# Cours de Mathématiques
# Licence Economie L1

Abdelâaziz EZZIANI & Sami AS SOULAIMANI[1]

Université Hassan II–Mohammedia,
Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales
Ain Sebaa
Automne 2009, S1

[1]Beausite, BP. 2634 Ain Sebaa Casablanca

# Attention

Ce polycopié est en cours de préparation il est mis en ligne juste pour aider les étudiants à réviser, il est (très) loin de sa version définitive.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Génaralités sur les ensembles

## 1.1 Ensembles

**Définition 1.1.1.** *Un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont encore appelés* éléments *de cet ensemble.*

**Exemple 1.1.2.** *1.* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *est l'ensemble des entiers naturels,*

*2.* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *est l'ensemble des entiers relatifs,*

*3.* $\mathbb{Q}$ *est l'ensemble des nombres rationnels,*

*4.* $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des réels.*

**Remarque 1.1.3.** *On convient qu'il existe un ensemble ne contenant aucun élément qu'on appellera l'ensemble vide. On le notera par* $\emptyset$ *(ou par* $\{\,\}$*).*

**Définition 1.1.4.** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux ensembles non vides.* $B$ *est dit sous ensemble de* $A$ *ou contenu dans* $A$ *si tous les éléments de* $B$ *appartiennent à* $A$*.*

*On note*

$$B \subset A.$$

**Exemple 1.1.5.** *1.* $\mathbb{N} = \{-1/2, 2, 3/5\}$ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{Q}$*.*

*2.* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/\ x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$,

*3.* $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}/\ x \leq 0\} \subset \mathbb{R}$,

*4.* $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}/\ x \neq 0\} \subset \mathbb{R}$.

## 1.2 Opérations sur les ensembles

**Définition 1.2.1.** *Soit* $E$ *un ensemble et* $B$ *et* $C$ *deux sous-ensembmles de* $E$*.*

*1. L'intersection de* $B$ *et de* $C$ *est le sous-ensemble de* $E$ *noté par* $B \cap C$ *et défini par*

$$B \cap C = \{x \in E\ /\ x \in B \text{ et } x \in C\}.$$

2. *L'union (ou la réunion) de $B$ et de $C$ est le sous ensemble de $E$ noté $B \cup C$, défini par*

$$B \cup C = \{x \in E \ / \ x \in B \text{ ou } x \in C\}.$$

3. *Le complémentaire de $B$ dans $E$ est le sous ensemble noté $E \setminus B$ (ou $C_E^B$), défini par*

$$C_E^B = \{x \in E / \ x \notin B \ \}.$$

**Remarque 1.2.2.** *Il est très important de noter que pour que les opérations $\cap$ et $\cup$ aient un sens l'ordre des parenthèses est crutial*[1]*.*

**Propriétés 1.2.3.** *Soient $A$, $B$ et $C$ des ensembles quelconques. On a les propriétés suivantes*
- **Commutativité** $A \cap B = B \cap A$.
- **Associativité** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *et de même pour la réunion on a* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- **Distributivité** *On a*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

**Exemple 1.2.4.** *Soient les ensembles suivants*
$E = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$B = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3\}$
*et* $C = \{-4, 1, 2, 5, 7\}$.
*On a alors*
- $B \cap C = \{-4, 1, 2\}$.
- $B \cup C = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3, 5, 7\}$
- $B \setminus C = \{-6, -2, 3\}$

**Exercice 1.2.5.** *En considérant le dernier exemple. Donner explicitement les ensembles suivants*

1. $B \setminus (C \cap B)$
2. $C_E^B \cap C_E^C$
3. $C_E^{B \cup C}$
4. $C_E^{B \cap C}$

[1]En effet regardons l'exemple suivant : Soient $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 1, 2, 3\}$ et $C = \{-4, 1, 2, 5, 7\}$. L'écriture $A \cup B \cap C$ aura différentes lectures qui donnerait des résultats différents.

1. Si on lit l'expression $A \cup B \cap C$ comme ça $(A \cup B) \cap C$ alors on a $(A \cup B) \cap C = \{1, 2\}$,
2. et si la lecture se fait de cette manière $A \cup (B \cap C)$, on alors $A \cup (B \cap C) = A$.

Il est clair que $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$

5. $C_E^B \cup C_E^C$

**Propriétés 1.2.6.** *Soient $E$ un ensemble non-vide et $B$ et $C$ deux sous-ensembles de $E$. On a*

1. $C_E^{B\cup C} = C_E^B \cap C_E^C$
2. $C_E^{B\cap C} = C_E^B \cup C_E^C$

# Chapitre 2

# Fonctions d'une variable réelle

## 2.1 Applications

**Définition 2.1.1** (Application)**.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles quelconques non-vides.*

- *Une* **application** $f$ **allant de** $E$ **vers** $F$ *est une correspondance entre les éléments de $E$ et les éléments de $F$ telle que à chaque élément de $E$ on fait correspondre* **au plus**[1] *un seul élément de $F$.*
- *L'ensemble $E$ est dit l'***ensemble de départ***. $F$ est dit l'***ensemble d'arrivée***.*
- *Si $x \in E$ et $y \in F$ tels que $f(x) = y$, alors $x$ est dit* **un antécédent** *de $y$, et $y$ est dite* **l'image** *de $x$ par $f$.*

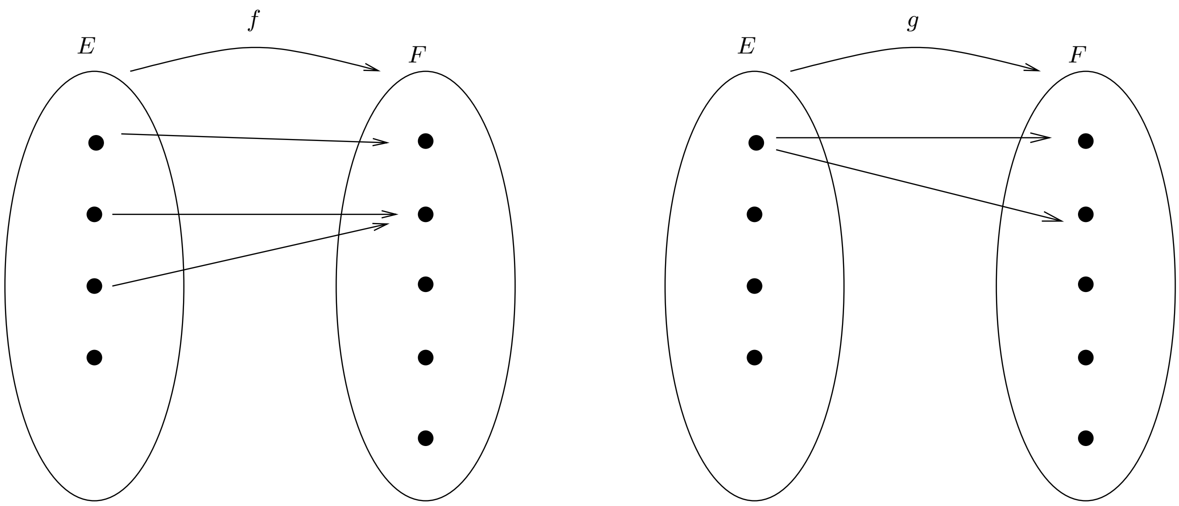



FIG. 2.1 – $f$ est une application et $g$ n'est pas une application

[1]Ce qu'on veut dire par là c'est que un élément de $E$ peut avoir soit une image par $f$ ou ne pas avoir d'image du tout.

**Exemple 2.1.2.** *1. Soient $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{Z}$ on définit par $f$ la "correspondance" $E(x)$ (la partie entière de $x$). $E(x)$ est une application car $E(x)$ est un seul élément pour tout $x \in \mathbb{R}$. Remarquer que tous les éléments de $[0, 1[$ ont la même image 0, pourtant ceci ne dérange pas le fait que $E(\cdot)$ soit une application.*

*2. Regardons la fonction $f(x) = |x|$. On veut montrer que la dérivée de cette fonction n'est pas une application. On sait que*

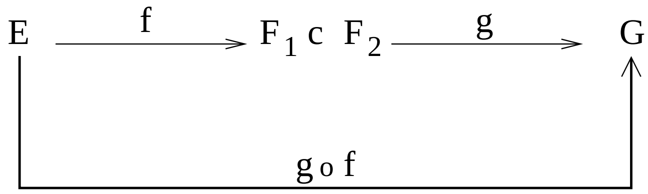
$$f(x) \begin{cases} x & \text{quand} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{quand} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

*Alors on a*

$$f'(x) \begin{cases} 1 & \text{quand} \quad x \geq 0, \\ -1 & \text{quand} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

*On remarque que $f'(0) = \{-1, 1\}$. Donc f'(x) n'est pas une application.*

**Définition 2.1.3** (Composée de deux applications)**.** *Soient $f$ une application de $E$ dans $F_1$ et $g$ une application de $F_2$ dans $G$. Si $F_1 \subset F_2$, l'application $x \longmapsto g(f(x))$ définie sur $E$ à valeurs dans $G$ est appelée composée des applications $g$ et $f$, on la note $g \circ f$.*




**Exemple 2.1.4.**

*1. Soient les deux applications :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x \end{array}$$

*la composée de $g$ et $f$ est donnée par :*

$$\begin{array}{rcl} h = gof : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) = g(x^2) = 1 - x^2 \end{array}$$

*2. Soient les deux applications :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{-x} \end{array}$$

*Ici, le domaine d'arrivée de $f$ est $\mathbb{R}^+$. Or le domaine de départ de $g$ est $\mathbb{R}^-$. La fonction $g \circ f$ n'a donc pas de sens ici (puisque $\mathbb{R}^+ \not\subset \mathbb{R}^-$).*

**Remarque 2.1.5.**

- *La composition de fonctions n'est généralement pas commutative :* $f \circ g \neq g \circ f$.
- *La composition de fonctions est associative :* $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

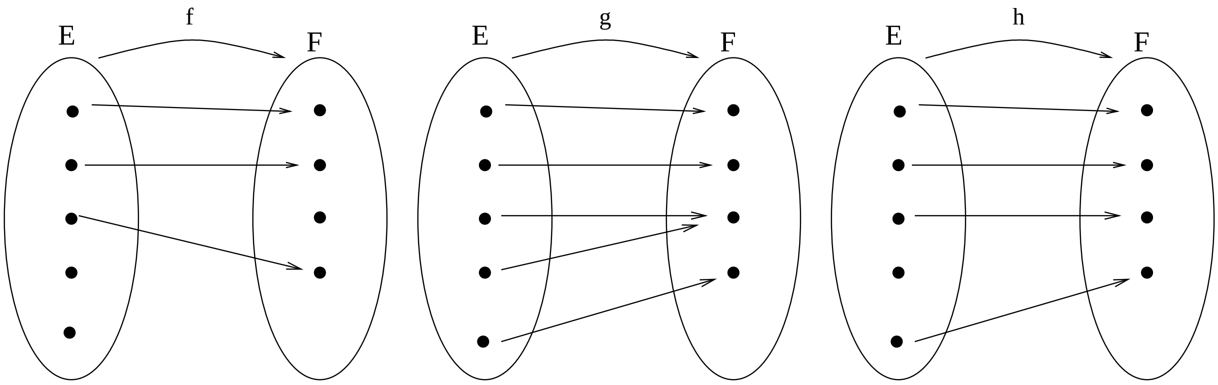
**Définition 2.1.6** (Injective, surjective, bijective)**.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles quelconques*

*i) Une application $f$ est dite* **injective** *ssi*

$$x \neq y \text{ alors } f(x) \neq f(y)$$

*ii) Une application $f$ est dite* **surjective** *si $f(E) = F$*

*iii) Une application $f$ est dite* **bijective** *si elle est à la fois surjective et injective.*




(a) Application injective (b) Application surjective (c) Application bijective

**Remarque 2.1.7.** 1. *La partie i) de la définition est équivalente au fait que chaque élément dans $F$ a au plus un antécédent dans $E$.*
*Elle est aussi équivalente au fait que si*

$$f(x) = f(y) \text{ alors } x = y.$$

2. *La partie ii) de la définition est équivalente au fait que tout élément de $F$ a au moins un antécédent dans $E$.*
3. *La partie iii) de la définition est équivalente au fait que tout élément de $F$ a un unique antécédent dans $E$.*

**Définition 2.1.8** (Application réciproque)**.** *Soit $f$ une application* **bijective** *de $E$ dans $F$, on appelle application réciproque de $f$ notée $f^{-1}$ l'application de $F$ dans $E$ qui à tout élément $y$ de $F$ associé un unique antécédent $x$ de $E$ par $f$.*

**Remarque 2.1.9.**

**a-** $f^{-1} \circ f(x) = x, \ \ \forall\, x \in E.$

**b-** $f \circ f^{-1}(y) = y, \ \ \forall\, y \in F.$

**Exemple 2.1.10** (Application injective)**.** *Soient* $E = ]0,1]$, $F = [0,2]$ *et* $f(x) = x^2$. *On sait alors que* $f$ *est injective car si* $f(x) = f(y)$ *alors on a*

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ (x-y)(x+y) &= 0 \\ \text{donc} \quad x - y &= 0, \end{aligned}$$

*car* $x + y > 0$ *puisque* $x,\ y \in ]0,1]$. *Remarquer que si on prend un autre ensemble de départ* $E = [-1,1]$ *par exemple, le raisonnement qui précède ne tient plus et on a de plus que* $f(1) = f(-1) = 1$. *On conclut que le fait qu'une application soit injective ou non dépend aussi de l'ensemble de départ.*

**Exemple 2.1.11** (Application surjective)**.** *Soient* $E = [-1,1]$, $F = [-1,1]$ *et* $f(x) = x^3$. *Il est très facile de voir ici que* $f(E) = F$ *donc* $f$ *est surjective. Remarquer que si on change l'ensemble d'arrivée* $F$ *en le mettant plus grand (au sens de l'inclusion)* $f$ *n'est plus surjective.*

**Exercice 2.1.12** (Application bijective)**.** *Soient* $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $f(x) = e^x$. *Montrer que* $f$ *est bijective et déterminer l'application réciproque* $f^{-1}$.

## 2.2 Fonctions : définitions et propriétés

### 2.2.1 Définitions

**Définition 2.2.1** (Fonctions, Domaine de définition, Courbe)**.**

- *Une fonction est une application numérique.*
- *Le domaine de définition d'une fonction* $f$ *donnée, noté par* $Df$ *est l'ensemble dans lequel la fonction est bien définie : c'est-à-dire si* $x \in Df$ *alors* $f(x)$ *existe (ou a un sens)*[2]
- *La courbe (ou graphe)de la fonction* $f$ *dans un repère orthonormé, notée par* $C_f$, *est l'ensemble suivant*

$$C_f = \{(x,y) \in Df \times \mathbb{R} \ \ \text{tel} \ \ \text{que} \ \ y = f(x)\}.$$

**Exemple 2.2.2.** *Considérons les fonctions suivantes.*

1. *Soit* $f(x) = 1/x$. $Df = \mathbb{R}^*$.
2. *Soit* $g(x) = \sqrt{x}$. $Dg = \mathbb{R}^+$.
3. *Soit* $h(x) = \ln(x)$. $Dh = \mathbb{R}^{+,*}$.
4. *Soit* $z(x) = \ln(\frac{1}{\sqrt{x}})$. *Donner* $Dz$ *?*

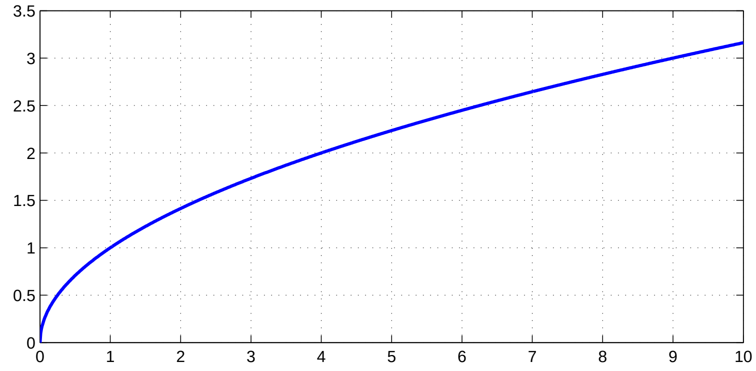



FIG. 2.2 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$

**Remarque 2.2.3.** *Soit $h = g \circ f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow G \subset \mathbb{R}$ la fonction composée des fonctions $g$ et $f$. Le domaine de définition de $h$ est défini par :*

$$D_{g\circ f} = \{x \in E \,/\, x \in D_f et f(x) \in D_g\}.$$

**Exemple 2.2.4.** *On considère les deux fonctions :*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

*On calcule facilement la fonction composée $g \circ f$ :*

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-2}\right), \quad \forall\, x \neq 2 \\ &= \frac{2\dfrac{1}{x-2}+1}{\dfrac{1}{x-2}-1} = \frac{x}{3-x}, \quad \forall\, x \neq 3, \end{aligned}$$

*et son domaine de définition*

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \ \ et\ \ f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2 \ \ et\ \ \frac{1}{x-2} \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 2 \ \ et\ \ x \neq 3\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}. \end{aligned}$$

[2]Il est à noter que comme dans le langage courant la composition des mots dans une phrase s'il ne respectent pas un ordre précis n'auraient aucun sens. Ainsi pour les mathématiques $1/0$, $\sqrt{-3}$, n'ont aucun sens..

### 2.2.2 Parité et symétrie

**Définition 2.2.5** (Fonction paire)**.** *Soit $f : Df \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que*
*i) si $x \in Df$ alors $-x \in Df$,*
*ii) on a $f(x) = f(-x)$,*
*Alors $f$ est dite fonction* **paire***.*

**Remarque 2.2.6.** *Une fonction paire est une fonction qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

*Il est à noter que la raison principale de l'étude de la parité est le fait que l'on se restreint sur la partie positive (ou négative) de $Df$ quand on étudie la fonction $f$.*

**Exemple 2.2.7.** *Les fonctions suivantes sont des fonctions paires.*

1. *Soit $f(x) = 1/x^2$. $Df = \mathbb{R}^*$.*
2. *Soit $g(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$. $Dg = \mathbb{R}$.*
3. *Soit $h(x) = \ln(|x|)$. $Dh = \mathbb{R}^*$.*

**Définition 2.2.8** (Fonction impaire)**.** *Soit $f : Df \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que*
*i) si $x \in Df$ alors $-x \in Df$,*
*ii) on a $f(-x) = -f(x)$,*
*Alors $f$ est dite fonction* **impaire***.*

**Remarque 2.2.9.** *Une fonction impaire est une fonction qui est symétrique par rapport à l'origine.*

**Exercice 2.2.10.** *Montrer que :*

- *les fonctions suivantes sont impaires.*
  1. *Soit $f(x) = 1/x^3$. $Df = \mathbb{R}^*$.*
  2. *Soit $g(x) = x^3 + 2x$. $Dg = \mathbb{R}$.*
  3. *Soit $h(x) = sin(x^3 + 2x)$. $Dh = \mathbb{R}$.*
- *Une fonction paire n'est pas une fonction injective.*
- *Peut on dire qu'une fonction impaire est injective[3] ?*
- *Si $f(x)$ est paire et que $g(x)$ est paire alors $f(g(x))$ est paire. Que dire si $f$ est paire (resp. impaire) et que $g$ est impaire (resp. paire) ?*

**Théorème 2.2.11.** *Soient $f$ une fonction définie sur $Df$, et $a$ un réel quelconque, tels que $Df$ est symétrique par rapport au point $a$.*

- *Si pour tout $x \in Df$ on a $f(a - x) = f(a + x)$, alors $C_f$ est symétrique par rapport à l'axe $x = a$.*

[3] Indication : Regarder la fonction

$$f(x) \begin{cases} 1 \text{ quand } x \geq 0, \\ -1 \text{ quand } x < 0. \end{cases}$$

– *Si pour tout $x \in Df$ on a*

$$\frac{f(a-x)+f(a+x)}{2} = b,$$

*alors la courbe $C_f$ est symétrique par rapport au point $M(a,b)$.*

**Exemple 2.2.12.** *Soit $f(x) = (x-1)^2$. On veut montrer que $C_f$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 1$. Il est facile de voir que $Df = \mathbb{R}$, donc $Df$ est symétrique par rapport à 1. On a*

$$\begin{aligned} f(1-x) =& \big((1-x)-1\big)^2 \\ =& (-x)^2 = x^2. \end{aligned}$$

*de même*

$$\begin{aligned} f(1+x) =& \big((1+x)-1\big)^2 \\ =& x^2. \end{aligned}$$

*Donc on a montré que*

$$f(1+x) = f(1-x).$$

■

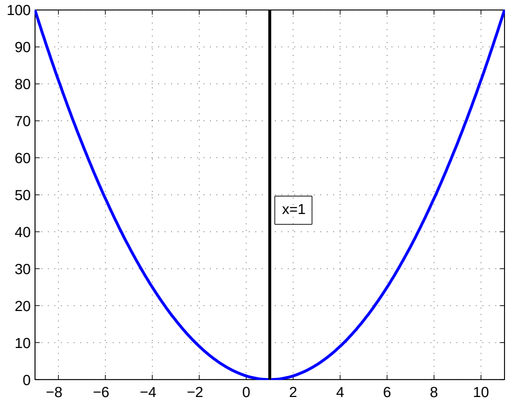



FIG. 2.3 – La courbe de $x \longrightarrow (x-1)^2$

**Exemple 2.2.13.** *Soit $f(x) = (x-1)^3$. On veut montrer que $C_f$ est symétrique par rapport au point $M(1,0)$. $Df = \mathbb{R}$, donc $Df$ est symétrique par rapport à 1. On a*

$$\begin{aligned} f(1-x) =& \big((1-x)-1\big)^3 \\ =& (-x)^3 = -x^3. \end{aligned}$$

*de même*

$$\begin{aligned} f(1+x) =& \big((1+x)-1\big)^3 \\ =& x^3. \end{aligned}$$

*Donc on a montré que*

$$\frac{f(1+x)+f(1-x)}{2} = \frac{-x^3+x^3}{2} = 0.$$

■

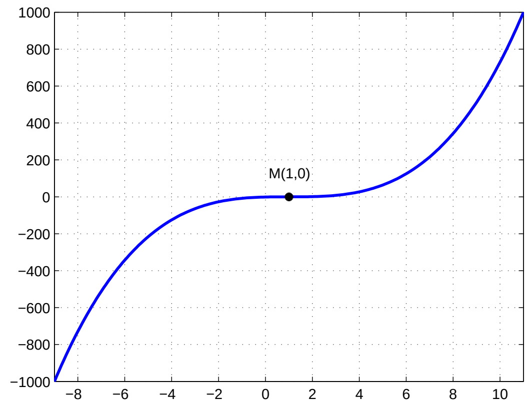



FIG. 2.4 – La courbe de $x \longrightarrow (x-1)^3$

### 2.2.3 Monotonie

**Définition 2.2.14.** *Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ où $I \subset Df$ est un intervalle donné.*

*i) On dit que $f$ est* **croissante** *dans $I$ si pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$.*

*ii) On dit que $f$ est* **décroissante**[4] *dans $I$ si pour tout $x, y \in I$ tels que $x \leq y$ on a $f(y) \leq f(x)$.*

**Remarque 2.2.15.** *La croissance ou la décroissance d'une fonction est une propriété* **locale** *en général. En effet une fonction donnée peut être croissante sur un intervalle $I$ et décroissante sur un autre intervale $J$. Pour s'en convaincre facilement regardons l'exemple suivant : $f(x) = |x|$, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ mais croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

**Exemple 2.2.16.** *Soit $f(x) = x^3$. On a $Df = \mathbb{R}$, et on veut monter que $f$ est croissante sur $Df$. En effet, soient $x, y \in Df$ tel que $x \leq y$. Calculons le signe f(x)-f(y) On a*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x^3 - y^3 \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ &= (x-y)(x^2+xy+\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{4}y^2) \\ &= (x-y)((x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2) \leq 0. \end{aligned}$$

[4] Comme définition équivalente, on peut dire que $f$ est décroissante sur $I$ ssi $-f$ est croissante sur $I$.

*On a donc montré que si $x, y \in Df$ tel que $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$. Par conséquence $f$ est croissante*

### 2.2.4 Périodocité

**Définition 2.2.17** (Fonction périodique)**.** *Une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique, s'il existe un nombre $T$ non nul ($T \neq 0$) tel que $f(x+T) = f(x), \;\; \forall x \in E$.*

**Exemple 2.2.18.** *On considère la fonction cosinus :*

$$\begin{array}{rcl} \cos : \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

*La fonction cosinus est périodique de période $2\pi$.*

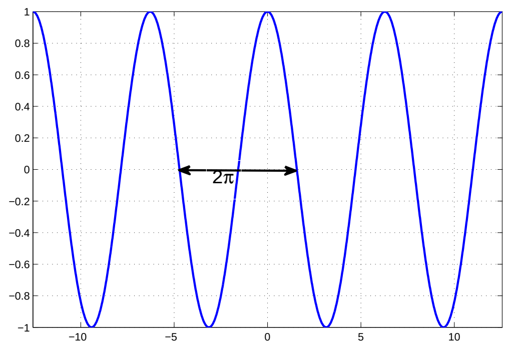



Fig. 2.5 – La courbe de $x \longrightarrow \cos(x)$

**Exercice 2.2.19.** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T$.*

– *Montrer que*

$$f(x + kT) = f(x), \;\; \forall x \in E, \, k \in \mathbb{Z}.$$

– *Montrer que $f$ n'est pas injective.*

### 2.2.5 Convexité / Concavité

**Définition 2.2.20.** *Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ où $I \subset Df$ est un intervalle donné.*

*i) On dit que $f$ est* **convexe**[5] *dans $I$ si pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ alors on a*

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

[5]De manière très formelle on peut dire qu'une fonction est convexe sur un intervalle $I$ si à chaque fois qu'une droite coupe son graphe en deux points sur $I$ on aura que la droite est en bas du graphe dans la zone d'intersection..

*ii) On dit que $f$ est* **concave**[6] *dans $I$ si pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$ alors on a*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

**Remarque 2.2.21.** *Il est important de noter que la convexité / concavité d'une fonction est un caractère locale. En effet une fonction peut être convexe sur un intervale concave sur un autre. Pour s'en convaincre regarder la fonction $x^3$ qui concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$.*

**Exemple 2.2.22.** *La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Il suffit de montrer que*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) - \big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big) \leq 0.$$

*On a*

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &- \big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big) \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda x^2 - (1-\lambda)^2 y^2 \\ &= (\lambda^2 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 - \lambda)y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &= \lambda(1-\lambda)(-x^2 - y^2 + 2xy) \\ &= -\lambda(1-\lambda)(x+y)^2 \ \leq 0. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Limites et Dérivées

### 2.3.1 Limite, continuité

**Définition 2.3.1.** *(Limite en un point) Soient $\ell$ et $a$ deux réels, et $f$ une fonction définie sur $Df$.*

- *Limite finie :*
  *On dit que la limite de $f$ quand $x$ tend vers $a$ est $\ell$, que l'on note comme suit*

  $$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = \ell},$$

  *si la propriété suivante est validée*
  Pour tout intervalle[7] ouvert $J$ contenant $\ell$, il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $a$ tel que [8] $f(I \cap Df) \subset J$.

[6] Comme définition équivalente, on peut dire que $f$ est concave sur $I$ ssi $-f$ est convexe sur $I$.

[7] Ce qu'on sous entend par la phrase **pour tout intervalle ouvert** contenant $a$, c'est : aussi petit qu'il soit l'intervalle $J$ contenant $a$... Il en est de même pour les " tout intervalle ouvert" qui viennent après.

[8] De manière équivalente on peut dire : pour tout $x \in I \cap Df$ on a que $f(x) \in J$.

- *Limite infinie($+\infty$) :*
  *On dit que la limite de $f$ quand $x$ tend vers $a$ est $+\infty$, que l'on note comme suit*
  $$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$
  *si la propriété suivante est validée*
  Pour tout $M > 0$, il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $a$ tel que pour tout $x \in (I \cap Df)$ on ait $f(x) > M$.
- *Limite infinie ($-\infty$) :*
  *On dit que la limite de $f$ quand $x$ tend vers $a$ est $-\infty$, que l'on note comme suit*
  $$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$
  *si la propriété suivante est validée*
  Pour tout $m < 0$, il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $a$ tel que pour tout $x \in (I \cap Df)$ on ait $f(x) < m$.

**Remarque 2.3.2.** *Il est important de noter que pour que l'expression $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ait un sens, il n'est pas nécessaire que $a \in Df$.*

**Exemple 2.3.3.** *Soit la fonction $f$ définie comme suit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. On a*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

*On a aussi*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to\pm} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm} x = \pm\infty.$$

**Définition 2.3.4.** *(Limites finies en $+\infty$ et $-\infty$)*

1. *Cas $+\infty$ : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient des valeurs $f(x)$ quand $x$ est très grand, alors on dit que*
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell,$$
   *dans ce cas on dira que la droite $y = \ell$ est* **asymptote** *de la courbe $C_f$ au voisinage de $+\infty$.*
2. *Cas $-\infty$ : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle du type $]-\infty, a]$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient des valeurs $f(x)$ quand $-x$ est très grand, alors on dit que*
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell,$$
   *dans ce cas on dira que la droite $y = \ell$ est* **asymptote** *de la courbe $C_f$ au voisinage de $-\infty$.*

**Propriétés 2.3.5.** *Soient $a$, $b$ deux réels, et $f$, $g$ et $h$ des fonctions.*

- **Asypmtotes** *:*
  *Si on a*
  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0,$$
  *alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $C_f$ en $\pm\infty$.*
- **Gendarmes** *:*
  *Soit $a \in E$ où $E = (Df \cap Dg \cap Dh)$. Si*
  1. *pour tout $x \in E$ on a*
  $$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$
  2. *et $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$,*

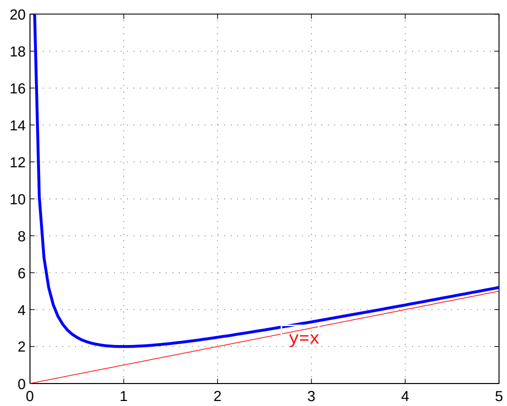
  *alors on a*
  $$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$
- **Gendarmes en $+\infty$** *:*
  *Si $f$ et $g$ sont définies sur un intervalle $I$ du type $[a, +\infty[$ et*
  1. *pour tout $x \in I$ on ait $g(x) \leq f(x)$,*
  2. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,

  *alors*
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

**Exemple 2.3.6.** *On considère la fonction :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} + x. \end{aligned}$$

*On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$, par conséquent la droite d'équation $y = x$ est un asymptote de $C_f$ en $+\infty$.*



### 2.3.2 Dérivé

### 2.3.3 Théorèmes importants (T.A.F, Rolle)

## 2.4 Fonctions usuelles