1. 设 $f(x)=\begin{cases}0\,,-1\le x<0\\1\,,\ 0\le x\le 1\end{cases}$，证明：$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不存在原函数.

证明：显然，$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1$，于是，

$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=1$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积.

$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界，且只有有限个间断点

但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不存在原函数，这可以用反证法证明：假设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则 $F'(0)=f(0)=1$，

由中值定理得 $F(x)-F(0)=F'(\xi)x=f(\xi)x$，于是，

$F_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(\xi)x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}f(\xi)=0$，　这与

$F'(0)=f(0)=1$ 矛盾，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不存在原函数.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\,,x\ne 0\\0\,,\ x=0\end{cases}$，证明：$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数，但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可积.

证明：令 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}\,,x\ne 0\\0\,,x=0\end{cases}$，则 $F'(x)=f(x)$，即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在原函数 $F(x)$；由于 $2x\sin\dfrac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上有界，$\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上无界，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无界，因此 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不可积.

2022级工科数学分析基础1试题与答案

一．单选题　（共13题52分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}+\frac{\tan x-x}{x^3}\right)=($　　　$)$

A、$e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}$.　B、$e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}$.　C、$e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}$.　D、$e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$，则(　　　)

A、$f'(0)=0$，$f''(0)=-\frac{1}{3}$.　　B、$f'(0)=0$，$f''(0)=-\frac{1}{6}$.

C、$f'(0)=1$，$f''(0)=\frac{1}{3}$.　　D、$f'(0)=1$，$f''(0)=\frac{1}{6}$.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0$

$x\neq 0$，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

3. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^5\sin\frac{1}{x}}{e^x+\ln(1+x^3)}=(\qquad)$

A、 0． B、1． C、4． D、∞．

解： $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^5\sin\frac{1}{x}}{e^x+\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3}{e^x}+\frac{x^5}{e^x}\sin\frac{1}{x}}{1+\frac{\ln(1+x^3)}{e^x}}=0$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}$，则$(\qquad)$

A、 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$． B、 $a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$．

C、 $a=-1$， $b=\dfrac{1}{2}$． D、 $a=-1$， $b=-\dfrac{1}{2}$．

解： $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=1$

$$\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1-2bx}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-x-2bx-2bx^2}{(1+x)3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-1-2b-2bx}{3x}=\dfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-a-bx}{x^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-ax-bx^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=1，b=-\dfrac{1}{2}$$

5. 设 $f(x)=\left(x^2-1\right)\arctan\dfrac{1+2x^2}{1+x+x^2}$，则 $f'(1)=$ (　　)

A、 $\dfrac{\pi}{2}$.　　B、 $\dfrac{\pi}{3}$.　　C、 $\dfrac{\pi}{4}$.　　D、 $\dfrac{\pi}{6}$.

解： $f'(x)=2x\arctan\dfrac{1+2x^2}{1+x+x^2}+\left(x^2-1\right)\left(\arctan\dfrac{1+2x^2}{1+x+x^2}\right)'$

$$f'(1)=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

6. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{x}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\sin^8 x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=$ (　　)

A、 $\dfrac{5\pi}{32}$.　　B、 $\dfrac{\pi}{8}$.　　C、 $\dfrac{5}{16}$.　　D、 $\dfrac{5}{32}$.

解：　令 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{A}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\mathrm{d}x=\frac{A}{8}+\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$A=\frac{5\pi}{32}$$

7. 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，则（　　）

A、 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(6t+5)(1+t)}{t}$.　　B、 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=6t+5$.

C、 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(6t+2)(1+t)^2$.　　D、 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-(6t+2)(1+t)^2$.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)=3t^2+5t+2$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(6t+5)\cdot\frac{(1+t)}{t}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

8. 设D是由曲线$y=x^2$和直线$y=1$所围成的平面图形，则D绕直线$y=1$旋转一周所成的旋转体的体积$V=$(　　)

A、$\dfrac{16\pi}{15}$.　　B、$\dfrac{4\pi}{3}$.　　C、$\dfrac{2\pi}{5}$.　　D、$\dfrac{8\pi}{15}$.

解：$V=\pi\int_{-1}^{1}(1-y)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\mathrm{d}x=2\pi\int_{0}^{1}(x^4-2x^2+1)\mathrm{d}x=\dfrac{16}{15}\pi$

9. 在以下命题中，错误的是(　　)

A、函数$\sin^{2022}x$的所有原函数都是周期函数，并且也以π为周期.

$$F(x)=\int_0^x\sin^{2022}t\mathrm{d}t+C$$

令$t=u+\pi$，

$$F(x+\pi)=\int_0^{x+\pi}\sin^{2022}t\mathrm{d}t+C=\int_{-\pi}^{x}\sin^{2022}u\mathrm{d}u+C$$

B、函数$\dfrac{\cos x}{1+x^2}$有且仅有一个原函数是奇函数.

$$F(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t+C$$

令$t=-u$，　$F(-x)=\int_0^{-x}\dfrac{\cos t}{1+t^2}\mathrm{d}t+C=-\int_0^{x}\dfrac{\cos u}{1+u^2}\mathrm{d}u+C\neq-F(x)$

C、函数$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$的所有原函数都是偶函数.

$$F(x)=\int_0^x\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\mathrm{d}t+C$$

令$t=-u$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\mathrm{d}t+C=-\int_0^{x}\ln\left(-u+\sqrt{1+u^2}\right)\mathrm{d}u+C=F(x)$$

$$=\int_0^{x}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\mathrm{d}u+C=F(x)$$

D、函数$f(x)=\begin{cases}1,x\neq0\\0,x=0\end{cases}$在区间$[-1,1]$上可积，但是在$[-1,1]$上没有原函数.

$f(x)$在$[-1,1]$上有界，且只有一个间断点$\Rightarrow$可积

假设$F(x)$是$f(x)$在区间$[-1,1]$上的原函数，即$F'(x)=f(x)$，则$F'(0)=f(0)=0$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}==\lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)x}{x}=\lim_{x\to 0}f(\xi)=1，\quad 矛盾$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)=($　　　$)$

A、 $\frac{\pi}{4}$.　　B、$\frac{1}{2}\ln 2$.　　C、0.　　D、1.

解：
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

11. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=1$，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f''(x)}{(x-1)^2}=1$，则(　　　)

A、 $x=1$为$f(x)$的极小值点.

B、 $x=1$为$f(x)$的极大值点.

C、 $(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

D、其它选项均不对.

解：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$，

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0=f'(1)$$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f''(x)}{(x-1)^2}=1\Rightarrow$由保号性$x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$，　$f''(x)>0$

$\Rightarrow x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$，　$f'(x)$单调递增(且$f'(1)=0$)$\Rightarrow$

$x<1$，　$f'(x)<0$　　$x>1$，　$f'(x)>0$

12. 曲线 $y=\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为(　　)

A、 3．　B、2．　C、1．　D、4．

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=\infty$ 没水平渐近线

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=+\infty$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)}{-\frac{3x^2}{x^6}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\infty$$

$x=0$，$x=1$是铅直渐近线

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{x(x-1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x^3}{x^2-2x+1}+\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(e^{\frac{1}{x^2}}-1)}{x^2-2x+1}+2=2$$

13. 在以下反常积分中，发散的是（　　）

A、 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$． B、 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$． C、 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$． D、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$．

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b}) + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[\arctan b - \arctan 0\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\arctan 0 - \arctan a\right] = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

2022级工科数学分析基础1(缓补考)试题与答案

一. 单选题　(共13题52分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1-x\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2\ln(1-x)}=$ (　　　)

A、$-\dfrac{1}{4}$.　B、$\dfrac{1}{4}$.　C、$-\dfrac{1}{2}$.　D、$\dfrac{1}{2}$.

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\left(e^x-1-x\right)}{-x^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

2. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2-bx}\right)=-1$，则两个常数(　　　)

A、$a=1,b=2$.　B、$a=1,b=-2$.

C、$a=4,b=2$.　D、$a=4,b=-2$.

解：$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2-bx}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{a-\frac{b}{x}}\right)=-1\Rightarrow\quad a=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-bx}\right)=-1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+bx}{x+\sqrt{x^2-bx}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{1+\sqrt{1-\frac{b}{x}}}=-1\quad\Rightarrow b=-2$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$ (　　　)

A、$\dfrac{\pi}{4}$.　B、0.　C、1.　D、$+\infty$.

解：$$\frac{n^2}{n^2+n}\le\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)\le\frac{n^2}{n^2+1}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-x}{x^3}=($ $)$

A、$-\dfrac{2}{3}$. B、$\dfrac{1}{3}$. C、$-\dfrac{1}{3}$. D、$\dfrac{2}{3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan x}{\tan^3 x}\cdot\dfrac{\tan^3 x}{x^3}+\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{2}{3}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$，则点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 $($ $)$

A、无穷间断点. B、连续但不可导的点.

C、可去间断点. D、可导点.

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0=f(0)$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$$

6. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x+y=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=($ $)$

A、$\dfrac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-y}$. B、$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}-y}$.

C、$\dfrac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2-y}$. D、$\dfrac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-y}$.

解：方程两边 $x+y=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 对 x 求导

$$1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2-y}$$

7. 设 $f(x)=\cos^2 x$，则当 $n\geq 1$ 时，$f^{(n)}(x)=($　　　$)$

A、$2^n\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　　　B、$2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C、$2^n\cos(2x+n\cdot\pi)$.　　　　D、$2^{n-1}\cos(2x+n\cdot\pi)$.

解：　$\cos^2 x=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

8. 以下四个反常积分之中，发散的是（　）

A、$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 x\mathrm{d}x$.　　　　B、$\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x$.

C、$\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.　　　　D、$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.

解：A、　$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 x\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\sin^3 x\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}\sin^3 x\mathrm{d}x$

$$\int_{0}^{+\infty}\sin^3 x\mathrm{d}x=-\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\sin^2 x\mathrm{d}\cos x=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}(\cos^2 x-1)\mathrm{d}\cos x$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\cos^3 b}{3}-\cos b+\frac{2}{3}\right)$$

B、　$\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x$

$$\int_{0}^{+\infty}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}e^{-x^4}\mathrm{d}(-x^4)=-\frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^4}-1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot x^3e^{-x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{e^{x^4}}=0$$

$$\int_{-\infty}^{0}x^3e^{-x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}e^{-x^4}\mathrm{d}(-x^4)=-\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{-a^4}\right)=-\frac{1}{4}$$

C、　$\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.　　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=0$

D、　$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^3}\mathrm{d}x$.　　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\dfrac{x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{1+x^3}=1$

9. 设 $a_n = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\left(n\in\mathbf{N}^+\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(na_n\right)=$（　　）

A、 $\left(1+e^{-1}\right)^{3/2}-1$.　　　B、 $\left(1+e^{-1}\right)^{3/2}+1$.

C、 $\left(1+e\right)^{3/2}-1$.　　　D、 $\left(1+e\right)^{3/2}+1$.

解：$a_n = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}(1+x^n) = \frac{1}{n}\left[\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{3/2}-1\right]$

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n\right)=\left(1+e^{-1}\right)^{3/2}-1$$

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$（　　）

A、 $-f(x)$.　　　B、 $f(x)$.

C、 $-f(0)$.　　　D、 $f(0)$.

解：令 $x-t=u$

$$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$F'(x)=f(x)$$

11. $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$

A、 $\frac{1}{16}$.　　　B、 $\frac{\pi}{16}$.

C、 $\frac{\pi}{32}$.　　　D、 $\frac{1}{32}$.

解：令 $x=\sin t$，

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}$$

12. 设$\dfrac{\ln x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，则$\int xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）

A、 $\ln x-\ln(\ln x)+C$.　　　B、 $\dfrac{1}{4}\left(x^2\ln^2 x-x^2\ln x+2x\right)+C$.

C、 $x\ln x-x+C$.　　　D、 $\ln x-\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

解： $u=x$ ，$v'=f(x)$ ，$v=\dfrac{\ln x}{x}$

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=x\frac{\ln x}{x}-\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

$$f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

13. 设D是由曲线$y=x^2$($0\le x\le 1$)和直线$x=1$及$y=0$围成的平面图形，则D绕直线$x=-1$旋转一周所成的旋转体的体积$V=$(　　)

A、 $\dfrac{7\pi}{2}$.　　B、 $\dfrac{5\pi}{3}$.　　C、 $\dfrac{7\pi}{6}$.　　D、 $\dfrac{5\pi}{6}$.

解：$V=4\pi-\pi\int_0^1(\sqrt{y}+1)^2\mathrm{d}y=\dfrac{7\pi}{6}$