第 3 章课后部分习题参考解答

1.

（1）$\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

① $(A \to B) \to (A \to B)$　定理 1

② $A \to ((A \to B) \to B)$　①+定理 6

③ $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$　②+A2+r_{mp}

//

（2）$\neg A \vdash A \to B$

① $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ A3

② $\neg A \to [(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)]$ ①+定理 2

③ $[\neg A \to (\neg B \to \neg A)] \to [\neg A \to (A \to B)]$ ②+A2+r_{mp}

④ $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$　A1

⑤ $\neg A \to (A \to B)$ ③④ r_{mp} //也可以由已证定理直接来调用//

⑥ $\neg A$　前提

⑦ $(A \to B)$ ⑤⑥ r_{mp}

//

（7）$\vdash [(A \to B) \to (B \to A)] \to (B \to A)$

方案一:

1）$[B \to (A \to B)] \to \{[(A \to B) \to (B \to A)] \to [B \to (B \to A)]\}$ 定理 7

2）$[(A \to B) \to (B \to A)] \to [B \to (B \to A)]$ 1）+A1+rmp

3）$[B \to (B \to A)] \to (B \to A)$ 习题 1.(1)已证结论

6）$[(A \to B) \to (B \to A)] \to (B \to A)$ 2）3）+定理 7

方案二:考虑调用定理 14 来证。

1）$\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

2）$\neg(A \to B) \to A$ 1）+定理 13+rmp

3）$B \to [\neg(A \to B) \to A]$ 2)+定理 2

4） $\neg(A \to B) \to (B \to A)$ 3）+定理 6

5） $(B \to A) \to (B \to A)$ 定理 1

6） $[(A \to B) \to (B \to A)] \to (B \to A)$ 4）5）+定理 14+rmp

//注意参见定理 14 后的说明//

//

（8） $\vdash A \to [(A \to B) \to (C \to B)]$

1） $(C \to A) \to [(A \to B) \to (C \to B)]$ 定理 7

2） $A \to \{(C \to A) \to [(A \to B) \to (C \to B)]\}$ 1）定理 2

3） $[A \to (C \to A)] \to \{A \to [(A \to B) \to (C \to B)]\}$ 2）+A2+rmp

4） $A \to [(A \to B) \to (C \to B)]$ 3）+A1+rmp

//

（9） $\vdash [(A \to B) \to A] \to A$

1） $[\neg A \to (A \to B)] \to \{[(A \to B) \to A] \to (\neg A \to A)\}$ 定理 7

2） $\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

3） $[(A \to B) \to A] \to (\neg A \to A)$ 1）2）rmp

4） $(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

5） $[(A \to B) \to A] \to A$ 3）4）+定理 7

//也可以调用定理 14 来证：只需证 $\neg(A \to B) \to A$ 及 $A \to A$ 即可，显然//

//

（10） $\vdash [(A \to B) \to C] \to [(C \to A) \to A]$

方案一：直接由传递定理

1） $[(A \to B) \to C] \to \{(C \to A) \to [(A \to B) \to A]\}$ 定理 7

2） $[(A \to B) \to A] \to A$ （9）题已证

3） $(C \to A) \to \{[(A \to B) \to A] \to A\}$ 2）定理 2

4） $\{(C \to A) \to [(A \to B) \to A]\} \to [(C \to A) \to A]$ 3）+A2+rmp

5） $[(A \to B) \to C] \to [(C \to A) \to A]$ 1）4）+定理 7

方案二：

1） $(\neg A \to (A \to B)) \to \{[(A \to B) \to C] \to (\neg A \to C)\}$ 定理 7

2） $\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

3） $[(A \to B) \to C] \to (\neg A \to C)$ 1）2）rmp

4） $(C \to A) \to (\neg A \to \neg C)$ 定理

5） $\neg A \to [(C \to A) \to \neg C)]$ 4）+定理 6

6） $[(C \to A) \to \neg C)] \to [C \to \neg (C \to A)]$ 定理

7） $\neg A \to [C \to \neg (C \to A)]$ 5）6）+定理 7

8） $(\neg A \to C) \to [\neg A \to \neg (C \to A)]$ 7）+A2+rmp

9） $[\neg A \to \neg (C \to A)] \to [(C \to A) \to A]$ A3

10） $(\neg A \to C) \to [(C \to A) \to A]$ 8）9）+定理 7

//此结论也可以直接由传递来做，这里采用了习题课的分析方法//

11） $[(A \to B) \to C] \to [(C \to A) \to A]$ 3）10）+定理 7

//

（11） $\vdash [(A \to B) \to C] \to [(A \to C) \to C]$

方案一：采用证明定理 14 的证明方法。

1） $\neg C \to (C \to B)$定理 3

2） $A \to [\neg C \to (C \to B)]$ 1） 定理 2

3） $\neg C \to [A \to (C \to B)]$ 2） 定理 6

4） $[A \to (C \to B)] \to [(A \to C) \to (A \to B)]$ A_2

5） $\neg C \to [(A \to C) \to (A \to B)]$ 3）4）+定理 7

6） $[(A \to C) \to (A \to B)] \to [\neg (A \to B) \to \neg (A \to C)]$ 定理 12

7） $\neg C \to [\neg(A \to B) \to \neg(A \to C)]$ 5）6）+定理 7

8） $[\neg C \to \neg(A \to B)] \to [\neg C \to \neg(A \to C)]$ 7）$+A_2+r_{mp}$

9） $[(A \to B) \to C] \to [\neg C \to \neg(A \to B)]$ 定理 12

10） $[(A \to B) \to C] \to [\neg C \to \neg(A \to C)]$ 9）8）+定理 7

11） $[\neg C \to \neg(A \to C)] \to [(A \to C) \to C]$ A3

12） $[(A \to B) \to C] \to [(A \to C) \to C)]$ 10）11）+定理 7

方案二：直接调用定理 14 来证。

1） $[(A \to B) \to C] \to \{(A \to C) \to [(\neg(A \to B) \to A) \to C]\}$ 定理 14

2） $\{(A \to C) \to [(\neg(A \to B) \to A) \to C]\}$

$\to \{(\neg(A \to B) \to A) \to [(A \to C) \to C]\}$ 定理 6

3） $[(A \to B) \to C] \to \{(\neg(A \to B) \to A) \to [(A \to C) \to C]\}$ 1）2）+定理 7

4） $(\neg(A \to B) \to A) \to \{[(A \to B) \to C] \to [(A \to C) \to C]\}$ 3）+定理 6

5） $\neg A \to (A \to B)$ 定理 3

6） $\neg(A \to B) \to A$ 5）+定理 13+rmp

7） $[(A \to B) \to C] \to [(A \to C) \to C)]$ 4）6）rmp

//这里也可以直接证明 $[(\neg(A \to B) \to A) \to C] \to C$，由定理 14 显然成立//

方案三：根据定理 14 只需证明 $\neg(A \to B) \to [(A \to C) \to C)]$

及 $C \to [(A \to C) \to C)]$（显然）。

证 $\neg(A \to B) \to [(A \to C) \to C)]$：

1） $\neg C \to (C \to B)$ 定理

2） $A \to (\neg C \to (C \to B))$ 1）+定理 2

3） $\neg C \to (A \to (C \to B))$ 2）+定理 6

4） $(A \to (C \to B)) \to [(A \to C) \to (A \to B)]$ A2

5）$\neg C \to [(A \to C) \to (A \to B)]$ 3）4）+定理 7

6）$(A \to C) \to [\neg C \to (A \to B)]$ 5）+定理 6

7）$[\neg C \to (A \to B)] \to [\neg(A \to B) \to C]$ 定理

8）$(A \to C) \to [\neg(A \to B) \to C]$ 6）7）+定理 7

9）$\neg(A \to B) \to [(A \to C) \to C)]$ 8）+定理 6

///////////////////////////////////////

（12）$\vdash [[(A \to B) \to C] \to D] \to [(B \to D) \to (A \to D)]$

//采用证明定理 14 的证明方法//

1）$\neg(A \to B) \to [(A \to B) \to C)]$ 定理 3

2）$\{\neg(A \to B) \to [(A \to B) \to C)]\} \to \{\neg[(A \to B) \to C] \to (A \to B)\}$ 定理 13

3）$\neg[(A \to B) \to C] \to (A \to B)$ 1）2）r_{mp}

4）$\neg D \to \{\neg[(A \to B) \to C] \to (A \to B)\}$ 3）定理 2

5）$\{\neg D \to \neg[(A \to B) \to C]\} \to [\neg D \to (A \to B)]$ 4）$+A_2+r_{mp}$

6）$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 已证定理

7）$\neg D \to [(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)]$ 6）+定理 2

8）$[\neg D \to (A \to B)] \to [\neg D \to (\neg B \to \neg A)]$ 7）$+A_2+r_{mp}$

9）$\{\neg D \to \neg[(A \to B) \to C]\} \to [\neg D \to (\neg B \to \neg A)]$ 5）8+定理 7

10）$\{[(A \to B) \to C] \to D\} \to \{\neg D \to \neg[(A \to B) \to C]\}$ 定理 12

11）$\{[(A \to B) \to C] \to D\} \to \{\neg D \to (\neg B \to \neg A)\}$ 10）9）+定理 7

12）$\{\neg D \to (\neg B \to \neg A)\} \to [(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)]$ A_2

13）$[(B \to D) \to (\neg D \to \neg B)] \to$

$\{[(\neg D \to \neg B) \to (\neg D \to \neg A)] \to [(B \to D) \to (\neg D \to \neg A)]\}$ 定理 7

14）$[(B \to D) \to (\neg D \to \neg B)]$ 定理 12

15） $[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]\to\ [(B\to D)\to(\neg D\to\neg A)]$ 13）14） r_{mp}

16） $[(\neg D\to\neg A)\to(A\to D)]$ A_3

17） $(B\to D)\to[(\neg D\to\neg A)\to(A\to D)]$ 16） 定理 2

18） $[(B\to D)\to(\neg D\to\neg A)]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 17）$+A_2+r_{mp}$

19） $[(\neg D\to\neg B)\to(\neg D\to\neg A)]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 15）18） +定理 7

20） $\{\neg D\to(\neg B\to\neg A)\}\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 12）19）+ 定理 7

21） $[[(A\to B)\to C]\to D]\to[(B\to D)\to(A\to D)]$ 11）20）+ 定理 7

//这里也可以仿照（11）题的方法来处理。//

///

（13） $\vdash(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$

//采用证明定理 14 的证明方法//

1）$[\neg A\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to B]\to(\neg A\to B)\}$ 定理 7

2）$\neg A\to(A\to B)$ 定理 3

3）$[(A\to B)\to B]\to(\neg A\to B)$ 1）2） r_{mp}

4）$\neg A\to\{[(A\to B)\to B]\to B\}$ 3） 定理 6

5）$\{[(A\to B)\to B]\to B\}\to\{\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ 定理 12

6）$\neg A\to\{\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ 4）5）定理 7

7）$\neg C\to\{\neg A\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 6）+定理 2

8）$(\neg C\to\neg A)\to\{\neg C\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 7）$+A_2+r_{mp}$

9）$\{\neg C\to[\neg B\to\neg[(A\to B)\to B]]\}\to$

$\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]\}$ A_2

10）$(\neg C\to\neg A)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\}$ 8）9）+定理 7

11）$[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\to[[(A\to B)\to B]\to C]$ A_3

12）$(\neg C\to\neg B)\to\{[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\to$

$[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 11）定理 2

13）$\{(\neg C\to\neg B)\to[\neg C\to\neg[(A\to B)\to B]]\}\to$

$\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 12）$+A_2+r_{mp}$

14）$(\neg C\to\neg A)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 10）13）+定理 7

15）$(A\to C)\to(\neg C\to\neg A)$ 定理 12

16）$(A\to C)\to\{(\neg C\to\neg B)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 14）15）+定理 7

17）$(\neg C\to\neg B)\to\{(A\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 16）定理 6

18）$(B\to C)\to(\neg C\to\neg B)$ 定理 12

19）$(B\to C)\to\{(A\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 17）18）+定理 7

20）$(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(A\to B)\to B]\to C]\}$ 19）+定理 6

//这里同样可以仿照（11）题的方法来处理。//
//

（14）$\vdash(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$

1）$(B\to C)\to\{(A\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$

由上题（13）的已证结论

2）$(A\to C)\to\{(B\to C)\to[[(B\to A)\to A]\to C]\}$ 1）+ 定理 6

//

2.（1）

只需证：$B\to A\vdash\neg A\to\neg B$

只需证：$B\to A\vdash\neg\neg B\to\neg\neg A$（由$(\neg\neg B\to\neg\neg A)\to(\neg A\to\neg B)$即 A3 可知）

只需证：$B\to A,\neg\neg B\vdash\neg\neg A$

1）$\neg\neg B$ 前提

2）$\neg\neg\neg\neg B\to\neg\neg B$ 1）+定理 2

3）$(\neg\neg\neg\neg B\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg\neg\neg B)$ A3

4）$\neg B\to\neg\neg\neg B$ 2）3）rmp

5）$(\neg B\to\neg\neg\neg B)\to(\neg\neg B\to B)$ A3

6）$\neg\neg B \to B$ 4）5）rmp
7）B 1）6）rmp

//此处由 $\neg\neg B$ 演绎 B 的过程也可直接调用定理 4：$\neg\neg B \vdash B$

8）$B \to A$ 前提
9）A 7）8）rmp

10）$\neg\neg\neg A \to \neg A$ 同理 1）-6）+演绎定理 //$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

11）$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$ A3

12）$A \to \neg\neg A$ 10）11）rmp
13）$\neg\neg A$ 9）12）rmp
/////////////////////////////////////
3.(1)

①$\neg B \to (B \to A)$ 定理 3

②$\neg A \to (\neg B \to (B \to A))$ ①+定理 2

③$(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to (B \to A))$ ②+A2+r_{mp}

④$(\neg A \to (B \to A)) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ A2

⑤$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to A))$ ③④+定理 7

⑥$(\neg A \to A) \to A$ 定理 8

⑦$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to A) \to A)$ ⑥+定理 2

⑧$((\neg A \to B) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to B) \to A)$ ⑦+A2+r_{mp}

⑨$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ ⑤⑧+定理 7

(2)

①$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ $A3'$

②$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ ①+定理 6

③$B \to (\neg A \to B)$ A1

④$B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ ③②+定理 7

⑤$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ ④+定理 6

//由于在 PC 中证明定理 6，7 只用到了公理 A1，A2，未使用 A3，故定理 6，7

仍可以在PC'中直接调用。//
//////////////////////////
4.
(1)

①$A \to (B \to C)$　假设定理

②$B \to (A \to C)$　①+定理 6

③B　假设定理

④$(A \to C)$　②③r_{mp}

(2)

①$\Gamma ; \neg A \vdash B$　假设

②$\Gamma \vdash \neg A \to B$　①演绎定理

③$\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$　由$\Gamma ; \neg A \vdash \neg B$ 同理②

④$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to B) \to A)$上面已证定理

⑤$\Gamma \vdash A$　②③④r_{mp}

//////////////////////////////
5.

证明：若$(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$为 PC 的定理，则根据 PC 的可靠性知$(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$应为重言式，而指派$\alpha(A) = T, \alpha(B) = T$使得$\alpha((\neg A \to B) \to (A \to \neg B)) = F$，矛盾。

//////////////////////
6.
(5)

先证$\vdash \neg(A \to B) \to A \wedge \neg B$

1）$\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg A$　公理

2）$\neg A \to (A \to B)$　定理 //PC 中已证的定理在 ND 中可以直接调用。//

3）$\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$　1）2）$\to$消除

4）$\neg(A \to B), \neg A \vdash \neg(A \to B)$　公理

5）$\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$　3）4）$\neg$引入

6） $\neg(A\to B)\vdash A$　5） $\neg\neg$消除

7） $\neg(A\to B),B\vdash B$ 公理

8） $B\to(A\to B)$ 定理 //为ND定理，PC的公理均为ND的定理//

9） $\neg(A\to B),B\vdash A\to B$ 7）8） $\to$消除

10） $\neg(A\to B),B\vdash\neg(A\to B)$ 公理

11） $\neg(A\to B)\vdash\neg B$ 9）10） $\neg$引入

12） $\neg(A\to B)\vdash A\wedge\neg B$　　6）11） $\wedge$引入

13） $\vdash\neg(A\to B)\to A\wedge\neg B$　12） $\to$引入

再证：$\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$

1） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\wedge\neg B$ 公理

2） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A$ 1） $\wedge$消除

3） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash A\to B$ 公理

4） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash B$　2）3） $\to$消除

5） $A\wedge\neg B,A\to B\vdash\neg B$　1） $\wedge$消除

6） $A\wedge\neg B\vdash\neg(A\to B)$　4）5） $\neg$引入

7） $\vdash(A\wedge\neg B)\to\neg(A\to B)$　6） $\to$引入

//////////////////////

(6)

1） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A$ 公理

2） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),A\vdash A\vee C$ 1） $\vee$引入

3） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash C$ 公理

4） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;C\vdash A\vee C$ 3） $\vee$引入

5） $(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;\neg B\vdash B$ 公理

6）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;\neg B\vdash\neg B$ 公理

7）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B;\neg B\vdash A\vee C$ 5）6）$\neg$消除

8）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B\vdash(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)$ 公理

9）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B\vdash\neg B\vee C$ 8）$\wedge$消除

10）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C),B\vdash A\vee C$ 4）7）9）$\vee$消除

11）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\vdash(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)$ 公理

12）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\vdash A\vee B$ 11）$\wedge$消除

13）$(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\vdash A\vee C$ 2）10）12）$\vee$消除

14）$\vdash(A\vee B)\wedge(\neg B\vee C)\to(A\vee C)$ 13）$\to$引入

//

（8）

先证$\vdash B\to((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)$

只需证：$B,(A\leftrightarrow B)\vdash A$及$B,A\vdash A\leftrightarrow B$（显然）

① $B,(A\leftrightarrow B)\vdash B\to A$ $\leftrightarrow$消除

② $B,(A\leftrightarrow B)\vdash B$ 公理

③ $B,(A\leftrightarrow B)\vdash A$ ①②$\to$消除

再证$\vdash((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A)\to B$

只需证$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A\vdash B$

① $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A\vdash A\to(A\leftrightarrow B)$ $\leftrightarrow$消除

② $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A\vdash A$ 公理

③ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A\vdash A\leftrightarrow B$ ①②$\to$消除

④ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A\vdash A\to B$ ③$\leftrightarrow$消除

⑤ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,A\vdash B$ ②④$\to$消除

下面证 $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A\vdash B$ 也成立。

⑥ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash \neg A\to(A\to B)$ 已证定理

⑦ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash \neg A$ 公理

⑧ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash A\to B$ ⑥⑦ $\to$消除

⑨ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash \neg B\to(B\to A)$ 已证定理

⑩ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash \neg B$ 公理

⑪ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash B\to A$ ⑨⑩ $\to$消除

⑫ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash A\leftrightarrow B$ ⑧⑪ $\leftrightarrow$引入

⑬ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash (A\leftrightarrow B)\to A$ $\leftrightarrow$消除

⑭ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash A$ ⑫⑬ $\to$消除

⑮ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A;\neg B\vdash \neg A$ 公理

⑯ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A\vdash \neg\neg B$ ⑭⑮ $\neg$引入

⑰ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A,\neg A\vdash B$ ⑯ $\neg\neg$消除

⑱ $(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow A\vdash B$ ⑤⑰假设消除

//

补充教材 P66 例 3.1.1 第(1)(2)小题不用演绎定理方法:

(1) $\vdash[A\to(B\to C)]\to\{(C\to D)\to[A\to(B\to D)]\}$

证明:

1) $(B\to C)\to[(C\to D)\to(B\to D)]$ 定理 7

2) $A\to\{(B\to C)\to[(C\to D)\to(B\to D)]\}$ 1)+定理 2

3) $[A\to(B\to C)]\to\{A\to[(C\to D)\to(B\to D)]\}$ 2)+A2+rmp

4) $\{A\to[(C\to D)\to(B\to D)]\}\to\{[A\to(C\to D)]\to[A\to(B\to D)]\}$ A2

5) $[A\to(B\to C)]\to\{[A\to(C\to D)]\to[A\to(B\to D)]\}$ 3)4)+定理 7

6) $[A\to(C\to D)]\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}$ 5)+定理 6

7） $(C\to D)\to\{[A\to(C\to D)]\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}\}$

6)+定理 2

8） $\{(C\to D)\to[A\to(C\to D)]\}$

$\to\{(C\to D)\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}\}$ 7)+A2+rmp

9） $(C\to D)\to[A\to(C\to D)]$ A1

10） $(C\to D)\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}$ 8)9)rmp

11） $[A\to(B\to C)]\to\{(C\to D)\to[A\to(B\to D)]\}$ 10)+定理 6

//或根据前件交换定理只需证 $(C\to D)\to\{[A\to(B\to C)]\to[A\to(B\to D)]\}$，

从而只需证 $(C\to D)\to\{A\to[(B\to C)\to(B\to D)]\}$，又由前件交换定理知此结论显然成立。//

(2) $\vdash[(A\to B)\to(A\to C)]\to[A\to(B\to C)]$

证明：由前件交换只需证 $[(A\to B)\to(A\to C)]\to[\mathrm{B}\to(\mathrm{A}\to C)]$

1）$[B\to(A\to B)]\to\{[(A\to B)\to(A\to C)]\to[\mathrm{B}\to(\mathrm{A}\to C)]\}$ 定理 7

2）$B\to(A\to B)$ A1

3）$[(A\to B)\to(A\to C)]\to[\mathrm{B}\to(\mathrm{A}\to C)]$ 1）2）rmp

4）$[\mathrm{B}\to(\mathrm{A}\to C)]\to[\mathrm{A}\to(\mathrm{B}\to C)]$ 定理 6

5）$[(A\to B)\to(A\to C)]\to[A\to(B\to C)]$ 3）4）+定理 7

//这里只是把课堂上介绍的方法给整理了一下，大家也可以尝试其他方法。//