1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在

$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x}$不存在

$\lim\limits_{x\to1^+}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\arctan\frac{1}{x-1}$不存在

2. 已知$x_1=1$，$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，$n=1,2,\cdots$ ，**证明：** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

证明： 因为

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

所以$(x_{n+1}-x_n)$与(x_n-x_{n-1})同号，又因为$x_2>x_1$，故得$\{x_n\}$单调增加

因为$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}=2-\frac{1}{1+x_n}<2$，所以$\{x_n\}$有上界

根据单调有界收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

对$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$两边取极限得： $A=1+\frac{A}{1+A}$ ，即$A^2-A-1=0$

$A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由保号性$\Rightarrow A\ge0$， 所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，由于

$$\left|(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})-0\right|=\left|2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\right|\le\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{x}>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow x>\frac{1}{4\varepsilon^2}$$

取$M=\frac{1}{4\varepsilon^2}$， 当$x>M$时，有$\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|<\varepsilon$，由极限定义知

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$

证明：$\forall\varepsilon>0$，不妨设$\varepsilon<1$，由于

$$\left|e^{-\frac{1}{x}}-0\right|=\left|\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right|<\varepsilon\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{1}{x}>\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=-\ln\varepsilon\Rightarrow x<-\frac{1}{\ln\varepsilon}$$

取$\delta=-\dfrac{1}{\ln\varepsilon}$　当$0<x-0<\delta$，$\left|e^{-\frac{1}{x}}-0\right|<\varepsilon$

由极限定义知，　$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$

5. 确定a，b的值，使下列各式成立

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$

解：　原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}\right)=0\Rightarrow a=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-b\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$

解：　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}\right)=0\Rightarrow a=1，b=-1$$

6. 求 $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{2}{x}\right]$

解： $\frac{2}{x}-1<\left[\frac{2}{x}\right]\le\frac{2}{x}$，

当 $x>0$ 时， $x(\frac{2}{x}-1)<x\left[\frac{2}{x}\right]\le x\cdot\frac{2}{x}=2$

$\lim_{x\to 0^+} x\left(\frac{2}{x}-1\right)=2$, $\lim_{x\to 0^+} 2=2$，故 $\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{2}{x}\right]=2$

当 $x<0$ 时， $x(\frac{2}{x}-1)>x\left[\frac{2}{x}\right]\ge x\cdot\frac{2}{x}=2$

$\lim_{x\to 0^-} x\left(\frac{2}{x}-1\right)=2$, $\lim_{x\to 0^-} 2=2$，故 $\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{2}{x}\right]=2$ 从而 $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{2}{x}\right]=2$

7. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}$ $(m\in\mathbf{N}_+)$

解： $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=m$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n\in \mathbf{N}_+)$

解： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\dfrac{m}{n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^n+\cdots+x^n-n}{x-1}$

解： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots(x^n-1)}{x-1}$

$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$$

$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}$ $(m\in \mathbf{N}_+)$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1+x)^{\frac{1}{m}}-1][(1+x)^{\frac{m-1}{m}}+(1+x)^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{m}}+1]}{x[(1+x)^{\frac{m-1}{m}}+(1+x)^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{m}}+1]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x[(1+x)^{\frac{m-1}{m}}+(1+x)^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{m}}+1]}=\frac{1}{m}$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ $(m, n\in \mathbf{N}_+)$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(C_n^0+C_n^1mx+C_n^2m^2x^2+C_n^3m^3x^3+\cdots)-(C_m^0+C_m^1nx+C_m^2n^2x^2+C_m^3n^3x^3+\cdots)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(C_n^0+C_n^1mx+C_n^2m^2x^2)-(C_m^0+C_m^1nx+C_m^2n^2x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{C_n^2m^2x^2-C_m^2n^2x^2}{x^2}=\frac{C_n^2m^2-C_m^2n^2}{1}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}m^2-\frac{m(m-1)}{2}n^2=\frac{nm(n-m)}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$ $\quad(m,n\in\mathbf{N}_+)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\dfrac{1}{m}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}-\dfrac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}n\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{nx}-\lim_{x\to 0}m\frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{mx}=\frac{n}{m}-\frac{m}{n}=\frac{n^2-m^2}{mn}$$