一、（共 40 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的（ B ）

A． 跳跃间断点． **B.** 可去间断点．

C. 无穷间断点． **D.** 振荡间断点．

2. 设函数 $f(x)=x\cos x$，则 $f^{(2021)}(0)=$（ A ）

A． 2021． **B.** -2021．

C. $2021!$． **D.** $-(2021!)$．

3. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\cot\dfrac{y}{x}$ 的通解是（ A ）

A． $\cos\dfrac{y}{x}=Cx$． **B.** $\cos\dfrac{x}{y}=Cx$．

C. $\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{C}{x}$． **D.** $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{C}{x}$．

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1-\dfrac{x^2}{2}$ 的等价无穷小是（ D ）

A． 0． **B.** $-\dfrac{x^2}{4}$．

C. $\dfrac{x^3}{6}$． **D.** $-\dfrac{x^4}{8}$．

5. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=$（ D ）

A． $\ln(1+\sqrt{2})$． **B.** $2\ln(1+\sqrt{2})$．

C. $\sqrt{2}-1$． **D.** $2\sqrt{2}-2$．

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ \mathrm{e}^x-1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ B ）

A. 不连续． **B.** 连续，不可导．

C. 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$． **D.** 可导，且 $f'(0)=1$．

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，则 $y''(0)=$（　A　）

A.　-2.　　　　**B.**　2.

C.　-3.　　　　**D.**　3.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=$（　C　）

A.　∞.　　　　**B.**　1.

C.　e^2.　　　　**D.**　e^{-2}.

9. 设函数 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$，则（　C　）

A.　函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

B.　函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

C.　函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

D.　函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

10. 下列各定积分不等于零的是（　C　）

A.　$\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{2-x}{2+x}\mathrm{d}x$.　　　　**B.**　$\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^3 x}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$.

C.　$\int_{0}^{\frac{9\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$.　　　　**D.**　$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

A 卷第二题，B 卷第三题（14 分）

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+\sin^3 x}-1)(3+\sin x)}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\frac{\sin^3 x}{3}\cdot 3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

A 卷第三题，B 卷第二题（14 分）

（工数）求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{1+x^2}$ 的通解.

解 $y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{1+x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left(\int\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{1+x^2}(1+x^2)\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left(\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+C\right).$$

A 卷第三题，B 卷第二题（14 分）

（高数，微积分）求微分方程 $y''+y'-6y=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$，特征根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-3$，

对应的齐次方程的通解 $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-3x}$.

设原方程的特解 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}=(ax^2+bx)\mathrm{e}^{2x}$，则

$y^{*\prime}=\left(2ax^2+(2a+2b)x+b\right)\mathrm{e}^{2x}$，$y^{*\prime\prime}=\left(4ax^2+(8a+4b)x+(2a+4b)\right)\mathrm{e}^{2x}$，

代入原方程整理，得 $10ax+(2a+5b)=x+1$，

所以 $a=\frac{1}{10},b=\frac{4}{25}$，

特解 $y^*=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)\mathrm{e}^{2x}$，

原方程通解 $y=\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{25}x\right)\mathrm{e}^{2x}+c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-3x}$.

A 卷第四题，B 卷第五题（12 分）

四、（12 分）设由曲线 $y=x^2-2x(1\le x\le 2)$，直线 $y=0$ 及 $x=1$ 所围成的平面图形为 D_1；由曲线 $y=x^2-2x(2\le x\le 3)$，直线 $y=0$ 及 $x=3$ 所围成的平面图形为 D_2.

(1) 求 D_1 的面积 A.

(2) 求 D_2 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V.

解 (1) $A=\int_1^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}$.

(2) $V=\int_2^3 2\pi x(x^2-2x)\,\mathrm{d}x=2\pi\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_2^3=\frac{43}{6}\pi$.（柱壳法）

或 $V=27\pi-\int_0^3\pi\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{43}{6}\pi$.（截面法）

A 卷第五题，B 卷第四题（12 分）

五、（12 分）设 a 为实数，讨论方程 $\ln^4 x-4\ln x+4x-a=0$ 的实根个数.

解 令 $f(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-a$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x)=\frac{4\ln^3 x}{x}-\frac{4}{x}+4=4\cdot\frac{\ln^3 x-1+x}{x},$$

$f'(1)=0$，

$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加；

$f(1)=4-a$ 为 $f(x)$ 的极小值.

又注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，所以

(1) 当 $4-a<0$，即 $a>4$ 时，方程有两个实根；

(2) 当 $4-a=0$，即 $a=4$ 时，方程有唯一实根；

(3) 当 $4-a>0$，即 $a<4$ 时，方程没有实根.

A 卷第六题，B 卷第六题（8 分）

六、（8 分）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \arcsin(t-1)^2\,\mathrm{d}t$，

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x)\arcsin(x-1)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 t\arcsin t^2\mathrm{d}t\quad(t=1-x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin u\,\mathrm{d}u\quad(u=t^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(u\arcsin u\Big|_0^1-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$