Département de Mathématiques

Exercices avec Corrigés Analyse 1

Série1

Exercice 0.1. Soient les quatre assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
&(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0,\\
&(b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0,\\
&(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0,\\
&(d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.
\end{aligned}$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 0.2. Écrire la négation des phrases suivantes :

(1) $\forall x,\ \exists n:\ x \leq n.$

(2) $\exists M:\ \forall n, |u_n| \leq M.$

(3) $\forall x,\ \forall y,\ xy = yx.$

(4) $\forall x,\ \exists y:\ yxy^{-1} = x.$

(5) $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N,\ |u_n| < \epsilon.$

(6) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0:\ \ \forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon.$

Exercice 0.3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :

$$\begin{aligned}
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\\
&\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\\
&\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).
\end{aligned}$$

Exercice 0.4. On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y<1\right\},\\
A_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y|<1\right\},\\
A_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x|+|y|<1\right\},\\
A_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y>-1\right\},\\
A_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y|<1\right\}.
\end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de l'équivalence : $(|x+y|<1 \text{ et } |x-y|<1) \Leftrightarrow |x|+|y|<1.$

Série2

Exercice 0.5.

1- Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r \times x \notin \mathbb{Q}$.

2- Soient r et r' deux rationnels tels que $r < r'$. Montrer que $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.

3- En déduire qu'entre deux rationnels distincts il y a au moins un irrationnel.

Exercice 0.6. Montrer que $x = 31.72\,356\,356\,356\,356..$ est un rationnel.

Exercice 0.7. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[1,2] \cap \mathbb{Q}, \qquad [1,2[\cap \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{N}, \qquad \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Exercice 0.8. Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $I = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2\right\}$.

1- Montrer que I est la réunion de deux intervalles que l'on déterminera.

2- Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ces intervalles.

Exercice 0.9. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b : (a, b) \in A \times B\}$.

1- Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.

2- Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 0.10. Soient $a > 0$ et $b \geq 0$ deux réels.

1- Montrer que l'ensemble $S = \{n \in \mathbb{N} : a\ n > b\}$ est non vide et admet un plus petit élément que l'on notera p.

2- On pose $r = b - (p - 1)a$. Montrer que $r < a$.

3- En déduire que $\forall x > 0$ et $\forall y \geq 0$, il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [0, x[$ tel que $y = qx + r$. Montrer que ce couple est unique.

Exercice 0.11. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x$ et $x^2 < 2\}$.

1- Montrer que A est une partie non vide et majorée dans $\mathbb{Q}$.

2- Soit $r \in A$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(2 - r^2) > 2r + 1$. En déduire que $r' = r + \frac{1}{n} \in A$.

3- Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que $M > \sqrt{2}$.

4- En déduire que $\sup A \notin \mathbb{Q}$.

Série3

Exercice 0.12. Soit un une suite bornée. Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \inf\{u_k; k \geq n\}$ et $w_n = \sup\{u_k; k \geq n\}$.

Vérifier que vn est croissante majorée et que wn est décroissante minorée.

Exercice 0.13. Soit un la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{2^{2n+1}}$.

1- Montrer que un est une suite géométrique et déterminer sa raison r.

2- Étudier la monotonie et la convergence de la suite un.

Exercice 0.14. Soient un une suite réelle et vn la suite dont le terme général est défini par :

$$v_0 = 0, \text{ et } \forall n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{n} \ \sum_{k=1}^{n} \ u_k.$$

1- En utilisant la définition de la convergence, montrer que si $\lim_{n\to\infty} \ u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to\infty} \ v_n = \ell$.

2- Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \ (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to\infty} \ \frac{u_n}{n} = \ell$.

3- On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to\infty} \ \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 0.15. Soit an la suite définie par $a_0 \in]1, 2[$ et $a_{n+1} = \frac{4a_n+2}{a_n+3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1- Montrer que an est une suite croissante majorée.

2- En déduire que an est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 0.16. Pour chacune des des suites suivantes étudier le sens de variation (croissance, décroissance ou monotonie) et la convergence.

$(a) \ \ u_0 = \dfrac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}; \quad (b) \ \ v_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{v_n}; \quad (c) \ \ w_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \dfrac{w_n}{w_n^2 + 1}.$

Exercice 0.17. Soient un et vn les deux suites définies par :

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{2n} \ \frac{k}{n^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{2n} \ \frac{k}{k+n^2}.$$

1- Montrer que la suite un est décroissante minorée. Déterminer sa limite.

2- On considère la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3- En déduire que un converge et donner sa limite.

Exercice 0.18. Soit $q \geq 2$ un entier et soit un la suite dont le terme général est donné par $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

1- Vérifier que pour tout entier n, $u_{n+q} = u_n$.

2- Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite un n' a pas de limite.

Exercice 0.19. Soit la suite un définie par :$u_0 = a \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}$.

1- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$.

2- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{2}$. En déduire la limite de un.

Exercice 0.20. On considère les suites réelles positifs un et vn définies par :

$$u_0 = a > 0,\ v_0 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n \ v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}. \text{ On suppose que } a < b.$$

1- Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

2- Montrer que un et vn sont convergentes et déterminer leur limite.

Série 4

Exercice 0.21. Calculer les limites suivantes :
(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x-9}-x$ (d) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0} x^2\Big(1+2+\ldots+\Big[\frac{1}{|x|}\Big]\Big)$.

Exercice 0.22. Soit la fonction $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu elle est injective. Déterminer la fonction inverse de f.

Exercice 0.23. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

Exercice 0.24. Soit f une fonction continue sur $[a,\infty[$ telle que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Prouver que f est bornée sur $[a,\infty[$.

Exercice 0.25. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite finie ℓ quand x tend vers ∞. Démontrez que f est constante.

Exercice 0.26. Soient $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues et x_0 un point où $f(x_0)>g(x_0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert centré en x_0 dans lequel f est strictement plus grande que g.

Exercice 0.27. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+6x+1}{9}$ et on définit la suite récurrente un par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\geq 0$.

1- Montrer que la fonction $g(x)=x^3-3x+1$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2- Déduire que x_0 est l'unique solution dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ de l'équation$f(x)=x$ et que $\forall x\in[0,x_0],\ f(x)\geq x$.

3- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq x_0$.

4- Étudier la monotonie de la suite un. Est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

Exercice 0.28. Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

Exercice 0.29. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,b]$ et telles que $\sup_{x\in[a,b]} f(x)=\sup_{x\in[a,b]} g(x)$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=g(c)$.

Exercice 0.30. Considérons la fonction $f:[1,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $x_n=n+\frac{1}{n}$ et $y_n=n$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $|f(x_n)-f(y_n)|>2$. En déduire que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 0.31. Montrer que l'application $f:x\longrightarrow\sqrt{x}$ est uniformément continue sur R^+.
(**Indication** : On pourra montrer d'abord que $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$ on a $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leq\sqrt{|x_1-x_2|}$.)

Exercice 0.32. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Prouver que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n})=0$.
(**Indication** : Utiliser l'uniforme continuité de f et considérer le cas n pair et le cas n impair.)

Exercice 0.33. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient xn des réels dans $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $x_0\in]a,b[$ tel que : $f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

Soient f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, D_f son domaine de définition et A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \left\{x \in D_f : f(x) > x\right\}$.

1- *Déterminer D_f.*

2- *Montrer que A admet une borne supérieure (on ne cherchera pas à la déterminer).*

3- *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > x$.*

4- *Montrer que A n'admet pas de plus grand élément.*

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = a\,\sin x + 1$, où $a \in]-1,1[$ est une constante.

1- *Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = x_0$.*

2- *Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$, tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ on a : $|F(x) - F(y)| \leq \alpha|x-y|$.*

On considère la suite xn définie par $x_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

3- *Montrer que, $\forall n \geq 1$, $|x_{n+1} - x_0| \leq \alpha|x_n - x_0|$.*

4- *En déduire que la suite xn converge vers x_0.*

Soit g la fonction définie par $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$.

a) *Déterminer le domaine de définition de g.*

b) *Vérifier que g est dérivable dans $]0,1[$ et calculer sa dérivée dans $]0,1[$*

c) *Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\frac{1}{2}\arccos(2x-1) + \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$.*

$\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x\cos x - \sin x}$.

a) Étudier l'existence de la limite en 0 de la fonction h.

b) Est-il possible de prolonger h par continuité en 0 ?

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$.

Corrigé du CF_Analyse1_S1_Automne2014

Exercice 1 : On a $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

1- La fonction f est bien définie si et seulement si, $x(1-x) \geq 0$. Or $x(1-x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0,1]$. D'où $D_f = [0,1]$.

2- On a $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\sqrt{3} > \frac{1}{4}$. Donc $A \neq \emptyset$. De plus $A \subset D_f$ est majorée par 1. En tant que partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, A admet donc une borne supérieure.

3- On a $\begin{cases} x \in [0,1] \\ \sqrt{x(1-x)} > x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x(1-x) > x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ x(1-2x) > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

4- D'après la question précédente, on a $A = \left]0, \frac{1}{2}\right[$, donc $\sup A = \frac{1}{2}$. Si A avait un plus grand élément, il serait égal à $\sup A = \frac{1}{2}$. Or $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} \notin A$. Donc A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 2 : $f(x) = a\,\sin x + 1$, où $a \in]-1,1[$.

1- On considère la fonction $g : x \mapsto a\,\sin x + 1 - x$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et on a $g(0) = 1 > 0$ et $g(3) = a \sin 3 + 1 - 3 < 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x_0 \in]1,3[$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

2- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, dérivable sur tout intervalle d'extrémités x et y. Donc $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$, on a par le théorème des accroissements finis,

il existe c compris entre x et y tel que : $f(x) - f(y) = (x-y) \times f'(c) = (x-y) \times a\,\cos(c)$.

Et comme $\sup_{c\in\mathbb{R}}\ |a\,\cos(c)| \leq |a|$, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| = |a\,\cos(c)| \leq \alpha|x-y|, \quad \text{avec } \alpha = |a|.$$

3- Pour tout $n \geq 1$ on a, d'après l'inégalité précédente, $|x_{n+1} - x_0| = |f(x_n - f(x_0)| \leq \alpha|x_n - x_0|$.

4- En appliquant successivement l'inégalité qu'on vient d'établir, on a :

$$|x_n - x_0| \leq \alpha|x_{n-1} - x_0| \leq \alpha^2|x_{n-2} - x_0| \leq \ldots \leq \alpha^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

D'où $0 \leq \lim_{n\to\infty}\ |x_n - x_0| \leq |x_1 - x_0|\ \lim_{n\to\infty}\ \alpha^{n-1}$. Comme $\alpha \in]0,1[$, on conclut que $\lim_{n\to\infty}\ |x_n - x_0| = 0$ ce qui est équivalent à $\lim_{n\to\infty}\ x_n = x_0$

Exercice 3 : On a $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$.

a) La fonction g est bien définie si, et seulement si, $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \in [-1,1]$. On en déduit que $D_g = [0,1]$.

b) La fonction g est la composée de deux fonctions dérivables sur $]0,1[$ donc elle est dérivable sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

c) Posons $h(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(2x-1) + \arcsin(\sqrt{x})$, pour $x \in]0,1[$. Cette fonction est bien définie et est dérivable. Pour montrer qu'elle est constante sur $]0,1[$, il suffit de montrer que sa dérivée est partout nulle. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right)' + \left(\arcsin(\sqrt{x})\right)' \\ &= \frac{1}{2} \times (2x-1)' \times (\arccos)'(2x-1) + (\sqrt{x})' \times (\arcsin)'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{-1}{\sqrt{4x(1-x)}} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\arccos 0 + \arcsin\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : Posons $f(x) = \cos x - 1$ et $g(x) = x\cos x - \sin x$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier au voisinage de 0) et on a $f(0) = g(0) = 0$. En appliquant la règle de l'Hospital on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x - x\sin x - \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{x\sin x} = -\infty.$$

De la même manière on obtient que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. On en conclut que la fonction h n'admet pas de limite en 0.

Elle n'admet donc pas de prolongement par continuité en 0.

Exercice 5 : Remarquons que $x \ln \dfrac{1+x}{x} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$. En posant $u = \frac{1}{x}$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1+x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u-0} = (\ln(1+x))'\Big|_{x=0} = 1.$$

Corrigé Série 1

Exercice 1 : 1.(a) est fausse il suffit de considérer lsa négation, qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = -1 < 0$.

2. (b)est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors x+y $= 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y \leq 0$.

3. (c) :$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x+y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leq 0$.

4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y^2 \leq x$.

Exercice 2 :

(1) $\exists x, \forall n : x > n$.

(2) $\exists M : \forall n, |u_n| > M$

(3) $\exists x, \exists y\ xy \neq yx$.

(4) $\exists x, \forall y : yxy^{-1} \neq x$.

(5) $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N\ |u_n| \geq \epsilon$.

(6) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0 : \exists f \in \mathcal{F}, \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \epsilon$.

Exercice 3 : Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \in f^{-1}(F \setminus A)$ alors $f(B) \in F \setminus A$ et $B \notin f^{-1}(A)$ soit $B \in E \setminus f^{-1}(A)$. Réciproquement $B \in E \setminus f^{-1}(A)$ alors $B \notin f^{-1}(A)$ donc $f(B) \notin A$ soit $f(B) \in F \setminus A$ et $B \in f^{-1}(F \setminus A)$.

Exercice 4 : A_1 et A_4 définissent deux demi-plans (on trace les droites $x+y = 1$ et $x+y = -1$, A_1 correspond au demi-plan inférieur par rapport à la droite $x + y = 1$ et A_4 correspond au demi plan supérieur par rapport à la droite $x + y = -1$. Par l'ensemble A_2 qui correspond à l intersection de A_1 et A_4. A_2 est défini par les inéquations $x + y < 1$ et $x + y > -1$. Ces deux inéquations sont équivalentes à $|x + y| < 1$. Pour obtenir A_5 on raisonne comme pour A_2 et on trace donc les droites $x - y = 1$ et $x - y = -1$. L'ensemble A_5 sera l'intersection du demi-plan inférieur défini par la droite $x - y = 1$ et du demi-plan supérieur défini par la droite $x - y = -1$.
Pour représenter l'ensemble A_3 on distingue 4 cas :
Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $x + y < 1$.
Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $x - y < 1$.
Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $-x + y < 1$.
Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $|x| + |y| < 1$ correspond à $-x - y < 1$.
Alors A_5 est l'intersection de A_2 et A_5.

Corrigé Série 2

Exercice 1 :

1) Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, supposons que $x+r = r' \in \mathbb{Q}$ alors $x = r - r' \in \mathbb{Q}$ absurde. Soit $r \neq 0$, supposons que $rx = r' \in \mathbb{Q}$ alors $x = \dfrac{r'}{r} \in \mathbb{Q}$ absurde.
2) $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ et $r' - r \in \mathbb{Q}$ d après 1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$. De m ême, $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) \notin \mathbb{Q}$.
   On a $x - r > 0$ et $x - r' = (r' - r)(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) < 0$. Ainsi $x \in]r, r'[$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

$$10^2x = 3172,356356356.......$$

$$10^5x = 3172356,356356356.....$$

$$x(10^5 - 10^2) = 3172356 - 3172$$

$$x = \frac{3172356}{10^5 - 10^2}$$

1) $A = [1,2] \cap \mathbb{Q}$ alors $A \subset [1,2]$. L 'ensemble des minorants de A est $]-\infty, 1]$. L 'ensemble des majorants de A est $[2, \infty[$.
   $\sup(A) = 2 \in A$; 2 est le plus grand élément de A. $\inf(A) = 1 \in A$; 1 est le plus petit élément de A.
2) $B =]1,2[\cap \mathbb{Q}$ alors $B \subset]1,2[$. L 'ensemble des minorants de B est $]-\infty, 1]$. L 'ensemble des majorants de B est $[2, \infty[$.
   $\sup(B) = 2 \notin B$; B n'admet pas de plus grand élément. $\inf(B) = 1 \notin B$; B n'admet pas de plus petit élément .
3) L 'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$ est $]-\infty, 0]$; $\inf(\mathbb{N}) = 0$ est le plus petit élément mais $\mathbb{N}$ n' est pas majoré.
4) $C = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$. Alors C est borné car $C \subset [-1, 2]$. L 'ensemble des minorants de C est $]-\infty, -1]$. L 'ensemble des majorants de C est $[2, \infty[$. De plus $2 \in C(\ n = 0)$; $\sup(C) = 2$.
   2 est le plus grand élément de C.
   $\inf(C) = -1$. En effet, $\forall x \in C; x \geq -1$ et d'après la propriété d'Archimède :
   $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2n+1} < \varepsilon$. Alors $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} < \varepsilon + (-1)$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, on a $\inf(C) = -1$.

Exercice 4 :

1) D'abord $(*) \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ et $x \neq -1$
   $(*)$ est équivalente à $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} > 0$, comme $x^2 + x + 2 > 0$; $\Delta < 0$, il suffit que $x + 1 > 0$ c'est à dire $x > -1$.
   Il faut résoudre les inéquations $(1) \dfrac{x^2+x+2}{x+1} \geq 1$ et $(2) \dfrac{x^2+x+2}{x+1} < 2$.
   (1) implique que $x \in (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[) \cap]-1, \infty[=]-1, 0] \cup [1, \infty[$.
   (1) implique que $x \in]x_1, x_2[$ avec $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.
   Alors $x \in I$, s'il vérifie (1) et (2), soit $x \in]x_1, 0] \cup [1, x_2[$.

2) $\inf(I) = x_1$ et $\sup(I) = x_1$.

Exercice 4 :

1) Soit $x \in A+B$ alors $\exists a \in A; b \in B$ tel que $x = a+b$ et donc $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.

2) $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$, comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants,on a $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)(1)$.

Soit $a \in B$ fixé, pour tout $b \in B$ on a $a + b \leq \sup(A+B)$ alors $\forall b \in B$; $b \leq \sup(A+B) - a$. On en déduit que $\sup(B) \leq \sup(A+B) - a$.

Pour tout $a \in A$, on a $a \leq \sup(A+B) - \sup(B)$, comme $\sup(A)$ est le plus petit des majorant, $\sup(A) \leq \sup(A+B) - \sup(B)$ d'où $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)(2)$. (1) et (2) implique l'égalité.

Exercice 6 :

1) A est non vide car d'après la propriété d'Archimède, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{b}{a} < n_0$. $A \subset \mathbb{N}$ donc A est minorée . Soit $p = \min(A)$; $p \geq 1$ (car $b \geq 0$).

2) $p - 1 \notin A \Rightarrow a(p-1) \leq b$. Posons $r = b - a(p-1) \geq 0$, $r - a = b - pa < 0$. D'où $0 \leq r < a$.

3) Posons $x = a$, $y = b$, $q = p - 1$, $r = y - qx$ et $0 \leq r < x$.

Unicité : comme $p$est le minimum de A, $q = p - 1 \in \mathbb{N}$ est unique, on en déduit unicité de r.

Exercice 7 :

1) A est non vide : $\dfrac{5}{4} \in A$.

$x \in A \Longrightarrow x > 1$ d'où $x < x^2 < 2 \in \mathbb{Q}$; donc A est une partie majorée de $\mathbb{Q}$.

2) Soit $r \in A$ alors $\dfrac{2-r^2}{2r+1} > 0$, d'après la propriété d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\dfrac{2-r^2}{2r+1} > 1$.

$r^{'} - r = \frac{1}{n} > o$ d'où $r^{'} > r > 1$. Par ailleurs, $2 - r^{'2} = 2 - r^2 - \frac{2r}{n} - \frac{1}{n^2} > 2 - r^2 - \dfrac{2r+1}{n} = (2-r^2)[1 - \dfrac{2r+1}{n(2-r^2)}] < 0$. Donc $r^{'} \in A$.

3) Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A alors $M > 1$, supposons que $M < \sqrt{2}$ alors $M^2 < 2$ d'où $M \in A$. d'après 2), $M + \frac{1}{n} \in A$ ce qui est absurde. Donc $M > \sqrt{2}$

4) $\sqrt{2}$ est un majorant de A. Or tout M qui majore A doit être supérieur à $\sqrt{2}$ et $\sup(A) \leq \sqrt{2}$, on conclut que $\sup(A) \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé Série 3

Exercice 1 : Posons $A_n = \{u_k; k \geq n\}$. On a $A_{n+1} \subset A_n$ donc $\inf(A_{n+1}) \geq \inf(A_n)$ et $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$ d'où le résultat.

On a (u_n) est bornée alors $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n \leq M$. On a $v_n \leq u_n$ donc (v_n) est majorée par M. $w_n \geq u_n$ alors (w_n) est minorée par m.

Exercice 2 :

1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e}{4}$ ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{e}{4}$.
2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc (u_n) est décroissante. Elle est convergente car $0 < r < 1$.

Exercice 3 :

1) $u_n \to l$ signifie
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$
. On a
$$\begin{aligned} |v_n - l| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{n} |u_k - l| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$
Posons $A_{N_\varepsilon} = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |u_k - l|$ est bornée, on a $\dfrac{A_{N_\varepsilon}}{n} \longrightarrow 0$. Alors $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N_0$ on a $\frac{A_{N_\varepsilon}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour $n \geq \max(N_\varepsilon, N_0)$ on a $|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
2) Posons $\beta_n = u_{n+1} - u_n$ d'après 1) on a $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \beta_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-u_1}{n} = l$ soit$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{n} = l$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n-1}\frac{n-1}{n} = l$.
3) Posons $\alpha_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, alors d'après la question 2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \ln(l)$. d'où $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Exercice 4 :

1) Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+2}$ pour $x \neq -2$. Alors $x \to f(x)$ est croissante, il suffit de comparer a_0 et $f(a_0)$.
$f(a_0) - a_0 = \dfrac{-(a_0-2)(a_0+1)}{a_0+3}$. Comme $a_0 \in]1, 2[$ et $a_n > 0$, on a $f(a_0) - a_0 > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.
2) Montrons que $a_n \in]1, 2[\,(*)$par récurrence. On a $(*)$ est vraie pour $n = 0$. Supposons que $(*)$ est vraie à l'ordre n est montrons $(*)$ pour l'ordre $n + 1$.
$1 < a_n < 2 \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2} < f(a_n) < f(2) = 2$ d'où le résultat.
3) La suite $(a_{n)})$ est croissante et majorée par 2 donc convergente.
Soit $\lim u_n = l$ alors l est solution de l 'équation $l = f(l)$. d'où $l^2 - l - 2 = (l-2)(l+1) = 0$. Alors $\lim u_n = \sup(u_n) = 2$ $(1 \leq l \leq 2)$.

Exercice 5 :

a) On a $f(x) = \sqrt{(x)}$ strictement croissante et $f(\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$. Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. La limite l vérifie l'équation $l = \sqrt{l}$ soit $l^2 = l$ et $l = \sup(v_n) = 1$

b) $f(2) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 2$. Donc la suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Donc $l = 1 = \inf(v_n)$.

c) On $w_n > 0$, alors $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{w_n^2+1} < 1$ d'où (w_n) est décroissante, minorée par 0donc convergente. La limite l vérifie $l = \dfrac{l}{l^2+1}$, soit $l = 0 = \inf(w_n)$.

Exercice 6 :

1) $u_n = 2 + \frac{1}{n} > 2$, donc (u$_n$)$dcroissanteminorepar 2$,$\lim u_n = 2$.

2,3) $w_n = v_n - u_n = \dfrac{-k^2}{n^2(k+n^2}$. Or $\dfrac{1}{2n+n^2} < \dfrac{1}{k+n^2} < \dfrac{1}{n^2+1}$ alors $\dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6(2n+n^2)} < -w_n < \dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6(1+n^2)}$. Par la suite $\lim w_n = 0$ et $\lim v_n = \lim \lim w_n + u_n = 2$

Exercice 7 :

1) $u_{n+q} = \cos(\dfrac{2(n+q)\pi}{q}) = u_n$

2) $u_{nq} = \cos(\dfrac{2nq\pi}{q}) = \cos(2n\pi) = 1$. et $u_{nq+1} = \cos\frac{2\pi}{q}$.

2) La suite (u_n) n 'est pas de Cauchy :

$$\exists \varepsilon = \frac{1 - \cos(\dfrac{2\pi}{q})}{2} > 0$$

(car $q > 2$) $\forall n$ $nq \geq n$ et $nq + 1 \geq n$ mais $u_{nq} - u_{nq+1} > \varepsilon$.

Exercice 8 :

1) évident.

2) $u_{n+1} - u_n - \frac{1}{2} = \dfrac{4u_n+1}{2u_n+1} > 0$. On en déduit par télescopage que $u_n \geq a + \dfrac{n}{2}$. Donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 9 :

1) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$

$\dfrac{u^{n+1}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{v_n}{u_n}} \geq 1$. D où (u_n) est croissante. D autre part on a $v_{n+1} \leq \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$.

2) On a la suite (u_n)est croissante majorée par $v_0 = b$ donc convergente, soit $l = \lim u_n$. La suite (v_n) est décroissante minorée par $u_0 = a$ donc convergente, soit $l^{'} = \lim v_n$. $l, l^{'}$ vérifient les équations suivantes : $l = \dfrac{l + l^{'}}{2}$ et $l^{'} = \sqrt{ll'}$ ce qui donne $l = l^{'}$.

Corrigé Série 4

Exercice 1 :

a)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \qquad = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1} = -\infty$$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2} = -\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)} = \dfrac{-5}{9}$

d)

$$0 \leq |x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} |x\sin(\frac{1}{x})| = 0$$

e)

$$A_x = 1+2+..........[\frac{1}{|x|}] = \frac{1}{2}([\frac{1}{|x|}])([\frac{1}{|x|}]+1)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} x^2 A_x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}((|x|[\frac{1}{|x|}])^2 + x^2[\frac{1}{|x|}]).$$

On a et

$$x^2(\frac{1}{|x|}-1) < x^2[\frac{1}{|x|}] \leq x^2\frac{1}{|x|}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} x^2[\frac{1}{|x|}] = 0.$$

D' autre part on a :

$$|x|(\frac{1}{|x|}-1) < |x|[\frac{1}{|x|}] \leq |x|\frac{1}{|x|}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} |x|[\frac{1}{|x|}] = 1.$$

et

$$\lim_{x\to 0} x^2 A_x = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 : On a $x^2+1>0$ alors $Dom(f)=\mathbb{R}$.

$f^{'}(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

la fonction $x \longrightarrow f(x)$ est strictement monotone, donc iil existe une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]0,+\infty[$.

On résout l'équation $y=f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{2y}, \forall y \in]0,+\infty[$.

Exercice 3 : La fonction est périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Alors la restriction de f est bornée sur $[0,T]$ (Théorème de Heine) c'est-à-dire :

$$\exists M > 0 \forall x \in [0,T]\ |f(x)| \leq M.$$

soit $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow n = [\frac{x}{T}] \leq \frac{x}{T} < n = [\frac{x}{T}] + 1$ alors $x - nT \in [0,T]$ et $|f(x)| = |f(x-nT)| \leq M$. donc f est bornée.

Exercice 5 : La fonction est périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$. Soit $x_n = x + nT \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} = +\infty$ comme $\lim_{n\to+\infty} f(x) = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ donc f est constante.

Exercice 6 : La fonction $h = f - g$ est continue en x_0 et $h(x_0) > 0$. Soit

$$\epsilon = \frac{h(x_0)}{2}\ \exists \alpha > 0 tel\ que\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

D'où $\forall x \in I_{x_0} =]x - x_0, x + x_0[\Longrightarrow h(x) > \epsilon > 0$ donc $f(x) > g(x)\ \forall x \in I_{x_0}$.

Exercice 6 : f, g étant continues sur $[a,b]$, $(\exists x_0 \in [a,b]) telque$ $\sup(f(x)) = f(x_0)$ et $(\exists y_0 \in [a,b])$ $telque$ $\sup(g(x)) = g(y_0)$(Théorème de Heine). Si $x_0 = y_0$ rien à démontrer, supposons que $x_0 \neq y_0$. Posons $h = f - g$ alors h est continue sur $[x_0, y_0]$

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$$

et

$$h(y_0) = f(y_0) - g(y_0) \leq 0$$

Théorème de la valeur intermédiaire implique $\exists c \in [x_0, y_0]$ tel que $h(c) = 0$ soit $f(c) = g(c)$

Exercice 12 : La fonction $x \longrightarrow f(x)$ est continue sur $[0,1]$, donc uniformément continue .

$$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha > 0; \forall x, y \in [0,1] tel\ que\ \ |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Posons

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(\frac{k}{n})$$

alors on a :

u$_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k f(\frac{k}{2n})$
$= \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{2p} f(\frac{2p}{2n}) + \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{2p+1} f(\frac{2p+1}{2n})$
$= \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{n-1}(f(\frac{2p}{2n}) - f(\frac{2p+1}{2n}) + \frac{f(1)}{2n}$

Et

$|u_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} |f(\frac{2p}{2n}) - f(\frac{2p+1}{2n})| + \frac{|f(1)|}{2n}$

Si $|\frac{2p}{2n} - \frac{2p+1}{2n}| = \dfrac{1}{2n} < \alpha$ alors $|f(\frac{2p}{2n}) - f(\frac{2p+1}{2n})| < \frac{\epsilon}{2}$ Il suffit de prendre $n > N = [\dfrac{1}{2\alpha}] + 1 > \dfrac{1}{2\alpha}$ Alors $|u_{2n}| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \frac{|f(1)|}{2n}$ Aussi $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \ \forall n > N_0 \Longrightarrow \frac{|f(1)|}{2n} < \frac{\epsilon}{2}$
D'où

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_1 = \max(N, N_0) \in \mathbb{N} \ \forall n > N_1 \Longrightarrow |u_{2n}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

On conclut que $\lim_{n\to+\infty} |u_{2n}| = 0$ soit $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ De la même façon on démontre que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ sauf que dans ce cas il n'y a qu' une seule somme. Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$