# Chapitre I

## logique et quelque méthodes de raisonnement

**La logique** : étudier le raisonnement mathématique.

Proposition
⇓
expression

Vraie — fausse

↳ Axiome
→ Théorème
→ Corollaire
→ lemme

### Connecteurs logiques

• Négation : $\overline{P}$

| P | $\overline{P}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

• Implication :

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

• Conjonction :
(P et Q) $(P \wedge Q)$

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

• Equivalence :

| P | Q | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

• Disjonction :
(P ou Q) $(P \vee Q)$

| P | Q | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

$Q \Rightarrow P$ = reciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ contraposé de l'implication $P \Rightarrow Q$

### Quantificateurs

quantificateur universel : $\forall$ quelque soit

quantificateur existentiel : $\exists$ il existe (au moins un)

$\exists!$ : lorsqu'il existe un unique element x.

$\in$ : appartient à.

### Modes de raisonnement

• Raisonnement direct : montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est Vraie

• Ce raisonnement consiste à supposer que que P est Vraie et montrer que Q est fausse

• Contraposé : si l'on souhait montrer $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

• Absurde : montrer que la proposition P est Vraie.

• Ce raisonnement consiste à supposer que $\overline{P}$ Vraie (la négation) et on cherche une contradiction

• Si $\overline{P}$ est fausse, alors, P est Vraie

Vos questions : intagrame : Yasmine_GHRM

- Contre-exemple :

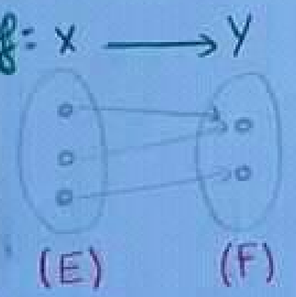
Pour montrer que P est fausse, il suffit de montrer que sa négation $\overline{P}$ est Vraie.

- Récurrence : 3 étaps :
  - l'initialisation : on montre que P(0) est Vraie.
  - l'hérédité : On suppose que P(n) est Vraie pour $n \geq 0$, on montre que P(n+1) est Vraie
  - Conclusion : On rappelle que le principe de récurrence P(n) est Vraie.

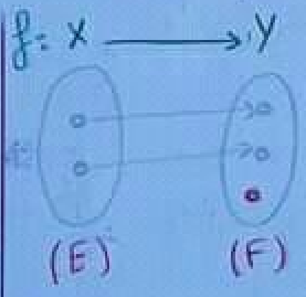
## Surjective

Si tout element de F possède au moins un antécédant.

$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$



Surj



non Surj

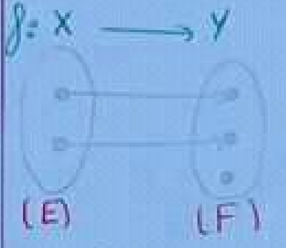
## Injective

Si tout element de F possède au plus un antécédant.

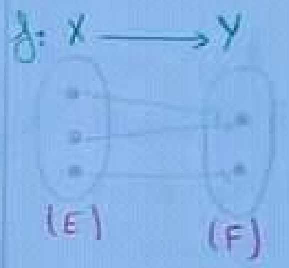
$\forall x_1, x_2 \in E\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

↳ contraposé de l'implication ↓

$\forall x_1, x_2 \in E\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$



inj



non inj

## bijective

Une fonction f est dite bij si elle est à la fois inj et surj.

$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y$

# Chapitre II

## Ensemble des nombres Réels :

**Lois de composition interne :** est une application de $E \times E$ dans $E$ (notée $*$).

$$* : E \times E \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longrightarrow x * y$$

- L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

**Propriétés de l'addition :**

- Commutative : $x + y = y + x$
- associative : $(x + y) + z = x + (y + z)$
- element symetrique : $(-x)$
- element neutre : $0$

**Proprietes de la multiplication :**

- Commutative : $x \times y = y \times x$
- associative : $(x . y) . z = x . (y . z)$
- element neutre $1$
- element inverse : $x^{-1}$

$(\times)$ distributive par rapport $(+)$

$$x . (y + z) = xy + xz$$

$\wedge$ distributive par rapport $\vee$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$\vee$ distributive par rapport $\wedge$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

**Partie entiere :** $E(x)$ . $[x]$ . $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égale à $x$.

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

**Proprietes :**

$$x - 1 < E(x) \leqslant x$$
$$E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}, E(x + k) = E(x) + k$$

- **Formule du Binme de Newton :**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \, (n-k)!}$$

. pour Calculer ces coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal :

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |

$$C_n^n = 1 \qquad C_n^0 = 1 \qquad C_n^{n-1} = n$$

---

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

Suite géométrique : $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 \dots + x^n = x\left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

---

Vos questions : instagrame : Yasmine_GHRM

- **Maximum et minimum :**
- Maximum (le plus grand element) : $\forall x \in A,\ x \leq \alpha$ , $max(A) = \alpha \in A$
- Minimum (le plus petit element) : $\forall x \in A \quad x \geq \beta$ . $min(A) = \beta \in A$
- **Majorants et minorants :**
- On dit que **M** majorant de A $\forall x \in A \qquad x \leq M$
- On dit que **m** minorant de A $\forall x \in A \qquad x \geq m$
- **Borne Supérieure et Borne inférieure :**
- Sup(A) : le plus petit element de l'ensemble des majorants de A.
- inf (A) : le plus grand element de l'ensemble des minorants de A.

Des exemple :

$A = [2, 6]$ min (A) = 2 max (A) = 6

$B = ]1, 6[$ ne possède ni max ni min

$C = [-2, 3[$ min (C) = -2 max(C) = $\emptyset$

$A = [2, 6]$ $M = [6, +\infty[$ $m = ]-\infty, 2]$

$B = ]1, 7[$ $M = [7, +\infty[$ $m = ]-\infty, 1]$

$C = ]-\infty, 5]$ $M = [5, +\infty[$ $m = \emptyset$

$A = [2, 6[$ Sup(A) = 6 inf(A) = 2

$B = ]1, 7[$ Sup(B) = 7 inf(A) = 1

$C = ]-\infty, 5[$ sup(C) = 5 inf(C) = $\emptyset$

On dit que A est **borné** si l'ensemble A est à la fois majoré et minoré

# chapitre III
## Fonctions reelles d'une Variable réelle :

### Domaine de définition :
l'ensemble $D_f$ des Valeurs de x (antécédents) pour les quelle f(x) existe (l'image).

### L'ensemble image :
l'ensemble des Valeurs de la Variable Y qui correspondent à au moins une Valeur de x

### fonction majorées, minorées :
- f est majorée sur $D_f$ : ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f .\ f(x) \leq M$
- f est minorée sur $D_f$ : ssi $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f .\ f(x) \geq m$

### Parité et périodicité :
Paire :
$\forall x \in D_f .\ -x \in D_f .\ f(-x) = f(x)$

impaire :
$\forall x \in D_f\ -x \in D_f\quad f(-x) = -f(x)$

Périodique :
$\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x+T) = f(x)$.

### Restrictions et prolongement d'une fonction :
$f : D \to \mathbb{R}$ et $A \subset D$ on appelle restriction de f à A, la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que :
$f(x) = g(x)\quad \forall x \in A$
- f prolongement de g : $f = \tilde{g}$
- g restriction de f : $g = f|_A$

### Prolongement par Continuité :
On dit que f est prolongeable par continuité en $x_0$. Si f admet une limite $l$ finie en $x_0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

### Continuité :
- f continue en $x_0$ : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f continue à droite de $x_0$
  $\lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$
- f continue à gauche de $x_0$
  $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$
- f continue dans intervalle $[a.b]$ si elle est continue en tout point de $]a.b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Vos questions : instagrame : Yasmine_GHRM

## Théorème des Valeurs intermédiaire (T.V.I) =

- $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ , $f$ continue

Si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe $c \in [a.b]$ tel que $f(c) = 0$

- Si de plus $f$ est strictement monotone alors $c$ est unique.

---

Si $f$ croissante $f(I) = [f(a), f(b)]$

Si $f$ décroissante $f(I) = [f(b), f(a)]$

## Théorème de la bijection monotone :

$f$ continue et strictement monotone sur $I$. $f : I \to \mathbb{R}$

- $f$ établit une bijection de $I$ dans l'intervalle image $J = f(I)$
- La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur $J$, et elle a le m̂ sens de variation que $f$.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases}$$

## Exemples de fonctions réciproques

- la fonction arcsinus :

La bijection réciproque de la fonction $\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ est la fonction $\arcsin : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\forall y \in [-1, 1]$. $\sin(\arcsin(y)) = y$ et $\forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin(x)$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |

- la fonction arccosinus :

La bijection réciproque de la fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est la fonction $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ appelée arccosinus.

| $x$ | $0$ | $1/2$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos(x)$ | $\pi/2$ | $\pi/3$ | $\pi/4$ | $\pi/6$ | $0$ |

- la fonction arctangente :

La bijection réciproque de la fonction $\tan : ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ est la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to ]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\arctan(x)$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |

# Chapitre III partie II :

## Dérivabilité :

$f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $x_0$ et

$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

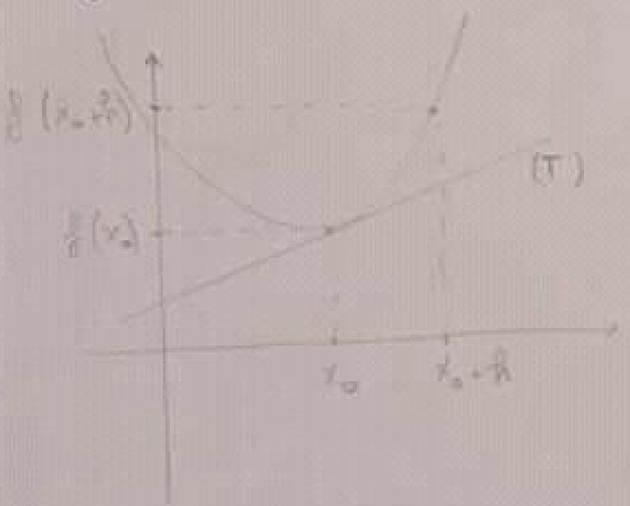
$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

## Interprétation géométrique :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$




## Dérivabilité sur un intervalle :

$f : I \to \mathbb{R}$

$f$ est dérivable sur $I$ si et ssi $f$ est dérivable en tout point $x_0 \in I$, notée $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}$

## Dérivée d'une fonction réciproque :

$$\forall x \in J.\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[,\ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[.\ (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

## Théorème de Rolle :

$f : [a.b] \to \mathbb{R}$

$f$ continue sur $[a.b]$ et dérivable

$$\boxed{f(a) = f(b)}$$

alors, il existe $c \in ]a.b[$

$$f'(c) = 0$$

## Théorème accroissements finis

$f : [a.b] \to \mathbb{R}$

$f$ continue et dérivable sur $[a.b]$

alors, il existe $c \in ]a.b[$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

## Regle de l'Hospitale :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$