第 5 章部分课后习题作业参考

P137

3.

（1） $\vdash (\mathrm{A} \to \exists \mathrm{vB}) \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$

方案一: 只需证 $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B} \vdash \neg \forall \mathrm{v} \neg (A \to B)$，反证法证之。

1) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash \forall v \neg (A \to B)$ 前提

2) $\forall v \neg (A \to B) \to \neg (A \to B)$ 定理

3) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash \neg (A \to B)$ 1)2) r_{mp}

4) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

5) $\neg (A \to B) \to A$ 4)逆否

6) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash A$ 3)5) r_{mp}

7) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash A \to \neg \forall v \neg B$ 前提

8) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash \neg \forall v \neg B$ 6)7) r_{mp}

9) $B \to (A \to B)$ 公理

10) $\neg (A \to B) \to \neg B$ 9)逆否

11) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash \neg B$ 3)10) r_{mp}

12) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B}; \forall \mathrm{v} \neg (A \to B) \vdash \forall v \neg B$ 11) 全称推广（v 在 A 中无自由出现）

13) $\mathrm{A} \to \neg \forall \mathrm{v} \neg \mathrm{B} \vdash \neg \forall \mathrm{v} \neg (A \to B)$，8)12)及反证法定理

方案二:

只需证 $\neg \mathrm{A} \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$ 及 $\exists \mathrm{vB} \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$。

1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

2) $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$ 定理

3) $\neg \mathrm{A} \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$ 1)2)+传递定理

4） $B \to (A \to B)$ 公理

5） $\neg(A \to B) \to \neg B$ 4）+逆否定理

6） $\forall v(\neg(A \to B) \to \neg B)$ 对定理 5）全称化（即定理的全称推广定理）

7） $\forall v \neg(A \to B) \to \forall v \neg B$ 6）+公理+rmp

8） $\neg \forall v \neg B \to \neg \forall v \neg(A \to B)$ 7）+逆否定理

即 $\exists \mathrm{vB} \to \exists \mathrm{v}(A \to B)$

///

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists v B)$

证明：根据前件交换只需证 $\vdash A \to (\exists v(A \to B) \to \exists v B)$

只需证 $\vdash A \to (\neg \forall v \neg(A \to B) \to \neg \forall v \neg B)$

1） $(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

2） $A \to ((A \to B) \to B)$ 1）前件交换

3） $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 定理

4） $A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$ 2）3）+传递定理

5） $\forall v(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 4）+定理全称推广//注意使用条件

6） $\forall v A \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 5）+公理+ r_{mp}

7） $A \to \forall v A$ 公理（ v 在 A 无自由出现）

8） $A \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 7）6）传递

9） $\forall v(\neg B \to \neg(A \to B)) \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B))$ 公理

10） $A \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B))$ 8）9）传递

11） $(\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B)) \to (\neg \forall v \neg(A \to B) \to \neg \forall v \neg B)$ 定理

12） $A \to (\neg \forall v \neg(A \to B) \to \neg \forall v \neg B)$ 10）11）传递

即 $A \to (\exists v(A \to B) \to \exists v B)$

//////////////////////////////////

(3) $\vdash(\forall vB\to A)\to\exists v(B\to A)$

证明：只需证$\vdash(\neg A\to\exists v\neg B)\to\exists v(\neg A\to\neg B)$ //替换原理，等价变换

而由上述题 3.（1）知此结论成立。

//////////////////////////

(4) $\vdash\exists v(B\to A)\to(\forall vB\to A)$

证明：只需证$\vdash\exists v(\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to\exists v\neg B)$ //同上

则根据上题 3.（2）可知成立。

///////////////////////////////////////

(5) 若$\vdash A\to B$，则$\vdash\forall vA\to\forall vB$

证明：

1） $A\to B$ 假设的定理

2） $\forall u(A\to B)$，1）全称推广

3） $\forall u(A\to B)\to(\forall uA\to\forall uB)$ 公理

4） $\forall uA\to\forall uB$ 2）3） r_{mp}

//////////////////////

(6) $A\to B\models\forall vA\to\forall vB$未必成立，从而$A\to B\vdash\forall vA\to\forall vB$不真。

//注:为了和本题的说明相一致,这里把变元u统一换成了v.

证明：举例说明该逻辑蕴涵不一定成立：

令个体域$D=N$

$A:u<u+1$，

$B:v<100$

则对$\forall u\in D$，$v=10$的指派下，公式$A\to B$为真，

但此时公式$\forall vA\to\forall vB$为假，故$A\to B\models\forall vA\to\forall vB$不成立。

当然也就有$A\to B\vdash\forall vA\to\forall vB$不成立，否则根据 FC 的合理性有：

$A\to B\models\forall vA\to\forall vB$成立，矛盾。

//

4.

(1) $\forall x(A\to B)\vdash\dashv A\to\forall xB$，且 x 在 A 中无自由出现。

证明：先证$\forall x(A\to B)\vdash A\to\forall xB$

只需证：$\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$

1) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall x(A \to B)$ 前提

2) $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

3) $\forall x(A \to B), A \vdash A \to B$ 1)2) r_{mp}

4) $\forall x(A \to B), A \vdash A$ 前提

5) $\forall x(A \to B), A \vdash B$ 3)4) r_{mp}

6) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall vB$， 5)全称推广//x 在 A 中无自由出现

7) $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

再证 $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$

1) $\forall xB \to B$ 定理

2) $A \to (\forall xB \to B)$ 1)加前件

3) $(A \to \forall xB) \to (A \to B)$ 2)+公理

4) $A \to \forall xB \vdash A \to B$ 3)演绎定理

5) $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$，全称推广

////////////////////

(2) $\forall x(A \to B) \dashv\vdash \exists xA \to B$，且 x 在 B 中无自由出现。

证明：只需证 $\forall x(\neg B \to \neg A) \dashv\vdash \neg B \to \forall x \neg A$，由于 x 在 $\neg B$ 中无自由出现，故直接由 4.（1）题的结论即可。

/////////////////////////

(3) $\forall x(A \wedge B) \dashv\vdash \forall xA \wedge \forall xB$

只需证：$\forall x \neg(A \to \neg B) \dashv\vdash \neg(\forall xA \to \neg \forall xB)$

先证 $\forall x \neg(A \to \neg B) \vdash \neg(\forall xA \to \neg \forall xB)$ //反证法

1) $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg \forall xB \vdash \forall x \neg(A \to \neg B)$ 前提

2) $\forall x \neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg B)$ 定理

3) $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \neg(A \to \neg B)$

4) $\neg A \to (A \to \neg B)$ 定理

$\neg B \to (A \to \neg B)$ 公理

5) $\neg(A \to \neg B) \to A$

$\neg(A \to \neg B) \to B$ 4)+逆否

6) $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash A$

$\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \neg B$ 3)5) r_{mp}

7) $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \forall xA$

$\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \forall x \neg B$ 6)全称推广

8) $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \forall xA \to \neg\forall xB$ 前提

9） $\forall x \neg(A \to \neg B)$， $\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \neg\forall xB$ 7）8） r_{mp}

10）$\forall x \neg(A \to \neg B) \vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB)$ 7）9）反证法

再证$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall x \neg(A \to \neg B)$

1） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB)$ 前提

2） $\neg\forall xA \to (\forall xA \to \neg\forall xB)$

$\neg\forall xB \to (\forall xA \to \neg\forall xB)$

3） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \forall xA$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \forall xB$ 2）+逆否

4） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall xA$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall xB$ 否 1）3） r_{mp}

5） $\forall xA \to A$
$\forall xB \to B$

6）$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash A$

$\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash B$

7） $A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 定理

8） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \neg(A \to \neg B)$ 6）7） r_{mp}

9） $\neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \vdash \forall x\neg(A \to \neg B)$ 8）全称推广

////////////////////////////
(4)

由(3)题结论有： $\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \forall x\neg A \wedge \forall x\neg B$

从而 $\neg\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg(\forall x\neg A \wedge \forall x\neg B)$

即 $\exists x\neg(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg\forall x\neg A \vee \neg\forall x\neg B)$ //替换原理

即 $\exists x(A \vee B) \dashv\vdash \exists xA \vee \exists xB$

///////////////////////////////
(5)

证明： $P(Oscar) \veebar G(Oscar)$

$= (P(Oscar) \vee G(Oscar)) \wedge (\neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar))$

记 $\tau = \{P(Sam), G(Clyde), L(Clyde, Oscar),$

$P(Oscar) \vee G(Oscar), \neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar), L(Oscar, Sam)$

//因为 $A \wedge B \to A$， $A \wedge B \to B$（已证定理），这里为了方便就直接拆开用了//

需证 $\tau \vdash \exists x\exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x, y))$，考虑反证法：

记 $\tau' = \tau \bigcup \{\forall x\forall y(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee \neg L(x, y))\}$

$= \tau \bigcup \{\forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))\}$ //替换原理

$= \tau; \forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

1) $\tau' \vdash \forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

2) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar) \to (G(Clyde) \to \neg P(Oscar)))$

//对 1）运用全称消去的公理

3) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar)$

4）$\tau' \vdash G(Clyde) \to \neg P(Oscar)$

5）$\tau' \vdash G(Clyde)$

6）$\tau' \vdash \neg P(Oscar)$

7）$\tau' \vdash L(Oscar, Sam) \to (G(Oscar) \to \neg P(Sam)))$

8）$\tau' \vdash L(Oscar, Sam)$

9）$\tau' \vdash G(Oscar) \to \neg P(Sam)$

10）$\tau' \vdash P(Sam) \to \neg G(Oscar)$

11）$\tau' \vdash P(Sam)$

12）$\tau' \vdash \neg G(Oscar)$

13）$\tau' \vdash P(Oscar) \vee G(Oscar)$

14）$\tau' \vdash \neg G(Oscar) \to P(Oscar)$　对 13）用替换原理

15）$\tau' \vdash P(Oscar)$

16）$\tau \vdash \neg\forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$，6）15）反证法

即 $\tau \vdash \exists x \exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x,y))$

//
(6)

证明：$E(x) \veebar O(x) = (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x))$

$E(x) \leftrightarrow G(x) = (E(x) \to G(x)) \wedge (G(x) \to E(x))$

记 $\tau = \{\forall x(N(x) \to (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x)))$，

$\forall x(N(x) \to (E(x) \leftrightarrow G(x)))$，$\neg\forall x(N(x) \to G(x))\}$

需证 $\tau \vdash \exists x(N(x) \wedge O(x))$，采用反证法

1）$\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x))$

2）$\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \neg N(x) \vee \neg O(x)$　1）+全称消去定理+rmp

3) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash N(x)\to\neg O(x)$

4) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash N(x)$

5) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash\neg O(x)$

6) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash\forall x(N(x)\to E(x)\veebar O(x))$

7) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash(N(x)\to E(x)\veebar O(x)$

8) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash E(x)\veebar O(x)$

9) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash\neg O(x)\to E(x)$

// 8)+替换原理及 $A\wedge B\to A$， $A\wedge B\to B$（已证定理）

10) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash E(x)$

11) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash\forall x(N(x)\to(G(x)\leftrightarrow E(x)))$

12) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash G(x)\leftrightarrow E(x)$

13) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash E(x)\to G(x)$

14) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\,;N(x)\vdash G(x)$

15) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash N(x)\to G(x)$

16) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\forall x(N(x)\to G(x))$

17) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\neg\forall x(N(x)\to G(x))$

18) $\tau\vdash\neg\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))$

即 $\tau\vdash\exists x(N(x)\wedge O(x))$

///////////////////////////////

(7)

证：根据全称推广，只需证：

$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$，$\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]\vdash D(y)\to\neg Q(y)$

//根据 $(A\wedge B\to C)\dashv\vdash(A\to(B\to C))$ 及替换原理，这里对第 2 个前提条件做了等价变换，当然也可以在证明里做等价变换//

下面记此处的前提为τ.

1） $\tau \vdash \exists x[P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y))]$，前提

2） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash \forall x \forall y[P(x) \to (Q(y) \to \neg L(x,y))]$

3） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash P(x) \to (Q(y) \to \neg L(x,y))$，

由 2)+定理+rmp

4） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash P(x)$ （利用已证定理 $A \wedge B \vdash A$）

5） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash Q(y) \to \neg L(x,y)$，3）、4）rmp

6） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash L(x,y) \to \neg Q(y)$

7） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash \forall y(D(y) \to L(x,y))$，同理 4）

8） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash D(y) \to L(x,y)$，同理 3）

9） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x,y)) \vdash D(y) \to \neg Q(y)$，6）、8）传递

10） $\tau \vdash D(y) \to \neg Q(y)$，由 1)、9)及存在消除定理

11） $\tau \vdash \forall y(D(y) \to \neg Q(y))$，全称推广

/////////////////////////////////////

5.

(1)见讲义或教材中全称推广定理中的说明

(2)同理（1）

(3) $\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

证明：$\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

iff 对任意的结构U和指派s，有$\models_{\mathrm{U}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$成立

iff $\exists d' \in D,$ 使得$\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$或$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$

1）若$\exists d' \in D,$ 使得$\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$成立，那么原命题得证。

2） 若不存在 $d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立， 即对 $\forall d \in D,$ 均有 $\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d)]$成立，

即有：$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$成立

综合 1）、2）知 $\models_U \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立。

(4)根据语义的概念只需要给出合理的解释和指派使得该公式为真即可。

//
///

补充讲义例题的解答

(1) $\vdash (\exists x \neg A \to \forall x B) \to \forall x(\neg A \to B)$

//见教材 P107 的例 5.2.2

1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

2) $A \to (\neg A \to B)$ 1)前件交换

3) $\forall x(A \to (\neg A \to B))$ 2)全称推广

4) $\forall x A \to \forall x(\neg A \to B)$ 3)+公理+r_{mp}

5) $B \to (\neg A \to B)$ 公理

6) $\forall x(B \to (\neg A \to B))$ 5) 全称推广

7) $\forall x B \to \forall x(\neg A \to B)$

8) $(\neg \forall x A \to \forall x B) \to \forall x(\neg A \to B)$ 4)7)+定理 3.1.14

即 $(\exists x \neg A \to \forall x B) \to \forall x(\neg A \to B)$

//

(2) $\vdash (\forall x \neg A \to \exists x B) \to \neg \forall x \neg(\neg A \to B)$

//见教材 P108 的例 5.2.4

1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

2) $A \to (\neg A \to B)$ 1)前件交换

3) $\neg(\neg A \to B) \to \neg A$ 2)逆否

4) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg A)$ 3) 全称推广

5) $\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg A$ 4)+公理+r_{mp}

6) $\neg \forall x \neg A \to \neg \forall x \neg(\neg A \to B)$ 5)逆否

7) $B \to (\neg A \to B)$ 公理

8） $\neg(\neg A \to B) \to \neg B$ 7)逆否

9) $\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg B)$ 8) 全称推广

10) $\forall x\neg(\neg A \to B) \to \forall x\neg B$ 9))+公理+r_{mp}

11) $\neg\forall x\neg B \to \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$ 10)逆否

即 $\exists xB \to \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$

12） $(\forall x\neg A \to \exists xB) \to \neg\forall x\neg(\neg A \to B)$ 6)11)+定理 3.1.14