2010级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A卷参考答案

一、**1.** $b, a=b$；**2.** $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{2}$；**3.** $\frac{1}{2}, x-2y+2=0$

4. $\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}dy, -2$；**5．** 4 ，－ 5

二、1. C　　2. D　　3. D　　4. C　　5. B

三（10分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\tan x\cdot\arctan x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1-x}{4x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}$$

四.（10分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，$g(0)=0$，$g'(0)=1$，（1）求 a 的值使 $f(x)$ 连续；（2）求 $f'(x)$；（3）讨论 $f'(x)$ 连续性。

解：$(1)\ a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)-\cos x)=0$　　（4分）

$$(2)\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\sin x}{2}=\frac{g''(0)}{2}$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0) & x=0\end{cases}$$　　（8分）

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x+x(g''(x)+\sin x)-(g'(x)-\cos x)}{2x}$$

$$=\frac{g''(0)}{2}=f'(0)$$，因此 $f'(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$连续。（10 分）

五.（10 分）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x\prec 0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x\succ 0\end{cases}$ 问 a 为何值，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（1）连续；（2）为可去间断点；（3）为跳跃间断点；（4）为第二类间断点；

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}}=-6a$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\dfrac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\dfrac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}2\frac{a^2e^{ax}+2}{1}=2a^2+4$$

$$2a^2+4=-6a\Rightarrow a=-1\text{或}a=-2$$

（1）$a=-1$ 连续（2）$a=-2$ 可去（3）$a\neq -1$ ，$a\neq -2$ 跳跃（4）$a=\phi$ 空集

六.（10 分）设 $x_1=14$，　$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ；　（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$

解：（1）用单调有界原理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{4(\sqrt{x+2}-2)-x+2}{x-2}}{x-2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(\frac{1}{2\sqrt{x+2}})-1}{2(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{2(x-2)\sqrt{x+2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x-2}{2(x-2)\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})}}=e^{-\frac{1}{16}}$$

七．（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续，$(a,\ b)$ 可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,\ b)$，

使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$

证：$\varphi'(x)=f'(x)(b-x)-(f(x)-f(a))$

对 $\varphi(x)=(f(x)-f(a))(b-x)$ 用罗尔定理

2011 级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A 卷参考答案

一、**1.** $e^2,2$；**2.** $\dfrac{-y}{x+e^y}$， $y-1=-\dfrac{1}{e}x$；**3.** $x>5$ 或 $x<-3$， $x>1$；

4. $a=\dfrac{1}{2},b=1$；**5 .** 0，0

二、1. D　　2. C　　3. D　　4. B　　5. C

三、　解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x}$　　（6 分）

$$=\lim_{x\to 0}\ln\frac{2+\cos x}{3}=0$$　　（10 分）

四、解：(1) $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)-\cos x)=0$　　（4 分）

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)+\sin x}{2}=\dfrac{g''(0)}{2}=1$

$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}, & x\neq 0\text{时}\\ 1 & x=0\text{时}\end{cases}$ （8 分）

（3） $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-\cos x+x(g''(x)+\sin x)-(g'(x)-\cos x)}{2x}$

$=\dfrac{g''(0)}{2}=1=f'(0)$，因此 $f'(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$连续。 （10 分）

五、解：设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，由 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，可知,当 $x>e$ 时 $f(x)$ 单调减少 （5 分）

若 $b>a>e$，则有 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$，推出 $\ln a^b>\ln b^a$，即有 $a^b>b^a$

所 以 $2011^{2012}>2012^{2011}$ （10 分）

六、 解：$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ （4 分）

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$， $g'(x)=xf''(x)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=0$（唯一驻点），当 $x<0$ 时， $g'(x)<0$，当 $x>0$ 时， $g'(x)>0$，故 $g(0)$ 为最小值，故 $g(x)\geq g(0)=-f(0)>0$，

$\therefore\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'>0$，即 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调增加。 （10 分）

七、证明：令 $F(x)=x^n f(x)$ （4 分）

则 $F(x)$ 在[0，1]连续，（0，1）可导， $F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，至少存在 $x_0\in(0,\ 1)$ 使 $F'(x_0)=0$，即 $nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^n f'(x_0)=x_0^{n-1}(nf(x_0)+x_0f'(x_0))=0$

又 $x_0^{n-1}\neq 0$，故 $nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0$ （10 分）

2012 级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A 卷参考答案

一、填空题（共 30 分，每填对一空得 3 分）

（1） $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2^n+3^n}{5})^{\frac{1}{n}}=$ __3__；　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{x^2+\sin^2 x}=$ __3__.

（2）曲线 $y=x^n\ (n\in N^+)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 __$y-1=n(x-1)$__，记该切线与 x 轴的

交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n^n=$ __e^{-1}__.

（3）设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __$\frac{1}{2(t+1)^2}$__，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ __$\frac{-1}{2(t+1)^4}$__.

（4） $\cos 2x$ 的 ***Maclaurin***（麦克劳林）公式为 $\cos 2x=$ __$1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}$__ $+\mathrm{o}(x^5)$，

设 $g(x)=x^2\cos 2x$，则 $g^{(4)}(0)=$ __-48__.

(5) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=tan^2x-x^2$ 是 x 的 __4__ 阶无穷小（写出阶数），

$f'''(0)=$ __0__.

二、选择题（每题 4 分, 共 20 分）

(1) 以下极限计算中正确的是__B__.

A. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$；　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$；

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=\infty$；　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=1$.

(2) 函数 $f(x)=\frac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪一个区间内有界？__**A**__

A. $(-1,0)$；　B. $(0,1)$；

C. $(1,2)$；　D. $(2,3)$.

(3) 对于定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$，下列命题中正确的是__D__.

A. 如果当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

B. 如果 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，则存在 $0<\delta\le 1$，使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单

调增加，

在$(0,\delta)$内单调减少；

C．如果$f(x)$为偶函数，则$f(0)$为$f(x)$的极值；

D．如果$f(x)$为偶函数且可导，则$f'(0)=0$．

(4) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则____A____．

A． $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$；　　　　B． $a=1,b=\dfrac{5}{2}$；

C． $a=1,b=-2$；　　　　D． $a=0,b=2$．

(5) 设函数$f(x)$在点$x=0$的某邻域内三阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=-1$，则C____．

A． $f(0)$为$f(x)$的一个极大值；

B． $f(0)$为$f(x)$的一个极小值；

C． $f'(0)$为$f'(x)$的一个极大值；

D． $f'(0)$为$f'(x)$的一个极小值．

三、(10分)已知函数$y=y(x)$由方程$x^2y^2+y=1\ (y>0)$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，并求$y=y(x)$的极值．

解 对x求导，$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$ (1)

---3分

令 $y'=0$，得 $x=0$，易算得 $y(0)=1$；

------5分

(1)式两端继续求导，得

$$2y^2+4xyy'+4xyy'+2x^2y'^2+2x^2yy''+y''=0 \qquad (2)，$$

在(2)中令 $x=0$，算得 $y''(0)=-2$，所以 $y(0)=1$ 为极大值．

----10分

四、(**10**分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2+\sin^6 x}$．

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}}{\dfrac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}+\dfrac{\sin^6 x}{x^3}}$，　其中

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$，

----3 分

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^6 x}{x^3}=0$，--9 分

所以 原极限$=-\dfrac{1}{3}$.

----10 分

五、（10 分） 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{a+b\cos x}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，求常数 a 和 b.

解 **(1)** 由连续条件，$f(0-0)=f(0)=f(0+0)$，因此 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a+b\cos x}{x}=0$，进而应有

$\lim\limits_{x\to 0^+}(a+b\cos x)=0$，即 $a+b=0$；　　**-------5 分**

(2) 由可导条件，$f'_-(0)=f'_+(0)$，算得 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a-a\cos x}{x^2}=\dfrac{a}{2}$，而 $f'_-(0)=1$，所以 $a=2$，　$b=-2$.　　-----10 分

六、（10 分）（1）证明：$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}\quad (n\in N^+)$；

（2）设 $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\quad (n\in N^+)$，证明数列$\{u_n\}$收敛.

证（1）只需证明 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad (x>0)$

方法一（利用微分中值定理）　令 $f(x)=\ln(1+x)\quad (x\in[0,+\infty))$，则 $x>0$ 时，

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=\frac{x}{1+\xi}\quad (0<\xi<x),$$

因为 $0<\xi<x$，所以 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，从而 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad (x>0)$.　----5

分

方法二 （利用单调性） 令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\quad (x\in[0,+\infty))$，

则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0\quad (x\in(0,+\infty))$，

可知 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，从而 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$；

再令 $h(x)=\ln(1+x)-x\quad (x\in[0,+\infty))$，则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且

$h'(x)=\frac{1}{1+x}-1<0(x\in(0,+\infty))$，知 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，故 $x>0$ 时，

$h(x)>h(0)=0$．-5 分

(2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$，即数列 $\{u_n\}$ 单减;

又 $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln(\frac{2}{1})+\ln(\frac{3}{2})+\cdots+\ln(\frac{n+1}{n})-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$，即数列 $\{u_n\}$ 有下界.

综上，由单调有界原理，数列 $\{u_n\}$ 收敛.

---10 分

七、(10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，$f(0)=0$．证明：至少存在一点

$\xi\in(0,\pi)$，使 $2f'(\xi)=\tan\frac{\xi}{2}\cdot f(\xi)$.

证 令 $g(x)=f(x)\cdot\cos\frac{x}{2}\quad (x\in[0,\pi])$，

---3 分

则 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，$g(0)=g(\pi)=0$，

---8 分

由 ***Rolle*** 定理，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $g'(\xi)=0$，即

$2f'(\xi)=\tan\frac{\xi}{2}\cdot f(\xi)$. **----10 分**

2013 级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A 卷参考答案

一、**1.** $e^2, y=2x$；**2.** $0,-\frac{1}{\pi}dx$ ；**3.** $a=b=3$；**4.** $3cm/s$ ； **5.** 0,0

二、1.B 2. D 3. C 4. B 5.C

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}$ （2 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}$$ （4 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$ （6 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}$$ （8 分）

$$=-\frac{1}{6}$$ （10 分）

四、解：（1） $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)-\cos x)=0$ （4 分）

（2） $f'(x)=\frac{xg'(x)-x\cos x-g(x)+\sin x}{x^2}$， $x\neq 0$ （6 分）

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x^2}$$ （8 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\sin x}{2}=1$$ （10 分）

五、解：在方程两边对 x 求导，得 $3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$ （1）（2 分）

令 $y'=0$，得 $y=x$，将此代入原方程，得 $2x^3-x^2-1=0$，求得唯一实根 $x=1$（驻点），且 $y(1)=1$。 （5 分）

在（1）式两边再求导，得 $(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0$，因此 $y''|_{(1,1)}=\frac{1}{2}>0$。故 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 极小值点且极小值为 $y=1$。 （10 分）

六、解：令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$， $x>0$， $\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\varphi'(1)=0$

$\varphi''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$, $\varphi'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，（3 分）

故当$0<x<1$时$\varphi'''(x)<0$,当$1<x<+\infty$时$\varphi'''(x)>0$,因而$\varphi''(1)=2$是$\varphi''(x)$最小值，当$x>0$时，$\varphi''(x)\ge\varphi''(1)=2>0$。（6 分）

因此$\varphi'(x)<0$单调递增，由$\varphi'(1)=0$得$0<x<1$时$\varphi'(x)<0$,当$1<x<+\infty$时$\varphi'(x)>0$，因而$\varphi(1)=0$是$\varphi(x)$最小值，所以当$x>0$时，$\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，即$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$。（10 分）

七、证明：由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，得$f(0)=0$，$f'(0)=0$，（2 分）

函数$f(x)$在[0，1]连续，（0，1）可导，$f(0)=f(1)=0$，由罗尔定理，至少存在$x_0\in(0,\ 1)$使$f'(x_0)=0$。（6 分）

函数$f'(x)$在$[0,x_0]$连续，$(0,x_0)$可导，$f'(0)=f'(x_0)=0$，由罗尔定理，至少存在$\xi\in(0,\ x_0)\subset(0,1)$使$f''(\xi)=0$（10 分）

2014 级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A 卷参考答案

一、1.$-e^{-1},e^{-2}$ ；2. $-3<x<5,(1,1)$；3. $e^{\frac{1}{3}}$；**4.** $0,4\pi,0.8\pi$ ； **5**．$6,-\dfrac{2014!}{2012}$

二、1. C　　2. B　　3. C　　4. D　　5. D

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x})$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$（2 分）

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\bullet\frac{(\sin x-x\cos x)}{x^3}$$（6 分）

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cos x)}{x^3}$$ （8 分）

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$ （10 分）

四、解：解：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b=f(0)$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $b=2$ （4 分）

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-\cos x-2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{g'(x)+\sin x-2}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{\sin x}{2x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}=3$$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=3$（8 分）

由上述可知，$f'(0)=3$ （10 分）

五、解：由 $\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 $x=x_0$ 取极大值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

时，$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}<\frac{f(x_0)+g(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)}$， （4 分）

即 $f(x_0)g(x)<f(x)g(x_0)$， （8 分）

或 $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}<\frac{f(x)}{g(x)}$，故 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=x_0$ 取极小值。 （10 分）

六、证明：由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$ 单调递增，故 $f'(x)>f'(0)>0$；于是函数 $f(x)$ 单调递增，所以方程 $f(x)=0$ 至多有一个根。（4 分）

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\ 0<\xi<x$。从而知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，根据保号性，存在 $x_1>0$，使得 $f(x_1)>0$，又 $f(0)<0$，根据零点定理，存在 $x_0\in(0,x_1)\subset(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)=0$。所以方程 $f(x)=0$ 有唯一根。（10 分）

七、证明：令 $F(x)=(f(x)-f(a))(g(x)-g(b))$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在（a，b）可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，至少存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，即

$\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。 (10 分)

2015级《高等数学》，《工科数学分析基础》，《微积分》

A卷参考答案

一、填空题 (共30分，每题6分)

1、设$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，则$a=\underline{\ 1\ }$，$b=\underline{\ -1\ }$.

2、设$f(x)=\sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x$，则$f'''(0)=\underline{\ 90\ }$， $f^{(4)}(0)=\underline{\ 0\ }$.

3、设$\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\ \tan t\ }$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\ \dfrac{1}{t}\sec^3 t\ }$.

4、设函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}-xy=1$确定，则$y'(0)=\underline{\ -1\ }$，$y''(0)=\underline{\ -2\ }$.

5、$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\underline{\ -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\ }$，$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x})=\underline{\ -\dfrac{1}{3}\ }$.

二、选择题 (共20分，每题4分)

1、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$，则$x=0$是$f(x)$的____**A**____.

A. 可去间断点； **B**. 跳跃间断点；

C. 无穷间断点； **D**. 振荡间断点.

2、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\ge0\end{cases}$在$x=0$处可导，则____**B**____.

A. $a=2$，$b=0$； **B**. $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$；

C. $a=2$，$b=1$； **D**. $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.

3、设$f(x)$，$g(x)$为大于零的可导函数，且$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则对于$a<x<b$，有____**A**____.

A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$； **B**. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$；

C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$； **D**. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

4、设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-f(x-1))=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x$，则常数 c 为____**C**____.

A. 2；　　**B.** -2；

C. $\frac{1}{2}$；　　**D.** $-\frac{1}{2}$.

5、设偶函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$____**C**____.

A. 一定不是 $f(x)$ 的驻点；　　**B.** 一定不是 $f(x)$ 的极值点；

C. 一定是 $f(x)$ 的极值点；　　**D.** 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点.

三、（**10** 分）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)+x^4\cos\frac{1}{x}}$.

解　因　为　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot x^2}{x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{x^3}=0$$

（**6** 分）

所　以　，　原　式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x-x}{x^3}}{\frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)}{x^3}+\frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

（**10** 分）

四、（**10** 分）证明：当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

证　令 $f(x)=(1-x)e^{2x}-(1+x)\ (x\in[0,1))$，则 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上二阶可导，（**2** 分）

且　$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$，　$f''(x)=-4xe^{2x}<0\quad(x>0)$，（**6** 分）

所以 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上单减，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$；进而可知 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单减，

所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(0)=0$．不等式得证.　　（**10** 分）

五、（10 分）讨论方程 $xe^{-x}=a \quad (a>0)$ 的实根个数.

证 显然，方程在 $(-\infty,0]$ 上没有根，因此方程只可能有正根.

令 $f(x)=xe^{-x}-a \quad (x\in[0,+\infty))$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，驻点 $x=1$，

当 $0\le x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(1)=e^{-1}-a$ 是 $f(x)$ 的最大值. （4 分）

所以，当 $e^{-1}<a$ 时，$f(x)<0$，方程没有实根；当 $e^{-1}=a$ 时，方程有唯一实根 $x=1$；当 $e^{-1}>a>0$ 时，

$f(1)>0$，$f(0)=-a<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$，由零点定理可知，方程有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内.

（10 分）

六、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)+2f(1)=3f(2)$.

证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 因为 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)\le\dfrac{f(0)+2f(1)}{3}\le\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$，所以由连续函数的介值定理，存在 $c\in[0,1]$，使得

$f(c)=\dfrac{f(0)+2f(1)}{3}=f(2)$；

（5 分）

因为 $f(x)$ 在 $[c,2]$ 上连续，在 $(c,2)$ 内可导，且 $f(c)=f(2)$，所以由 **Rolle** 定理，存在 $\xi\in(c,2)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

（10 分）

七、（10 分）（1）设常数 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_k>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n} \quad (x\ge0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

（1）证 因 $a_1^n\le a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n\le ka_1^n$，$a_1\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{k}\cdot a_1$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 = a_1$， $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}\cdot a_1 = a_1$，所以由夹逼准则，

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_1$.　　　　　　（7 分）

（2）

$$f(x) = \max\{1, x, \frac{x^2}{2}\} = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \ge 2 \end{cases}$$

（10 分）

2016 级《高等数学》《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、**1.** 3, $\frac{1}{3}$;　**2.** $2\mathrm{d}x$, 4;　**3.** 0, -2;　**4.** $\frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}$, $y = 1 - 2x$;　**5.** 5, 0;

二、《高等数学》和《微积分》

1. C;　2. B;　3. D;　4. B;　5. A;

《工科数学分析基础》

1. C;　2. B;　3. D;　4. C;　5. A;

三、解：由拉格朗日中值定理

$$\arcsin x - \arcsin 0 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(x-0), \quad (0 < \xi < x) \qquad （2 分）$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\arcsin^2 x - x^2}{\arcsin^2 x}}$$

（3 分）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x - x^2}{x^2 \arcsin^2 x} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2 - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t} \qquad （5 分）$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(t-\sin t)(t+\sin t)}{t^4} \qquad （6 分）$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3} \times \lim_{t\to 0}\frac{t+\sin t}{t} \qquad （7 分）$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^3)\right)}{t^3}\times\left(1+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)=\frac{1}{3}$$ （9分）

故 $\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ （10分）

四、证：对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad (a<\xi<b)$$ （2分）

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

（4 分）

当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单减

（6 分）

由 $e<\xi<e^2$，故 $f(\xi)>f(e^2)$，即$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$

（9 分）

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$

（10 分）

五、(1) 证：令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内最大值 M 分别在 $\alpha\in(a,b)$，$\beta\in(a,b)$ 取得

① 当 $\alpha=\beta$ 时，取 $\eta=\alpha$，则 $F(\eta)=0$

② 当 $\alpha\neq\beta$ 时，由

$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)>0$

$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M<0$

由零点存在定理，存在 η 介于 α，β 之间，使得 $F(\eta)=0$

综上，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $F(\eta)=0$

（3 分）

又由 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理

$\exists\xi_1\in(a,\eta)$，$\exists\xi_2\in(\eta,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$

（4 分）

再由罗尔定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即$f''(\xi)=g''(\xi)$

（5 分）

（2）解：曲线的曲率计算公式为：$k(t)=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$（2 分）。

求导得：

$x'=a(1-\cos t)$，$x''=a\sin t$，$y'=a\sin t$，$y''=a\cos t$。代入公式得：

$$k(t)=\frac{|a^2(1-\cos t)\cos t-(a\sin t)^2|}{[a^2(1-\cos t)^2+(a\sin t)^2]^{3/2}}=\frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}。$$（2 分）

求极限知：$\lim\limits_{t\to 2\pi}k(t)=+\infty$。故曲率在 $t=2\pi$ 处不存在有限的极限。（1 分）

六、解：由函数 $f(x)$ 的表示知，可能的奇点为：$x_1=-1,\quad x_2=2.$（2 分）。

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=-1$（2 分）；$\lim\limits_{x\to2-0}f(x)=8$，$\lim\limits_{x\to2+0}f(x)=8$（2 分）；

$\lim\limits_{x\to-1-0}f'(x)=4$，$\lim\limits_{x\to-1+0}f'(x)=3$（2 分）；$\lim\limits_{x\to2-0}f'(x)=12$，$\lim\limits_{x\to2+0}f'(x)=12$（2 分）。

可见，$f(x)$ 无间断点、有一个不可导点 $x_1=-1$。

七、证明：由 $x_1>0$ 和数学归纳法知：对任意的 n，有 $x_n>0$。

（2 分）

由算术-几何平均不等式知：$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\geq 1$，

$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$。（2分）

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x_n^2}{x_n}\right)\leq 0$，$n=2,\ 3,\ 4,\cdots$。（2分）

故数列$\{x_n\}$单调下降，由单调有界原理知，其收敛。（2分）

在 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ 两端求极限得：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$。（2分）