3 . $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4.7 Exercices

Exercice 4.1 Soit f une fonction dérivable sur $[a, +\infty[$. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = L$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

Exercice 4.2

Les fonctions f,g et h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = x\,|x|\,, g\,(x) = x^{\frac{3}{2}}$ et $h\,(x) = \cos\sqrt{|x|}$

Sont elles dérivables en 0 ?

Exercice 4.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. La fonction f est elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable.
3. Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable.

Exercice 4.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + c \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer les réels $a; b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4.6

Soient a et b des réels, avec $a < b$.

Chercher les fonctions réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $[a,b]$ à dérivée bornée, telles que

$$f(b) - f(a) = (b-a) \sup_{a<x<b} f'(x).$$

Exercice 4.7

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{x \ln x}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ telle que $f'(c) = 0$.

Exercice 4.8

Montrer que le polynôme définie par $P(X) = X^n + aX + b$, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 4.9

1. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$

a) On suppose que pour tout $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$

Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

En déduire qu'il existe $x \in [a,b]$, tel que $f(x) = x$.

b) On suppose maintenant que pour tout $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$, $x \neq y$, on a : $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

Montrer qu'il existe un unique $x \in [a,b]$, tel que $f(x) = x$.

2. Soit f l'application de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in [0,2]$ par : $f(x) = \ln(2 + x^2)$

a) On pose $M = \sup_{x \in [0,2]} |f'(x)|$

Montrer que $M < 1$.

b) En déduire, en montrant que $f([0,2]) \subset [0,2]$, qu'il existe un unique $x \in [0,2]$ tel que $f(x) = x$.

On notera $\widetilde{x}$ cet élément.

c) Montrer que l'application f est injective.

On définit la suite (x_n) de nombres réels par la donnée de $a \in [0,2]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ si $n > 0.0$

d) Montrer que si $a \neq \widetilde{x}$, alors pour tout $n > 0$, $x_n \neq \widetilde{x}$.

e) On suppose que $a \neq \widetilde{x}$. Montrer que pour tout $n > 0$ $\dfrac{|x_{n+1} - \widetilde{x}|}{|x_n - \widetilde{x}|} \leq M$

f) En déduire que pour tout $a \in [0,2]$, la suite (x_n) converge vers $\widetilde{x}$.

On donne $0,69 < \ln(2) < 0,7$ et $1,79 < \ln(6) < 1,8$.

Exercice 4.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - x^n$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est monotone et qu'elle converge vers une limite l.
4. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq M < 1$.

a) Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.

b) Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de (x_n).

Exercice 4.11

Etablir les relations

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$
$$\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 4.12

vérifier les égalités suivantes en indiquant dans chaque cas les valeurs de a et b qui conviennent

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$
$$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$$
$$\arccos a + \arccos b = \arccos\left(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right)$$
$$\arg th \frac{2a}{1+a^2} = 2 \arg tha)$$

Exercice 4.13

Simplifier les expressions suivantes

$$\sin\left(2\ \arcsin x\right); \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right); \arcsin\left(2\sin x\cos x\right), -\frac{\pi}{\mathbf{3}.} < x < \frac{2\pi}{\mathbf{3}.};$$

$$\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, 0 < x < 2\pi; \arctan\sqrt{1+x^2}-x; \arctan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$