L'Hamiltonien d'une jonction de Josephson

L'Hamiltonien d'une jonction de Josephson est une expression clé pour décrire le comportement quantique de deux supraconducteurs couplés par un effet tunnel à travers une barrière isolante mince.

1. Forme de base de l'Hamiltonien de Josephson

L'Hamiltonien s'écrit généralement comme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J cos(\hat{\phi})$$

où :

- $\hat{Q}$ est l'opérateur de charge sur la jonction (conjugué à la phase),
- C est la capacité de la jonction,
- E_J est l'énergie de Josephson,
- $\hat{\phi}$ est l'opérateur de phase (différence de phase entre les deux supraconducteurs).

2. Commutation quantique

Les opérateurs $\hat{Q}$ et $\hat{\phi}$ satisfont la relation de commutation canonique :

$$[\hat{\phi}, \hat{Q}] = 2ei$$

où e est la charge de l'électron.

3. Interprétation physique

- Le terme $\frac{\hat{Q}^2}{2C}$ représente l'énergie électrostatique (ou de charge), liée à l'accumulation de charge sur la jonction.
- Le terme $E_J cos(\hat{\phi})$ décrit l'effet tunnel des paires de Cooper, qui est à l'origine du courant de Josephson.

4. Cas classiques

Dans l'approximation classique (ou semi-classique), on remplace les opérateurs par des variables classiques Q et ϕ, et l'Hamiltonien devient :

$$H = \frac{Q^2}{2C} - E_J cos(\phi)$$

Cela conduit aux équations de Josephson pour le courant :

$$I = I_c sin(\phi)$$

avec $I_c = \frac{2e}{\hbar} E_J$ le courant critique.

L'Hamiltonien d'une jonction de Josephson dans la base de charge, il faut exprimer les opérateurs $\hat{Q}$ et $\hat{\phi}$ en termes de leurs actions sur les états propres de charge.

1. Rappel de l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J cos(\hat{\phi})$$

2. Base de charge :

Les états propres de charge $|n\rangle$ satisfont :

- $\hat{Q}|n\rangle = 2ne|n\rangle$ (Nombre de paires de Cooper),
- Ces états sont orthonormés : $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

3. Terme de charge :

On a :

$$\frac{\hat{Q}^2}{2C}|n\rangle = \frac{(2ne)^2}{2C}|n\rangle = 4E_C n^2|n\rangle$$

où $E_C = \frac{e^2}{2C}$ est l'énergie de charge.
Donc dans la base de charge :

$$\frac{\hat{Q}^2}{2C} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4E_C n^2 \,|n\rangle\langle n|$$

C'est un oscillateur harmonique discret centré autour de $n = 0$, avec une énergie qui croît comme n^2.

4. Terme de Josephson :

Le terme $cos(\hat{\phi})$ agit comme un opérateur de déplacement dans l'espace de charge :

$$cos(\hat{\phi}) = \frac{1}{2}\left(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}\right)$$

Et dans la base de charge :

$$e^{\pm i\hat{\phi}}|n\rangle = |n \pm 1\rangle$$

Donc :

$$cos(\hat{\phi}) = \frac{1}{2}\sum_{n}(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|)$$

C'est une **matrice tri-diagonale symétrique** qui **couple uniquement les états voisins**.

5. Hamiltonien dans la base de charge :

$$\hat{H} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4E_C n^2 \,|n\rangle\langle n| - \frac{E_J}{2}\sum_{n}(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|)$$

Interprétation physique :

- Ce Hamiltonien est un oscillateur non harmonique sur réseau discret.
- Pour $E_J \ll E_C$: les états propres sont localisés en charge → qubit à base de charge sensible au bruit de charge.
- Pour $E_J \gg E_C$: les états deviennent délocalisés, le spectre est plus harmonique → qubit transmon plus stable.

C'est cette forme qu'on utilise notamment dans l'étude des qubits supraconducteurs comme le qubit charge ou le transmon, en tenant compte ou non du régime $E_J \ll E_C$ ou $E_J \gg E_C$.

L'Hamiltonien on fonction des opérateurs de création et d'annihilation

Étape 1 : Rappels

On part de l'Hamiltonien d'une jonction de Josephson :

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J cos(\hat{\phi})$$

On souhaite :

1. L'exprimer en termes d'opérateurs de création/annihilation bosoniques $(a^\dagger, a)$;
2. Puis le réécrire comme un Hamiltonien de Bose-Hubbard à deux sites.

Étape 2 : Approximation harmonique autour du minimum (transmon-like)

Autour du minimum de $-E_J cos(\hat{\phi})$, on peut faire une approximation quadratique (C'est une étape clé pour comprendre le comportement du transmon et d'autres circuits supraconducteurs dans le régime $E_J \gg E_C$) :

$$cos(\hat{\phi}) \approx 1 - \frac{\hat{\phi}^2}{2} + \frac{\hat{\phi}^4}{24} - \cdots$$

L'Hamiltonien devient alors :

$$\hat{H} \approx \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{E_J}{2}\hat{\phi}^2$$

Ce qui ressemble à un oscillateur harmonique avec $\hat{Q}$ et $\hat{\phi}$ comme variables conjuguées.

Étape 3 : Quantification – opérateurs bosoniques

On introduit :

$$\hat{\phi} = \phi_{\text{zpf}}(a + a^\dagger) \quad , \quad \hat{Q} = iQ_{\text{zpf}}(a^\dagger - a)$$

où :

- $\phi_{\text{zpf}} = \left(\frac{2E_C}{E_J}\right)^{1/4}$
- $Q_{\text{zpf}} = 2e\left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{1/4}$
- $[a + a^\dagger]$=1

En remplaçant, l'Hamiltonien devient :

$$\hat{H} \approx \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{E_J}{2}\hat{\phi}^2 = \frac{1}{2C}\left(iQ_{\text{zpf}}(a^\dagger - a)\right)^2 + \frac{E_J}{2}\left(\phi_{\text{zpf}}(a + a^\dagger)\right)^2 = \hbar\omega_p\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

avec :

$$\omega_p = \frac{1}{\hbar}\sqrt{8E_C E_J}$$

Ceci décrit un mode bosonique unique (un qubit transmon dans l'approximation harmonique).

Étape 4 : Extension à deux jonctions (ou deux puits) — Hamiltonien de Bose-Hubbard à 2 sites

Considérons maintenant deux jonctions de Josephson couplées (ou deux puits bosoniques), avec bosons pouvant passer de l'un à l'autre.

On utilise deux ensembles d'opérateurs bosoniques :

- $a_1, a_1^\dagger$: opérateurs pour le site 1 ;
- $a_2, a_2^\dagger$: opérateurs pour le site 2.

Hamiltonien Bose-Hubbard à deux sites :

$$\hat{H} = -J\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + \frac{U}{2}\sum_{j=1}^{2}\hat{n}_j\left(\hat{n}_j - 1\right) + \sum_{j=1}^{2}\mu_j\,\hat{n}_j$$

où :

- J est l'amplitude de **tunnel Josephson** (proportionnel à E_J),
- U est l'énergie d'interaction locale (reliée à E_C),
- $\hat{n}_j = a_j^\dagger a_j$ est le nombre de bosons sur le site j,
- μ_j est un potentiel chimique local (peut être nul ou ajustable).

Interprétation physique :

- J vient du **terme** $cos(\hat{\phi})$ généralisé à deux sites (il donne le couplage entre phases, i.e. tunnel des bosons).
- U correspond à l'énergie de charge, i.e. interactions sur site entre bosons.

➢ Ce modèle décrit très bien les dynamiques dans des circuits supraconducteurs multi-sites ou les condensats de Bose–Einstein à double puits.

Résumé

Tu passes de :

1. Un **oscillateur non linéaire** (jonction unique) avec :

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 - E_J cos(\hat{\phi})$$

2. À un **modèle bosonique à un seul mode** (transmon) :

$$\hat{H} = \hbar\omega_p\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \text{corrections non linéaires}$$

3. À un **modèle Bose-Hubbard à 2 sites** :

$$\hat{H} = -J\left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1\right) + \frac{U}{2}\sum_{j=1}^{2}\hat{n}_j\left(\hat{n}_j - 1\right) + \sum_{j=1}^{2}\mu_j\,\hat{n}_j$$

Ce modèle permet de décrire :

- ✓ Oscillations de Josephson,
- ✓ Autoblocage (self-trapping) quantique,
- ✓ Comportements de superfluide vs isolant de Mott,
- ✓ Qubits à deux puits ou qubits topologiques couplés.

Si on veut garder l'anharmonicité, on ne peut pas se contenter de l'approximation harmonique du potentiel $-E_J cos(\hat{\phi}) \approx -E_J + \frac{E_J}{2}\hat{\phi}^2$. Au lieu de cela, on doit traiter le potentiel cosinus complet tout en exprimant l'Hamiltonien en termes d'opérateurs bosoniques $a, a^\dagger$.

Objectif : Réécrire

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 - E_J cos(\hat{\phi})$$

…en termes d'opérateurs bosoniques $a, a^\dagger$, sans négliger l'anharmonicité.

Hamiltonien en bosoniques

L'Hamiltonien devient :

$$\hat{H} = \hbar\omega_p \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - \frac{E_J}{12}(a + a^\dagger)^4 + \cdots$$

En conservant les termes non-linéaires, on obtient un oscillateur anharmonique. Ce type d'Hamiltonien décrit précisément un transmon.

Terme dans $\hat{H}$	Signification
$\hbar\omega_p \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$	Oscillateur harmonique (plasma mode)
$-\frac{E_J}{12}(a + a^\dagger)^4$	**Anharmonicité** — nécessaire pour le qubit
...	Corrections d'ordre supérieur (faibles)

L'anharmonicité rend les niveaux d'énergie non équidistants :

$$E_{n+1} - E_n \approx \hbar\omega_p - n\alpha \ , \quad \text{avec } \ \alpha \approx E_C$$

Étape 3 : Développement de $-E_J cos\left(\phi_{\text{zpf}}(a + a^\dagger)\right)$

Pour conserver l'anharmonicité entière, tu dois garder le terme cosinus complet, ou le développer au moins jusqu'au 4e ordre :

$$cos\left(\phi_{\text{zpf}}(a + a^\dagger)\right) = 1 - \frac{1}{2}\phi_{\text{zpf}}^2(a + a^\dagger)^2 + \frac{1}{24}\phi_{\text{zpf}}^4(a + a^\dagger)^4 - \cdots$$

$$\Rightarrow \quad -E_J cos\left(\phi_{\text{zpf}}(a + a^\dagger)\right) = -E_J + \frac{E_J}{2}\phi_{\text{zpf}}^2(a + a^\dagger)^2 - \frac{E_J}{24}\phi_{\text{zpf}}^4(a + a^\dagger)^4 - \cdots$$

Finalement,

$$\hat{H} \approx \underbrace{4E_C n_{\text{zpf}}^2(a^\dagger - a)^2 + \frac{E_J}{2}\phi_{\text{zpf}}^2(a + a^\dagger)^2}_{\text{Oscillateur harmonique}} \underbrace{- \frac{E_J}{24}\phi_{\text{zpf}}^4(a + a^\dagger)^4}_{\text{Anharmonicité}} + \text{const.}$$

Terme	Interprétation
$(a^\dagger - a)^2$, $(a + a^\dagger)^2$	→ oscillateur harmonique, donne $\hbar\omega_p \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$
$(a + a^\dagger)^4$	→ produit des termes non diagonaux et diagonaux, responsable de l'anharmonicité

Cela introduit :

- ✓ Un terme quadratique $\propto a^\dagger a$,
- ✓ Un terme quartique $(a^\dagger a)^2$, responsable de l'anharmonicité du transmon.

Le terme quartique produit des contributions de type :

- $a^\dagger a^\dagger a a \longrightarrow$ shift dépendant de n (non-linéarité)
- a^4, $a^\dagger a^3$, etc. $\longrightarrow$ transitions interdites ou négligeables au premier ordre, mais importantes si excitation forte (non-linéarité anharmonique complète)

En ne gardant que les contributions diagonales utiles pour les niveaux d'énergie :

$$\widehat{H} \approx \hbar\omega_p \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} a^\dagger a^\dagger a a$$

Avec :

$\omega_p = \frac{1}{\hbar}\sqrt{8E_C E_J}$, $\alpha = E_C$; l'anharmonicité du transmon

Niveau n	**Énergie approx.**
E_0	$\frac{1}{2}\hbar\omega_p$
E_1	$\frac{1}{2}\hbar\omega_p - \alpha$
E_2	$\frac{5}{2}\hbar\omega_p - 3\alpha$
...	...

Les niveaux ne sont pas équidistants, donc le système peut être utilisé comme qubit (entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$).

Étape 4 : Interprétation en termes de modèle Bose-Hubbard à deux sites

Tu veux maintenant deux jonctions (deux modes), avec ce type d'anharmonicité sur chaque site, et couplés par un tunnel J :

$$\widehat{H} = \sum_{j=1}^{2} \left[\hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \frac{K_j}{2} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_j\right] - J\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right)$$

où :

- $K_j \approx E_C$ représente l'anharmonicité (ou interaction boson-boson),
- $\omega_j = \sqrt{8E_C E_J}/\hbar$ est la fréquence naturelle de chaque mode,
- $J \sim E_J$ est l'amplitude de tunnel (Josephson).

Ce modèle est un Hamiltonien Bose-Hubbard à 2 sites avec interaction forte, utilisé par exemple dans les qubits couplés, résonateurs non linéaires, ou condensats à double puits.

Interprétation des termes :

Terme dans $\widehat{H}$	**Signification physique**
$\hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$	Énergie du mode j (transmon ou puits bosonique)
$-\frac{K_j}{2} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_j$	Anharmonicité due à E_C (interaction entre bosons sur site j)
$-J\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right)$	Couplage Josephson entre les deux modes (entre les sites) (tunneling)

Hamiltonien à deux sites avec anharmonicité (non-linéarité)

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2} \left[\hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \frac{K_j}{2} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_j \right] - J\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\right)$$

Objectif : Simulation de l'évolution d'un état initial

Écrire l'état initial pour la simulation

Données du problème :

- Système à deux sites (site 1 et site 2), chacun pouvant contenir jusqu'à 2 bosons.
- On utilise un qubit ancilla (état $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$) qui sera utile pour le contrôle ou la lecture.
- État complet du système

On a :

- Site 1 : 1 boson → $|1\rangle$
- Site 2 : 2 bosons → $|2\rangle$
- Ancilla : $|+\rangle_{\text{anc}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

Donc l'état initial du système complet est :

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle_1 \otimes |2\rangle_2 \otimes |+\rangle_{\text{anc}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1 \otimes |2\rangle_2 \otimes |0\rangle + |1\rangle_1 \otimes |2\rangle_2 \otimes |1\rangle)$$

ou plus simplement :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,2\rangle \otimes |0\rangle + |1,2\rangle \otimes |1\rangle)$$

Interprétation :

- $|1,2\rangle$: 1 boson dans le site 1, 2 bosons dans le site 2,
- $|0\rangle$ ou $|1\rangle$: état du qubit ancillaire,
- Le système bosonique est fixé, et l'ancilla est en superposition de $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

3. Encodage binaire

Comme précédemment, chaque sous-système est encodé :

Sous-système	Valeur	Binaire
Site 1	1 boson	01
Site 2	2 bosons	10

Sous-système	Valeur	Binaire
Ancilla	$\|0\rangle$ et	$\|1\rangle$

Donc, on a deux composantes binaires :

$$|1,2\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |10010\rangle$$
$$|1,2\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |10011\rangle$$

Et l'état complet est :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10010\rangle + |10011\rangle)$$

C'est une superposition de deux états binaires du système.

Interprétation physique

Cet état modélise :

- Un système où la partie physique (deux sites) est dans l'état fixe $|1,2\rangle$,
- Tandis que le qubit ancilla est en superposition, permettant :
    - ✓ Contrôle conditionnel dans des circuits (e.g. opérations dépendant de l'ancilla),
    - ✓ Ou utilisation pour mesures corrélées ou lecture d'information.

Évolution l'état initial avec l'Hamiltonien à deux sites, en utilisant un mappage explicite des opérateurs bosoniques $\bar{b}_i^\dagger$ (création de bosons sur le site i) via des opérateurs à 2 niveaux $\sigma_\pm^{(n,i)}$.

1. Interprétation du mappage

Tu veux représenter un site bosonique tronqué (à $N_p = 3$ niveaux, i.e. 0, 1, 2 bosons), comme un registre de qubits à 2 niveaux. Le mappage est :

$$\bar{b}_i^\dagger = \sum_{n=0}^{N_p-2} \sqrt{n+1}\, \sigma_-^{(n,i)} \sigma_+^{(n+1,i)}$$

Et par conjugué hermitien :

$$\bar{b}_i = \sum_{n=0}^{N_p-2} \sqrt{n+1}\, \sigma_+^{(n,i)} \sigma_-^{(n+1,i)}$$

Que sont les $\boldsymbol{\sigma_\pm^{(n,i)}}$?

Ce sont des opérateurs de création/annihilation entre niveaux bosoniques :

- $\sigma_+^{(n+1,i)}$ (Transfert de $n \rightarrow n+1$),
- $\sigma_-^{(n,i)}|$ (transfert de $n+1 \rightarrow n$),

Le produit $\sigma_-^{(n)} \sigma_+^{(n+1)} = |n\rangle\langle n+1|$, ce qui donne bien l'effet d'un opérateur de création bosonique tronqué.

→ C'est exactement l'opérateur de transition du niveau $n+1|$ vers $n|$, autrement dit l'action du créateur bosonique tronqué :

$$\bar{b}_i^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

De même, pour l'annihilateur :

$$\sigma_+^{(n)} \sigma_-^{(n+1)} = |n+1\rangle\langle n| \qquad \Rightarrow \quad \bar{b}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$$

Ce mappage reconstitue exactement les règles d'échelle bosonique jusqu'à N_p, avec :

- $\bar{b}_i^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
- $\bar{b}_i|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$
- Il est compatible avec une description par registres de qubits, chacun portant une seule excitation

Remarque importante

Ces opérateurs ne sont pas exactement bosoniques : $[\bar{b}_i, \bar{b}_i^\dagger] \neq 1$, mais ils convergent vers les vrais opérateurs bosoniques dans la limite de grande occupation et faible troncature.

2. Construction du Hamiltonien à deux sites

Exprimer le Hamiltonien :

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2}\left[\hbar\omega_j \bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j - \frac{K_j}{2}\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j \bar{b}_j\right] - J\left(\bar{b}_1^\dagger \bar{b}_2 + \bar{b}_2^\dagger \bar{b}_1\right)$$

en termes d'opérateurs $\sigma_\pm^{(n)}$ agissant sur les niveaux tronqués (disons $N_p = 3$, i.e. $n = 0, 1, 2$).

Terme : $\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j$

Utilise :

$$\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j = \sum_{n,m}^{N_p-2} \sqrt{(n+1)(m+1)}\sigma_-^{(n,j)}\sigma_+^{(n+1,j)}\sigma_+^{(m,j)}\sigma_-^{(m+1,j)}$$

Mais par orthogonalité, seul le terme $n = m$ survit, donc :

$$\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j = \sum_{n=0}^{N_p-2} (n+1)\sigma_-^{(n,j)}\sigma_z^{(n+1,j)}\sigma_+^{(n,j)}$$

ou encore, selon la base logique que tu utilises, on peut approximer :

$$\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j \approx \sum_{n=1}^{N_p-2} n\prod{}^{(n,j)}$$

Où $\prod^{(n,j)} = |n\rangle\langle n|$ est le projecteur sur le niveau n, réalisable avec des produits de σ_z

5.2. Terme d'anharmonicité quartique $\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j \bar{b}_j$

Similairement, on peut écrire :

$$\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j \bar{b}_j = \sum_{n=1}^{N_p-2} n(n-1)\prod{}^{(n,j)}$$

Interprétation

- Cet opérateur agit diagonalement dans la base d'occupation,

- Il ne donne une contribution non nulle que pour $n \geq 2$:

n	$n(n-1)$	**Contribution**
0	0	aucune
1	0	aucune
2	2	(2,

Donc dans un espace tronqué à 3 niveaux $n = 0,1,2$, tu obtiens :

$$\bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j^\dagger \bar{b}_j \bar{b}_j = 2|2\rangle_j\langle 2|$$

Rôle physique

- Ce terme représente l'interaction boson-boson locale (repulsive ou attractive),
- Il est responsable de l'anharmonicité dans les systèmes type transmon ou modèle Bose-Hubbard,

3. Terme de tunnel : $\bar{b}_1^\dagger \bar{b}_2 + \bar{b}_2^\dagger \bar{b}_1$

Devient, après insertion des mappages tronqués (avec $Np = 3$) :

$$\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\left(\sqrt{(n+1)(m+1)}\sigma_-^{(m,1)}\sigma_+^{(m+1,1)}\sigma_+^{(n,2)}\sigma_-^{(n+1,2)} + h.c.\right)$$

Interprétation physique

Ce terme décrit explicitement le transfert d'un boson entre deux sites, à travers les niveaux :

- Sur **site 1** : transitions entre $|\,m\rangle \leftrightarrow |\,m+1\rangle$,
- Sur **site 2** : transitions entre $|\,n\rangle \leftrightarrow |\,n+1\rangle$,
- Le produit d'opérateurs agit en même temps sur les deux sites.

6. Expression complète explicite

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2}\left[\hbar\omega_i \sum_{n=0}^{2} n\,|n\rangle_i\langle n| - \frac{K_i}{2}\sum_{n=0}^{2} n(n-1)\,|n\rangle_i\langle n|\right] - J\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\left(\sqrt{(n+1)(m+1)}\sigma_-^{(m,1)}\sigma_+^{(m+1,1)}\sigma_+^{(n,2)}\sigma_-^{(n+1,2)} + h.c.\right)$$

Ce que on a fait :

- ✓ On a encodé un modèle Bose-Hubbard à deux sites en langage de qubits (opérateurs de montée/descente entre niveaux),
- ✓ On a maintenu la structure bosonique tronquée (pas de vraie infinité de niveaux),
- ✓ Et tu es maintenant prêt à :

- Simuler ce Hamiltonien,