P54

5. 求下列极限

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\pi\right)\right|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1$$

(3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x\cdots\cos nx)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\cos 3x\cdots\cos nx}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos 3x\cdots\cos nx)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x\cdots\cos nx)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2^2+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x\cdots\cos nx)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}\times 3^2+\cdots+\frac{1}{2}\times n^2=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$$

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

解： $x=0$时， $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=1$

$x\neq0$时， $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}=\frac{\sin x}{x}$$

(5). $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

(6). $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)\qquad\left(m,n\in\mathbf{N}_+\right)$

解： $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})}-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{m-(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(1-x)+(1-x^2)+\cdots+(1-x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})}\right)$$

$$=\frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}=\frac{m(m-1)}{2m}=\frac{m-1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}$$

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$$

(7). $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\quad (m,n\in\mathbf{N}_+)$

解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[m]{x}-1)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+x^{\frac{1}{m}}+1)(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}+1)}{(\sqrt[n]{x}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}+1)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+x^{\frac{1}{m}}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{\frac{1}{n}}+1)}{(x-1)(x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+x^{\frac{1}{m}}+1)}=\frac{n}{m}$$

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{1+(x-1)}-1}{\sqrt[n]{1+(x-1)}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)}=\frac{n}{m}$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\quad (x\to 0)$$

(8). $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n\quad (|x|<1)$

解： $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^{\frac{n}{x+x^2+\cdots+x^n}\cdot\left(x+x^2+\cdots+x^n\right)}=e^{\frac{x}{1-x}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}}=e^{\frac{x}{1-x}}$$

1. 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足$x_n \le A \le y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，证明：

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$

$$0 \le A - x_n \le y_n - x_n$$

$$x_n - y_n \le A - y_n \le 0$$

2. 函数$f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）

3. 设函数$f(x) = \begin{cases} e^x & ,x<0 \\ a+bx & ,x\ge 0 \end{cases}$在$x=0$处可导，则（　　）

（A）$a=1,b=-1$　　（B）$a=1,b=0$

（C）$a=1,b=1$　　（D）$a=1,b=2$

$|x-a|$在点$x=a$处不可导，$(x-a)|x-a|$在点$x=a$处可导

4. 函数$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$不可导点的个数为

（A） 0　（B） 1　（C） 2　（D）3

5. $f(x)$在$x=0$点连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 3$，求$f'(0)$。

6. 设曲线$y = f(x)$在原点与$y = \sin x$相切，试求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$.

解：　$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x| = (x-2)(x+1)\left|x(x-1)(x+1)\right|$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$　　$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$$

解： 在$x=0$点两曲线相切，$f(0)=\sin 0=0$，

$f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2}\sqrt{f'(0)}=\sqrt{2}.$$