Cours d'analyse 1 SMA-SMI (S_1).

Abdelkhalek El amrani
Département de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar Mahraz
B.P 1796 Atlas Fès .
e-mail: abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma

18 février 2021

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Introduction

1.1.1 Les nombres réels dans le programme scolaire Marocain

Avant cet aperçu, je tiens à remarquer que la manipulation des nombres entiers naturels, commence dès la naissance, et avant l'age scolaire, sous forme matériels, ainsi que l'opération somme(rassemblement des objets), la différence et la division sont utilisées, on manipule aussi les décimaux et les rationnels positifs sous forme d'objets. La notion d'ordre et l'opération multiplication sont vécues dans cet age sans pouvoir les remarquer. Dans le programme scolaire Marocain une grande importance est donné aux différents types de nombres. Ainsi,

— **Au Primaire:** Dès la première année du primaire on commence à manipuler les entiers naturels et leurs écritures comme des êtres absolus, à partir des objets, et les opérations $+$ et $\times$ ainsi que l'ordre , on introduit par la suite les nombres décimaux et les rationnels positifs durant les trois dernières années de ce cycle ; l'introduction de $3,14$ comme valeur décimale (approchée) du nombre irrationnel π se fait en géométrie en calculant le périmètre et la surface d'un cercle, on introduit aussi le nombre rationnel $\frac{22}{7}$ comme valeur (approchée) rationnel de ce nombre.

— **Au Collège:** Introduction des nombres entiers et décimaux relatifs ainsi que les quatre opérations et l'ordre, en première année. Au début du deuxième année, on introduit les nombres rationnels, les opérations et l'ordre sur cette classe des nombres ; vers la fin de cette année et grâce au théorème de Pythagore, on introduit des exemples de nombres irrationnels de la forme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, ...$ Le concept de nombres réels est ainsi introduit, les quatre opérations et l'ordre sur ces nombres sont effectués.

— **Au Lycée: • Tronc commun:** On introduit les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$: on écrit $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ en extension , $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ en compréhension tandis que $\mathbb{R}$ est défini comme réunion de $\mathbb{Q}$ et l'ensemble de tous les nombres irrationnels. On en déduit la fameuse suite d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Toutes les définitions et propriétés concernant les nombres réels (vus comme éléments de $\mathbb{R}$) (les quatre opérations, l'ordre et opérations et ordre sont rappelées et mathématisées). Les concepts de la valeur absolue et intervalle sont introduit grâce au concept de l'ordre et la droite numérique. **• Deuxième année du baccalauréat science mathématique:** On présente $(\mathbb{Z}, +, \times)$ comme exemple d'anneau commutatif unitaire intègre et $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ comme exemples de corps commutatifs.

1.1.2 Aperçu historique sur les nombres réels

Les nombres réels sont connus et utilisés dans les calculs depuis fort longtemps. La découverte du premier nombre irrationnel $\sqrt{2}$ date probablement de l'époque de Pythagore (6^{eme} siècle *av.J.C.*). Mais il a fallu attendre la fin du 19^{eme} siècle pour que les mathématiciens comme *Peano*, *Dedekind* et *Cantor* notamment aboutissent par une démarche rigoureuse à la première construction du corps des nombres réels. On a d'abord défini les nombres entiers naturels de manière axiomatique (Peano), puis à partir des nombres entiers naturels, on a construit successivement les nombres entiers relatifs, les nombres rationnels et enfin les nombres réels .
Il aura donc fallu attendre environ 25 siècles pour que l'on aboutisse à la belle chaine d'inclusions suivante:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Parmi ces inclusions c'est bien entendu l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ qui est la plus mystérieuse et la plus délicate. C'est celle-là que nous allons tenter d'explorer dans ce chapitre.
Nous supposerons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de ses deux opérations internes, l'addition notée $+$ et la multiplication notée . ayant les propriétés habituelles (associativité, commutativité, distributivité, existence d'élément neutre et d'éléments symétrisables) et d'une relation d'ordre total notée $\leqslant$ compatible avec ces opérations internes ayant la propriété fondamentale suivante :
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.
Cependant l'équation $x + n = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. Autrement dit il n'y a pas d'opposé dans $\mathbb{N}$. Pour pallier à cet inconvénient, on construit par "symétrisation" de l'addition sur $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs qui contient $\mathbb{N}$.

Rappelons que les opérations internes sur $\mathbb{N}$ et la relation d'ordre $\leqslant$ peuvent être prolongées à $\mathbb{Z}$ en deux opérations internes, l'addition encore notée $+$ et la multiplication notée . avec les mêmes propriétés de sorte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'équation $x + n = 0$ admette une solution unique dans $\mathbb{Z}$, notée $-n$, appelé l'opposé de n. Ces propriétés sont bien connues et nous ne les rappellerons pas ici mais elles se résument en disant que $(\mathbb{Z}, +, .)$ est un "anneau commutatif unitaire intègre".

De plus $\leqslant$ est une "relation d'ordre total" sur $\mathbb{Z}$ compatible avec cette structure possédant la propriété fondamentale suivante :
Toute partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit (resp. plus grand) élément.
Cependant si $n \in \mathbb{Z}^*$ l'équation $n.x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, à moins que $n = 1$ *ou* $n = -1$. Autrement dit il n'y a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$.
Une construction classique très fréquente en mathématique, analogue à celle qui permet de construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, appelée le passage au quotient, permet de pallier à cet inconvénient en construisant un "ensemble plus gros" $\mathbb{Q}$ ayant une structure analogue à celle de $\mathbb{Z}$ et dans lequel tout élément non nul admet un inverse. Nous ne donnerons pas cette construction ici, mais rappelons qu'un nombre rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est une fraction $x = \frac{p}{q}$ représentée par un couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ avec la relation d'équivalence suivante: deux couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\left(p', q'\right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ représentent le même nombre rationnel s'ils définissent la même fraction $c - \grave{a} - d : p.q' = p'.q$. Il résulte des propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}$ que tout nombre rationnel x admet une représentation unique sous la

forme $x = \frac{p}{q}$ où p, q sont des entiers tels que $q \geqslant 1$, $p \in \mathbb{Z}$ et p et q sont premiers entre eux.
Les opérations d'addition et de multiplication et la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ s'étendent naturellement à $\mathbb{Q}$ de sorte que $(Q, +, ., \leqslant)$ est un "corps commutatif totalement ordonné".

Parmi les nombres rationnels il y a les nombres décimaux qui s'écrivent sous la forme $\frac{n}{10^m}$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ possède une propriété simple mais importante que nous allons rappeler.

Propriété d'Archimède dans $\mathbb{Q}$

Proposition($\mathbb{Q}$ est archimédien) 1.1.1 *Pour tous $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ avec $a > 0$, il existe un entier naturel n tel que $na > b$.*

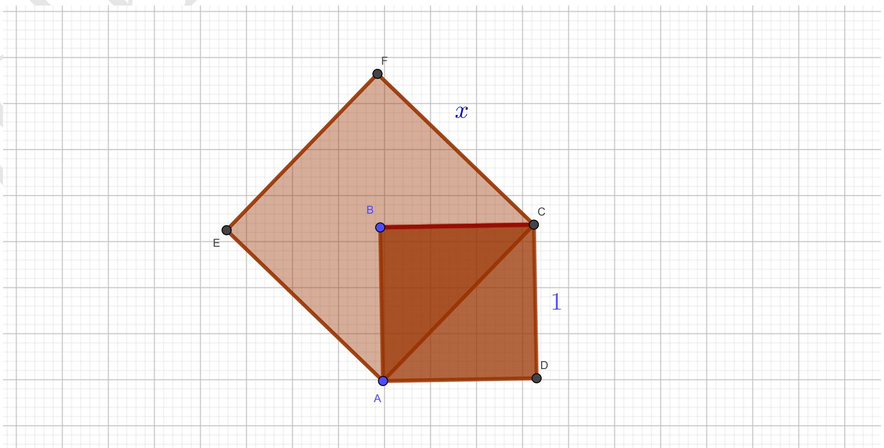
Preuve. Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ telles que $a > 0$, alors:
- Si $b \leqslant 0$ la propriété est trivialement vraie avec $n = 1$ (par exemple).

- Si $b > 0$. Alors $na > b$ est équivalente à $n > ba^{-1}$. Comme $ba^{-1} \in \mathbb{Q}$ et que $ba^{-1} > 0$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $ba^{-1} = \frac{p}{q}$, et l'entier $n = p + 1$ vérifie l'inégalité $n > p \geqslant ba^{-1}$. $\square$

Cette propriété est fondamentale. Elle signifie que dans $\mathbb{Q}$ il y a des nombres rationnels aussi petits que l'on veut. On dit que $(Q, +, ., \leqslant)$ est un "corps archimédien".

Insuffisance de $\mathbb{Q}$:

On s'est aperçu assez tôt que pour les besoins de la géométrie classique par exemple, le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant. Il lui manque beaucoup de nombres réels représentant des grandeurs géométriques (c-à-d des longueurs) qui ne sont pas rationnels dont les plus célèbres sont $\sqrt{2}$ et π. En fait l'ensemble $\mathbb{Q}$ est plein de "trous", en un sens que nous allons tenter d'expliquer.
Donnons un premier exemple simple qui illustre ce phénomène. Depuis Euclide, on sait construire à la règle et au compas, un carré du plan dont l'aire est le double de celle du carré unité par exemple. La longueur l des cotés de ce carré vérifie l'équation $x^2 = 2.1 = 2$. Il est facile de voir que l est aussi égal à la longueur de la diagonale du carré unité.



Carré de surface 2

Ce nombre est facile à construire à la règle et au compas et pourtant nous allons démontrer qu'il n'est pas rationnel.

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel $\left(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right)$

Proposition 1.1.1 *Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$. Comme $(-x)^2 = x^2$, on peut supposer que $x > 0$, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ avec p et q sont premiers entre eux (c-à-d: $p \wedge q = 1$). D'où

$$\begin{aligned} x = \frac{p}{q} &\Longrightarrow x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \\ &\Longrightarrow 2q^2 = p^2 \quad (*) \\ &\Longrightarrow p^2 \textit{ est un nombre pair} \\ &\Longrightarrow p \textit{ est un nombre pair car sinon } c - \grave{a} - d \ p \textit{ est impair on a} : \end{aligned}$$

il existe $n \in \mathbb{N} : p = 2n + 1$, d'où

$$\begin{aligned} p^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1, \\ &\textit{d'où } p^2 \textit{ est impair, ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

D'où p est un nombre pair et alors $\left(\exists p' \in \mathbb{N}\right) : p = 2p'$, donc

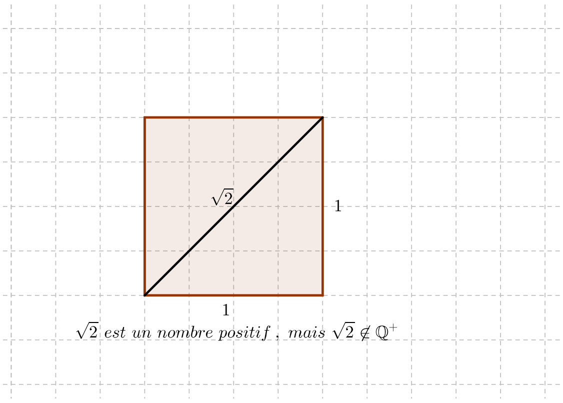
$$\begin{aligned} (*) &\Longrightarrow 2q^2 = 4\left(p'\right)^2 \\ &\Longrightarrow q^2 = 2\left(p'\right)^2 \\ &\Longrightarrow 2 \textit{ divise } q^2 \\ &\Longrightarrow 2 \textit{ divise } q. \end{aligned}$$

Enfin 2 divise p et 2 divise q, c-à-d: 2 est un diviseur commun à p et q, ce qui est absurde (car $p \wedge q = 1$).
Donc l'hypothèse de départ est fausse.
Donc il n'existe aucun rationnel x vérifiant $x^2 = 2$. □

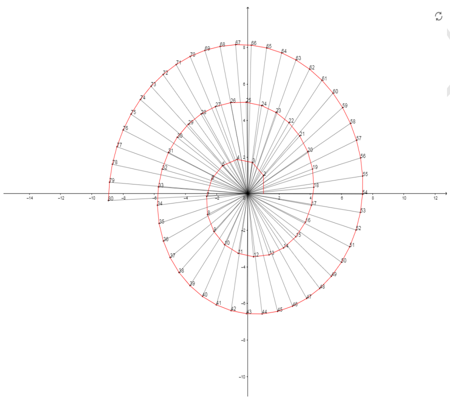
Remarque 1.1.1 *En fait le raisonnement précédent peut se généraliser en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique (Théorème d'Euclide) pour démontrer que si m est un nombre entier naturel qui n'est pas le carré d'un autre entier ,en particulier un nombre premier, alors l'équation $x^2 = m$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.*

En conclusion, on peut dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels possède des "trous" (une infinité) et ne suffit pas pour traiter des problèmes simples de géométrie classique.

Le théorème de Pythagore, nous permet de construire, à l'aide d'une règle et un compas, un segment de longueur $\sqrt{2}$, ce segment est la diagonale d'un carré de dimension 1.



Par le même procédé on peut réaliser la spirale de Pythagore qui permet de construire successivement à la règle et au compas toutes les grandeurs réelles dont le carré est un entier naturel non nul n.



Spirale de Pythagore
ou de Théodore de Cyrène

Spirale

En conclusion, d'un point de vue géométrique il existe bien des grandeurs réelles mesurables (correspondant à des longueurs) mais non rationnelles r notée $\sqrt{m}$ dont le carré est m. Ces grandeurs peuvent être approchées par des nombres rationnels aussi bien par défaut que par excès avec une précision $\varepsilon > 0$ aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance. Ces grandeurs seront représentées par des nombres réels irrationnels, éléments d'un nouvel ensemble noté $\mathbb{R}$ et appelé ensemble des nombres réels.

Dans tous les cas, l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être représenté géométriquement par une droite affine orientée munie d'une origine O symbolisant le nombre réel 0 et d'une extrémité I symbolisant le nombre réel 1 tels que $OI = 1$. Chaque nombre réel x est alors représenté par un point unique M de la droite de telle sorte que si $x > 0$ (resp. $x < 0$) le segment $[OM]$ soit orienté positivement (resp. négativement) et sa longueur soit égale à $|x|$. Il en résulte que l'ensemble $\mathbb{R}$ est d'une certaine façon "continu" (sans "trou") à l'image de la droite qui le représente géométriquement. Cette propriété se traduit en disant que l'ensemble $\mathbb{R}$ est "complet" comme cela sera expliqué ultérieurement.

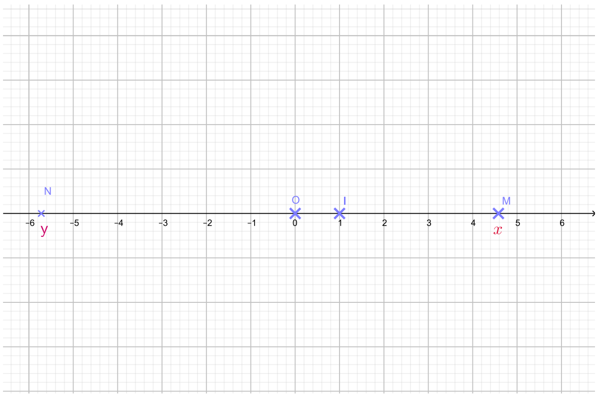


FIGURE 1.1 – Droite numérique

Il existe plusieurs méthodes, au moins cinq, de construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ à partir des nombres rationnels qui reposent, presque toutes, sur la notion d'ordre, et non seulement sur les opérations comme pour les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
Construction par les coupures de Dedekind:
C'est au mathématicien allemand **Julius Wilhelm Richard Dedekind** , vers la fin du 19^{eme} siècle (1872) , que revient le mérite de présenter la première construction basée sur la notion de section ou coupure.

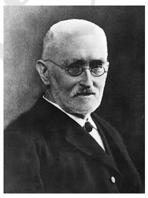


FIGURE 1.2 – Richard Dedekind

Construction via les suites de Cauchy: Une autre méthode, basée sur les suites de Cauchy, est donnée par le mathématicien allemand (né à Saint-Pétersbourg en Russie)**Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**.

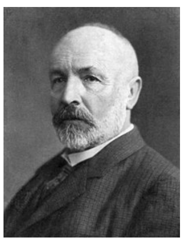


FIGURE 1.3 – Georg Kantor

Les trois autres méthodes sont respectivement:
À l'aide des nombres hyperréels
À l'aide des nombres surréels
Par quasi-morphismes.

On démontre heureusement que toute ces méthodes sont équivalentes au sens où les objets construits ont une structure de "corps commutatif archimédien complet" et qu'un tel objet est unique à isomorphisme près (théorème difficile à démontrer).

Dans ce cours, on ne s'attachera donc pas à une construction précise du corps des nombres réels mais plutôt à ses propriétés telles qu'elles sont énoncées par la suite et notamment la propriété de la borne supérieure, étroitement liée à l'ordre, qui distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. C'est l'absence de cette borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ pour certaines parties non vides et majorées de $\mathbb{Q}$ qui matérialise les "trous" de $\mathbb{Q}$.
Ainsi, en plus des deux opérations $+$ et $\cdot$ qui prolongent celles dans $\mathbb{Q}$ et qui ont les mêmes propriétés, le concept d'ordre est aussi fondamental dans la construction de $\mathbb{R}$; ce qui explique son introduction et utilisation tout au long de ce chapitre, en particulier, et dans tout ce cours d'une manière générale.

1.2 Ensembles ordonnés

1.2.1 Définitions et exemples

Définitions et exemples

Définition 1.2.1 *Un ensemble ordonné est la donnée d'un ensemble non vide E, et d'une relation d'ordre sur E, c'est-à-dire d'une relation binaire dans E, notée $\leqslant$ et vérifiant:*

$$\begin{cases} (i) \ \leqslant \ est\ reflexive\ :\ (\forall x \in E)\ x \leqslant x, \\ (ii)\ \leqslant\ est\ antisymétrique\ :\ (\forall (x,y) \in E^2)\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y, \\ (iii)\ \leqslant\ est\ transitive\ :(\forall (x,y,z) \in E^3)\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z. \end{cases}$$

Une relation d'ordre $\leqslant$ sur un ensemble E est dite totale et E est dit totalement ordonné si, et seulement si, $(\forall (x,y) \in E^2)\ (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)$.

Notation: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, alors pour tout $(x,y) \in E^2$
$x \geqslant y$ signifie que $y \leqslant x$.
$x < y$ signifie que $x \leqslant y$ *et* $x \neq y$.
$x > y$ signifie que $y < x$.

Exemples 1.2.1
1. *Les ensembles $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs sont totalement ordonnés par la relation définie par:*
   Pour tout $(x,y) \in E^2$ $x \leqslant y \Leftrightarrow (\exists z \in E) : y = x + z$; où $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est totalement ordonné par la relation définie par:*
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+$; où $\mathbb{Q}^+ = \left\{ r \in \mathbb{Q} : r = \frac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   On rappelle que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}\ :\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
3. *Si X est un ensemble non vide et non réduit à un élément, la relation définie sur $\mathcal{P}(X)$, par:*
   pour tout $(A,B) \in (\mathcal{P}(X))^2$ $A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$ est une relation d'ordre non totale (dite partielle) sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X : ils existe A et B de $\mathcal{P}(X)$ tels que $A \nsubseteq B$ et $B \nsubseteq A$.

Majorant, minorant , plus grand et plus petit élément

Définitions 1.2.1 *Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.*

1. i. *Un élément M de E est dit* ***majorant*** *de A ou* ***majore*** *A si et seulement si $(\forall x \in A)\ x \leqslant M$.*
   ii. *A est dite majorée signifie qu'elle possède un majorant.*
   iii. *Un élément M de E est dit le plus grand élément (unique) ou le maximum de A si et seulement si M majore A et $M \in A$, on le note $M = Max(A)$.*
2. i. *Un élément m de E est dit* ***minorant*** *de A ou* ***minore*** *A si et seulement si $(\forall x \in A)\ m \leqslant x$.*
   ii. *A est dite minorée signifie qu'elle possède un minorant.*
   iii. *Un élément m de E est dit le plus petit élément (unique) ou le minimum de A si et seulement si m minore A et $m \in A$, on le note $m = min(A)$.*
3. *A est dite bornée signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples 1.2.2 *1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est minoré par zéro et $0 = min(\mathbb{N})$.*

2. Le sous-ensemble $\mathbb{Z}^-$ de $\mathbb{Z}$ est majoré par zéro et $0 = max(\mathbb{Z}^-)$.

3. Toute partie finie de $\mathbb{Q}$ est bornée.

4. Soit A la partie de $\mathbb{Q}$ définie par: $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, alors A est bornée, 0 est un minorant de A; $1 = max(A)$.

Remarque 1.2.1 *Tout élément plus grand qu'un majorant est aussi un majorant et tout élément plus petit qu'un minorant est aussi un minorant.*

Proposition 1.2.1 *Dans $(\mathbb{N} \ , \ \leqslant)$ on a:*

1. Toute partie non vide A de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

2. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

3. Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Ces propriétés font partie des hypothèses de la construction de $\mathbb{N}$.

Exercice 1.2.1 *1. Montrer que $(\mathbb{Z} \ , \ \leqslant)$ vérifie les propriétés 2. et 3. ci-dessus et que toute partie non vide et minorée A de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.*

2. Montrer que dans $(\mathbb{Z} \ , \ \leqslant)$, $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré, ni minoré.

Bornes supérieure et inférieure

Définitions 1.2.2 *Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.*

1. Si A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A; on le note $sup(A)$.

2. Si A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de A; on le note $inf(A)$.

Remarque 1.2.2 *La borne supérieure (res. la borne inférieure) d'une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ si elle existe est unique.*

Exemple 1.2.1 *Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ 1 \leqslant x^2 \prec 5\}$. Alors:*
A est bornée dans $\mathbb{Q}$.
$inf(A) = min(A) = 1$, A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ $\left(sup(A) = \sqrt{5}\right)$ et $max(A)$ n'existe pas.

1.2.2 Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Rappels: quelques propriétés de $\mathbb{Q}$

Proposition 1.2.2 *$(\mathbb{Q} \ , \ + \ , \ \times \ , \ \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné, où $+$, $\times$, et $\leqslant$ sont les opérations et l'ordre usuels dans $\mathbb{Q}$ c-à-d:*

$$\begin{cases} (i) \ (\mathbb{Q}, +, \times) \text{ est un corps commutatif } (\text{voir cours d'algèbre}). \\ (ii) \ (\mathbb{Q}, \leqslant) \text{ est totalement ordonné.} \\ (iii) \ \text{Pour tout } (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3 \text{ on a :} \\ \quad (a \leqslant b) \Longrightarrow (a + c \leqslant b + c) \ (\leqslant \text{ est compatible avec l'addition}). \\ (a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c) \Longrightarrow (a.c \leqslant b.c) \, (\leqslant \text{ est compatible avec la multiplication}). \end{cases}$$

Insuffisance de $\mathbb{Q}$

Exercice 1.2.2 *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $(c-a-d$ *il n'existe aucun* M *de* $\mathbb{Q}$ *tel que* $M^2 = 2)$.

Solution On l'a déjà montré dans l'introduction.
On proposera deux autres méthodes:
1^{ere} **méthode:** Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q sont premiers entre eux (c-à-d- $p \wedge q = 1$). D'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{p}{q} &\Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \\
&\Longrightarrow 2q^2 = p^2 \quad (*) \\
&\Longrightarrow p^2 \mid 2q^2 \\
&\overset{d'après\ Th.\ Gauss}{\Longrightarrow} p^2 \mid 2 \ \left(car\ p \wedge q = 1 \Rightarrow p^2 \wedge q^2 = 1\right) \\
&\Longrightarrow p^2 = 1 \ ou \ p^2 = 2 \\
&\Longrightarrow 2q^2 = 1 \ ou \ p^2 = 2 \\
&\Longrightarrow 2 \mid 1 \ ou \ p^2 = 2, \ ce\ qui\ est\ absurde\ \left(p \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow p = 1 \ ou \ p^2 \geqslant 4\right).
\end{aligned}$$

D'où l'hypothèse de départ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Seconde méthode: Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q des entiers positifs , et q le plus petit de tels dénominateurs. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{2q-p}{p-q} &= \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \\
&= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Puisque $2q-p$ et $p-q$ sont deux entiers positifs et $0 < p-q < q$ (car $2q = \sqrt{2}p$ et $\sqrt{2}p > p$), nous avons contredit la minimalité de q. □

1.3 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.3.1 Définition de $\mathbb{R}$ et bornes supérieure et inférieure

Borne supérieure : Définition et exemples

Définition 1.3.1 *On dit qu'un ensemble ordonné* $(E\ ,\ \leqslant)$ *vérifie la propriété de la borne supérieure, si et seulement si toute partie non vide majorée* A *de* E *admet une borne supérieure dans* E $(\in E)$.

Exemples 1.3.1 1. $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *vérifient la propriété de la borne supérieure.*

2. $(\mathbb{Q}\ ,\ \leqslant)$ *ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.*

Preuve. La propriété 1 est simple à vérifier, montrons alors 2.
Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x > 0 \ et \ x^2 < 2\}$; alors A est non vide $(1 \in A)$, $A \subset \mathbb{Q}$ et A est majorée par 2; mais A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ $(\in \mathbb{Q})$.
En effet, Sinon, soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que $M = sup(A)$. On a : $M > 1$ (car $1,01 \in A$) et $M^2 \neq 2$ (car $\sqrt{2} \notin A$).
Deux cas se présentent alors:
1^{er} cas : $M^2 < 2$. On a: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 &= M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leqslant M^2 + \frac{2M+1}{n}.\end{aligned}$$

Donc en choisissant n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que: $n_0 > \frac{2M+1}{2-M^2}$ on a:

$$\begin{aligned}\left(M + \frac{1}{n_0}\right)^2 &\leqslant M^2 + \frac{2M+1}{n_0} \\ &< M^2 + \frac{2M+1}{\frac{2M+1}{2-M^2}} \\ &= M^2 + \left(2 - M^2\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Et comme $M + \frac{1}{n_0} \in \mathbb{Q}^{+*}$, alors $M + \frac{1}{n_0} \in A$; d'où $M + \frac{1}{n_0} \leqslant M$ (car M est un majorant de A) ou encore $\frac{1}{n_0} \leqslant 0$ ce qui es absurde .
2^{eme} cas : $M^2 > 2$.
On a: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 &= M^2 - \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> M^2 - \frac{2M}{n}.\end{aligned}$$

Donc en choisissant n_1 dans $\mathbb{N}^*$ tel que: $n_1 > \frac{2M}{M^2-2}$ on a:

$$\begin{aligned}\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 &> M^2 - \frac{2M}{n_1} \\ &> M^2 - \frac{2M}{\frac{2M}{M^2-2}} \\ &= M^2 - \left(M^2 - 2\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $M > 1$ et $n_1 \in \mathbb{N}^*$ d'où $0 < M - \frac{1}{n_1} < M$, et comme $M = sup(A)$, alors $M - \frac{1}{n_1}$ n'est pas un majorant de A, d'où il existe r dans A tel que $0 < M - \frac{1}{n_1} < r \leqslant M$ ou encore $0 < \left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 < r^2 < 2$.
On a donc montré qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 < 2$ et $\left(M - \frac{1}{n_1}\right)^2 > 2$ ce qui est absurde.
Donc A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. $\square$

Définition de $\mathbb{R}$

Nous admettrons dans ce cours le théorème suivant:

Théorème(admis) 1.3.1 *Il existe un ensemble $\mathbb{R}$, appelé* ***ensemble des nombres réels,*** *contenant $\mathbb{Q}$ et muni de deux lois $+$ et $\times$ et d'une relation binaire $\leqslant$ prolongeant $+$, $\times$ et $\leqslant$ de $\mathbb{Q}$ tels que:*

$$\begin{cases} (i)\ (\mathbb{R}\ ,\ +\ ,\ \times\ ,\ \leqslant)\ \text{est un corps commutatif totalement ordonné.} \\ (ii)\ \text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{R}, \text{ admet une borne} \\ \qquad\qquad \text{supérieure dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Propriétés caractéristiques des bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Dans la pratique nous aurons besoin de la caractérisation suivante des bornes supérieures et inférieure.

Proposition(Limite de la composée) 1 *Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. Alors:*

1.

$$M = sup\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ (\forall x \in A)\ x \leqslant M, \\ (ii)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A):\ M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2.

$$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ (\forall x \in A)\ m \leqslant x, \\ (ii)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A):\ x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve.

1.

$$M = sup\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} M \text{ majore } A, \\ \left(\forall M' \in \mathbb{R}\right)\ M' < M \Longrightarrow M' \text{ n'est pas un majo-} \\ \qquad\qquad \text{rant de } A \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} M \text{ majore } A, \\ \left(\forall M' \in \mathbb{R}\right)\ M' < M \Longrightarrow (\exists x \in A) : M' < x \end{cases}.$$

Or

$$\left\{M' \in \mathbb{R}\ /\ M' < M\right\} = \left\{M - \varepsilon\ /\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\right\},$$

donc

$$M = sup\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)\ x \leqslant M, \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*})\ (\exists x \in A) : M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2.

$$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} m \text{ minore } A, \\ \left(\forall m' \in \mathbb{R}\right)\ m' > m \Longrightarrow m' \text{ n'est pas un mino-} \\ \qquad\qquad \text{rant de } A. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} m \text{ minore } A, \\ \left(\forall m' \in \mathbb{R}\right)\ m < m' \Longrightarrow (\exists x \in A) : x < m'. \end{cases}$$

Or

$$\left\{m' \in \mathbb{R}\ /\ m < m'\right\} = \left\{m + \varepsilon\ /\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\right\},$$

donc

$$m = inf\,(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)\;\; m \leqslant x, \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*})\;\; (\exists x \in A) : x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

□

Proposition 1.3.1 *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que A est minorée ; on considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par:

$$-A = \{-x \;/\; x \in A\}\,;$$

alors, $-A$ est non vide et majorée ($(\forall m \in \mathbb{R})\;\; m\ minore\ A \Longrightarrow -m\ majore\ \ -A$) ; soit $M = sup\,(-A)$, alors

$$\begin{cases} (\forall x \in A)\;\; -x \leqslant M, \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*})\;\; (\exists x \in A) : M - \varepsilon < -x. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\forall x \in A)\;\; -M \leqslant x, \\ (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*})\;\; (\exists x \in A) : x < -M + \varepsilon. \end{cases}$$

Donc $-M = inf\,(A)$. Donc A admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et $inf\,(A) = -\,(sup\,(-A))$.
□

Exercice 1.3.1 *Vérifier que pour une partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$, $sup\,(A) = -\,(inf\,(-A))$.*

Exercice 1.3.2
1. *Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On écrit parfois $sup\,(A) = +\infty$.*
2. *En utilisant la technique de la solution de l'exercice précédent, déduire que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée n'admet pas de borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On écrit parfois $inf\,(A) = -\infty$.*

Propriété d'Archimède dans $\mathbb{R}$

Théorème($\mathbb{R}$ est archimédien ou propriété d'Archimède) 1.3.1 *Pour tous $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n tel que $na > b$.*

Preuve. Par l'absurde ; supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall n \in \mathbb{N})\;\; n.a \leqslant b$, alors la partie $A = \{n.a \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est non vide ($a \in A$) et majorée (par b), elle admet donc une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N})\;\; (n+1)\;\; a \leqslant M &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\;\; n\;a \leqslant M - a < M, \\ &\Longrightarrow M - a\ est\ un\ majorant\ de\ A\ qui\ est \\ &\qquad\qquad strictement\ inf\acute{e}rieur\ M. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. □

Remarque 1.3.1 *Cette propriété signifie que si l'on considère un nombre réel a strictement positif, aussi petit soit-il, et que l'on considère la suite* $a, 2a, 3a...$ *alors on obtiendra dans cette suite, des nombres aussi grands que l'on veut dépassant n'importe quel nombre réel donné.*
Autrement dit, une quantité, aussi petite soit-elle, ajoutée suffisamment de fois à elle même dépasse n'importe quelle quantité donnée.

Corollaire 1.3.1 *Pour tout* $b \in \mathbb{R}$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > b$.

Preuve. Prendre $a = 1$ dans le théorème précédent. □

Corollaire 1.3.2 *Le sous-ensemble* $\mathbb{N}$ *de* $\mathbb{R}$ *est non majoré.*

Preuve. $\mathbb{N}$ est non majoré est la négation du corollaire précédent. □

Remarque 1.3.2

1. *Pour déterminer la borne supérieure d'une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *(si elle existe) ; on peut procéder comme suit:*
   - i. *On montre que* $A \neq \emptyset$ *(il suffit de trouver un élément appartenant à* A*).*
   - ii. *On montre que* A *est majorée (il suffit de trouver un majorant de* A*).*
   - iii. *Si* A *est non vide et majorée le* $sup\,(A)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *; pour voir si un majorant* M *de* A *est la borne supérieure de* A :
     - a. *On regarde d'abord si* $M \in A$; *car si oui,* $M = max\,(A)$ *donc* $M = sup\,(A)$ *; si non:*
     - b. • *On voit si* M *vérifie la propriété caractéristique de la borne supérieure:*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists x \in A) \ : \ M - \varepsilon < x \ , \ \textit{ou bien}$$

       • *On fait un raisonnement par l'absurde, c'est-à dire on suppose qu'il existe un majorant* M' *de* A *avec* $M' < M$ *et on essaie de trouver une contradiction (absurdité).*
2. *On procède d'une manière analogue pour déterminer la borne inférieure d'une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *(si elle existe).*
3. *Si le* $sup\,(A)$ *(ou* $inf\,(A)$*) n'est pas donné, il faut deviner la valeur du sup (ou de* inf*). Parfois la représentation de la partie* A *sur la droite numérique est très utile, par exemple si* $A = \left\{(-1)^n + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exemples

Exemple 1.3.1 *Soit* $A = \left\{\frac{2n-1}{2n+1} \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
Déterminons $sup\,(A)$ *et* $inf\,(A)$ *(si elles existent).*

1. $A \neq \emptyset$ *car* $-1 \in A$ *(pour* $n = 0$ *), et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n+1} &= 1 - \frac{2}{2n+1} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Donc A est majorée par 1 et par suite $sup\,(A)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Est-ce que $1 = sup\,(A)$?
• $1 \notin A$ *car sinon il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2n-1}{2n+1} = 1$ et*

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2n+1} = 1 &\Longleftrightarrow 2n - 1 = 2n + 1\\ &\Longleftrightarrow -1 = 1 \;\; (absurde)\,.\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe un majorant M de A tel que $M < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n-1}{2n+1} \leqslant M$ et

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2n+1} \leqslant M &\Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{2n+1} \leqslant M\\ &\Longleftrightarrow 1 - M \leqslant \frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow 2n + 1 \leqslant \frac{2}{1-M} \;\; (M < 1 \Longrightarrow 0 < 1 - M)\\ &\Longleftrightarrow n \leqslant \frac{1}{1-M} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a donc $(\forall n \in \mathbb{N})\;\, n \leqslant \frac{1}{1-M} - \frac{1}{2}$ c'est-à dire que $\mathbb{N}$ est majoré, absurde. Donc $sup\,(A) = 1$.
Utilisation de la propriété caractéristique : Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon < \frac{2n_0-1}{2n_0+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned}1 - \varepsilon < \frac{2n-1}{2n+1} &\Longleftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 - \frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow -\varepsilon < -\frac{2}{2n+1}\\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{2n+1} < \varepsilon\\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 2n + 1\\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} < n.\end{aligned}$$

Or $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} < n_0$. Pour ce n_0 on a :$1 - \varepsilon < \frac{2n_0-1}{2n_0+1}$.

2. On a déjà $A \neq \emptyset$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{2n+1} &= 1 - \frac{2}{2n+1}\\ &\geqslant 1 - 2 \;\; car \;\; 2n + 1 \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{2n+1} \leqslant 1\\ &= -1,\end{aligned}$$

et par suite $(\forall n \in \mathbb{N})\;\, \frac{2n-1}{2n+1} \geqslant -1$. Donc A est minorée par -1.
Par ailleurs, $-1 \in A \;\; (pour\; n = 0)\,$, donc $-1 = min\,(A)$ et par suite $inf\,(A) = -1$.

Exemple 1.3.2 *Soit $A = \left\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. Alors:*

(i) $Inf\,(A) = ?$

• *On a :* $2 \in A$ *(prendre* $x = 1$*), d'où* $A \neq \emptyset$*. Par ailleurs,* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\;\; x + \frac{1}{x} > 0$*, d'où* A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *qui est non vide et minorée, elle admet donc une borne inférieure.*
• *D'autre part, pour tout* $x \in \mathbb{R}^{*+}$*, on a:*

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \\ &\geqslant 2, \end{aligned}$$

d'où $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\;\; x + \frac{1}{x} \geqslant 2$*, c'est-à dire que 2 est un, autre, minorant de* A*.*
• *Et comme* $2 \in A$*, alors* $2 = min\,(A)$*; donc* $inf\,(A) = 2$*.*

(ii) *On remarque que les éléments de* A *deviennent aussi grand que l'on veut lorsque* x *est choisi assez grand dans* $\mathbb{R}^{*+}$*, car* $\left((\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\;\; x + \frac{1}{x} \geqslant x\right)$*, d'où l'idée de conjecturer que:* A *est non majorée.*
Montrons donc que cette conjecture est vraie.
Supposons, par l'absurde, que A *est majorée et soit* $M \in \mathbb{R}^{*+}$ *telle que* $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\;\; x + \frac{1}{x} \leqslant M$ $(M > 0$ *car* $(\forall y \in A)\;\; y > 0)$*. D'où pour* $x = M\;\; (\in \mathbb{R}^{*+})$*, on a:* $M + \frac{1}{M} \leqslant M$*, ou encore* $\frac{1}{M} \leqslant 0$*, ce qui est absurde.*
Donc A *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et non majorée, elle n'admet pas, donc, de borne supérieure dans* $\mathbb{R}$*.* □

Exercice 1.3.3 *Étudier les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble* B *suivant:*

$$B = \left\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^{*-}\right\}.$$

1.3.2 Partie entière et approximation d'un nombre réel par des décimaux

Partie entière d'un nombre réel

Proposition et définition 1.3.1 *Pour tout nombre réel* x*, il existe un seul entier relatif* p $(p \in \mathbb{Z})$ *tel que*

$$p \leqslant x < p + 1.$$

• p *est appelé* ***la partie entière*** *de* x *et est noté par* $E\,(x)$ *(ou* $[x]$*).*
• $x - E\,(x)$ *est dite* ***Partie décimale*** *de* x $(0 \leq x - E\,(x) < 1)$*.*

Preuve. Existence de p **:** Soit x un réel fixé ; considérons $A = \{n \in \mathbb{Z} \;/\; n \leq x\}$, alors d'après la propriété d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > -x$ (prendre $a = 1$ et $b = -x$ dans le Théorème 1.2.1), d'où $-m \in A$, et alors $A \neq \emptyset$; et $A \subset \mathbb{Z}$ majorée par x (par définition de A). Donc A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, elle admet donc un plus grand élément p; d'où $p \leq x$. Et comme $p < p + 1$, $p + 1 \notin A$, alors $x < p + 1$.

Donc $(\exists p \in \mathbb{Z})\ :\ p \leqslant x < p+1$.
Unicité de p: Supposons l'existence de deux éléments de $\mathbb{Z}$, p et q tels que

$$\begin{cases} p \neq q \\ p \leqslant x < p+1 \\ q \leqslant x < q+1 \end{cases}$$

supposons que $q < p$ (par exemple), alors $q+1 \leqslant p$ et puisque $x < q+1$, alors $x < q+1 \leqslant p$, d'où $p \leqslant x < p$ absurde. □

Exercice 1.3.4 *Qu'en pensez-vous du raisonnement suivant établissant l'unicité de* $p = E(x)$? *Comme p est la borne supérieure de A, et vu l'unicité de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors l'unicité d'un entier relatif vérifiant les conditions de la proposition précédente est assurée.* □

Remarque 1.3.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

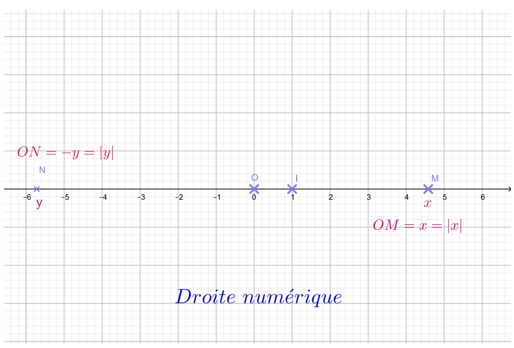
(i) *$E(x)$ est le plus grand élément de $\mathbb{Z}$ inférieur ou égale à x :*

$$(\forall q \in \mathbb{Z}\ q \leqslant x \Longrightarrow q \leqslant E(x)).$$

(ii) $(\exists!\,(p,r) \in \mathbb{Z} \times [0,1[)\ :\ x = p + r$. *(Habitude humaine naturelle: lorsqu'un groupe de personnes veulent diviser quelque chose entre elles, chacune d'elles essaie de calculer (dans sa tète) sa part entière de cette quantité (ce langage est lié aux rationnels !)).*

Définition 1.3.2 *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x et on note $\mid x \mid$, le nombre réel* $\max\{x, -x\}$.

Remarque 1.3.4 $(\forall x \in \mathbb{R})\ \mid x \mid = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.
On trouve ainsi l'idée signalée dans l'introduction que: Géométriquement, sur la droite numérique $D = D(O, I)$ avec $OI = 1$, $\mid x \mid$ est la distance OM, où M est le point d'abscisse x.



Les propriétés suivantes sont connues, et démontrées, au tronc commun Marocain (chapitres 3 et 4).

Proposition 1.3.2 *Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ $(=\{t \in \mathbb{R} : 0 < t\})$, on a:*

- $0 \leqslant \mid x \mid$
- $\mid x \mid = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\mid x \mid = \mid -x \mid$
- $\mid x\ y \mid = \mid x \mid \mid y \mid$ *et* $\mid x^p \mid = \mid x \mid^p$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$
- $\mid \dfrac{1}{x} \mid = \dfrac{1}{\mid x \mid}$ *si* $x \neq 0$
- $- \mid x \mid \leqslant x \leqslant \mid x \mid$
- $\mid x + y \mid \leqslant \mid x \mid + \mid y \mid$ *et* $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leqslant \mid x - y \mid$
- $\mid x \mid < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$
- $\mid x \mid \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$
- $\mid x \mid > \varepsilon \Longleftrightarrow (x > \varepsilon$ *ou* $x < -\varepsilon)$
- $\mid x \mid \geq \varepsilon \Longleftrightarrow (x \geq \varepsilon$ *ou* $x \leq -\varepsilon)$.

Définition 1.3.3 *Étant données un réel x et $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, on dit qu'un nombre réel a est une approximation (ou une valeur approchée) de x à ε près si et seulement si $\mid x - a \mid < \varepsilon$, (ou $\mid x - a \mid \leqslant \varepsilon$).*

Remarque 1.3.5 *Pour tout nombre réel x, la partie entière $E(x)$ est "la meilleure" approximation entière de x à 1 près.*

Approximation d'un nombre réel par des décimaux

Dans la pratique nous avons besoin de connaitre des valeurs décimales approchées d'un nombre réel irrationnel ou rationnel avec une certaine précision.
En fait, nous verrons que tout nombre réel admet un développement décimal illimité, ce qui est une façon plus naturelle et plus intuitive de représenter les nombres réels : c'est ainsi que $1 = 0,999999999...$, $\sqrt{2} = 1,414213562...$, Í $e = 2,718281828...$ et $\pi = 3,141592654...$, etc ....

Définition 1.3.4 *On appelle nombre décimal tout nombre réel pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Exemple 1.3.3 $23,145 \in \mathbb{D}$ *car* $23,145 = \frac{23145}{10^3}$, $-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ *car* $-\frac{1}{4} = \frac{-25}{10^2}$ *et* $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ *(prouver le)*.

Proposition 1.3.3 *Étant données un nombre réel x et un entier naturel k, il existe un nombre décimal unique x_k tel que $10^k\ x_k \in \mathbb{Z}$ et $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$ (x_k est approximation décimale de x à 10^{-k} près).*

Preuve. Soient x un nombre réel et k un entier naturel, alors:
• **Existence :** $E\left(10^k\ x\right) \leqslant 10^k\ x < E\left(10^k\ x\right) + 1$, d'où $\frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} \leqslant x < \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} + \frac{1}{10^k}$, donc, en posant $x_k = \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k}$, on a: $10^k\ x_k = E\left(10^k\ x\right)$, d'où $10^k\ x_k \in \mathbb{Z}$ et $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$.

• **Unicité:** Soit y_k un élément de $\mathbb{R}$ tel que $10^k\ y_k \in \mathbb{Z}$ et $y_k \leqslant x < y_k + \frac{1}{10^k}$;
en multipliant cette double inégalité par 10^k, on obtient

$$10^k\ y_k \leqslant 10^k\ x < 10^k\ y_k + 1;$$

or $10^k\ y_k \in \mathbb{Z}$, donc $E\left(10^k\ x\right) = 10^k\ y_k$ et par suite $y_k = \frac{E\left(10^k\ x\right)}{10^k} = x_k$.

Par ailleurs, $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$, d'où $0 \leqslant x - x_k < \frac{1}{10^k}$ et alors $\mid x - x_k \mid < 10^{-k}$, donc x_k est une approximation de x à 10^{-k} près. Et $10^k\ x_k \in \mathbb{Z}$, donc x_k est un nombre décimal . □

Exercice 1.3.5 *Vérifier que* $(\forall k \in \mathbb{N})\ \ x_k \leqslant x_{k+1}$.

Solution Soit $k \in \mathbb{N}$, alors $x_k \leqslant x < x_k + \frac{1}{10^k}$, d'où $10^{k+1}\ x_k \leqslant 10^{k+1}\ x < 10^{k+1}\ x_k + 10$ et comme $10^{k+1}\ x_k \in \mathbb{Z}$, alors $10^{k+1}\ x_k \leqslant E\left(10^{k+1}\ x\right)$, d'où $x_k \leqslant \frac{E\left(10^{k+1}\ x\right)}{10^{k+1}}$, donc $x_k \leqslant x_{k+1}$. □

1.3.3 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$

Intervalles de $\mathbb{R}$

Définitions 1.3.1 • *Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$; on appelle* ***segment*** *d'extrémités a et b et on note $[a,b]$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ a \leqslant x \leqslant b\}$.*
• *Soit $I \subset \mathbb{R}$, on dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous a et b de I tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset I$, c-à-d pour tous a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a: $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I$.*

Remarque 1.3.6 *1. Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$,*

$$[a,b] = \{\lambda\ a + (1-\lambda)\ \ b\ /\ \lambda \in [0,1]\} = \{\lambda\ b + (1-\lambda)\ \ a\ /\ \lambda \in [0,1]\}.$$

2. $\emptyset$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.4 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, alors I est l'un des neuf types d'ensembles suivants:*

$$\begin{cases}]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, &]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \\ [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, & [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \\ ]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} \\ ]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, &]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\} \\ &]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}. \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ et $]-\infty,+\infty[$ sont des intervalles ouverts.

Preuve. Suivant que I est majoré, minoré ou non et que $inf\,(I)$ et $sup\,(I)$ appartiennent ou n'appartiennent pas à I. □

Voisinage d'un nombre réel

Définitions 1.3.2 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$.*

1. *On appelle intervalle de centre x_0 et de rayon r, où $r > 0$, l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$.*
2. *V est un voisinage de x_0 signifie qu'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset V$.*
3. *V est un voisinage de $+\infty$ (rsp. $-\infty$) signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset V$ (rsp. $]-\infty, a[\subset V$).*

Définitions 1.3.3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *A est ouvert signifie que A est voisinage de chacun de ses points c-à-d:*

$$(\forall x \in A) \ (\exists r > 0) :]x - r, x + r[\subset A.$$

2. *A est fermé signifie que son complémentaire $C_{\mathbb{R}}^{A}$ est ouvert.*
3. *V est un voisinage de $+\infty$ (rsp. $-\infty$) signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, +\infty[\subset V$ (rsp. $]-\infty, a[\subset V$).*

Exercice 1.3.6

1. *Montrer que tout intervalle ouvert est un ouvert, c-à-d: pour tous $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ et $]-\infty, +\infty[$ sont des ouverts. Et que $\emptyset$ est un ouvert.*
2. *Montrer que les sous-ensembles suivants sont des fermés: $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ et $]-\infty, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$.*
3. *Montrer que toute réunion d'ouverts est un ouvert.*
4. *Montrer que l'intersection de deux fermés est un fermé.*

1.4 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.4.1 *Entre deux nombres réels distincts, il existe au moins un nombre rationnel ($\in \mathbb{Q}$) et un nombre irrationnel $\left(\text{élément de } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}\right)$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ et on note $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit a et b deux nombres réels distincts, tels que $a < b$. Alors:
• $\frac{1}{b-a} > 0$; $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > \frac{1}{b-a} > 0$ et donc $\frac{1}{q} < b - a$.
Soit $p = E(a\ q) + 1$, donc $p - 1 = E(a\ q)$ et par suite $p - 1 \leqslant a\ q < p$, d'où $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}$ et $a < \frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < a + (b - a)$, donc $\frac{p}{q} \in]a, b[$.
• D'après ce qui précède l'intervalle $\left]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient au moins un nombre rationnel r; le nombre réel $r\sqrt{2}$ appartient à $]a, b[$ et c'est un irrationnel. □

Remarques 1.4.1

1. *Entre deux nombres réels distincts il existe une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*
2. *Tout intervalle contenant au moins deux points, contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Preuve. Par récurrence (ou par l'absurde). □

Chapitre 2

Suites de nombres réels

2.1 Introduction

2.1.1 Les suites numériques dans le programme scolaire Marocain

Bien que la notion de suite est très présente dans la vie quotidienne, la présence de ce concept n'est introduit mathématiquement dans les programmes Marocain qu'à partir du 1^{ere}année du baccalauréat dans les différentes filières. Ainsi

— **Au 1^{ere} année du Baccalauréat:** La notion de suite numérique est introduite d'une façon mathématique rigoureuse, dans la filière Science mathématique, comma application de $\mathbb{N}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. Alors que dans les autres filières, cette notion est introduite à travers des exemples de la vie courante et d'autres champs disciplinaires (science physique et science de la vie et de la terre). Une étude algébrique et analytique des suites numériques est aussi introduite dans ce niveau, en particulier, les opérations sur les suites numériques, la monotonie, la bornitude et la comparaison de deux suites.
On présente les deux types simples de suites récurrentes: **Arithmétiques et géométriques** et certaines de leurs propriétés.

— **Au 2^{eme} année du Baccalauréat:** On consacre un chapitre entier aux limites des suites numériques. Une définition mathématique de ce concept est introduite dans la filière **Sciences mathématique** sous la forme suivante:
On dit qu'une suite numérique (u_n) tend vers un réel l et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ si et seulement si,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})\;\; n \geqslant N \Longrightarrow \mid u_n - l \mid < \varepsilon.$$

Quant aux autres filières cette notion est introduite à l'aide des exemples.
Différents techniques de calcul des limites sont introduites: **Limite et ordre, limite et monotonie d'une suite, limite des deux suites arithmétique et géométrique , limites des suites récurrentes (le théorème des cinq condition liant la limite d'une telle suite avec les points fixes de la fonction définissant la suite et énoncé et démontré).** Le concept des suites adjacentes et le théorème assurant la convergence de telles suite vers la même limite est introduit dans la filière Science mathématique ; on présente aussi une démonstration du dit théorème. L'étude de quelques exemples de suites implicites est très abondante dans cette filière, il figure dans beaucoup d'examens nationaux.

2.1.2 Aperçu historique sur les suites numériques

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve déjà dans les mathématiques babyloniennes ou en Égypte, puis chez Archimède et Héron d'Alexandrie.
Si la formalisation de la limite d'une suite vient assez tard, son utilisation intuitive date de plus de 2000 ans. Dans les Éléments d'Euclide ($X.1$), on peut lire : « Étant données deux grandeurs inégales, si, de la plus grande on retranche plus que la moitié, et que du reste on retranche plus que la moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs donnée ». En langage actuel, cela donnerait :

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que, pour tout n, $u_{n+1} < \frac{u_n}{2}$, alors, pour tout réel strictement positif ε, il existe un indice n tel que $u_n < \varepsilon$. Ce qui est presque la définition d'une suite ayant pour limite 0.
D'aucuns pourraient croire que cette interprétation du dixième élément d'Euclide est une modernisation fallacieuse, il suffit pour les détromper de regarder l'utilisation qu'en fait Archimède dans ses méthodes de quadrature. Cherchant à calculer l'aire du disque ou l'aire sous une parabole, par exemple, il cherche à l'approcher par des aires de polygones et observe alors la différence entre l'aire cherchée et l'aire du polygone. Il démontre qu'à chaque étape, cette différence a été réduite de plus de la moitié et c'est ainsi qu'il conclut qu'en continuant indéfiniment le processus on sera aussi proche qu'on le souhaite de l'aire cherchée. C'est la « méthode d'exhaustion ».

On en trouve ainsi chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison $\frac{1}{4}$) pour des calculs d'aires et de volumes , il a aussi défini dans les années 220 avant Jésus-Christ deux suites croisés qui ont la limite $\frac{2}{\pi}$.

Léonard de Pise (Fibonacci) expose au $13^{ème}$ siècle sa célèbre suite (divergente) définie par une relation de récurrence affine à 3 termes consécutifs.

Au $14^{ème}$ siècle, le Français Nicolas Oresme, a clairement exposé les suites que l'on appelle désormais arithmétiques et géométriques.

La notion intuitive de la limite mal formalisée, chez Archimède et autres, ne permettra cependant pas de lever les paradoxes de Zénon, comme celui d'Achille et de la tortue : Achille part avec un handicap A et court deux fois plus vite que la tortue. Quand il arrive au point de départ de la tortue, celle-ci a déjà parcouru la distance $\frac{A}{2}$, Achille parcourt alors la distance $\frac{A}{2}$ mais la tortue a parcouru la distance $\frac{A}{4}$, à ce train-là, Achille ne rattrape la tortue qu'au bout d'un nombre infini de processus c'est-à-dire jamais.

Il faut attendre ensuite 1600 ans et les travaux de Grégoire de Saint-Vincent pour entrevoir une tentative de formalisation imparfaite, puis le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz.
Au 1^{er} siècle après Jésus Christ, Héron d'Alexandrie a présenté un procédé d'extraction d'une racine carrée d'un nombre A comme suit:
Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et $\dfrac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.

En notation moderne, cela définit la suite de nombres (u_n) telle que

$u_0 = a$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right)$. Bien sur les nombres a et A sont strictement positifs. Dans notre langage actuel, La suite (u_n) est appelée **Suite récurrente** associée à la fonction numérique f de la variable réelle définie par:$f\ :\ x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$.
On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du $17^{ème}$ siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval).
Dans l'encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence:

Suite et série : se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelques lois. Lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus de quelque quantité finie [...] on l'appelle suite convergente et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité. C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Joseph-Louis Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle.
Au début du $19^{ème}$ siècle, le grand mathématicien français Augustin Louis Cauchy éclaircit cette question des convergences, apportant ainsi une réponse aux doutes soulevés par les paradoxes de Zénon d'Elée. On sait maintenant que la somme d'une suite infini de termes décroissant vers 0 peut être finie.
Dans la seconde moitié du $20^{ème}$ siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un nouveau souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.
Parallèlement à ces études de suites pour leur convergence, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la suite de Fibonacci, celle de Lucas ou, plus récemment, celle de Syracuse.
L'intérêt des suites adjacentes est qu'elles permettent d'une part de prouver l'existence d'une limite, d'autre part de fournir un encadrement de celle-ci aussi fin qu'on le souhaite.
L'étude des suites numériques a pour objet la compréhension de l'évolution de séquences de nombres réels. Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne.
Supposons par exemple que l'on place une somme S à un taux annuel de 10 Si S_n représente la somme que l'on obtiendra après n années, on a: $S_0 = S, S_1 = S\times 1,1; ...; Sn = S\times(1,1)^n$.
Au bout de $n = 20$ ans, on possédera donc la somme $S_{20} = S \times (1,1)^{20} \simeq S \times 6,7$.
Une autre propriété des suites est qu'ils permettent de définir $\mathbb{R}$ via ce qu'on appelle les suites de Cauchy, du nom du grand mathématicien Augustin Louis Cauchy. Grossièrement, les suites de Cauchy sont les suites dont les termes se rapprochent indéfiniment vers l'infini.

En effet, comment peut on définir rigoureusement "tous les nombres qui sont sur une droite" ? En fait, on définit les réels comme des limites de rationnels. Plus précisément, un réel est défini comme l'ensemble des suites de rationnels convergeant vers ce réel. C'est cette méthode qui a été développée par Cantor (1872) , en se basant sur les travaux de Cauchy et Méray, pour donner une autre méthode de construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels différente de celle de Dedekind.
En outre, les suites permettent de démontrer beaucoup de théorèmes très utiles via ce qu'on appelle la méthode de dichotomie, indispensable pour prouver des théorèmes comme celui de Bolzano Weierstrass ou encore le théorème des valeurs intermédiaires. Les suites récurrentes est un outil fondamental d'approximation des solutions de certaines équations

algébriques, en particulier les points fixes de certaines fonctions numériques dont on ne peut les trouver concrètement.
Le but essentiel de ce chapitre est de présenter une étude rigoureuse des suites de nombres réels ; l'objectif principal étant de permettre une bonne maitrise des techniques de base de l'analyse réelle élémentaire à savoir: calculer, majorer, minorer, approcher. On introduira aussi la notion de "convergence".
Pour donner un sens rigoureux aux considérations heuristiques précédentes, nous allons introduire les concepts de "convergence" et de "limite" d'une suite qui sont deux concepts fondamentaux majeurs en Analyse, et on insistera notamment à:
- l'utilisation de la convergence comme moyen d'approcher par exemple certains nombres irrationnels par des nombres rationnels, en particulier des décimaux.
- L'étude des moyens d'établir cette convergence, ou la divergence, en donnant des règles de calcul des limites dans la pratique, et des méthodes de prouver la nature d'une suite lorsqu'il est impossible d'en calculer la limite directement.
- Rappeler et développer l'étude concernant les trois types de suites numériques déjà connues par les lycéens, à savoir les suites arithmétiques, géométriques et les suites arithmético-géométriques.
- Présenter une démonstration de deux grands et importants théorèmes à savoir le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème des intervalles emboités.
- On donnera enfin une étude des suites récurrentes définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique, en particulier leur monotonie et convergence suivant la monotonie de la fonction f, on montrera que les termes de cette suite, lorsqu'elle est convergente, représentent des valeurs approchées des points fixes de la fonction numérique f.
On va clôre ce chapitre par la donnée de quelques exemples simples de suites récurrentes pour illustrer la méthode des itérations successives en montrant comment les suites convergentes peuvent être utilisées pour approcher les nombres réels solutions de certaines équations non linéaires fournissant ainsi un algorithme qui peut être utilisé concrètement dans la pratique (voir par exemple l'approximation de la racine carrée).
Cet exemple simple montre clairement comment les suites convergentes apparaissent de façon naturelle dans la recherche d'une valeur approchée de la racine carrée.

2.2 Généralités

Définition 2.2.1 *Une suite de nombres réels, suite numérique ou suite réelle est une application:* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto f(n) = x_n$, *elle est souvent notée:* (x_n), $(x_n)_n$ *ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et pour* n *fixé dans* $\mathbb{N}$, *l'élément* x_n *de* $\mathbb{R}$ *est appelé terme du rang* n *ou d'indice* n *ou terme général de la suite* (x_n).
Il arrive que l'application f *soit définie sur une partie infinie* $I \subset \mathbb{N}$, *on parle dans ce cas de la suite* $(x_n)_{n\in I}$ *indexée par* I.

Définition 2.2.2 *Si* (x_n) *est une suite réelle telle qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *vérifiant:*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant p \Longrightarrow x_n = x_p;$$

on dit que la suite (x_n) *est stationnaire ou constante à partir du rang* p.
Si $p = 0$ *alors* $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = x_0$ *et* (x_n) *est dite constante.*

Définitions 2.2.1 *Une suite* (x_n) *de nombres réels est dite:*

1. *croissante (resp. strictement croissante) si, et seulement si,* $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n \leqslant x_{n+1}$ *(resp.* $x_n < x_{n+1}$*).*
2. *décroissante (resp. strictement décroissante) si, et seulement si,* $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} \leqslant x_n$ *(resp.* $x_{n+1} < x_n$*).*
3. *monotone (resp. strictement monotone) si, et seulement si,* (x_n) *est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*
4. *majorée si, et seulement si, l'ensemble* $\{x_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ *est majoré:* $(\exists M \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n \leqslant M$.
5. *minorée si, et seulement si, l'ensemble* $\{x_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ *est minoré:*

$$(\exists m \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; m \leqslant x_n.$$

6. *bornée si, et seulement si, elle est à la fois majorée et minorée:* $(\exists\, (m, M) \in \mathbb{R}^2) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; m \leqslant x_n \leqslant M$; *ceci est équivalent à* $(\exists M > 0) \; : \; (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \mid x_n \mid \leqslant M$.

Exemples 2.2.1 *les suites suivantes sont des suites numériques:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = \frac{n^2+1}{n^2+4}$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = n + ln(n)$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = y_0 + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + ... + \frac{y_n}{2^n}$, *où* (y_n) *est une suite numérique positive et majorée .*
4. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, x_0 *et* y_0 *sont deux réels fixés tels que* $0 < x_0 < y_0$.
5. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;\; x_{n+1} = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}$ *et* x_0 *et* x_1 *sont deux réels fixés.*
6. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ *et* $x_0 = 1$.
7. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ *et* $x_0 = 3$.
8. $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$ *et* $x_0 = a$ *où* a *et* A *sont deux réels réels strictement positifs.*

Définitions 2.2.2 *Soient* (x_n) *une suite de nombres réels .*

1. *On dit que* (x_n) *est convergente si, et seulement si, il existe un nombre réel* x *tel que*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : ((\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon)\,.$$

   Dans ce cas, on dit aussi que (x_n) *converge vers* x *ou a pour limite* x *ou tend vers* x *et on écrit* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ *ou* $x_n \longrightarrow x$.
   Dans le cas contraire, on dit que (x_n) *diverge ou est divergente.*

2. *On dit que* (x_n) *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) ou admet* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$ *) pour limite et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *ou* $x_n \longrightarrow +\infty$ *(resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ *ou* $x_n \longrightarrow -\infty$*) si, et seulement si,*

$$(\forall A > 0)\ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow\ \ x_n > A\ \ (resp.\ x_n < -A)\,.$$

Proposition 2.2.1 1. *Toute suite stationnaire est convergente.*

2. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de nombres réels.

1. Si (x_n) est stationnaire, alors $(\exists p \in \mathbb{N})\ :\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant p \Longrightarrow x_n = x_p$.
   Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $n_0 = p$ on a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n - x_p = 0$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x_p \mid < \varepsilon$, c-à-d $x_n \longrightarrow x$.
2. Si $x_n \longrightarrow x$, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < 1$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mid x_n \mid - \mid x \mid &\leqslant \mid\mid x_n \mid - \mid x \mid\mid \\ &\leqslant \mid x_n - x \mid \end{aligned}$$

   d'où $\mid x_n \mid \leqslant \mid x_n - x \mid + \mid x \mid$; donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n \mid < 1 + \mid x \mid$.
   Soit $M = max\,(\mid x_0 \mid, \mid x_1 \mid, ..., \mid x_{n_0 - 1} \mid, 1 + \mid x \mid)$, alors: $(\forall n \in \mathbb{N}) \mid x_n \mid \leqslant M$. □

Proposition 2.2.2 *Si* (x_n) *est une suite de nombres réels convergente vers une limite réelle* x, *alors cette limite est unique.*

Preuve.
On suppose que (x_n) converge vers une autre limite $x^{'}$ différente de x, alors $\mid x - x^{'} \mid > 0$ donc pour $\varepsilon = \frac{1}{4} \mid x - x^{'} \mid$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon$ et $n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid x_n - x^{'} \mid < \varepsilon$.
On considère $N = max\,(n_0, n_1)$, on a:

$$\begin{aligned} 0 < \mid x - x^{'} \mid &\leqslant \mid x - x_N \mid + \mid x_N - x^{'} \mid \\ &< 2\varepsilon \\ &= \frac{\mid x - x^{'} \mid}{2}, \end{aligned}$$

d'où $1 < \frac{1}{2}$; absurde . □

2.3 Opérations sur les limites des suites

Définition 2.3.1 *Soient* (x_n) *et* (y_n) *deux suites réelles, on définit:*
• *La somme:* $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$.
• *Le produit:* $(x_n)\ (y_n) = (x_n\ y_n)$.
• *Le produit par un réel* λ*:* $\lambda.(x_n) = (\lambda\ .x_n)$.
• $(x_n) \leqslant (y_n) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \leqslant y_n$.

Théorème 2.3.1 *Soient* (x_n) *et* (y_n) *deux suites numériques convergentes vers les deux nombres réels* x *et* y *respectivement et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors :*

1. $(x_n) + (y_n) \longrightarrow x + y$.
2. $(x_n)(y_n) \longrightarrow xy$.
3. $\lambda.(x_n) \longrightarrow \lambda.x$.

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \frac{\varepsilon}{2}\right)\ et\ \left(n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid y_n - y \mid < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On considère $N = max\,(n_0, n_1)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ on a:

$$\begin{aligned} \mid x_n + y_n - (x + y) \mid &\leqslant \mid x_n - x \mid + \mid y_n - y \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Soit $M > 0$ tel que $\mid x \mid < M\ et\ (\forall n \in \mathbb{N})\ \ \mid y_n \mid < M$ (un tel M existe car (y_n) est bornée). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} \mid x_n y_n - xy \mid &= \mid (x_n - x)\, y_n + (y_n - y)\, x \mid \\ &\leqslant \mid x_n - x \mid \mid y_n \mid + \mid y_n - y \mid \mid x \mid \\ &\leqslant M\,(\mid x_n - x \mid\ + \mid y_n - y \mid). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N &\Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \frac{\varepsilon}{2M}\ et\ \ \mid y_n - y \mid < \frac{\varepsilon}{2M} \\ &\Longrightarrow \mid x_n y_n - xy \mid < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right). \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant N \Longrightarrow \mid x_n y_n - xy \mid < \varepsilon$.

3. Il suffit de prendre dans 2. la suite définie par: $(\forall n \in \mathbb{N})\, y_n = \lambda$. □

Proposition 2.3.1 *Soient* $x \in \mathbb{R}^*$ *et* (x_n) *une suite numérique telle que* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \neq 0$*. Si* $x_n \longrightarrow x$ *alors* $\frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{x}$.

Preuve. $x_n \longrightarrow x$, alors pour $\frac{|x|}{2} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \frac{\mid x \mid}{2} \\ &\Longrightarrow \mid\mid x_n \mid - \mid x \mid\mid < \frac{\mid x \mid}{2} \\ &\Longrightarrow -\frac{\mid x \mid}{2} < \mid x_n \mid - \mid x \mid < \frac{\mid x \mid}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{\mid x \mid}{2} < \mid x_n \mid .\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \frac{|x|^2}{2}\ \varepsilon$ car $x_n \longrightarrow x$.
Soit $N = max\,(n_0, n_1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ on a:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| &= \left|\frac{x - x_n}{x_n x}\right| \\ &= \frac{\mid x_n - x \mid}{\mid x_n \mid \mid x \mid} \\ &< \frac{\mid x \mid^2}{2}\ \varepsilon \frac{1}{\frac{|x|}{2} \mid x \mid} \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.2 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques .*

1. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et (y_n) est bornée, alors $x_n + y_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $x_n + y_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).*
3. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et $y_n \longrightarrow l$ et $l > 0$, alors $x_n.y_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).*
4. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et $y_n \longrightarrow l$ et $l < 0$, alors $x_n.y_n \longrightarrow -\infty$ (resp. $+\infty$).*
5. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ y_n \geqslant l > 0$, alors $x_n.y_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).*
6. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) et $(\forall n \in \mathbb{N})\, y_n \leqslant l < 0$, alors $x_n.y_n \longrightarrow -\infty$ (resp. $+\infty$).*
7. *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ ou $-\infty$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\, x_n \neq 0$, alors $\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0$.*

Preuve. Immédiate (à titre d'exercice). □

Remarque 2.3.1 *Faire attention aux formes indéterminées suivantes:*
• *Si $x_n \longrightarrow +\infty$ et $y_n \longrightarrow -\infty$, on ne peut rien dire de la limite de $(x_n + y_n)$ en général.*
• *Si $x_n \longrightarrow \pm\infty$ et $y_n \longrightarrow 0$, on ne peut rien dire de la limite de $(x_n.y_n)$ en général.*
• *Si $x_n \longrightarrow \pm\infty$ et $y_n \longrightarrow \pm\infty$, on ne peut rien dire sur la limite de $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ en général.*

Proposition 2.3.2 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques qui coïncident à partir d'un certain rang c-à-d : $(\exists p \in \mathbb{N})$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant p \Longrightarrow x_n = y_n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow y_n \longrightarrow x$. ($(x_n)$ et (y_n) sont alors de même nature: convergent toutes les deux, tendent toutes les deux vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'ont pas de limite finie ou infinie toutes les deux).*

Preuve. • Pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_n \longrightarrow x$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon$.
Soit $N = max\,(p, n_0)$, alors

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant N &\Longrightarrow n \geqslant p \text{ } et \text{ } n \geqslant n_0 \\ &\Longrightarrow x_n = y_n \text{ } et \text{ } \mid x_n - x \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid y_n - x \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $y_n \longrightarrow x$.
(x_n) et (y_n) jouent deux rôles symétriques, donc $y_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \longrightarrow x$.
• Démonstration analogue pour $x = +\infty$ ou $x = -\infty$.
• La démonstration du cas restant se fait par contra-posée .

Exercice 2.3.1 *Soit (x_n) une suite numérique.*

1. *Montrer que, si (x_n) converge vers l, alors la suite $(\mid x_n \mid)$ est convergente et on a:*

$$\lim_{n \to +\infty} \mid x_n \mid = \mid \lim_{n \to +\infty} x_n \mid .$$

2. *Montrer que, si (x_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors la suite $(\mid x_n \mid)$ tend vers $+\infty$.*

2.4 Suites équivalentes et suites négligeables

Définition 2.4.1 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles.*
On dit que (x_n) est négligeable devant (y_n), et l'on note $x_n = o\,(y_n)$, si et seulement si, il existe une suite (ε_n) telle que:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\ x_n = \varepsilon_n y_n \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.4.1 *Si $y_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors*

$$x_n = o\,(y_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Définition 2.4.2 *Deux suites réelles (x_n) et (y_n) sont dites équivalentes si, et seulement si $x_n - y_n = o(y_n)$. On note alors $x_n \sim y_n$.*

Remarque 2.4.2 *Si $y_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $x_n \sim y_n$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.*

Exemple 2.4.1 *Considérons, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $y_n = \dfrac{1}{n}$. Posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. On a alors , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = \varepsilon_n y_n$; $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. D'où $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.*

2.5 Critères de convergence

Théorème 2.5.1 *Soit (x_n) une suite numérique, alors:*

1. *Si (x_n) est croissante et majorée, alors (x_n) est convergente vers sa borne supérieure*
$$\sup_n x_n = sup\left(\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$$
2. *Si (x_n) est décroissante et minorée, alors (x_n) est convergente vers sa borne inférieure*
$$\inf_n x_n = inf\left(\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Preuve.

1. Supposons que (x_n) est croissante et majorée, posons $M = \sup\limits_n x_n$.
Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : M - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant M$.
Et comme (x_n) est croissante, alors
$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \ M - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant M < M + \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_n - M \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$
2. Supposons que (x_n) est décroissante et minorée, posons $m = \inf\limits_n x_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : m \leqslant x_{n_0} < m + \varepsilon$.
Et comme (x_n) est décroissante, alors
$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \ m - \varepsilon < m \leqslant x_n \leqslant x_{n_0} < m + \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_n - m \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.5.1 *Soit (x_n) une suite numérique, alors:*

1. *Si (x_n) est croissante et non majorée, alors $x_n \longrightarrow +\infty$.*
2. *Si (x_n) est décroissante et non minorée, alors $x_n \longrightarrow -\infty$.*

Proposition 2.5.1 *Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) trois suites numériques, alors:*

1. *Si $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\ x_n \leqslant y_n$ et si (x_n) et (y_n) sont convergentes vers x et y respectivement alors $x \leqslant y$.*
2. *Si (x_n) est convergente et α et β sont deux réels tels que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant \alpha$ $(resp. (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta \leqslant x_n)$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leqslant \alpha$ $\left(resp. \ \beta \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} x_n\right)$.*
3. *Si $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ et si (x_n) et (y_n) sont convergentes vers la même limite l, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l$.*
4. *Si $l \in \mathbb{R}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \mid x_n - l \mid \leqslant y_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$, alors (x_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$.*

Preuve.

1. Sinon, c-à-d si $y < x$; soit $\varepsilon = \frac{1}{3}(x-y)$, alors $\varepsilon > 0$ et il existe n_0 et n_1 dans $\mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$(n \geqslant n_0 \Longrightarrow x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon) \;\; et \;\; (n \geqslant n_1 \Longrightarrow y-\varepsilon < y_n < y+\varepsilon);$$

d'où pour $N = max(n_0, n_1)$, on a :

$$\begin{aligned} x-\varepsilon < x_N \leqslant y_N < y+\varepsilon &\Longrightarrow x-\varepsilon < y+\varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < x-y < 2\varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < x-y < \frac{2}{3}(x-y) \\ &\Longrightarrow 1 < \frac{2}{3}, \;\; ce\ qui\ est\ impossible. \end{aligned}$$

2. Il suffit de prendre (y_n) la suite constante (α) (*resp.* (β)) dans 1.
3. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow \begin{cases} -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \\ -\varepsilon < y_n - l < \varepsilon \end{cases}$$

et alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0 &\Longrightarrow -\varepsilon < x_n - l \leqslant z_n - l \leqslant y_n - l < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid z_n - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc (z_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mid x_n - l \mid \leqslant y_n \Longleftrightarrow l - y_n \leqslant x_n \leqslant l + y_n$, il suffit alors d'appliquer le résultat précédent (les deux suites $(l-y_n)$ et $(l+y_n)$ sont convergentes vers la même limite l). $\square$

Remarque 2.5.2 *Les propriétés précédentes restent vraies, si les inégalités des hypothèses sont strictes ou si elles sont vraies à partir d'un certain rang .*

Proposition 2.5.2 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques, alors:*

1. *Si $x_n \to 0$ et (y_n) est bornée, alors $x_n y_n \to 0$.*
2. *Si $x_n \to l$, alors $\mid x_n \mid \to \mid l \mid$. La réciproque est fausse.*

Preuve.

1. (y_n) est bornée, alors $(\exists M > 0) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \mid y_n \mid \leqslant M$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \mid x_n.y_n \mid \leqslant M \mid x_n \mid$, or $x_n \to 0$, d'où $(\forall \varepsilon > 0) \;\; (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; si \;\; n \geqslant n_0, \;\; \mid x_n \mid < \frac{\varepsilon}{M}$ et par suite $(\forall \varepsilon > 0) \;\; (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; si \;\; n \geqslant n_0, \;\; \mid x_n.y_n \mid < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n.y_n = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, alors $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - l \mid < \varepsilon$, d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid\mid x_n \mid - \mid l \mid\mid \leqslant \mid x_n - l \mid < \varepsilon, \;\; donc \;\; \lim_{n\to+\infty} \mid x_n \mid = \mid l \mid$$

.

Pour $x_n = (-1)^n$ on a: $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; \mid x_n \mid = 1$ d'où $\mid x_n \mid \to 1$, alors que (x_n) n'a pas de limite. $\square$

Corollaire 2.5.1 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques, alors:*

1. *Si $x_n = o(y_n)$ et (y_n) est bornée, alors $x_n \to 0$.*
2. *Si $x_n \sim y_n$, alors (x_n) et (y_n) sont de même nature: convergent ou divergent au même temps. Et si l'une tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition la proposition précédente et les opérations sur les limites des suites. □

Proposition 2.5.3 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites numériques telles que $x_n \leqslant y_n$ à partir d'un certain rang. Alors:*
$(x_n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y_n \longrightarrow +\infty)$ *et* $(y_n \longrightarrow -\infty \Longrightarrow x_n \longrightarrow -\infty)$.

Preuve. En exercice. □

2.6 Suites telles que $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \leqslant q < 1$

Théorème 2.6.1 *Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait: $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \leqslant q < 1$. Alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.*

Preuve. On suppose que la propriété $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \leqslant q < 1$. est vraie pour tout entier naturel n (la preuve dans le cas où cette propriété n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n'est pas très différente). Montrons, alors que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$.
Par récurrence, la propriété est trivialement vérifiée pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$, alors

$$\begin{aligned} \mid u_{n+1} &= \mid u_n \mid . \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \\ &\leqslant \mid u_0 \mid q^n . q \\ &\leqslant \mid u_0 \mid q^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, selon le principe de récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \mid u_n \mid \leqslant \mid u_0 \mid q^n$.
Or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mid u_0 \mid q^n = 0$, car $\mid q \mid < 1$, d'où la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.
□

Corollaire 2.6.1 *Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls.*
Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la définition de $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ pour un $\varepsilon < 1$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}$ par exemple) et le théorème précédent. □

Exemple 2.6.1 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ est convergente vers 0.*
En effet, le résultat est trivialement vérifié pour $a = 0$.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| \\ &= \frac{\mid a \mid}{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mid \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \mid = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\mid a \mid}{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Le résultat se déduit alors du corollaire précédent. $\square$

Remarques 2.6.1

1. *Avec les notations du théorème précédent, si on a pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang: $\mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid \geqslant q > 1$, alors la suite (u_n) diverge. En effet, il suffit d'appliquer le théorème à la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ pour voir que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mid u_n \mid = +\infty$.*
2. *Toujours avec les notations du théorème précédent, si $q = 1$ on ne peut rien dire comme le montre l'exemple suivant: Pour la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = (-1)^n$, on a $(\forall n \in \mathbb{N})\ \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} \mid = 1$ et (u_n) est divergente.*

Exercice 2.6.1 *Soit (x_n) une suite numérique. Montrer que:*

1. *Si (x_n) est décroissante et tend vers 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geqslant 0$.*
2. *Si (x_n) est croissante et tend vers 0, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leqslant 0$.*

2.7 Suites adjacentes et propriété des intervalles emboités

Définition 2.7.1 *On dit que deux suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - x_n = 0$.*

Théorème 2.7.1 *Soient (x_n) et (y_n) deux suites adjacentes telles que (x_n) est croissante et (y_n) est décroissante, alors:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\quad x_n \leqslant y_n$.
2. *Les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, et elles convergent vers la même limite.*

Preuve.

1. Considérons la suite de terme général $z_n = y_n - x_n$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\quad z_{n+1} - z_n = (y_{n+1} - y_n) + (x_n - x_{n+1})$ d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\quad z_{n+1} - z_n \leqslant 0$ d'où la suite (z_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$, alors, d'après l'exercice précédent, $(\forall n \in \mathbb{N})\quad z_n \geqslant 0$. Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\quad x_n \leqslant y_n$.
2. On a: $(\forall n \in \mathbb{N})\quad x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$, d'où (x_n) est croissante majorée par y_0 et (y_n) est décroissante minorée par x_0, elles sont donc convergentes ; soient $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l'$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} y_n - x_n = 0 = l - l',\ \textit{donc}\ l = l'.$$

$\square$

Exemple 2.7.1 *Les suites (x_n) et (y_n) définies pour $n > 0$ par: $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{n!n}$ sont adjacentes.*

- (x_n) *est croissante:* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}$, *d'où* $x_{n+1} > x_n$.
- (y_n) *est décroissante: pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{n\,(n+1) + n - (n+1)^2}{n\,(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n\,(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n!n\,(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Et alors, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $y_{n+1} - y_n < 0$.

- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $y_n - x_n = \frac{1}{n!n}$, d'où $y_n - x_n \longrightarrow 0$.

Exercice 2.7.1 *Montrer que la limite commune des deux suites précédentes est irrationnelle.*

Exercice 2.7.2 *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite de terme général:* $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. *Pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *considérons* $x_n = u_{2n}$ *et* $y_n = u_{2n+1}$.

1. *Montrer que les deux suites* (x_n) *et* (y_n) *sont adjacentes.*
2. *En déduire la nature de la suite* (u_n).

Théorème (*Propriété des segments emboités*) **2.7.1** *Si* $([a_n, b_n])$ *est une suite décroissante*
$((\forall n \in \mathbb{N})\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$ *d'intervalles fermés et bornés (segments) de* $\mathbb{R}$ *telle que* $b_n - a_n \longrightarrow 0$, *alors leur intersection* $J = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ *est réduite à un point.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, donc $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ c-à-d (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ; il s'agit alors de deux suites adjacentes puisque $b_n - a_n \longrightarrow 0$. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite commune de (a_n) et (b_n) on a:
• $l = \sup\limits_n a_n = \inf\limits_n b_n$,
• $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \leqslant l \leqslant b_n$, d'où $l \in J$ et $J \neq \emptyset$.
• Supposons que J contient un autre point l' avec $l' \geqslant l$ (*par exemple*), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $a_n \leqslant l \leqslant l' \leqslant b_n$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mid l - l' \mid \leqslant \mid b_n - a_n \mid$. Comme $b_n - a_n \longrightarrow 0$, alors $l = l'$. □

2.8 Suites de Cauchy et complétude de $\mathbb{R}$

Définition 2.8.1 *On dit qu'une suite réelle* (x_n) *est de* ***Cauchy*** *(ou vérifie la condition ou le critère de Cauchy) si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon >)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \left(\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2\right)\ (m \geqslant n_0 \text{ et } n \geqslant n_0) \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon.$$

Exercice 2.8.1 *Soit (x_n) une suite réelle.*
Montrer que: (x_n) est de ***Cauchy*** *si, et seulement si*

$$(\forall \varepsilon >)\ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \Big(\forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2\Big)\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_{n+m} - x_n \mid < \varepsilon.$$

Proposition 2.8.1

1. *Toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite réelle de Cauchy est une suite bornée.*

Preuve. Soit (x_n) une suite réelle, alors:

1. Si (x_n) est convergente vers un réel l.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - l \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2 : n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, on a:

$$\begin{aligned}\mid x_n - x_m \mid &= \mid (x_n - l) - (x_m - l) \mid \\ &\leqslant \mid x_n - l \mid + \mid x_m - l \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

2. Si (x_n) est de Cauchy , alors, pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2 : n \geqslant n_0$ et $m \geqslant n_0$, on a: $\mid x_n - x_m \mid < 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0$ on a:

$$\begin{aligned}\mid x_n \mid &= \mid x_n - x_{n_0} + x_{n_0} \mid \\ &\leqslant \mid x_n - x_{n_0} \mid + \mid x_{n_0} \mid \\ &\leqslant 1 + \mid x_{n_0} \mid .\end{aligned}$$

   Soit $A = max \left\{\mid x_0 \mid, \mid x_1 \mid, ..., \mid x_{n_0} \mid, 1 + \mid x_{n_0} \mid\right\}$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \mid x_n \mid \leqslant A$. □

Théorème($\mathbb{R}$ est est complet) 2.8.1 *Une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente (vers une limite finie) si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy.*
On dit que $\mathbb{R}$ est complet.

Preuve. $\Longrightarrow$] Proposition précédente .
$\Longleftarrow$] (x_n) est une suite de Cauchy, elle est donc bornée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soient $X_p = \{x_n\ /\ n \in \mathbb{N}\ et\ n \geqslant p\}$, $\ a_p = inf\,(X_p)$ et $b_p = sup\,(X_p)$ (existent car X_p est non vide et borné).
On a: (b_n) et (a_n) sont adjacentes, en effet:
• $(\forall p \in \mathbb{N})\ \ X_{p+1} \subset X_p,\ \ a_p \leqslant a_{p+1}\ \ et\ \ \ b_{p+1} \leqslant b_p$; donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
• Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2)\ \ n \geqslant n_0\ et\ m \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x_m \mid < \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $p \geqslant n_0$, alors, par définition de $b_p\,(= sup\,(X_p))$, il existe $n \geqslant p \geqslant n_0$ tel que $b_p - \frac{\varepsilon}{3} < x_n \leqslant b_p$; et par définition de $a_p\,(= inf\,(X_p))$, il existe $m \geqslant p \geqslant n_0$ tel que $a_p \leqslant x_m < a_p + \frac{\varepsilon}{3}$; et par suite : $0 \leqslant b_p - x_n < \frac{\varepsilon}{3}$ et $-\frac{\varepsilon}{3} < a_p - x_m \leqslant 0$, ou encore $\mid b_p - x_n \mid < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\mid a_p - x_m \mid < \frac{\varepsilon}{3}$.
On a donc

$$\begin{aligned}\mid b_p - a_p \mid &\leqslant \mid b_p - x_n \mid + \mid x_n - x_m \mid + \mid x_m - a_p \mid \\ &< 3\ \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $b_n - a_n \longrightarrow 0$.
Soit x la limite commune de (a_n) et (b_n) , alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, par définition de a_p et b_p, $a_p \leqslant x_p \leqslant b_p$, donc la suite (x_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. □

Remarque 2.8.1 *$\mathbb{Q}$ n'est pas complet, en effet la suite de l'exemple* 2.8.1 *est de Cauchy mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*
On peut voir ainsi, intuitivement, $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Et c'est de cette façon qu'on comble les "trous", dont on a parlé dans l'introduction du chapitre 1, qui se trouvent dans $\mathbb{Q}$.

2.9 Valeur d'adhérence et théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 2.9.1 *Soient (x_n) une suite numérique. On appelle sous-suite ou suite extraite de la suite (x_n), toute suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, c-à-d: $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2)\ \ n > m \Longrightarrow \varphi(n) > \varphi(m)$.*
(On montre par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \varphi(n) \geqslant n$).

Exemple 2.9.1
1. *Soit $(x_n) = (6n)$ et $\varphi(n) = 3n$, la sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right) = (18n)$.*
2. *Pour $(x_n)_n = ((-1)^n)_n$ et $\varphi(n) = 2n$, la sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right) = \left((-1)^{2n}\right)_n$ c'est la suite constante égale à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit (x_n) la suite de terme général: $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2}$, alors:*
   - *(i) Pour $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \varphi(n) = 2n : x_{\varphi(n)} = x_{2n} = 0$.*
   - *(ii) Pour $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \varphi(n) = 2n+1 : x_{\varphi(n)} = x_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)^2}$.*
   - *(iii) Pour $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \varphi(n) = 4n+3 : x_{\varphi(n)} = x_{4n+3} = \frac{2}{(4n+3)^2}$.*

Proposition 2.9.1 *Soit (x_n) une suite numérique qui tend vers un x appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors toute suite extraite de (x_n) tend vers x.*

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}$. Supposons que la suite (x_n) tend vers x et soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ une suite extraite de (x_n).
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - x \mid < \varepsilon$; d'où

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0 \\ &\Longrightarrow \mid x_{\varphi(n)} - x \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$.
Les cas où $x \in \{+\infty, -\infty\}$ se traitent de la même façon. □

Proposition 2.9.2 *Soit (x_n) une suite numérique.*
1. *Si (x_n) admet une suite extraite divergente, alors elle est divergente.*
2. *Si (x_n) admet deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes, alors (x_n) diverge.*
3. *Pour $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ on a:*

$$(x_n) \text{ tend vers } l \ \Leftrightarrow \begin{cases} (x_{2n}) \text{ tend vers } l \\ (x_{2n+1}) \text{ tend vers } l. \end{cases}$$

Preuve. 1. et 2. sont évidentes d'après la proposition précédente .
3. • Si $x_n \longrightarrow l$, alors d'après la proposition précédente, $x_{2n} \longrightarrow l$ et $x_{2n+1} \longrightarrow l$.
• Réciproquement, on suppose que $x_{2n} \longrightarrow l$ et $x_{2n+1} \longrightarrow l$ où $l \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \geqslant n_1 \Longrightarrow \mid x_{2n} - l \mid < \varepsilon$$

et $n \geqslant n_2 \Longrightarrow \mid x_{2n+1} - l \mid < \varepsilon$. Soit $N = max\,(2n_1, 2n_2 + 1)$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N$, on a:

$$\begin{aligned} \textit{Si } p \textit{ est pair}, \quad p \geqslant N &\Longrightarrow p \geqslant 2n_1 \\ &\Longrightarrow \frac{p}{2} \geqslant n_1 \\ &\Longrightarrow \mid x_{2\frac{p}{2}} - l \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{Si } p \textit{ est impair}, \quad p \geqslant N &\Longrightarrow p \geqslant 2n_2 + 1 \\ &\Longrightarrow \frac{p-1}{2} \geqslant n_2 \\ &\Longrightarrow \mid x_{2\frac{p-1}{2}+1} - l \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $(\forall p \in \mathbb{N}) \;\; p \geqslant N \Longrightarrow \mid x_p - l \mid < \varepsilon$. Ce qui montre que $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = l$.
Les cas où $l \in \{+\infty, -\infty\}$ se traitent de la même façon. $\square$

Exemples 2.9.1 *Soient* (x_n) *et* $(y_n)_{n \geqslant 2}$ *les suites de termes généraux* $x_n = (-1)^n$ *et* $y_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a:*

1. $x_{2n} = 1$ *et* $x_{2n+1} = -1$ *d'où* $x_{2n} \longrightarrow 1$ *et* $x_{2n+1} \longrightarrow -1$ *donc* (x_n) *diverge.*
2. $y_{2n} = \frac{1}{2n-1}$ *et* $y_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$ *si* $n \neq 0$, *d'où :* $y_{2n} \to 0$ *et* $y_{2n+1} \to 0$, *donc* $(y_n)_{n \geqslant 2}$ *converge vers* 0.

Définition 2.9.2 *Soient* (x_n) *une suite numérique et* x *un élément de* $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *On dit que* x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,* x *est limite d'une sous-suite de* (x_n) .

Exemple 2.9.2 *La suite définie par:* $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; x_n = \frac{n}{2} sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ *admet* 0 , $+\infty$ *et* $-\infty$ *comme valeurs d'adhérences.*
$x_{8n} \longrightarrow 0$, $x_{8n+1} \longrightarrow +\infty$ *et* $x_{8n+5} \longrightarrow -\infty$.

Proposition 2.9.3 *Soient* (x_n) *une suite numérique et* x *un nombre réel.*

1. x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'ensemble* $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ *contient une infinité de termes de la suite* (x_n) , *c-à-d:* $\{n \in \mathbb{N} \; / \; x_n \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\}$ *est infini.*
2. $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si, pour tout* $A > 0$, *l'ensemble* $]A, +\infty[$ *(resp.* $]-\infty, -A[$*) contient une infinité de termes de la suite* (x_n) *c-à-d:* $\{n \in \mathbb{N} \; / \; x_n \in \,]A, +\infty[\}$ *(resp.* $\{n \in \mathbb{N} \; / \; x_n \in \,]-\infty, -A[\}$ *) est infini.*

Preuve.

1. Soit $\varepsilon > 0$, alors x étant une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$, d'où

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_{\varphi(n)} \in \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[,$$

donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n) car $\{\varphi(n) \ / \ n \geqslant n_0\}$ est infini (car sinon, soit $N = max(\{\varphi(n) \ / \ n \geqslant n_0\})$, on a $\varphi(N+1) \leqslant N$ et $\varphi(N+1) \geqslant N+1 > N$, ce qui est absurde).
$\Longleftarrow]$ On a: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $I_n = \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) c-à-d: $\{m \in \mathbb{N} \ / \ x_m \in I_n\}$ est infini .
• Pour $k = 0$, on prend $\varphi(0) = 0$,
• Pour $k = 1$, $\{m \in \mathbb{N} \ / \ x_m \in I_1\}$ est infini, soit $\varphi(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{\varphi(1)} \in I_1$, on a bien $\varphi(1) > \varphi(0)$.
• Pour $k = 2$, I_2 contient une infinité de termes de la suite (x_n) , donc

$$\{m \in \mathbb{N} \ / \ m > \varphi(1) \ \ et \ x_m \in I_2\} \neq \emptyset,$$

sinon $\{m \in \mathbb{N} \ / \ x_m \in I_2\} \subset \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leqslant \varphi(1)\}$ absurde (le premier ensemble est infini, le second est fini) ; soit $\varphi(2) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{\varphi(2)} \in I_2$ et $\varphi(2) > \varphi(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construit $\varphi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ tels que

$$(\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}) \ \ \varphi(k+1) > \varphi(k),$$

alors I_{n+1} contient une infinité de termes de la suite (x_n) , donc

$$\{m \in \mathbb{N} \ / \ m > \varphi(n) \ \ et \ x_m \in I_{n+1}\} \neq \emptyset,$$

car, sinon

$$\{m \in \mathbb{N} \ / \ x_m \in I_{n+1}\} \subset \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leqslant \varphi(n)\},$$

absurde (le premier ensemble est infini, le second est fini) ; soit $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(n+1)} \in I_{n+1}$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.
Donc, par le principe de récurrence,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ \ (\exists \varphi(n) \in \mathbb{N}) : x_{\varphi(n+1)} \in I_{n+1} \ et \ \varphi(n+1) > \varphi(n) \ \ avec \ \varphi(0) = 0.$$

On définit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x - \frac{1}{n} < x_{\varphi(n)} < x + \frac{1}{n}$; donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est une sous-suite de (x_n) et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = x$.

2. Même démonstration que 1, en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n =]n, +\infty[$ $(resp.\ ]-\infty, n[)$.
□

Lemme 2.9.1 *Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. Alors*

$$A \ est \ infini \iff (\forall N \in \mathbb{N}^*) \ (\exists n \geqslant N) \ : n \in A.$$

Preuve. $\Longrightarrow]$ Sinon, $(\exists N \in \mathbb{N}^*)$: $(\forall n \geqslant N)$: $n \notin A$, d'où $A \subset \{0, 1, 2, ..., N-1\}$, absurde .
$\Longleftarrow]$ Sinon, c-à-d: on suppose que A est fini . Soit $M = Max(A)$, alors $(\forall n \geqslant M+1)$ $n \notin A$, absurde . □

Corollaire 2.9.1 *Soient* (x_n) *une suite numérique et* x *un nombre réel .*

1. x *est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,* $(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geqslant N) : | x_n - x | < \varepsilon$.
2. $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) est une valeur d'adhérence de* (x_n) *si, et seulement si,*

$$(\forall A > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geqslant N) : x_n > A \ \ (resp.\ x_n < -A)\,.$$

Preuve.

1. D'après la proposition 2.10.3, on a:

$$x \ valeur \ d'adh\acute{e}rence \ de \ (x_n) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0) \ \ A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\} \ est \ infini.$$

$\Longrightarrow$] Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, alors:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \ / \ \ | x_n - x | < \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x \ valeur \ d'adh\acute{e}rence \ de \ (x_n) &\Longrightarrow A_\varepsilon \ est \ infini \\ &\Longrightarrow (\exists n \geqslant N) \ \ | x_n - x | < \varepsilon \ d'apr\grave{e}s \ le \ lemme \ pr\acute{e}c\acute{e}dent. \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$] Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N : | x_n - x | < \varepsilon$ c-à-d:

$$(\exists n \geqslant N) : x_n \in A_\varepsilon,$$

d'où, d'après le lemme précédent, A_ε est infinie, donc x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

2. Pour $+\infty$ $(resp.\ -\infty)$ (traiter à titre d'exercice). □

Théorème $(de\ Bolzano - Weierstrass)$ **2.9.1** *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente c-à-d: Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.*

Preuve. Soient (x_n) une suite bornée de nombres réels et a et b deux nombre réels tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ a \leqslant x_n \leqslant b.$$

On a :

- $I_0 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in [a, b]\}$ est infini $(= \mathbb{N})$.
- Soit $c = \frac{a+b}{2}$ (c'est le milieu du segment $[a, b]$). On considère les deux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. Des deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in [a, c]\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in [c, b]\}$, un au moins est infini .

On désigne par I_1 celui des deux intervalles $[a, c]$ ou $[c, b]$ qui contient une infinité de termes de la suite (x_n) par $\varphi(1)$ l'entier le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in I_1\}$, on a $x_{\varphi(1)} \in I_1$ (dans le cas où les deux intervalles ci-dessus contiennent une infinité de termes de la suite, on choisit arbitrairement un parmi eux) ; on note $y_1 = x_{\varphi(1)}$. La longueur de I_1 est $\frac{b-a}{2}$ et $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in I_1\}$ est infini .

- On recommence sur I_1, ce qui a été fait sur I_0, en considérant le milieu de I_1, on a deux intervalles dont l'un au moins contient une infinité de termes de la suite (x_n) (car

$\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in I_1\}$ est infini). On désigne par I_2 cet intervalle et par $\varphi(2)$ le plus petit élément de $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in I_2 \ et \ n > \varphi(1)\}$ ($\neq \emptyset$ déjà vu), on a: $\varphi(2) > \varphi(1)$ et $x_{\varphi(2)} \in I_2$. La longueur de I_2 est $\frac{b-a}{2^2}$ et $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in I_2\}$ est infini ; on note $y_2 = x_{\varphi(2)}$.
• On définit, par récurrence, une suite d'intervalles $(I_n)_{n \geqslant 0}$ et une suite $(y_n)_{n \geqslant 0} = \left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ telles que: $*$ $I_0 = [a, b]$, $y_0 = x_0$,
$*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on définit $y_{n+1} = x_{\varphi(n+1)}$ par:
$*$ $I_{n+1} \subset I_n$ avec I_{n+1} la moitié de I_n qui contient une infinité de termes de la suite (x_n) et $\varphi(n+1)$ le plus petit élément de $\{k \in \mathbb{N} \ / \ x_k \in I_{n+1} \ et \ k > \varphi(n)\}$, donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et on note $y_{n+1} = x_{\varphi(n+1)}$.
On a donc

$$\begin{cases} \bullet \ (y_n) = \left(x_{\varphi(n)}\right) \ \textit{est une suite extraite de} \ (x_n) \ (\varphi \ \textit{est strictement croissante}), \\ \bullet \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ y_n \in I_n \ \textit{et la longueur de} \ I_n \ \textit{est} \ \frac{b-a}{2^n}. \end{cases}$$

(y_n) est de Cauchy: Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{2^N} < \varepsilon$; donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant N \Longrightarrow y_n \in I_n \ (\subset I_N)$, d'où

$$\left(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2\right) \ n \geqslant N \ et \ m \geqslant N \Longrightarrow \mid y_n - y_m \mid < \frac{b-a}{2^N} < \varepsilon.$$

Donc (y_n) est de Cauchy, elle est donc convergente. D'où le résultat. □

2.10 Suites arithmétiques, suites géométriques et suites arithmético-géométriques

2.10.1 Suites arithmétiques

Définition 2.10.1 *Une suite (x_n) est dite arithmétique si, et seulement si, il existe $r \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + r$; r est appelé la **raison** de la suite (x_n).*

Proposition 2.10.1 *Soit (x_n) une suite arithmétique de raison r, alors:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n = x_0 + nr$ *et plus généralement* $(\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2)$ $x_n = x_p + (n-p) r$.
2. i . *Si* $r = 0$ *alors* (x_n) *est constante et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$.
   ii . *Si* $r > 0$ *alors* (x_n) *est strictement croissante et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
   iii . *Si* $r < 0$ *alors* (x_n) *est strictement décroissante et* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$.

Remarque 2.10.1 *Une suite (x_n) est arithmétique si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n = an + b$, a est la raison de la suite (x_n).*

2.10.2 Suites géométriques

Définition 2.10.2 *Une suite (x_n) est dite géométrique si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = qx_n$; q est appelé la **raison** de (x_n).*

Proposition 2.10.2 1. *Soit $q \in \mathbb{R}$, alors:* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & si \ \mid q \mid < 1 \\ 1 & si \ q = 1 \\ +\infty & si \ q > 1 \\ n'existe \ pas & si \ q \leqslant -1 \end{cases}$

2. *Soit (x_n) une suite géométrique de raison q, alors:*
   i . $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n = x_0 q^n$ *et plus généralement* $(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)$ $x_n = x_p q^{n-p}$ *si* $q \neq 0$.
   ii . *Si* $x_0 \neq 0$, *alors* (x_n) *converge si et seulement si* $\mid q \mid < 1$ *ou* $q = 1$.

Preuve. Voir le cours de 1^{ere} et 2^{eme} sciences.(Faites la à titre d'exercice). □

Remarque 2.10.2 *Une suite (x_n) est géométrique si, et seulement si, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_n = ba^n$, a est la raison de la suite (x_n).*

Proposition (*Approximation d'un nombre réel par des décimaux*) **2.10.1** *Tout nombre réel x est limite d'une suite unique (x_n) strictement croissante de nombres décimaux. En particulier, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_n \leqslant x < x_n + 10^{-n},$$

x_n est alors une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$, selon la proposition 1.3.5 du chapitre précédent

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists! x_n \in \mathbb{D}) : x_n \leqslant x < x_n + 10^{-n}\ \left(x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \right).$$

Et alors, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leqslant x - x_n < 10^{-n}$. Et comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 10^{-n} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$, alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$. □

Remarque 2.10.3 *Tout nombre réel est limite d'une suite à termes rationnels car $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, et aussi limite d'une suite à termes irrationnels (prendre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n + 10^{-n}\sqrt{2}$ où (x_n) est la suite de la proposition précédente).*

Proposition 2.10.3 *Soit (x_n) une suite numérique. Pour chaque n de $\mathbb{N}$, soit $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$, (S_n) est appelée suite des sommes partielles de (x_n), alors:*

1. *Si (x_n) une suite géométrique de raison q,*
   i. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = x_0(1 + q + ... + q^n) = \begin{cases} x_0(n+1) & si\ q = 1 \\ x_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \end{cases}$
   ii. *Si* $\mid q \mid < 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{x_0}{1-q}$.
   iii. *Si* $\mid q \mid \geqslant 1$ *et* $x_0 \neq 0$, *alors* (S_n) *diverge.*
2. *Si (x_n) une suite arithmétique de raison r,*
   i. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = (n+1)\ \dfrac{x_0 + x_n}{2} = \dfrac{n+1}{2}(2x_0 + nr)$.
   ii. *Si* $r = 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = x_0$.
   iii. *Si* $r > 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, *indépendamment de la valeur de* x_0.
   iv. *Si* $r < 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$, *indépendamment de la valeur de* x_0.

Preuve.

1. Il suffit d'appliquer la proposition précédente et la formule:

$$1 - q^{n+1} = (1-q)(1 + q + ... + q^n).$$

2. Voir le cours de 1^{ere} et 2^{eme} sciences.(Faites le à titre d'exercice). □

2.10.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.10.3 *On dit que qu'une suite numérique (x_n) est une suite* ***arithmético-géométrique*** *si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = ax_n + b$.*

Remarque 2.10.4 *i. Si $a = 1$, (x_n) est une suite arithmétique de raison b.*

ii. Si $b = 0$, (x_n) est une suite géométrique de raison a.

Donc les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des suites arithmético-géométriques.

Proposition 2.10.4 *Soit (x_n) une suite arithmético-géométrique telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = ax_n + b$ avec $a \neq 1$. Et soit $y_n = x_n - r$ où $r = \frac{b}{1-a}$, alors:*

1. *La suite (y_n) est géométrique de raison a.*
2. *$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = a^n (x_0 - r) + r$.*
3. *Si $\mid a \mid < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{b}{1-a}$.*
4. *$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;\; x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} = (x_0 - r) \frac{1-a^n}{1-a} + nr$.*

Preuve.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors:
$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - r &= ax_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= ax_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(x_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= a\left(x_n - r\right) = ay_n, \end{aligned}$$
d'où $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; y_{n+1} = ay_n$, donc (y_n) est géométrique de raison a.
2. Puisque (y_n) est géométrique de raison a, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $y_n = a^n y_0$ et $x_n - r = a^n (x_0 - r)$, d'où $x_n = a^n (x_0 - r) + r$.
3. Si $\mid a \mid < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = r = \dfrac{b}{1-a}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors:
$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} &= (y_0 + r) + (y_1 + r) + ... + (y_{n-1} + r) \\ &= (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) + nr = y_0 \frac{1-a^n}{1-a} + nr \\ &= (x_0 - r) \frac{1-a^n}{1-a} + nr. \end{aligned}$$

□

2.11 Suites récurrentes

2.11.1 Définition et propriétés

Définition 2.11.1 *Soient $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I \subset D_f$ et $a \in I$. La suite définie par:*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

est appelée une ***suite récurrente*** *associée à la fonction f.*

Exemple 2.11.1 *1. Les suites aritmético-géométriques (en particulier les suites arithmétiques et géométriques), définies précédemment, sont récurrentes associées à la fonction* $x \mapsto ax + b$.

2. *La suite définie par* $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$, *où* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *avec* $ad - bc \neq 0$, *est une suite récurrente associée à la fonction homographique* $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.

3. *Les suites définies dans les exemples* 2.3.1. (6, 7 *et* 8) *sont récurrentes.*

Proposition 2.11.1 *Soit* (x_n) *une suite récurrente définie par:* $x_0 = a$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = f(x_n)$ *avec* $a \in I$ *et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *tel que* $f(I) \subset I \subset D_f$, *alors:*
Si f *est continue en un réel* l *et* (x_n) *converge vers* l, *alors* l *est un point fixe de* f *sur* D_f, *c-à-d:* $f(l) = l$.

Preuve. Comme $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \in I$ (par récurrence). On considère la suite $(y_n)_n = (x_{n+1})_n$. On a:
• $(y_n)_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$, donc $y_n \longrightarrow l$. Et $f(I) \subset I$ entrainent que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ y_n \in I$, et
• la continuité de f en l entraine que $(y_n)_n = (f(x_n))_n$ converge vers $f(l)$ (ce résultat sera démontré ultérieurement dans le chapitre 3: Fonctions numériques (Continuité)).
• L'unicité de la limite d'une suite entraine que $f(l) = l$. □

Remarque 2.11.1 *1. Si l'équation* $f(x) = x$ *n'a pas de solution sur* I *et* f *est continue sur* I, *alors* (x_n) *diverge.*

2. *Il se peut que l'équation* $f(x) = x$ *admet des solutions sur* I *et que* (x_n) *diverge.*

3. *Si* (x_n) *converge vers* l *et* f *est continue en* l *alors la suite* $(f(x_n))_n$ *converge vers* $f(l)$.

Théorème 2.11.1 *Soient* f *une fonction numérique,* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *tel que* $f(I) \subset I$, $a \in I$ *et* (x_n) *une suite récurrente définie par:* $x_0 = a$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} = f(x_n)$, *alors:*

1. *Si* f *est croissante sur* I, *alors* (x_n) *est monotone:*
   (i). *Si* $x_0 \leqslant x_1$, *alors* (x_n) *est croissante.*
   (ii). *Si* $x_0 \geqslant x_1$, *alors* (x_n) *est décroissante.*

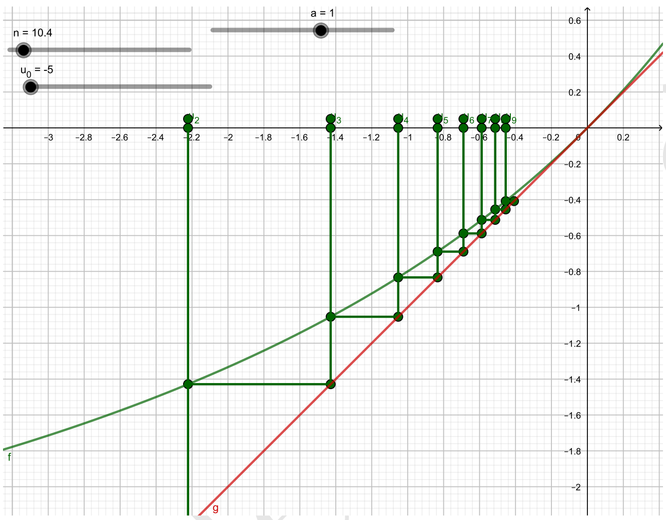
2. *Si* f *est décroissante sur* I, *alors les suites extraites* (x_{2n}) *et* (x_{2n+1}) *sont monotones et de monotonies différentes (c-à-d: l'une est croissante, l'autre est décroissante). Et si l'une converge vers* l *en lequel* f *est continue, l'autre est convergente vers* $f(l)$.

Preuve.

1.(i). Supposons que $x_0 \leqslant x_1$, montrons par récurrence que (x_n) est croissante . Pour $n = 0$, l'inégalité $x_0 \leqslant x_1$ est vraie par hypothèse.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \leqslant x_{n+1}$ alors $f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$ car f est croissante sur I et $(\forall m \in \mathbb{N})$, $x_m \in I$, d'où $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$ donc la propriété est vraie pour $n + 1$.
Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ x_n \leqslant x_{n+1}$ c-à-d que (x_n) est croissante .

(ii). Si $x_0 \geqslant x_1$, on montre de la même façon que (x_n) est décroissante.

2. Soit $g = f \circ f$, alors g est croissante sur I (composée de deux fonctions de même monotonie sur I $f(I) \subset I$).
   Posons $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = x_{2n}$ *et* $v_n = x_{2n+1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = g(u_n)$, de même $v_{n+1} = g(v_n)$; donc d'après 1, (u_n) et (v_n) sont monotones, et on a
   1^{er} **cas:** Si $x_0 \leqslant x_2$, alors $f(x_0) \geqslant f(x_2)$ c-à-d: $x_1 \geqslant x_3$. On a donc $u_0 \leqslant u_1$, $v_0 \geqslant v_1$ et g croissante sur I, d'où d'après 1, la suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
   2^{eme} **cas:** Si $x_0 \geqslant x_2$, alors $f(x_0) \leqslant f(x_2)$ c-à-d: $x_1 \leqslant x_3$. On a donc $u_0 \geqslant u_1$, $v_0 \leqslant v_1$ et g croissante sur I, d'où d'après 1 la suite (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
   Le dernier point du théorème est assuré par le point 3 de la remarque *remarque* 2.12. 1.
   □



2.11.2 Exemples

Exemple 1: Étudier la suite (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Réponse: Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x) = \sqrt{2+x}$, alors (u_n) est une suite récurrente associée à f qui est strictement croissante sur $D_f = [-2, +\infty[= I$ (Voir le cours de 1^{ere} science) et

$$f(I) = \left[f(-2), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[= [0, +\infty[\ (\subset I).$$

Par ailleurs, $u_0 \in I$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \in I$. De plus $u_0 = 1$ *et* $u_1 = f(u_0) = \sqrt{3}$ d'où $u_0 < u_1$ donc (u_n) est croissante.

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leqslant 2$.
Par récurrence: pour $n = 0$ on a $u_0 \leqslant 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant 2$, alors $f(u_n) \leqslant f(2)$ d'où $u_{n+1} \leqslant 2$ $(f(2) = 2)$.
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leqslant 2$.

La suite (u_n) est majorée par 2 et est croissante, elle est donc convergente, et sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$ dans D_f. Or pour tout $x \in D_f$ on a:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{2+x} = x \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + x = x^2 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \ ou \ x = 2 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exemple 2: Étudier la suite récurrente (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}. \end{cases}$$

Réponse: Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, alors (u_n) est une suite récurrente associée à f qui est strictement croissante sur $D_f = [-1, +\infty[= I$, (Voir le cours de 1^{ere} science) et

$$f(I) = \left[f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= [0, +\infty[\, (\subset I).$$

Par ailleurs, $u_0 = 3 \ et \ u_1 = f(u_0) = \sqrt{2}$, d'où $u_1 < u_0$, donc (u_n) est décroissante.

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_n > 1$. Par récurrence, pour $n = 0$ on a $u_0 > 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 1$, alors $f(u_n) > f(1)$ car f est strictement croissante sur I et $(1, u_n) \in I^2$, d'où $u_{n+1} > 1$ $(f(1) = 1)$.
Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_n > 1$.
La suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante, elle est donc convergente , et sa limite l est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I. Or pour tout $x \in I$ on a:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x = 1 \ ou \ x = -\frac{1}{2}\right) \ et \ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

Exemple 3: Étudier la suite récurrente (u_n) définie par:

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right). \end{cases}$$

Où a et A sont deux réels strictement positifs.

Réponse: (u_n) est une suite récurrente associée à la fonction numérique f de la variable réelle x définie par: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a: $f(x) - x = \frac{A-x^2}{2x}$ $(*)$, et alors, si (u_n) converge sa limite est l'un des points fixes de f qui sont $-\sqrt{A}$ et $\sqrt{A}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a:

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - A}{x^2}\right), \end{aligned}$$

Tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$:

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{A}$	$\nearrow$	$+\infty$

D'où $(\forall x \in]0, +\infty[)$ $f(x) \geqslant \sqrt{A}$, d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n \geqslant \sqrt{A}$; et selon $(*)$ le signe de $x \mapsto g(x) = f(x) - x$ sur $]0, +\infty[$ est donné dans le tableau suivant:

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n \geqslant u_{n+1}$; c-à-d $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante ; et puisqu'elle est minorée par $\sqrt{A}$, elle est alors convergente vers $\sqrt{A}$.

Remarque 2.11.2 *Si $(a, A) \in \mathbb{Q}^{+2}$, alors la suite précédente est à termes dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{A}$ qui n'est pas en général un élément de $\mathbb{Q}$; c'est le cas où A est un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.*

Exercice (*Examen de rattrapage SMP − SMC* 2008 − 2009) **2.11.1** *On considère la suite réelle (u_n) définie par:*

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n}{2}}. \end{cases}$$

1. *On suppose que $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$*
   a . *Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant 1$.*
   b . *Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.*
2. *On suppose que $u_0 > 1$.*
   Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Chapitre 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

3.1 Introduction

3.1.1 Les fonctions numériques dans le programme scolaire Marocain

A l'encontre des deux concepts: nombres réels et suites numérique, le concept de fonctions numérique est introduit un peu tard aux programmes de l'école Marocaine ; ainsi:

- **Collège:**3^{eme} **année:** Introduction des deux classes de fonctions linéaires $x \longmapsto ax$ et affines $x \longmapsto ax + b$ où a et b sont deux nombres réels non nuls. Le tracé de leurs courbes fait appel aux droites définies par leurs équations cartésiennes dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
- **Lycée: Tronc commun:** On introduit le concept de fonction numérique d'une variable réelle . Le domaine de définition, la bornitude, la monotonie, la parité et la courbe représentative d'une fonction numérique sont introduits et illustrés par les exemples $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, $g : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ et les deux fonctions cos et sin. Une étude complète de ces quatre fonctions est faite et leurs courbes sont tracées, en utilisant des techniques géométriques à savoir la symétrie centrale, axiale et le concept de translation, sans les notions de limite, continuité et dérivabilité ; ainsi la notion de parabole et hyperbole sont introduites pour désigner la courbe de f et g.
- **Lycée: Première année du baccalauréat scientifique :** Une étude analytique , très poussée, des fonctions numérique est introduite. Le programme de mathématique de cette année comporte les quatre chapitres réservées aux fonctions numériques d'une variable réelle:
  1. **Généralités sur les fonctions numériques(semestre 1):** On présente, d'une façon mathématique, les notions fondamentales telles que: le domaine de définition, bornitude, extrémums absolus et relatifs, périodicité, monotonie et taux des variations, le tracé des courbes des fonctions : $f : x \longmapsto ax^3$, $g : x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto E(x)$ se fait sans les notions de limite, continuité et dérivabilité.
  2. **Limite des fonctions numériques (semestre 1 et 2):** On présente, d'une façon mathématique, dans la filière **Science mathématique**, cette notion ; ainsi la fameuse définition de limite finie d'une fonction en un nombre réel, est introduite

et illustrée par des exemples:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0) : (\forall x \in D_f) \ \ | x - x_0 | < \alpha \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon.$$

Les quinze définitions mathématiques des limites sont introduites et illustrées par des exemples.
Les opérations sur les limites, limites et ordre, limites des fonctions de références: **Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan** sont aussi introduites, en particulier le théorème de calcul des limites en l'infini d'une fonction polynomiale ou fraction rationnelle est donné sous cette forme: Si P et Q sont deux fonctions polynomiales non nulles et $n = d°P$ et $m = d°Q$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{\pm\infty} a_n x^n \\ \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} \end{cases}$

3. **Dérivabilité des fonctions numériques (semestre 2):** On présente, d'une façon mathématique, dans la filière **Science mathématique**, cette notion ; en recommandant dans les instructions officielles, au professeurs, de l'utilisation de l'approximation des fonctions dérivables en un point par des fonctions affines, pour introduire ce concept.
Les opérations sur la dérivabilité, dérivabilité des fonctions de références: **Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan** sont aussi introduites.

Les trois applications de la notion de dérivée sont utilisées: **Variation d'une fonction sur un intervalle, Extrémum d'une fonction et l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$.**
4. **Étude des fonctions numériques (semestre 2):** L'accent est mis, dans ce chapitre, sur la représentation graphique de la courbe représentative d'une fonction numérique. Ainsi on introduit la notion de convexité et concavité et les points d'inflexions d'une telle courbe, le centre de symétrie et l'axe de symétrie, et les branches infinies sont introduites sous forme d'un savoir scientifique et ceci dans toutes les filières scientifiques.

- **Lycée: Deuxième année du baccalauréat scientifique:** Dans le programme de toutes les filières scientifique, une grande importance est donnée aux fonctions numériques d'une variable réelle. Ainsi dans le premier chapitre on introduit les quatre types de la notion de continuité (en un point, à gauche en un point, à droite en un point et sur un intervalle), la définition mathématique de ces types de continuité est introduite, uniquement, à la filière sciences mathématique.

Les opérations sur la continuité, notamment la continuité de la composée de deux fonctions, continuité des fonctions de références: **Les fonctions polynômiales, fractions rationnelles, cos, sin et tan** sont aussi introduites (sans preuve): le théorème des valeurs intermédiaires ($T.V.I$), l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, en particulier, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, les images des différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ par une fonction continue sont calculées à l'aide de la monotonie de cette fonction sur cet intervalle. On introduit aussi le fameux théorème de la bijection monotone à savoir:
Toute application f continue est strictement monotone sur un intervalle I est bijective de cette intervalle vers l'intervalle $f(I)$.
Ce théorème sert à introduire les fonctions **racines nièmes** et les fonctions exponentielles comme bijections réciproques respectives des fonctions $x \longmapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$ et des fonctions logarithmes sur $\mathbb{R}$. Quant à la fonction **arc-tangente** qui ne figure que dans le programme de sciences mathématique, elle est présentée comme bijection réciproque de la fonction **tangente** sur $\mathbb{R}$. Sont aussi données les propriétés algébriques et analytiques

de ces trois fonctions.

Dans les deux chapitres: **Dérivabilité** et **Étude des fonctions numériques** , on rappelle les principaux résultats et concepts déjà étudiés au première année, puis on introduit le fameux théorème de la dérivée de la composée: **Si f et g sont deux fonctions numériques de la variable réelle dérivable en x_0 et $f(x_0)$ respectivement, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0)).f^{'}(x_0)$,** une démonstration rigoureuse est aussi présentée (pour la filière science mathématique).
On introduit aussi un théorème sur la dérivabilité de la bijection réciproque qu'on applique pour étudier et présenter la dérivée des nouvelles fonctions introduites dans ce niveau à savoir la fonction racine n^{ieme} , puissance rationnelle, la fonction arc-tangente et la fonction exponentielle.
Les théorèmes de **Rolle** , des **accroissements finis** et des deux **inégalités des accroissements finis** sont introduits et démontrés dans la filière science mathématique ; et sont utilisés pour démontrer des résultats admis en 1^{ere} année, en particulier la caractérisation des variations d'une fonction sur un intervalle à partir du signe de sa dérivée.

Une étude simple des primitives est donnée, en mettant l'accent sur la classe des fonctions continues, ainsi on présente, sans démonstration les deux théorèmes suivants:

- **Toute fonction continue sur un intervalle admet une fonction primitive sur cet intervalle .**
- **Toute fonction continue sur un intervalle I admet, pour chaque (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$, une unique primitive F sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.**

La fonction logarithme népérien est introduite comme la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Aussi sont présentées et étudiées ses propriétés algébriques et analytiques.
Les courbes des quatre nouvelles fonctions: $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ **, arctan, ln et exp** sont tracées, ainsi que leurs composées avec d'autres fonctions sont étudiées.

3.1.2 Aperçu historique sur les fonctions numériques

1. **Notion de fonction:** En mathématiques, une fonction permet de définir un résultat (le plus souvent numérique) pour chaque valeur d'un ensemble appelé domaine. Ce résultat peut être obtenu par une suite de calculs arithmétiques ou par une liste de valeurs, notamment dans le cas de relevé de mesures physiques, ou encore par d'autres procédés comme la résolution d'équations ou le passage à la limite.
En théorie des ensembles, une fonction ou application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément du premier est en relation avec un unique élément du second. Parfois, on distingue la notion de fonction en affaiblissant la condition comme suit : chaque élément du premier ensemble est en relation avec au plus un élément du second.
Comme pour les deux concepts des chapitres précédents, le concept de fonction trouve sa genèse dans l'antiquité. Ainsi,
Chez Les Babyloniens : Dans les tablettes Babyloniennes, dont les plus anciennes datent de la première dynastie (vers 1800 $av.J.C$), on trouve des tables sexagésimales de réciproques, de carrés, de cubes, de racines cubiques... La multiplication est effectuée par exemple en se référant à des tables de multiplication, établies certainement par additions successives. L'utilisation de tables de réciproques permet alors de remplacer les divisions par des multiplications.

   Les babyloniens, réputés pour leurs remarquables aptitudes en astronomie, utilisaient ces tables pour calculer les éphémérides du soleil, de la lune. (voir A. Dahan et J. Peiffer page 12, p 208) dans [Une histoire des mathématiques 1986],.
Chez Les grecs :

   En acoustique, les mathématiciens de la fraternité pythagoricienne au $6^{ème}$ siècle $av.\ J.\ C$, recherchèrent des relations entre la hauteur des sons émis par des cordes pincées et la longueur de ces cordes.

   En astronomie, les mathématiciens grecs d'Alexandrie dressent des tables donnant la longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ces sont les fameuses premières tables de sinus que l'on peut observer dans l'Almageste de Ptolémée Claude (2ème siècle). Ces tables sont visibles sur le site gallica de la BNF. Almageste table des cordes Source : gallica.bnf.fr
Cependant, comme le font fort justement remarquer A. Dahan et J. Peiffer, il serait trop simpliste de voir en ces tables de Ptolémée, les premières fonctions. Elles n'en sont que le germe et ne sont considérées que comme des tableaux de valeurs numériques utiles pour les calculs. On ne considère jamais l'entité qui permet de passer d'une colonne de nombres à l'autre.
Ainsi, même si l'on considère une fonction comme une relation entre des valeurs comme dans la définition moderne, les tables de Ptolémée ne sont que des relations entre éléments discrets constants d'ensembles finis.
Il n'est absolument pas question de quantités variables ni de lois de variations.
La notion de fonction (Les Écoles d'oxford et de Paris, $14^{ème}$ siècle):

   La cinématique, c'est à dire l'étude des mouvements de solides, est le grand sujet d'étude des écoles de philosophie naturelle d'oxford et de Paris au $14^{ème}$ siècle.

   Les mathématiciens de ces écoles dont le français Oresme Nicolas (1325 - 1382) et les anglais Bacon Roger (1214 - 1294) ou Bradwardine Thomas (1290 - 1349) proposent de modéliser les phénomènes physiques et mettent en évidences des relations entre vitesse, force, temps et résistance, tout cela, de façon géométrique bien sûr.

Ils quantifient des phénomènes comme la vitesse, la chaleur, la densité et leurs prêtant des qualités pouvant varier de façon continue. Des fonctions du temps apparaissent et Oresme écrira :

"Chaque chose mesurable, à l'exception des nombres, est imaginée comme une quantité continue."

Étude des trajectoires, $17^{ème}$ **siècle:**

Avec le français Viète François (1540-1603) qui introduit de façon systématique le calcul littéral (voir histoire du symbolisme algébrique), vient le temps des formules.

La notion de fonction, qui était alors uniquement associée à une courbe, va maintenant être lié à une formule comme le met en évidence la célèbre formule de Galilée en 1623 qui propose ses lois sur la chute des corps :

"Le grand livre de l'univers est écrit en langage mathématique".

Au début du $17^{ème}$ siècle, le physicien et mathématicien allemand Johannes Kepler (1571 – 1630), énonce ses lois sur les trajectoires elliptiques des planètes. Toutes les fonctions introduites à cette période sont considérées comme des trajectoires de points en mouvement.

$1^{ère}$ **définition de fonction (Courbes géométriques et transcendantes):**

Le mathématiciens français Descartes René du Perron (1596-1650) propose d'établir une classification des courbes :

Les courbes géométriques : Les coordonnées x et y sont reliées par une équation polynômiale.
Les courbes mécaniques ou transcendantes : comme le logarithme, Descartes les rejette. Pour lui, selon le philosophe Jules Vuillemin (1920-2001), une fonction est donc :

"Est fonctionnelle pour Descartes, une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée, une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques".

L'essentiel ici est de noter que désormais une fonction est associée et même définie par une équation. Bien sûr le problème des courbes transcendantes subsiste, mais, plus pour longtemps !

$2^{ème}$ **définition de fonction (Gregory James, 1667):**

Les mathématiciens qui succèdent à Descartes découvrent alors le développement des fonctions en séries infinies de puissances.

Le mathématicien allemand Mercator Nicolaus (1620 -1687) est le premier avec Newton, à proposer une technique fine permettant de développer des fonctions en séries. En 1668, dans Logarithmotecnia, il trouve l'aire de l'hyperbole en développant en série géométrique $\frac{1}{1+x}$ puis, en intégrant terme à terme comme l'anglais Wallis John (1616-1703), il obtient le développement de la série qui porte son nom mais qui fut obtenue par **Sir Isaac Newton (1643 – 1727)** en 1665. ([Dieudonné] p .123).

C'est le mathématicien écossais James Gregory (1638 – 1675) qui propose la meilleure définition de la notion de fonction au $17^{ème}$ siècle.

Une fonction est définie comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable, (Dans Vera circuli et hyperbolae quadratura, 1667).
Il précise qu'aux cinq opérations de l'algèbre (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine), il faut en ajouter une sixième définie comme un passage à la limite.

Le terme fonction chez Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716):
Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand Leibniz Gottfried Wilhelm en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".
"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe ; comme sont les abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente ...et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer", (Leibniz Gottfried Wilhelm (1646-1716), in La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions, 1673.)

Cette définition se retrouve dans des articles de 1692 et 1694 et est reprise par le mathématicien suisse Bernoulli Jean (1667-1748) qui propose en 1718 la définition suivante :
"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constante".
Il propose aussi la notation :ϕx.

Le logarithme est la première fonction transcendante c'est à dire qu'elle ne peut pas être obtenue par opérations algébriques.
Elle fut découverte par l'allemand Stifel Michael (1487-1567), puis développée par l'écossais Nappier ou Neper John (1550-1617) qui publie un manuscrit sur le sujet en 1614 puis 1617.
La classification des fonctions par Euler Leonhard (1707 - 1783): Le mathématicien suisse Euler Leonhard propose une $3^{è}me$ définition pour la notion de fonction.
"Une fonction est une expression analytique composé d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes", Dans Introductio in analysin infinitorum, Marcum-Michaelem Bousquet and socios, 1748.

Le mot analytique n'est pas précisé et pour Euler, une fonction est obtenue par une combinaison d'opérations et de modes de calculs connus de son époque et applicables aux nombres. Euler fournit alors une classification des fonctions qu'il classe ainsi :
• Fonctions Algébriques: Obtenues par opérations algébriques (au sens large).
• Rationnelles : (4 opérations).
• Irrationnelles (4 opérations + extraction des racines).
• Fonctions transcendantes : trigonométriques, ln, exp, intégrales, puissances irrationnelles. Obtenues par des opérations répétées à l'infini.

Cette classification ne permet pas de classifier les fonctions transcendantes avec rigueur. Il considère simplement qu'elles sont obtenues par une répétition infinie d'opérations. L'étude du développement des fonctions en séries infinies va mettre en défaut cette classification. Comme le souligne Dieudonné Jean (1906 - 1992) dans [Dieudonné], p .257, les mathématiciens de l'époque (comme Gauss) pensent que toute fonction est développable en série entière (sauf en des points isolés).

Puis, le mathématicien Cauchy Augustin-Louis (1789-1857) donne dans son Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal (source : gallica.bnf.fr) son fameux contre-exemple, pour montrer que si la série de Taylor d'une fonction f converge au point x, elle n'est pas nécessairement égale à $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 \ \ si & x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction a toutes ses dérivées nulles en zéro et la série de Taylor, qui fait intervenir des zéros est identiquement nulle alors que f ne l'est pas.

Les définitions précédentes de la notion de fonction ne sont pas assez générales, un changement de vue s'impose alors.

La notion la plus générale d'une fonction:

Le mathématicien allemand Dirichlet Gustav Peter Lejeune (1805-1859), donne l'exemple, d'une nature nouvelle, d'une fonction discontinue en tous ses points. Cette fonction est nommée fonction caractéristique des irrationnels. Elle prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon.

Ainsi, après Fourier, Cauchy, Dirichlet, Riemann, on peut dire que la notion générale d'une fonction (univoque) conçue comme une correspondance arbitraire entre deux nombres est née. A. Dahan et J. Peiffer, p229,230.

2. **La notion de limite**

La limite est une notion qui, dès les origines, fut implicitement au centre de l'analyse, mais elle ne fut formalisée que très tard, comme celles de nombre réel et de continuité. Remarquons une fois encore qu'il en va de même dans notre enseignement : la formalisation vient bien après la manipulation des concepts.

Son histoire commence de façon éclatante, avec Zénon d'Élée (né vers 490 avant J. C.). Les paradoxes de ce philosophe révèlent une méditation profonde sur la notion de continu, et contiennent en germe le concept de limite. Chacun d'eux, considérant un ou plusieurs objets mobiles (Achille et la tortue dans le second des paradoxes), démontre l'impossibilité du mouvement.

Le concept clé, sous jacent dans ces raisonnements, est celui d'indivisible, c'est-à-dire de particule infiniment petite d'espace ou de temps, provenant semble-t-il de la célèbre théorie atomistique de Démocrite (vers 475 à 380 avant J. C.). L'indivisible est un concept historiquement très important, même s'il est logiquement paradoxal, et s'il se trouva totalement discrédité lors de la formalisation des mathématiques. Les énoncés paradoxaux de Zénon provoquèrent, plus qu'un approfondissement des concepts, une réaction de rejet envers l'infini actuel et les indivisibles exprimée avec clarté par Aristote (384 à 322 avant J. C.) dans sa Physique. Il écrit : « Nul continu n'est sans partie ». Archimède (287 à 212 avant J. C.), le grand ancêtre des Analystes allie la prudence d'Aristote à la témérité de Démocrite. Prenons

l'exemple de la quadrature de la parabole, la détermination de l'aire A délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ses points (Voir « Mathématiques et mathématiciens », Dedron et Itard, édition Magnard, pages 93 à 97).
Archimède présente une première méthode où A est supposée aussi proche qu'on le souhaite de la somme d'aires de triangles en progression géométrique. Nous pouvons interpréter cette méthode en termes de limite, puisque, pour nous, cette somme indéfinie tend vers $\frac{4}{3}$. Mais cette conception « dynamique » manque chez Archimède. Il mène une démonstration suivant la méthode apagogique d'Eudoxe, en prouvant que les deux éventualités $A < \frac{4}{3}$ et$A > \frac{4}{3}$ sont toutes deux impossibles.
La seconde méthode d'Archimède figure dans sa « lettre à Eratosthène », et met en jeu les indivisibles. Il admet qu'elle manque de rigueur, mais il insiste sur le fait que, contrairement à la précédente, elle permet la découverte. Elle consiste, dans un raisonnement d'une grande virtuosité, à décomposer la surface en segments, puis à équilibrer ces segments un à un, de part et d'autre d'un point d'appui, avec les segments d'un triangle connu. Le « masse », et donc l'aire A peut alors être exprimée en fonction de l'aire du triangle, connue, et de deux longueurs, elles aussi connues.
Les mathématiciens médiévaux, puis ceux de la Renaissance et de l'âge classique, adaptèrent avec beaucoup plus de hardiesse le point de vue des indivisibles. Ceux-ci furent sans doutes favorables à l'invention, au défrichage d'un nouveau champ mathématique, mais les raisonnements perdaient en logique et en précision.
Nombreux cependant étaient les mathématiciens qui savaient traduire le langage des « infiniment petits » par des termes très proches de notre conception actuelle de la limite. Citons Blaise Pascal, qui après avoir souligné que « ces deux méthodes ne diffèrent entre elles qu'en la manière de parler », expose que « par la somme des ordonnées d'un cercle » (l'aire d'un demi disque), « on n'entend autre chose sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles fait de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre dont la somme ne diffère de l'espace d'un demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée ». Voici le concept de limite exposé avec clarté. Newton quant à lui rejette les indivisibles et essaie d'exprimer, avec une certaine confusion, une défense de la notion de limite : « ...ce que je dirai des sommes et des quotients doit toujours s'entendre non des particules détermines, mais des limites des sommes et des quotients de particules évanouissantes », et plus haut, à propos du nombre dérivé : « Il faut entendre par dernier quotient des quantités évanouissantes le quotient qu'ont entre elles ces quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies, mais au moment même où elles s'évanouissent ».
Pour que la rigueur triomphât, il fallut qu'elle devînt indispensable au progrès de la découverte, alors que les problèmes qui se posaient aux Analystes devenaient de plus en plus subtils et difficiles. Gauss, et surtout Cauchy, commencèrent à rechercher la précision, même si le dernier use encore d'un langage à l'ancienne : « Lorsque les valeurs numériques d'une même variable décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit [...] une variable de cette espèce a zéro pour limite ». Il faut attendre Karl Weierstrass pour voir écrire notre définition de la limite, en ε et η.

3. **La notion de continuité**
À l'âge « classique » de l'analyse, les $17^{ème}$ et $18^{ème}$ siècle, alors que les fonctions

étaient considérées sous leurs seuls aspect graphique (les « lignes »), ou algébrique (définies par une formule), la continuité ne pouvait qu'aller de soi, et donc passer quasiment inaperçue. Étrangement, elle était plus objet de réflexion dans les champs de la Physique ou de la Philosophie, où il apparaissait clairement que « la Nature ne fait pas de saut ». Des penseurs comme Leibniz ou Newton s'y intéressèrent. Mais ces considérations ne conduisaient pas à une formalisation mathématique.
Dans le domaine des mathématiques, c'est par le biais du « théorème des valeurs intermédiaires » que la continuité intervenait, sans être explicitée (« Éléments d'histoire des Mathématiques », de Bourbaki, chez Herman). Ce théorème intervient d'abord dans le contexte de l'approximation de la racine d'une équation, sous la plume du Hollandais Simon Stevin (en 1594): soit $P(x) = Q(x)$ cette équation, où P et Q sont des polynômes tels que $P(0) < Q(0)$. On substitue d'abord à x les nombres $10, 100, 1000$... jusqu'à ce qu'on ait: $P(x) > Q(x)$; ceci dorme le nombre de chiffres de la racine. Supposons que x ait deux chiffres ; on remplace x par $10, 20, 30$... pour obtenir le chiffre des dizaines ; puis on cherche le chiffre des unités, puis les autres chiffres décimaux « et procédant ainsi infiniment, l'on approche infiniment plus près au requis ». Le « théorème des valeurs intermédiaires », sous la forme de l'affirmation qu'un polynôme ne peut changer de signe sans s'annuler, est également admis comme évident par Lagrange et Gauss (en 1799) au cours de la démonstration du théorème de d'Alembert (tout polynôme à coefficients réels admet une racine, réelle ou complexe). C'est au profond penseur que fut Bernhard Bolzano que l'on doit le refus d'établir le théorème des valeurs intermédiaires sur la simple évidence géométrique (sur la courbe), ou cinématique (en considérant un mouvement), ainsi que sa première démonstration rigoureuse, à partir du critère « de Cauchy », en 1817.
Auparavant, Bolzano avait défini la continuité (uniforme) d'une fonction sur un intervalle, en termes presque modernes : « Si x est une valeur quelconque, la différence $f(x+w) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute valeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra ». Il avait aussi, supérieur en cela à Cauchy, introduit les notions de continuité en un point, de continuité à droite et à gauche, et il avait démontré la continuité des fonctions polynômes. Son contemporain Cauchy donnait une définition analogue de la continuité (uniforme sur un intervalle) ; « La fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x [...] si un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même ». On remarquera que le vocabulaire est encore de type infinitésimal. Quelques années plus tard, Weierstrass utilise à la fois notre vocabulaire actuel et le langage des infiniment petits pour définir la continuité (uniforme) : « S'il est possible de définir une borne ∂ telle que pour toute valeur de h, plus petite en valeur absolue que ∂, $f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, on dira qu'on fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction ». Pour conclure, nous constatons que la rigueur ne fut pas le souci principal des Analystes (sinon, paradoxalement, des tout premiers, les Grecs), et qu'il fallut une très longue démarche historique pour obtenir des axiomes et des définitions précis sur les nombres, les limites, les fonctions. La rigueur logique couronna l'édifice de l'analyse. Mais elle en constitue aussi la fondation.

Du point de vue historique, les concepts centraux de l'analyse sont ceux de limite

et de fonction. Si l'un de ces deux concepts est absent d'un travail mathématique, il ne s'agit pas à proprement parler d'analyse. Les Grecs de l'antiquité ont poussé très loin leur réflexion sur ce que nous appellerions « continu numérique, mais on ne peut dire qu'ils faisaient de l'analyse, car ils ne disposaient pas du concept général de fonction ; symétriquement, les études des applications linéaires ou affines, en collège, ou celles des fonctions de référence, au tronc commun Marocain, ne peuvent prétendre au titre d'analyse car le concept de limite en est absent ; l'analyse proprement dite est abordée en classe de Première dans différentes filières.
Nous nous intéressons dans ce chapitre à deux pôles de l'analyse qui sont fortement liés: la notion de limite et continuité. Si l'étude des nombres réels, qui a été faite dans le chapitre 1, et dans laquelle ces êtres mathématiques étaient comme "immobiles", nous les verrons s'animer, sous l'effet des fonctions.
La notion de continuité est intimement liée aux propriétés des nombres réels (Cantor appelait le cardinal de $\mathbb{R}$ la puissance du continu). L'idée de la continuité est simple et peut se décrire de diverses façons imagées : "une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans soulever le crayon du papier", "le graphe de la fonction n'a pas de saut" ou encore "si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ se rapproche de $f(x_0)$. En particulier on doit avoir la propriété suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. On remarquera que cette propriété est fausse pour des fonctions simples comme les fonctions " en escalier " : Tout comme la notion intuitive de limite, la notion de continuité est délicate à définir rigoureusement : la définition "epsilon-delta" donnée ci-dessous est due à Weierstrass et date donc du 19^e siècle. Dans ce chapitre, on introduira sous forme de savoir savant les concepts précédents: **Fonction numérique d'une variable réelle, les différents types de limites et continuité d'une fonction numérique, le théorème de la bijection monotone,... etc** . La plupart des résultats déjà cités et autres seront introduits et démontrés. En particulier on montrera que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle grâce au théorème de **Weierstrass** qui sera énoncé et démontré, ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires et son cas particulier le théorème de **Cauchy** : **Toute fonction continue sur un intervalle qui prend deux valeurs de signes opposés prend nécessairement la valeur zéro**. La caractérisation séquentielle de la continuité sera donnée et démontrée.
Le nouveau concept : **L'uniformément continuité** d'une fonction sur un intervalle, plus fort que la continuité, sera introduit et illustré par des exemples et renforcé par des propriétés, en particulier le théorème de **Heine.**
Le théorème de la bijection monotone sera énoncé et démontré, puis utilisé pour introduire **Huit** nouvelles fonctions: **acsin, arccos, ch, sh, th, argsh, argch et argth .** On présentera aussi quelques propriétés algébriques et analytiques de ces fonctions.
Le concept de la dérivabilité et les résultats qui s'y attachent sera étudié dans un chapitre à part (le dernier dans dans ce module d'analyse 1).

3.2 Notion de fonction

Définition 3.2.1 1. *On appelle fonction numérique f de la variable réelle, toute relation liant chaque nombre réel x à au plus un nombre réel noté $f(x)$, lorsqu'il existe, et appelé image de x par f. Et le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $\{x \in \mathbb{R} \ / x$ admet une image dans $\mathbb{R}\}$ s'appelle le domaine, ou l'ensemble, de définition de f. On note*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ou tout simplement $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pour désigner une fonction numérique f de la variable réelle x.

2. *Si E est une partie non vide de $\mathbb{R}$; on appelle application de E dans $\mathbb{R}$, toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est E, c-à-d: chaque élément de E admet une image et une seule par f dans $\mathbb{R}$.*

Définition 3.2.2 *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition D_f . On appelle* ***Courbe****, ou* ***Graphe*** *de f, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ noté $(\mathcal{C}_f)$ ou $(\mathcal{G}_f)$, défini par: $\{(x, f(x)) \ / \ x \in D_f\}$.*

Remarque 3.2.1 *Généralement, la courbe d'une fonction numérique f de la variable réelle x est représentée dans un plan rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, par l'ensemble des points $M(x, f(x))$ tels que $x \in D_f$.*

3.3 Limites des fonctions

Définition 3.3.1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que:*

1. *f est définie au voisinage de x_0, si E est un voisinage de x_0, c'est-à dire, il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset E$.*
2. *f est définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0, s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} \subset E$ $\ (\ ]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\} =]x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r[\ )$.*
3. *f est définie à droite de x_0 (resp. à gauche de x_0) s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0, x_0 + r[\subset E$ (resp. $]x_0 - r, x_0] \subset E$).*
4. *f est définie à droite de x_0 sauf peut être en x_0 (resp. à gauche de x_0 sauf peut être en x_0) s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0, x_0 + r[\subset E$ (resp. $]x_0 - r, x_0[\subset E$).*
5. *f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\subset E$ (resp. $]-\infty, M[\subset E$).*

Remarque 3.3.1 *f est définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 (resp. au voisinage de x_0) si, et seulement si, f est définie à droite de x_0 sauf peut être en x_0 et à gauche de x_0 sauf peut être en x_0 (resp. à droite de x_0 et à gauche de x_0).*

Définition 3.3.2 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique .*

1. *Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0; on dit que f admet l comme limite en x_0, ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0, et on écrit $l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$, $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ou $f(x) \overset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} l$ si, et seulement si,*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0) : (\forall x \in E) \ \ 0 < \mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$$

2. *Si* $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ *et* f *définie à droite de* x_0 *sauf peut être en* x_0 *(resp. à gauche de* x_0 *sauf peut être en* x_0*) ; on dit que* f *admet* l *comme limite à droite en* x_0 *(resp. à gauche en* x_0*) et on écrit* $l = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ *ou* $l = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *(resp.* $l = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ *ou* $l = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$*) si, et seulement si,*

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta > 0) : (\forall x \in E)\ 0 < x - x_0 < \eta\,(resp. 0 < x_0 - x < \eta) \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$$

3. *Si* $x_0 = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) et* $l \in \mathbb{R}$ *et* f *définie au voisinage de* $+\infty$ *(resp. au voisinage de* $-\infty$*) ; on dit que* f *admet* l *comme limite en* $+\infty$ *(resp. en* $-\infty$*) et on écrit* $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *(resp.* $l = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *) si, et seulement si,*

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists A > 0) : (\forall x \in E)\ \ x > A\,(resp. x < -A) \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$$

4. *Si* $x_0 = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) et* $l = +\infty$ *et* f *définie au voisinage de* x_0*; on dit que* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *(resp. quand* x *tend vers* $-\infty$*) et on écrit* $+\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *(resp.* $+\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$*) si, et seulement si,*

$$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0) : (\forall x \in E)\ \ x > B\,(resp. x < -B) \Rightarrow f(x) > A.$$

5. *Si* $x_0 = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) et* $l = -\infty$ *et* f *définie au voisinage de* x_0*; on dit que* f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *(resp. quand* x *tend vers* $-\infty$*) et on écrit* $-\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *(resp.* $-\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *) si, et seulement si,*

$$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0) : (\forall x \in E)\ \ x > B\,(resp. x < -B) \Rightarrow f(x) < -A.$$

6. *Si* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $l = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) et* f *définie au voisinage de* x_0 *sauf peut être en* x_0*; on dit que* f *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) quand* x *tend vers* x_0 *et on écrit* $+\infty = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$, $+\infty = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *ou* $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ *(resp.* $-\infty = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$, $-\infty = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$ *ou* $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$*) si, et seulement si,*

$$(\forall A > 0)\,(\exists\eta > 0) : (\forall x \in E)\ \ 0 < \mid x - x_0 \mid < \eta \Rightarrow f(x) > A\ \ (resp.\ f(x) < -A)\,.$$

Remarque 3.3.2 *Si* $l \in \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on a:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\ \ (\exists\eta > 0) : f\left(\left(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\}\right) \cap E\right) \subset\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\,,$$

car pour tout $x \in E$ *on a:*

$$\left(\ x \in\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\}\right) \Longleftrightarrow (0 < \mid x - x_0 \mid < \eta)\ \ et\ \ (f(x) \in\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[) \Longleftrightarrow (\mid f(x) - l \mid < \varepsilon)\,.$$

Exercice 3.3.1 *Écrire les analogues de la remarque précédente pour* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et les fonctions considérés sont définies sur un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0.

Proposition 3.3.1 *Si* f *tend vers une limite* l *quand* x *tend vers* x_0*, cette limite est unique.*

Preuve. • Cas où x_0 *et* l sont réels.
On suppose f tendant vars une autre limite l' avec $l' \neq l$.
Soit $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{3}$, il existe η_1 et η_2 tels que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{cases} 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_1 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon \\ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_2 \Longrightarrow \mid f(x) - l' \mid < \varepsilon \end{cases}$$

D'où pour $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_1 \ et \ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta_2 \\ &\Longrightarrow (\mid f(x) - l \mid < \varepsilon) \ \ et \left(\mid f(x) - l' \mid < \varepsilon\right) \\ &\Longrightarrow 0 <\mid l - l' \mid \leqslant \mid f(x) - l \mid + \mid f(x) - l' \mid \\ &\Longrightarrow 0 <\mid l - l' \mid < \varepsilon + \varepsilon < \frac{2}{3} \mid l - l' \mid \\ &\Longrightarrow 1 < \frac{2}{3} \ ; \ ce \ qui \ est \ absurde. \end{aligned}$$

□

Exercice 3.3.2 *Démontrer le résultat ci-dessus pour les autres cas de x_0 et l appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Proposition 3.3.2 *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie au voisinage d'un réel x_0 sauf peut être en x_0 et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Preuve. • Pour $l \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow$] Évidente, il suffit de revenir aux définitions.
$\Longleftarrow$] Supposons que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.
Soit $\varepsilon > 0$, $(\exists \eta_1 > 0)$ $(\exists \eta_2 > 0)$:

$$(\forall x \in E) \begin{cases} 0 < x - x_0 < \eta_1 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon \\ -\eta_2 < x - x_0 < 0 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $\eta = inf(\eta_1, \eta_2)$, pour tout $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned} 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta &\Longleftrightarrow -\eta < x - x_0 < \eta \ et \ x \neq x_0 \\ &\Longleftrightarrow 0 < x - x_0 < \eta \ ou \ \ -\eta < x - x_0 < 0 \\ &\Longrightarrow 0 < x - x_0 < \eta_2 \ ou \ \ -\eta_1 < x - x_0 < 0 \\ &\quad\ (car \ \eta \leqslant \eta_1 \ et \ \eta \leqslant \eta_2) \\ &\Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
• Pour les autres cas de $l \in \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice). □

Proposition(Caractérisation séquentielle de la limite) 1 *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de E, dont tous les termes sont différents de x_0 à partir d'un certain rang, qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.*

Preuve. • Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
$\Longrightarrow$] On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et soit (u_n) une suite de points de E , $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que , $(\forall n \in \{N_0, N_0+1, ...\})$ $u_n \neq x_0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$. Montrons que $(f(u_n))$ tend vers l.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 : (\forall x \in E)\ 0 <\mid x - x_0 \mid< \eta \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid< \varepsilon$.
Et comme $u_n \longrightarrow x_0$, alors pour ce η, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant N_1 \Longrightarrow \mid u_n - x_0 \mid< \eta$, d'où pour $N = max(N_0, N_1)$, on a: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geqslant N \Longrightarrow 0 <\mid u_n - x_0 \mid< \eta$, d'où, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \mid f(u_n) - l \mid< \varepsilon$; donc $f(u_n) \longrightarrow l$.

$\Longleftarrow$] Supposons que f n'admet pas l pour limite quand $x \longrightarrow x_0$, alors, $(\exists \varepsilon > 0)$: $(\forall \eta > 0)(\exists x \in E) : 0 <\mid x - x_0 \mid< \eta$ et $\mid f(x) - l \mid\geqslant \varepsilon$; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\eta = \frac{1}{n}$, $(\exists u_n \in E) : 0 <\mid u_n - x_0 \mid< \frac{1}{n}$ et $\mid f(u_n) - l \mid\geqslant \varepsilon$. Il existe, donc, une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de points de E, dont tous les termes sont différents de x_0 à partir d'un certain rang, qui tend vers x_0 et la suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers l.
• Pour les autres cas de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice) . □

Remarque 3.3.3
1. *Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) de même limite x_0 et telles que les deux suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ possèdent des limites différentes.*
2. *Pour montrer qu'une fonction ne tend pas vers une limite finie quand $x \longrightarrow x_0$; il suffit trouver une suite (u_n) qui tend vers x_0 et telle que la suite $(f(u_n))$ diverge ($(f(u_n))$ tend vers l'infini ou n'a pas de limite finie).*

Exemple 3.3.1 *La fonction $f : x \longmapsto cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0. En effet:*
• *Pour (u_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$; on a: $u_n \longrightarrow 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$, d'où $cos\left(\frac{1}{u_n}\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; et*
• *Pour (v_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$; on a: $v_n \longrightarrow 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = cos(\pi + 2n\pi) = -1$, d'où $cos\left(\frac{1}{v_n}\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1$.*
Ainsi les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0, mais les deux suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers deux limites distinctes, la fonction f n'admet pas de limite en 0. □

Remarque 3.3.4 *Sous les conditions de la proposition précédente, si on enlève la condition : tous les termes de la suite (u_n) sont différents de x_0 à partir d'un certain rang, l'implication $\Longrightarrow$] $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$ n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant: Soient l et l' deux nombres réels distincts, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient f et (u_n) la fonction et la suite définies par:*

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = l \quad si\ x \neq x_0 \\ f(x_0) = l' \end{array}\right. \qquad et \qquad \left\{\begin{array}{c} (\forall n \geqslant n_0)\ u_n = x_0 \\ u_0, u_1, ..., u_{n_0 - 1}\ sont\ donnés\ dans\ \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{c} (\forall n \geqslant n_0)\ f(u_n) = l' \\ f(u_0), f(u_1), ..., f(u_{n_0 - 1}) \in \left\{l, l'\right\} \end{array}\right. ,$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ *mais* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l'$ *et* $l \neq l'$. □

Proposition (Limite et ordre) 1 *Soient* $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *trois fonctions,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $\left(l, l'\right) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, *alors* $l \leqslant l'$.
2. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
3. *Si* $f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
4. *Si* $(\forall x \in E) \ \mid f(x) - l \mid \leqslant g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
5. *Si* $h \leqslant f \leqslant g$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
   Avec $f \leqslant g \Longleftrightarrow (\forall x \in E) \ f(x) \leqslant g(x)$

Preuve.

1. • Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On fait une démonstration par l'absurde, en supposant que $l' < l$; soient M_1 et M_2 deux nombres réels tels que: $l' < M_1 < M_2 < l$. D'où, pour $M_1 - l' > 0$, il existe $\eta_1 > 0 : (\forall x \in E) \quad \mid x - x_0 \mid < \eta_1 \Longrightarrow \mid g(x) - l' \mid < M_1 - l'$. Et pour $l - M_2 > 0$, il existe $\eta_2 > 0 : (\forall x \in E) \quad \mid x - x_0 \mid < \eta_2 \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < l - M_2$.
   Soit $x \in E$ tel que $\mid x - x_0 \mid < inf(\eta_1, \eta_2)$ (x existe car E est un voisinage de x_0), alors: $\begin{cases} l' - M_1 < g(x) - l' < M_1 - l' \\ M_2 - l < f(x) - l < l - M_2. \end{cases}$
   Donc $g(x) < M_1 < M_2 < f(x)$, qui est en contradiction avec $f \leqslant g$.
   • Pour les autres cas de $x_0 \in \cup \{-\infty, +\infty\}$ (à traiter à titre d'exercice).
   Pour les propriétés de 2. à 4. il suffit d'appliquer les définitions .
5. La condition imposée implique que $(\forall x \in E) \ \mid f(x) - l \mid \leqslant max(\mid g(x) - l \mid, \mid h(x) - l \mid)$, il suffit alors d'utiliser la définition de la limite (ou bien la propriété 4.). □

Remarque 3.3.5 *Les propriétés précédentes sont vraies pour les limites à droite et à gauche en un réel, elles restent aussi vraies, si les inégalités des hypothèses sont strictes .*

Proposition(Limite de la composée) 2 *Soient* $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f(E) \subset F$ *et* $\left(x_0, l, l'\right) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^3$. *Alors:*
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $(\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}) \ f(x) \neq l$ *et* $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l'$ *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$.

Preuve. • Cas où $\left(x_0, l, l'\right) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $\varepsilon > 0$, alors: $\exists \eta > 0 : (\forall y \in F) \ \ 0 < \mid y - l \mid < \eta \Longrightarrow \mid g(y) - l' \mid < \varepsilon$ (car $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l'$); et pour ce η, il existe $r' > 0 : (\forall x \in E) \ \ 0 < \mid x - x_0 \mid < r' \Longrightarrow \mid f(x) - l \mid < \eta$, d'où pour $\alpha = min\left(r, r'\right)$, on a : $(\forall x \in E) \ \ 0 < \mid x - x_0 \mid < \alpha \Longrightarrow 0 < \mid f(x) - l \mid < \eta$. Donc pour tout $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned} 0 < \mid x - x_0 \mid < \alpha &\Longrightarrow (f(x) \in F \ et \ 0 < \mid f(x) - l \mid < \eta) \\ &\Longrightarrow \mid g(f(x)) - l' \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid g \circ f(x) - l' \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$.

• Cas où $x_0 \in \mathbb{R}, l = +\infty$ *et* $l' = +\infty$.
Soit $A > 0$, alors: $(\exists B > 0) : (\forall y \in F) \quad y > B \Longrightarrow g(y) > A$ (car $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$) ; et pour ce B, il existe $\alpha > 0 : (\forall x \in E) \quad 0 <\mid x - x_0 \mid< \alpha \Longrightarrow f(x) > B$ (car $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$). Donc pour tout $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned} 0 <\mid x - x_0 \mid< \alpha &\Longrightarrow (f(x) \in F \ \textit{et} \ f(x) > B) \\ &\Longrightarrow g(f(x)) > A \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) > A. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = +\infty$.
• Pour les autres cas (à traiter à titre d'exercice) . □

Remarque 3.3.6 *Sous les conditions de la proposition précédente, si on enlève la condition : il existe $r > 0$ tel que $(\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}) \ f(x) \neq l$; la conclusion $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l'$ n'est pas toujours vraie comme le montre les exemples des fonctions numériques f, g suivantes définies sur $\mathbb{R}$: Soient l et l' deux nombres réels distincts et $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. $\begin{cases} f(x) = l & si \ x \neq x_0 \\ f(x_0) = l' \end{cases}$ *et* $\begin{cases} g(x) = l' & si \ x \neq l \\ g(l) = l. \end{cases}$ *Alors* $\begin{cases} g \circ f(x) = l & si \ x \neq x_0 \\ g \circ f(x_0) = l' \end{cases}$,
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l'$ *mais* $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$ *et* $l \neq l'$.
2. $\begin{cases} f(x) = l & si \ x \neq x_0 \\ f(x_0) = l' \end{cases}$ *et* $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{(x-l)^2} & si \ x \neq l \\ g(l) = l. \end{cases}$ *Alors* $\begin{cases} g \circ f(x) = l & si \ x \neq x_0 \\ g \circ f(x_0) = \frac{1}{(l'-l)^2} \end{cases}$,
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{y \to l} g(y) = +\infty$ *mais* $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$ *et* $l \neq +\infty$.
3. *Avec les fonctions f et g de l'exemple* 2., $\lim\limits_{y \to l} -g(y) = -\infty$ *mais* $\lim\limits_{x \to x_0} -g \circ f(x) = -l$ *et* $-l \neq -\infty$. □

Proposition (Opérations sur les limites) 1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, et $(x_0, l, h) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^3$ telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = h$. Alors:*

1. *Si $l + h$ est défini, $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + h$.*
2. *Si lh est défini, $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l.h$.*
3. *Si $l \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.*
   ($(\forall x \in E) \ \ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x) \ g(x)$ et pour $f(x) \neq 0 \ \ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$).

Preuve.

1 et 2. Soit (u_n) une suite d'éléments de E, dont tous les termes sont différents de x_0 à partir d'un certain rang, convergeant vers x_0. Alors:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longrightarrow f(u_n) \longrightarrow l \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = h \Longrightarrow g(u_n) \longrightarrow h. \end{cases}$$

On en déduit que $f(u_n)+g(u_n) \longrightarrow l+h$ et $f(u_n)g(u_n) \longrightarrow lh$ et alors $(f+g)(u_n) \longrightarrow l+h$ et $(fg)(u_n) \longrightarrow lh$ et par suite $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=l+h$ et $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=l.h.$

3. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \; et \; l\in\mathbb{R}^*$, alors: pour $\varepsilon=\frac{|l|}{2}$, il existe $\eta>0$:

$$(\forall x\in E) \;\; 0<\mid x-x_0\mid<\eta \Longrightarrow \mid f(x)-l\mid<\frac{\mid l\mid}{2}.$$

Donc pour tout $x\in E\setminus\{x_0\}$, on a:

$$\begin{aligned}
0<\mid x-x_0\mid<\eta &\Longrightarrow \mid l\mid-\frac{\mid l\mid}{2}<\mid l\mid-\mid f(x)-l\mid\\
&\Longrightarrow 0<\frac{\mid l\mid}{2}<\mid l\mid-\mid l-f(x)\mid\leqslant\mid\mid l\mid-\mid l-f(x)\mid\mid\\
&\Longrightarrow 0<\frac{\mid l\mid}{2}<\mid\mid l\mid-\mid l-f(x)\mid\mid\leqslant\mid l-l+f(x)\mid\\
&\Longrightarrow 0<\frac{\mid l\mid}{2}<\mid f(x)\mid.
\end{aligned}$$

Donc $(\forall x\in E\setminus\{x_0\}) \;\; 0<\mid x-x_0\mid<\eta \Longrightarrow \mid f(x)\mid>\frac{|l|}{2} \;\; (*) \;\; \Longrightarrow f(x)\neq 0$. La fonction $x\longmapsto\frac{1}{f(x)}$ est alors définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0.

Montrons que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}$.

D'après ce qui précède, $(\exists\eta>0)$: $(\forall x\in E) \;\; 0<\mid x-x_0\mid<\eta \Longrightarrow \mid f(x)\mid>\frac{|l|}{2}>0$.

Soit $\varepsilon>0$, $\alpha>0$: $(\forall x\in E) \;\; 0<\mid x-x_0\mid<\alpha \Longrightarrow \mid f(x)-l\mid<\varepsilon\frac{|l|^2}{2}$. Soit $\beta=inf(\eta,\alpha)$, alors pour tout $x\in E$, on a:

$$\begin{aligned}
0<\mid x-x_0\mid<\beta &\Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|=\frac{\mid f(x)-l\mid}{\mid f(x)\,l\mid}\\
&\Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|\leqslant\varepsilon\frac{\mid l\mid^2}{2}\;\frac{1}{\mid f(x)\mid\mid l\mid}\\
&\Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|<\varepsilon\frac{\mid l\mid^2}{2}\;\frac{2}{\mid l\mid}\;\frac{1}{\mid l\mid}\\
&\quad\left(car \;\; (*) \Longrightarrow \frac{1}{\mid f(x)\mid}<\frac{2}{\mid l\mid}\right)\\
&\Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}$. □

Exercice 3.3.3 *Montrer que:*

1. *Pour* $x_0\in\mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \;\; (resp. \; -\infty)$, $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* x_0 *et* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

2. *Pour $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.*

3. *Pour $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $l \in \mathbb{R}^*$; $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.*

Remarque 3.3.7 1. *Les propriétés des opérations sur les limites en un réel x_0 sont vraies pour les limites à droites et à gauche en x_0 .*

2. *Les propriétés des opérations sur les limites peuvent-être résumées dans le tableau suivant:*

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>f</th><th>g</th><th>f + g</th><th>f.g</th><th>f/g</th><th>|f|</th><th>$\sqrt[n]{f}$ (n$\in \mathbb{N}^*$)</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Limite en α
Où
$\alpha \in \{a, a^+, a^-, +\infty, -\infty\}$
et
$a \in IR$</td><td rowspan="3">l</td><td>l'</td><td>$l + l'$</td><td>$l l'$</td><td>l/l' si $l' \neq 0$, F.I si $l = l' = 0$
$(signe\ de\ l\ g)\infty$ si $l' = 0$ et $l \neq 0$</td><td rowspan="3">$|l|$</td><td rowspan="3">$\sqrt[n]{l}$
Si $f \geq 0$ au voisinage de α</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$(signe\ de\ l)\infty$ si $l \neq 0$, F.I si $l = 0$</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$(signe\ de\ -l)\infty$ si $l \neq 0$, F.I si $l = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$+\infty$</td><td>l'</td><td>$+\infty$</td><td>$(signe\ de\ l')\infty$ si $l' \neq 0$, F.I si $l' = 0$</td><td>$(signe\ de\ g)\infty$</td><td rowspan="3">$+\infty$</td><td rowspan="3">$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="2">F.I</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>Forme indéterminée(F.I)</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$-\infty$</td><td>l'</td><td>$-\infty$</td><td>$(signe\ de\ -l')\infty$ si $l' \neq 0$, F.I si $l' = 0$</td><td>$(signe\ de\ -g)\infty$</td><td rowspan="3">$+\infty$</td><td rowspan="3">N'est pas définie</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>F.I</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">F.I</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

3.3.1 Limites usuelles

On rappelle les limites usuelles suivantes (voir 1^{ere} science):

Propriétés 3.3.1 1. *Si f est une fonction constante sur un intervalle ouvert I (c-à-d: $(\forall x \in I)$ $f(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$, alors $(\forall a \in I)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.*

2. *Si f est une fonction polynômiale ou sin ou cos ou exp, alors:*

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

3. *Si f est une fonction fraction rationnelle ou tan ou ln, alors:*

$$(\forall a \in D_f) \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ \ (D_f = domaine\ de\ définition\ de\ f).$$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tanx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{\frac{x^2}{2}} = 1.$
5. *Les propriétés précédentes sont vraies pour les limites à droites et à gauche en un point.*
6. *Pour tous $r \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a:*

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ *et* $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty\ , & si\ n\ est\ pair \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty\ , & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$ *si* $a_n \neq 0.$

7. *Pour tous entiers naturels non nuls n et m* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} =$
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ *si* $a_n b_m \neq 0.$
8. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $(\forall r \in]0, +\infty[) \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}) \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$, $(\forall r \in]0, +\infty[) \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^r} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r lnx = 0.$

Preuve. En exercice . □

3.4 Continuité des fonctions

3.4.1 Continuité en un point

Définitions 3.4.1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in E$.*

1. *Pour f définie au voisinage de x_0, f est continue en x_0 signifie que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; *c-à-d:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\exists \eta > 0) : (\forall x \in E)\ \ | x - x_0 | < \eta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

2. *Pour f définie à gauche de x_0(resp. à droite de x_0); f est continue à gauche en x_0 (resp. à droite en x_0) signifie que* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ *(resp.* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*).*
3. *f est discontinue en x_0 (resp. à gauche en x_0, resp. à droite en x_0) signifie que f n'est pas continue en x_0 (resp. n'est pas continue à gauche en x_0, resp. n'est pas continue à droite en x_0).*

4. f est discontinue en x_0 si, et seulement si,

$$(\exists \varepsilon > 0) \ : \ (\forall \eta > 0) (\exists x \in E) \ : \ 0 <\mid x - x_0 \mid < \eta \text{ et } \mid f(x) - f(x_0) \mid \geqslant \varepsilon.$$

Proposition 3.4.1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un réel x_0. Alors:*
f est continue en x_0 si, et seulement si, f est continue à gauche en x_0 et f est continue à droite en x_0.

Preuve. Se déduit de la proposition 3.4.2. $\square$

Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions continues) 1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues en x_0; alors: $f + g$, $f.g$ et λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en x_0; et si de plus $f(x_0) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont définies au voisinage de x_0 et elles sont continues en x_0.*

Preuve. Utiliser la proposition(Opérations sur les limites). $\square$

Remarque 3.4.1 *La proposition précédente est vraie pour la continuité à droite et la continuité à gauche en un point .*

Proposition(Continuité de la composée) 1 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(E) \subset F$ et $x_0 \in E$. Alors:*
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, alors: $(\exists \eta > 0) : (\forall y \in F) \quad \mid y - f(x_0) \mid < \eta \Longrightarrow \mid g(y) - g(f(x_0)) \mid < \varepsilon$ (car $\lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = f(x_0)$) ; et pour ce η, il existe $\alpha > 0 : (\forall x \in E) \quad \mid x - x_0 \mid < \alpha \Longrightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \eta$.
Donc pour tout $x \in E$, on a:

$$\begin{aligned} \mid x - x_0 \mid < \alpha &\Longrightarrow (f(x) \in F \text{ et } \mid f(x) - f(x_0) \mid < \eta) \\ &\Longrightarrow \mid g(f(x)) - g(f(x_0)) \mid < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \mid g \circ f(x) - g \circ f(x_0) \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$. Donc $g \circ f$ est continue en x_0. $\square$

Théorème et Définition (Prolongement par continuité) 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite finie l en un point x_0 (resp. à gauche en x_0, resp. à droite en x_0) alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

*est continue en x_0 (rep. continue à gauche en x_0, resp. continue à droite en x_0) elle s'appelle **le prolongement par continuité** de f en x_0 (rep. à gauche en x_0 , resp. à droite en x_0). On dit aussi que f est prolongeable par continuité (rep. par continuité à à gauche, resp. par continuité à droite) en x_0.*

Preuve. Simple à vérifier. $\square$

Exemple 3.4.1 *Le prolongement par continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{sinx}{x}$ en 0 est la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par* $\begin{cases} g(x) = \frac{sinx}{x} & si\ x \neq 0 \\ g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = 1. \end{cases}$

Corollaire 3.4.1 *Soient $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(E) \subset F$ et $x_0 \in E$. Alors:*
Si f admet une limite l $(l \in F)$ en x_0 et g est continue en l alors $g \circ f$ admet la limite $g(l)$ en x_0.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $g \circ h$, où h est le prolongement par continuité de f en x_0. □

Remarque 3.4.2 *La proposition précédente est vraie à droite et à gauche en un point et en l'infini.*

Proposition 3.4.2 *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in E$. Alors: f est continue en x_0 si , et seulement si, pour toute suite (u_n) de points de E qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$.*

Preuve. Utiliser la proposition(Caractérisation séquentielle de la limite). □

3.4.2 Continuité sur un ensemble

Définitions 3.4.2 *Soient $E \subset \mathbb{R}$, a, b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors:*

1. *f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ signifie que f est continue sur tout point de $]a, b[$.*
2. *f est continue sur l'intervalle $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) signifie que f est continue sur $]a, b[$ (resp. sur $]a, +\infty[$) et est continue à droite en a.*
3. *f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ (resp. sur $]-\infty, b]$) signifie que f est continue sur $]a, b[$ (resp. sur $]-\infty, b[$) et est continue à gauche en b.*
4. *f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ signifie que f est continue sur $]a, b[$ et est continue à droite en a et à gauche en b.*
5. *f est dite continue sur E (ou continue) signifie que f est continue en tout point de E.*

Exemples 3.4.1

1. *Les fonctions polynômiales, cos, sin et exp sont continues sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions fraction rationnelles et tan sont continues sur leurs domaines de définitions.*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, (on prend $(\forall x \in [0, +\infty[)$ $\sqrt[1]{x} = x$).*
4. *Pour tout $r \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$.*
5. *La fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$.*
6. *La fonction $E : x \mapsto E(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\mathbb{Z}$; en particulier E est continue à droite et non continue à gauche en tout point de $\mathbb{Z}$.*

3.5 Théorème de Weierstrass

Théorème(de Weierstrass) 1 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f *est continue alors* f *est bornée sur* $[a,b]$ *(c-à-d:* $f([a,b]) = \{f(x)\ /\ x \in [a,b]\}$ *est borné) ; et il existe* $x_m \in [a,b]$ *et* $x_M \in [a,b]$ *tels que:*

$$\begin{cases} f(x_M) = M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \left(= \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right) \\ f(x_m) = m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \left(= \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right). \end{cases}$$

Preuve.

1. • Montrons que f est majorée: Par l'absurde en supposant que f n'est pas majorée. Donc: $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists x_n \in [a,b])$ *tel que* $f(x_n) \geqslant n$.
La suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) qui converge vers une limite x de $[a,b]$ (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{\varphi(n)} \in [a,b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$). Puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue en x et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x)$ $(\in \mathbb{R})$.
D'autre part, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = +\infty$ ce qui est absurde.
• Notons $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, d'après la propriété caractéristique de la borne supérieure, on a :
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists x_n \in [a,b])\ :\ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) qui converge vers une limite x_M de $[a,b]$ (car $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{\varphi(n)} \in [a,b] \Longrightarrow a \leqslant x \leqslant b$). Puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue en x_M et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x_M)$. Or
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ M - \frac{1}{n} \leqslant M - \frac{1}{\varphi(n)} < f\left(x_{\varphi(n)}\right) \leqslant M$$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(M - \frac{1}{n}\right) = M$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = M$.
Et l'unicité de la limite d'une suite convergente entraine: $f(x_M) = M$.
M le sup de $f([a,b])$ appartenant à $f([a,b])$, il s'agit donc d'un max .
2. Même démonstration pour f minorée et l'existence d'un $x_m \in [a,b] : m = f(x_m)$.
$\square$

3.6 Théorème des valeurs intermédiaires et image d'un intervalle par une fonction continue

3.6.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème(Théorème des valeurs intermédiaires) 1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *alors, pour tous* a *et* b *de* I, f *prend toute valeur intermédiaire entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *c'est-à-dire pour tout* y *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* c *compris entre* a *et* b *tel que* $y = f(c)$.

Preuve. Soient $a \in I$ et $b \in I$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors:

1. Si $a = b$ alors $f(a) = y = f(b)$, prendre $c = a = b$.
2. Si $a \neq b$, alors , puisque a et b jouent deux rôles symétriques, on peut supposer $a < b$ (par exemple).

• Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$, donc $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, d'où:
· Si $f(a) = y$, on prend $c = a$.
· Si $f(b) = y$, on prend $c = b$.
Nous supposons maintenant $f(a) < y < f(b)$.
Soit $A_y = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) < y\}$; $A_y \neq \emptyset$, car $a \in A_y$, et A_y est majorée par b, il admet donc une borne supérieure c et $c \in [a, b]$ (car $A_y \subset [a, b]$).
On a: $c = sup(A_y)$, donc:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ (\exists x_n \in A_y) : c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c.$$

La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est telle que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} f(x_n) < y \\ c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c \end{cases},$$

donc on a

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ f(x_n) < y \\ x_n \longrightarrow c \end{cases},$$

et puisque f est continue en c alors

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*) \ f(x_n) < y \\ f(x_n) \longrightarrow f(c) \end{cases},$$

et par suite $f(c) \leqslant y \ (**)$.
D'autre part, on a $y < f(b)$, donc $f(c) < f(b)$, d'après $(**)$ d'où $c \neq b$ et par suite $c < b$ (car $c \in [a, b]$).
Pour tout $x \in]c, b]$, $x > c$ donc $x \notin A_y$ (car c majore A_y) et par suite $f(x) \geqslant y$. D'où par passage à la limite à droite en c et vu la continuité de f au point c, $f(c) \geqslant y$.
On a donc $y = f(c)$.

• Si $f(a) > f(b)$, on considère la fonction $-f$, y étant compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc $-y$ est compris entre $-f(a)$ et $-f(b)$ avec $-f(a) \leqslant -f(b)$ et $-f$ est continue sur I ; d'après le cas précédent $(\exists c \in [a, b]) : -y = -f(c)$ et donc $y = f(c)$. □

3.6.2 Applications:Image d'un intervalle par une fonction continue et résolution des équations

Corollaire 3.6.1 *L'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction continue f sur I est un intervalle.*

Preuve. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $f(a)$ et $f(b)$ appartenant à $f(I)$ et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, d'après le théorème précédent (TVI), il existe c compris entre a et b tel que $y = f(c)$.
Or c est compris entre a et b, il appartient donc au segment d'extrémités a et b, lequel est contenu dans I donc $c \in I$. $(c \in I \ et \ y = f(c)) \Longrightarrow y \in f(I)$.
Donc $f(I)$ est un intervalle. □

Corollaire 3.6.2 *L'image d'un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *, où* a *et* b *sont deux réels tels que* $a < b$*, par une fonction continue* f *est un intervalle fermé borné:* $f([a, b]) = [m, M]$ *, où*

$$m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \quad et \ M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Preuve. • $(\forall x \in [a, b])$ $m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc $f([a, b]) \subset [m, M]$.
• Soit $y \in [m, M]$; d'après le théorème de Weierstrass, il existe x_m et x_M éléments de $[a, b]$ tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$; or y est compris entre $f(x_m)$ et $f(x_M)$, le théorème des des valeurs intermédiaires entraine l'existence d'un x compris entre x_m et x_M donc entre a et b (car $[a, b]$ est un intervalle) tel que $y = f(x)$. $(x \in [a, b]$ *et* $y = f(x)) \Longrightarrow y \in f([a, b])$.
Donc $[m, M] \subset f([a, b])$
Donc $f([a, b]) = [m, M]$. $\square$

Corollaire 3.6.3

1. ***(Théorème de Cauchy):*** *Si* $f(a).f(b) < 0$*, alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.
2. *Une fonction continue sur un intervalle* I *ne peut pas changer de signes sans s'annuler.*

Preuve.

1. $f(a) f(b) < 0$, alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'un est strictement négatif et l'autre est strictement positif donc 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, par le TVI il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$; puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, alors $c \neq a$ et $c \neq b$ et alors $c \in]a, b[$.
2. On suppose que f change de signes sur I, il existe donc α et β dans I $(\alpha < \beta)$ tels que $f(\alpha).f(\beta) < 0$; f étant continue sur $[\alpha, \beta]$, il existe, d'après 1, $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(c) = 0$; donc f s'annule en c sur I. $\square$

Exemples 3.6.1

1. *L'équation* (1) : $x^5 + 2x - 1 = 0$ *admet une racine dans l'intervalle* $]0, 1[$ *car la fonction* $f : x \longmapsto x^5 + 2x - 1$ *est continue sur* $[0, 1]$ *et* $f(0) = -1$ *et* $f(1) = 2$ *d'où* $f(0).f(1) < 0$ *donc il existe* $c \in]0, 1[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire que l'équation* (1) *admet une solution dans l'intervalle* $]0, 1[$.
2. *L'équation* $x + lnx = 0$ *admet une solution dans l'intervalle* $]e^{-2}, 1[$.

Remarques 3.6.1

1. *Le théorème des valeurs intermédiaires, veut dire que pour tout* α *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*, l'équation* $f(x) = \alpha$ *admet au moins une solution dans* $[a, b]$*, et graphiquement, la courbe de la fonction* f *coupe la droite d'équation* $y = \alpha$*, au moins une fois. Et le théorème de Cauchy veut dire que l'équation* $f(x) = 0$*, admet au moins une solution dans* $]a, b[$*, et la courbe de la fonction* f *coupe l'axe des abscisses au moins une fois.*
2. *Si de plus* f *est strictement monotone sur* $[a, b]$*, alors la solution de l'équation en question est unique. En effet:*
Puisque f *est strictement monotone sur* $[a, b]$*, alors pour tous* x *et* y *distincts de* $[a, b]$*,* $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \neq 0$*, et alors* $f(x) \neq f(y)$*, c'est à dire qu'il n'existe pas de nombres distincts* c *et* c' *de* $[a, b]$ *qui ont la même image par* f*, ce qui assure l'unicité de la solution de l'équation* $f(x) = \alpha$*, pour tout* α *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$.

3.6.3 Forme de l'image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 3.6.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $inf(f(I))$ et $sup(f(I))$ (si $f(I)$ est non minoré $inf(f(I)) = -\infty$ et si $f(I)$ est non majoré $sup(f(I)) = +\infty$).*

Preuve. Posons $m = inf(f(I))$ et $M = sup(f(I))$. Alors:
• Si m et M sont réels: Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $m < y < M$, par définition de m et M, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $m \leqslant f(a) < y < f(b) \leqslant M$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y = f(x)$ d'où $y \in f(I)$. Donc $]m, M[\subset f(I)$.
On a évidement $f(I) \subset [m, M]$; donc $]m, M[\subset f(I) \subset [m, M]$ et $f(I)$ est l'un des quatre intervalles d'extrémités m et M : $[m, M]$ ou $]m, M]$ ou $[m, M[$ ou $]m, M[$.

• Si $m = -\infty$ et $M \in \mathbb{R}$: Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y < M$, par définition de m et M, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $f(a) < y < f(b) \leqslant M$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y = f(x)$ d'où $y \in f(I)$. Donc $]-\infty, M[\subset f(I)$.
On a évidement $f(I) \subset]-\infty, M]$; donc $]-\infty, M[\subset f(I) \subset]-\infty, M]$, et par suite $f(I) =]-\infty, M[$ ou $f(I) =]-\infty, M]$.

• Si $m \in \mathbb{R}$ et $M = +\infty$: Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $m < y$, par définition de m et M, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $m \leqslant f(a) < y < f(b)$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y = f(x)$ d'où $y \in f(I)$. Donc $]m, +\infty[\subset f(I)$.
On a évidement $f(I) \subset [m, +\infty[$; donc $]m, +\infty[\subset f(I) \subset [m, +\infty[$, et par suite $f(I) =]m, +\infty[$ ou $f(I) = [m, +\infty[$.
• Si $m = -\infty$ et $M = +\infty$: Soit $y \in \mathbb{R}$, par définition de m et M, il existe $a \in I$ et $b \in I$ tels que $f(a) < y < f(b)$; il existe ensuite, par le TVI, un réel x compris entre a et b, donc dans I, tel que $y = f(x)$ d'où $y \in f(I)$. Donc $\mathbb{R} \subset f(I)$.
On a évidement $f(I) \subset \mathbb{R}$; donc $f(I) = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. □

Remarque 3.6.1 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Le tableau suivant, donne la nature de l'intervalle $f(I)$, en fonction de la nature de I et la monotonie de f sur I.*

Intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est croissante sur I	*f est décroissante sur I*
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),f(a)\right]$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

3.6.4 Théorème de la bijection monotone

Proposition 3.6.1 *Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue . Si f est injective, alors f est strictement monotone sur $[a,b]$.*

Preuve. Posons $I=[a,b]$ et rappelons que :

$$f \text{ est injective sur } I \Leftrightarrow \forall\left(x,x^{'}\right)\in I^2\ x\neq x^{'}\Rightarrow f(x)\neq f\left(x^{'}\right).$$

• Si $f(a)<f(b)$, montrons que f est strictement croissante sur I. On a pour $x<y<z$ dans I, $f(x)<f(z)\Longrightarrow f(x)<f(y)<f(z)$. Car :
$*\ \ f(y)<f(x)<f(z)\overset{TVI}{\Longrightarrow}\exists c\in[y,z]:f(x)=f(c)\Longrightarrow\exists c\in I:x\neq c \text{ et } f(x)=f(c)$ absurde.
$*\ \ f(x)<f(z)<f(y)\overset{TVI}{\Longrightarrow}\exists c\in[x,y]:f(z)=f(c)\Longrightarrow\exists c\in I:z\neq c \text{ et } f(z)=f(c)$ absurde .
Soient maintenant x et y de I tels que $a<x<y<b$, alors $f(a)<f(x)<f(b)$ et par suite $f(x)<f(y)<f(b)$ ce qui entraine $f(a)<f(x)<f(y)<f(b)$. Donc f est strictement croissante sur I.
• Si $f(a)>f(b)$, alors $-f(a)<-f(b)$, donc $-f$ qui est continue et injective est strictement croissante sur I, donc f est strictement décroissante sur I. □

Théorème 3.6.2 *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. Alors:*
f est injective sur I si, et seulement si, f est strictement monotone sur I.

Preuve. $\Longleftarrow$] Soient $x \in I$ et $y \in I$ tel que $x \neq y$, alors:

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \text{ si } f \text{ est strictement croissante sur } I \\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \text{ si } f \text{ est strictement décroissante sur } I \end{cases}$$

D'où $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \neq 0$, et alors $f(x) - f(y) \neq 0$ donc $f(x) \neq f(y)$ et f est injective . En fait cette implication ne fait pas intervenir la continuité .
$\Longrightarrow$] Soient a et b deux éléments fixés dans I tels que $a < b$; supposons que $f(a) < f(b)$ (par exemple) et montrons que f est strictement croissante sur I.

Tout d'abord et d'après la proposition précédente, f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Soient $x \in I$ et $y \in I$ tel que $x < y$.
Considérons: $i = inf(a, x)$ et $s = sup(b, y)$, alors $i \leqslant a < b \leqslant s$, d'où $[a, b] \subset [i, s]$; et comme f est strictement monotone sur $[i, s]$ (selon la proposition 3.6.1) et strictement croissante sur $[a, b]$ alors f est croissante sur $[i, s]$ et par suite $f(x) < f(y)$ (car x et y sont dans $[i, s]$) . $\square$

Théorème(de la bijection monotone) 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors f est une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$; et l'application inverse de f, notée f^{-1}, $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue, et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et de même sens de monotonie que f.*

Remarque 3.6.2 *On peut remplacer strictement monotone par injective (Théorème* 3.6.2.*).*

Preuve. • f est surjective de I sur $f(I)$; elle est aussi injective (Théorème 3.6.2.), c'est donc une bijection .
• $f(I)$ est un intervalle(Corollaire 3.6.1.).
• Supposons que f est strictement croissante sur I (par exemple) et montrons que f^{-1} est strictement croissante et continue sur $f(I)$.

$*$ $\underline{f^{-1} \textbf{ est strictement croissante sur } f(I) :}$ Soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$, montrons que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; par l'absurde, supposons que $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, alors $f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2))$ car f est croissante sur I , d'où $y_1 \geqslant y_2$ ce qui est absurde, donc $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
$*$ $\underline{f^{-1} \textbf{ est continue sur } f(I) :}$ Soit $y_0 \in f(I)$; montrons que f^{-1} est continue en y_0.
Soit $\varepsilon > 0$, il faut chercher $\eta > 0$ tel que:

$$\begin{aligned} (\forall y \in f(I)) \quad | y - y_0 | < \eta &\Longrightarrow | f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) | < \varepsilon \\ &\Longrightarrow | f^{-1}(y) - x_0 | < \varepsilon \end{aligned}$$

où $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$.
On note par $l(I)$ la longueur de I qui est $\beta - \alpha$, si I est borné et d'extrémités α et β réels tels que $\alpha < \beta$ et $l(I) = +\infty$ si I n'est pas borné. Trois cas se présentent:

1. $x_0 = inf(I)$ $(= min(I))$, donc $y_0 = min(f(I))$ (car f est croissante) ; I est donc de la forme $[x_0, ...)$ et $f(I) = [y_0, ...)$. Soit $r = x_0 + inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right)$. On a:
$$\begin{cases} x_0 < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ x_0 < r \leqslant x_0 + \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ r \in I \ \textit{(car I est un intervalle)} \end{cases}$$

(car pour I borné, $x_0 + \frac{l(I)}{2} \in I \Longrightarrow r \in I$ (car I est un intervalle) et si I est non borné , alors $I = [x_0, +\infty[$ donc $x_0 < r$ entraine que $r \in I$) .
Soit $\eta = f(r) - y_0 = f(r) - f(x_0)$, d'où $\eta > 0$ car f est strictement croissante sur I.
Soit $y \in f(I)$, alors $y \geqslant y_0$ et on a:

$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 < y - y_0 < \eta \\ &\Longrightarrow y_0 < y < y_0 + \eta \\ &\Longrightarrow y_0 < y < f(r), \end{aligned}$$

et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(r)) &\Longrightarrow x_0 < f^{-1}(y) < r \leqslant x_0 + \varepsilon \\ &\Longrightarrow x_0 < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 < f^{-1}(y) - x_0 < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 <\mid f^{-1}(y) - x_0 \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

2. $x_0 = sup(I)\ (= max(I))$, donc $y_0 = max(f(I))$ (car f est croissante) ; I est donc de la forme $(..., x_0]$ et $f(I) = (..., y_0]$. Soit $s = x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right)$. On a:
$\begin{cases} inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \leqslant \varepsilon \\ inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \leqslant \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant -\varepsilon \\ -inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant -\frac{l(I)}{2} \end{cases}$
$\Longrightarrow \begin{cases} x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant x_0 - \varepsilon \\ x_0 - inf\left(\varepsilon, \frac{l(I)}{2}\right) \geqslant x_0 - \frac{l(I)}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 > s \geqslant x_0 - \varepsilon \\ x_0 > s \geqslant x_0 - \frac{l(I)}{2} \end{cases}$
$\Longrightarrow \begin{cases} x_0 > s \geqslant x_0 - \varepsilon \\ s \in I \ \ (car\ I\ est\ un\ intervalle) \end{cases}$
(car pour I borné, $x_0 - \frac{l(I)}{2} \in I \Longrightarrow s \in I$ (car I est un intervalle) et si I est non borné, alors $I =]-\infty, x_0]$ donc $s < x_0$ entraine que $s \in I$).
Soit $\eta = y_0 - f(s) = f(x_0) - f(s)$, d'où $\eta > 0$ car f est strictement croissante sur I.
Soit $y \in f(I)$, alors $y \leqslant y_0$ et on a:

$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid < \eta &\Longrightarrow 0 < y_0 - y < \eta \\ &\Longrightarrow -\eta < y - y_0 < 0 \\ &\Longrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 \\ &\Longrightarrow y_0 - (y_0 - f(s)) < y < y_0 \\ &\Longrightarrow f(s) < y < y_0, \end{aligned}$$

et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(s)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) &\Longrightarrow s < f^{-1}(y) < x_0 \\ &\Longrightarrow x_0 - \varepsilon \leqslant s < f^{-1}(y) < x_0 \\ &\Longrightarrow 0 < x_0 - f^{-1}(y) < \varepsilon \\ &\Longrightarrow 0 <\mid f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \mid < \varepsilon, \end{aligned}$$

$$car \ \ \mid f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \mid = \mid f^{-1}(y) - x_0 \mid = x_0 - f^{-1}(y).$$

3. $inf\,(I) < x_0 < sup\,(I)$; il existe donc a et b de I tels que $a < x_0 < b$.
Soient $\begin{cases} s = sup\,(a, x_0 - \varepsilon) \\ i = inf\,(b, x_0 + \varepsilon) \end{cases}$.
On a: $a \leqslant s < x_0 < i \leqslant b$, donc $s \in I$ et $i \in I$ (car I est un intervalle) et $f\,(s) < f\,(x_0) < f\,(i)$ car f est strictement croissante sur I.
Soit $\eta = inf\,(f\,(x_0) - f\,(s)\,, f\,(i) - f\,(x_0))$, alors $\eta > 0$ et $\begin{cases} \eta \leqslant y_0 - f\,(s) \\ \eta \leqslant f\,(i) - y_0 \end{cases} \Longrightarrow$
$(*)\ \begin{cases} f\,(s) \leqslant y_0 - \eta \\ y_0 + \eta \leqslant f\,(i) \end{cases}$
Soit $y \in f\,(I)$ tel que $0 <\mid y - y_0 \mid< \eta$, alors:
$$\begin{aligned} 0 <\mid y - y_0 \mid< \eta &\Longrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \\ &\Longrightarrow f\,(s) \leqslant y_0 - \eta < y < y_0 + \eta \leqslant f\,(i) \\ &\Longrightarrow f\,(s) < y < f\,(i) \end{aligned}$$
et comme f^{-1} est strictement croissante sur $f\,(I)$ alors $s < f^{-1}\,(y) < i$, d'où $x_0 - \varepsilon \leqslant s < f^{-1}\,(y) < i \leqslant x_0 + \varepsilon$ (d'après la définition de s et i) ou encore $-\varepsilon < f^{-1}\,(y) - x_0 < \varepsilon$ et par suite $\mid f^{-1}\,(y) - f^{-1}\,(y_0) \mid< \varepsilon$. □

Remarques 3.6.2 *1. Le théorème* 3.6.2. *peut s'énoncer ainsi: Si f est une fonction numérique continue sur un intervalle I, alors f est une bijection de I dans l'intervalle $f\,(I)$ si , et seulement si, f est strictement monotone sur l'intervalle I.*

2. Si f continue et strictement monotone sur un intervalle I et de fonction réciproque $g = f^{-1}$; on a: $\mathcal{G}_f = \{(x, f\,(x))\ /\ x \in I\}$ et $\mathcal{G}_g = \{(y, g\,(y))\ /\ y \in f\,(I)\}$. Or $(\forall y \in f\,(I))\,(\exists! x \in I) : y = f\,(x)\,,$ donc $\mathcal{G}_g = \{(f\,(x)\,, x)\ /\ x \in I\}$. Pour tout $x \in I$, les éléments $(x, f\,(x))$ et $(f\,(x)\,, x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, donc Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice(la droite d'équation $y = x$).

3.7 Fonctions circulaires réciproques

3.7.1 Théorèmes et définitions

Les trois théorèmes suivants sont simples à vérifier.

Théorème et Définition 3.7.1 *L'application: $x \longmapsto sin\,(x)$ est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$, elle admet donc une fonction réciproque de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ continue et strictement croissante, notée Arcsin, et on a :*
$$\begin{cases} \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad (\forall y \in [-1, 1]) \ \ arcsin\,(y) = x \Leftrightarrow sin\,(x) = y \\ \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad arcsin\,(sin\,(x)) = x \\ (\forall x \in [-1, 1]) \quad sin\,(arcsin\,(x)) = x. \end{cases}$$

Théorème et Définition 3.7.2 *L'application: $x \longmapsto cos\,(x)$ est continue et strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, elle admet donc une fonction réciproque de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$ continue et strictement décroissante, notée Arccos, et on a:*
$$\begin{cases} (\forall x \in [0, \pi]) \quad (\forall y \in [-1, 1]) \ \ arccos\,(y) = x \Leftrightarrow cos\,(x) = y \\ (\forall x \in [0, \pi]) \quad arccos\,(cos\,(x)) = x \\ (\forall x \in [-1, 1]) \quad cos\,(arccos\,(x)) = x. \end{cases}$$

Attention:

$$\begin{cases} arcsin\left(sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) \neq \frac{9\pi}{4} \quad et\ on\ a \\ arcsin\left(sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \\ arccos\left(cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{13\pi}{3} \quad et\ on\ a \\ arccos\left(cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Théorème et Définition 3.7.3 *L'application:* $x \longmapsto tan\,(x)$ *est continue et strictement croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$*, elle admet donc une fonction réciproque de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *continue et strictement croissante, notée Arctan, et on a:*

$$\begin{cases} \left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \quad arctan\,(y) = x \Leftrightarrow tan\,(x) = y \\ \left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad arctan\,(tan\,(x)) = x \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad tan\,(arctan\,(x)) = x. \end{cases}$$

3.7.2 Tableaux des variations et courbes des fonctions $Arcsin$, $Arcos$ et $Arctan$

Figure

x	-1	0	1
$arcsin'(x)$		$+$	
$arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

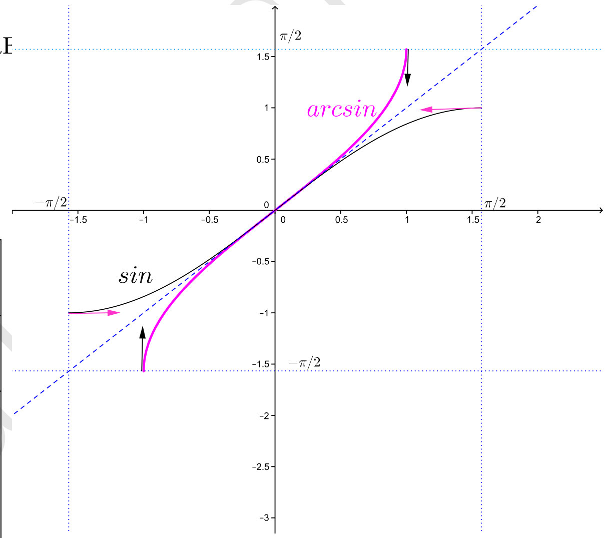


FIGURE 3.2 – Fonction arcos

x	-1	$\frac{\pi}{2}$	1
$arcos'(x)$		$-$	
$arcos(x)$	π	0	0

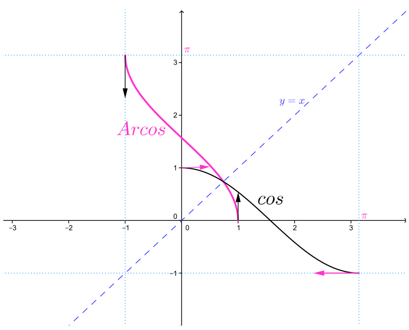
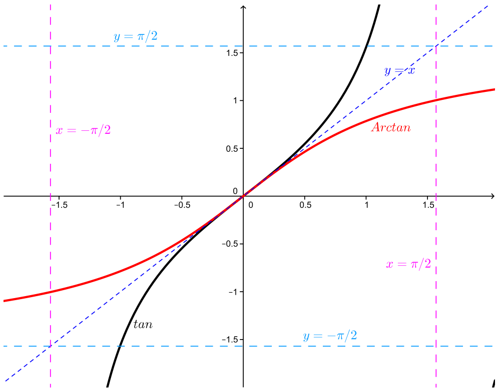


FIGURE 3.3 – Fonction arctan

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$arctan'(x)$		$+$	
$arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



3.8 Fonctions hyperboliques

3.8.1 Définitions et propriétés

Définition 3.8.1 *Les fonctions cosinus hyperbolique, notée ch, sinus hyperbolique, notée sh, et tangente hyperbolique, notée th, sont définies sur* $\mathbb{R}$ *par:* $ch\,(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh\,(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *et* $th\,(x) = \dfrac{sh\,(x)}{ch\,(x)}$.

Propriétés 3.8.1 *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $ch\,(x) + sh\,(x) = e^x$ *et* $ch\,(x) - sh\,(x) = e^{-x}$.
2. $ch^2\,(x) - sh^2\,(x) = 1$.
3. $ch\,(x+y) = ch\,(x)\,ch\,(y) + sh\,(x)\,sh\,(y)$.
4. $sh\,(x+y) = sh\,(x)\,ch\,(y) + ch\,(x)\,sh\,(y)$.
5. $ch\,(2x) = ch^2\,(x) + sh^2\,(x) = 2ch^2\,(x) - 1 = 1 + 2sh^2\,(x)$.
6. $sh\,(2x) = 2sh\,(x)\,ch\,(x)$.
7. $th\,(x+y) = \dfrac{th\,(x) + th\,(y)}{1 + th\,(x)\,th\,(y)}$.
8. $th\,(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
9. *ch est paire, sh et th sont impaires.*

3.8.2 Tableaux des variations et courbes des fonctions hyperboliques

FIGURE 3.4 – Fonction sh

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

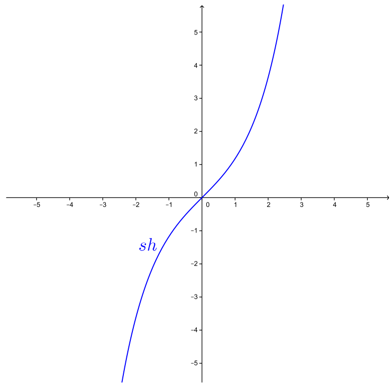


FIGURE 3.5 – Fonction ch

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

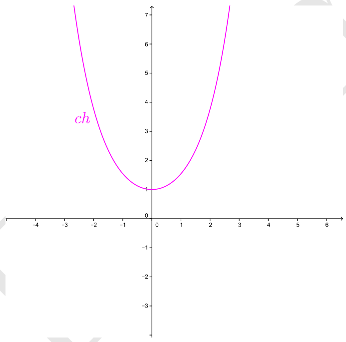
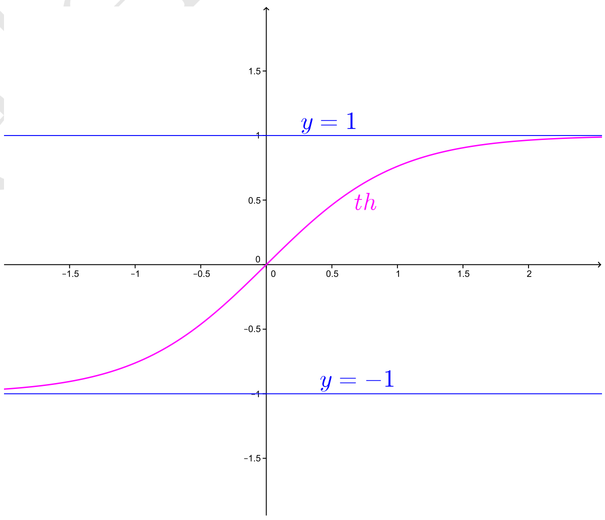


FIGURE 3.6 – Fonction th



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
$th(x)$	-1	$\nearrow 0 \nearrow$	1

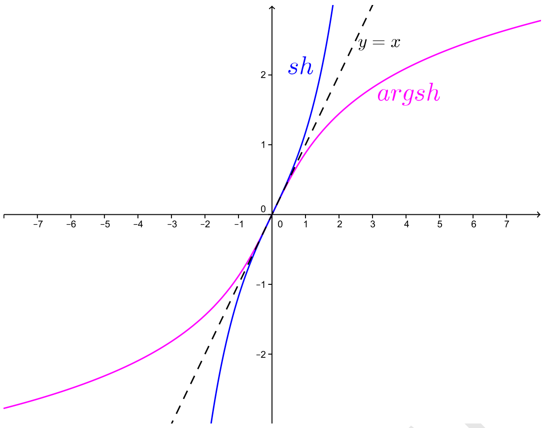
3.9 Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

3.9.1 Théorèmes et définitions

Théorèmes et Définitions (Fonctions Args) 1 *1. La fonction $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque, notée* *argsh qui est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et on a:*

$$\left(\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad argsh\,(x)=y\Leftrightarrow x=sh\,(y)\,.$$

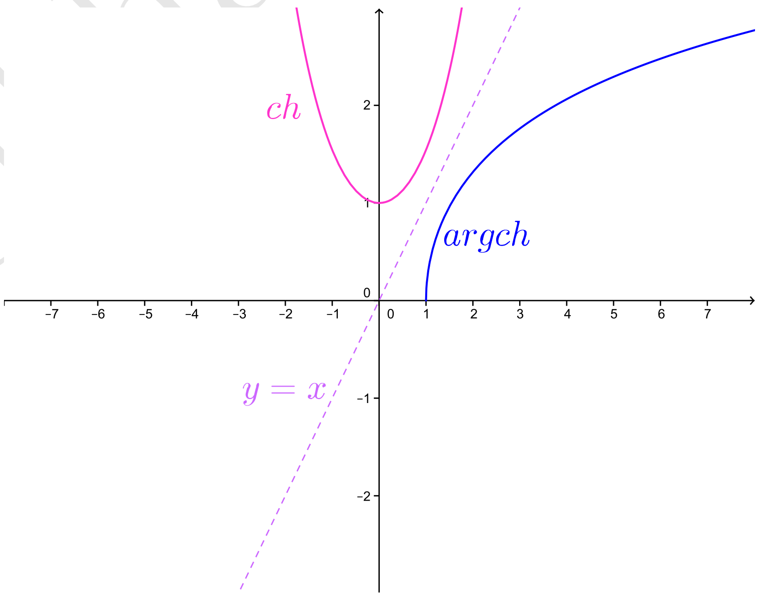
FIGURE 3.7 – Fonction argsh



2. *La fonction ch* : $\mathbb{R}^+\longrightarrow[1,+\infty[$ *est strictement croissante et continue sur* $\mathbb{R}^+$, *elle admet une fonction réciproque, notée argch* : $[1,+\infty[\;\longrightarrow\mathbb{R}^+$ *qui est continue et strictement croissante sur* $[1,+\infty[$ *et on a:*

$$(\forall x\in[1,+\infty[)\;\left(\forall y\in\mathbb{R}^+\right)\quad argch\,(x)=y\Leftrightarrow x=ch\,(y)\,.$$

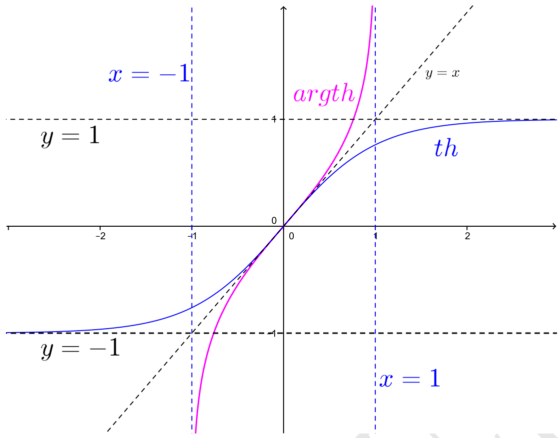
FIGURE 3.8 – Fonction argch



3. *La fonction $th : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une fonction réciproque, notée $argth :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et strictement croissante sur $]-1,1[$ et on a:*

$$(\forall x \in]-1,1[) \ (\forall y \in \mathbb{R}) \quad argth\,(x) = y \Leftrightarrow x = th\,(y)\,.$$

FIGURE 3.9 – Fonction argth



Proposition 3.9.1 1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \ argsh\,(x) = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

2. $(\forall x \in [1, +\infty[) \ argch\,(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
3. $(\forall x \in]-1,1[) \ argth\,(x) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Preuve. En exercice. □

3.10 Fonctions uniformément continues

3.10.1 Définition et propriété

Définition 3.10.1 *Soient E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
*f est dite **uniformément continue** (U.C) ou uniformément continue sur E (U.C sur E) signifie que*

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \eta > 0) : (\forall\,(x, y)) \in E^2 \quad | \, x - y \, | < \eta \Longrightarrow | \, f\,(x) - f\,(y) \, | < \varepsilon.$$

Remarque 3.10.1 1. *Si f est uniformément continue sur E, alors pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de E telles que $x_n - y_n \longrightarrow 0$, la suite $(f\,(x_n) - f\,(y_n))$ tend vers 0.*

2. *Si f est uniformément continue sur E alors f est continue sur E; mais la réciproque est fausse en général: La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas U.C sur $\mathbb{R}$.*

Preuve.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de E telles que $x_n - y_n \longrightarrow 0$; montrons que $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $(\forall (x,y) \in E^2) \ \mid x-y \mid < \eta \Longrightarrow \mid f(x)-f(y) \mid < \varepsilon$.
   Pour ce η, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \mid x_n - y_n \mid < \eta$, d'où
$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N}) \ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \mid x_n - y_n \mid < \eta \\ &\Longrightarrow \mid f(x_n) - f(y_n) \mid < \varepsilon.\end{aligned}$$

2. (i) Dans la définition de la continuité uniforme le η dépend de ε seulement, par contre dans la définition de la continuité en un point x_0 de E, le η dépend de ε et de x_0 en général.
   (ii) Considérons les deux suites $(x_n) = (n)$ et $(y_n) = \left(n + \frac{1}{n+1}\right)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a: $x_n - y_n = -\frac{1}{n+1}$ et
$$\begin{aligned} f(x_n) - f(y_n) &= n^2 - \left(n + \frac{1}{n+1}\right)^2 = n^2 - \left(n^2 + \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= -\frac{2n}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$
   Donc $x_n - y_n \longrightarrow 0$; mais $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow -2 \ (\neq 0)$. Donc d'après 1, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3.10.2 Théorème de Heine

Théorème de Heine 3.10.1 *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$, est y uniformément continue.*

Preuve. Soit f une telle fonction ; supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, alors:
$$(\exists \varepsilon > 0) : (\forall \eta > 0) \, (\exists x, y \in [a,b]) :\mid x - y \mid < \eta \textit{ et } \mid f(x) - f(y) \mid \geqslant \varepsilon. \textit{ Alors}$$
$$(\exists \varepsilon > 0) : (\forall n \in \mathbb{N}^*) \, (\exists x_n, y_n \in [a,b]) :\mid x_n - y_n \mid < \frac{1}{n} \textit{ et } \mid f(x_n) - f(y_n) \mid \geqslant \varepsilon.$$
La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ étant bornée, d'où selon le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une valeur d'adhérence $x \in [a,b]$, et alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ qui converge vers x. Et comme $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \mid x_{n_k} - y_{n_k} \mid < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k}$ et $\mid f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \mid \geqslant \varepsilon \ (*)$, alors $x_{n_k} - y_{n_k} \longrightarrow 0$ et $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \ y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k})$, d'où $(y_{n_k})_{k \geqslant 1}$ est aussi convergente vers x. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est donc continue en x, d'où, selon le théorème de la continuité séquentielle, les deux suites $(f(x_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ et $(f(y_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ convergent vers $f(x)$, d'où $\lim\limits_{k \to +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ ce qui est en contradiction avec $(*)$. Donc f est uniformément continue sur $[a,b]$.

3.10.3 Fonctions Lipschitziennes

Définition 3.10.2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle non vide I.*
f est dite ***Lipschitzienne*** *sur I, si et seulement si, il existe $k \in [0, +\infty[$ tel que $(\forall (x,y) \in I^2) \ \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant k \mid x - y \mid$.*
Le nombre k s'appelle le rapport de f.

Exemples 3.10.1 *1. Toute fonction constante sur un intervalle est y Lipschitzienne.*

2. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ de rapport $\frac{1}{2}$; mais non Lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

3. La fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.10.1 *Toute fonction numérique Lipschitzienne sur un intervalle est y uniformément continue.*

Preuve. Soit f une fonction numérique Lipschitzienne de rapport k sur un intervalle I, et soit $\varepsilon > 0$ alors :

— Si $k = 0$, alors $(\forall (x, y) \in I^2) \quad | f(x) - f(y) | < \varepsilon$ (car $f(x) - f(y) = 0$). D'où n'importe quelle $\eta > 0$ convient.

— Si $k > 0$, pour tout $(x, y) \in I^2$ on a:

$$\begin{aligned} | x - y | < \frac{\varepsilon}{k} &\Longrightarrow k \; | x - y | < \varepsilon \\ &\Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors

$$(\forall \varepsilon > 0) \; (\exists \eta > 0) : (\forall (x, y)) \in I^2 \;\; | x - y | < \eta \Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur I. $\square$