1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$的收敛域为__________.

A. $(-5,5)$；　　　　B. $[-5,5)$；

C. $(-3,3)$；　　　　D. $[-3,3]$.

解　答案 B

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n[5^n+(-3)^n]}{(n+1)[5^{n+1}+(-3)^{n+1}]}=\frac{1}{5}，\quad R=5$$

当$x=5$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$发散（因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}}{\frac{1}{n}}=1$）

当$x=-5$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$收敛

因为$\frac{(-5)^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}=(-1)^n\frac{5^n+(-3)^n-(-3)^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{3^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$收敛（由比值法 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot(5^{n+1}+(-3)^{n+1})}}{\frac{3^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}}=\frac{3}{5}<1$）

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{6}$与$x=\sqrt{10}$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的__________.

A. 收敛点，收敛点　　　　B. 收敛点，发散点

C. 发散点，收敛点　　　　D. 发散点，发散点

解　答案 B

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为1，所以$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径为

$1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$ 的收敛半径为 $1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-2)^n$ 收敛半径为 1

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{2}$ 与 $x=2\sqrt{2}$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的（　　）

(A) 收敛点，收敛点；　　**(B)** 收敛点，发散点；

(C) 发散点，收敛点；　　**(D)** 发散点，发散点。

解　答案 C

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则该级数在 $x=2$ 处__________.

A． 条件收敛；　　**B．** 绝对收敛；

C． 发散；　　**D．** 由已知条件不能确定敛散性.

解　答案 B

5. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 无界，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛域是（　　）

（A） $(-1,1]$　**（B）** $[-1,1)$　**（C）** $[0,2)$　**（D）** $(0,2]$

解　答案 C

6. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$，求：1、收敛域；2、和函数。

解：1、收敛半径$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n+1)}{1/(2(n+1)+1)}}=1$，

左端点$x=-1$代入，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散，

右端点$x=1$代入，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$发散，

收敛域$(-1,1)$。

2、令和函数$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，

设$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$S_1'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+1}}{2n+1})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$，

$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，

所以，$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

7. 设有幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$ 1、求其收敛域；2、求其和函数$S(x)$的表达式.

解：1、$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n+1}{n!}}{\frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}}=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

2、设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n+1)-1}{n!}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2S_1(x)-e^x,$$

其中：$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，

$$\int_0^x S_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{n!}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$$

两边对x求导，得$S_1(x)=(x+1)e^x$，

$S(x)=(2x+1)e^x$，$(-\infty<x<+\infty)$

8. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}$

解 方法一：令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}x^{2n+4}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

所以

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n+5}=x^5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}=x^5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=x^5\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x^7}{2-x^2}$$

$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

则 $S(x)=\left(\frac{x^7}{2-x^2}\right)'=\frac{14x^6-5x^8}{(2-x^2)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=S(1)=9$

方法二：拆项 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

关于第一项级数，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$|x|<1$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\Rightarrow S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S(\frac{1}{2})=4$$

关于第二项级数，$5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=5\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=5$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2^n}=4+5=9$

9．求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$

解 方法一：令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$ ，$x\in(-\infty,+\infty)$

所以 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(n+1)^2}{n!}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=(x^2+x)e^x$$

$$S(x)=\left((x^2+x)e^x\right)'=(x^2+3x+1)e^x\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=S(1)=5e$$

方法二：拆项

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+3n+1}{n!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=5e$$

10. 将函数 $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数.

解 方法一: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $(-1<x\le 1)$

$$f(x)=\ln(x^2+3x+2)=\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln\left(3+(x-2)\right)+\ln\left(4+(x-2)\right)$$

$$=\ln 3\left(1+\frac{x-2}{3}\right)+\ln 4\left(1+\frac{x-2}{4}\right)=\ln 3+\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{x-2}{4}\right)$$

$$=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n4^n}，(-1<x\le 5)$$

$$=\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)\frac{(x-2)^n}{n}，(-1<x\le 5)$$

方法二:

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+x-2}+\frac{1}{4+x-2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{4^n}，(-1<x<5)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n，(-1<x<5)$$

$$\int_2^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_2^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n\mathrm{d}x$$

即
$$f(x)-f(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_2^x(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

当 $x=-1$ 时， $f(x)$ 无意义， $x=5$ 时，级数收敛，故收敛域是 $-1<x\le 5$

$$f(x)=\ln 12+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}，\quad -1<x\le 5$$