1．设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，证明：

（1）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 为偶函数.

（2）若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

证明:

(1) $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$

令 $t=-u$

$$F(-x)=-x\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^{-x} tf(t)\mathrm{d}t=-x\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)-2\int_0^x (-u)f(-u)\mathrm{d}(-u)$$

$$=x\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(-u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(-t)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=F(x)$$

（2）当 $x>0$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=xf(\xi)-xf(x)>0$$

$$0<\xi<x$$

当 $x<0$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$$

$$=-\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=xf(\xi)-xf(x)>0$$

$$x<\xi<0$$

2． $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t$ $\qquad$ $\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$

解：令 $x-t=u$

$$\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t=\int_x^0 \cos u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x \cos u^2\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos(x-t)^2\mathrm{d}t=\cos x^2$$

3．设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$

解：令 $x+t=u$

$$\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=\int_{x+1}^{x+2} f(u)\mathrm{d}u=\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t=f(x+2)-f(x+1)$$

$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ $\quad$ $F'(x)=f\left(v(x)\right)v'(x)-f\left(u(x)\right)u'(x)$

4．设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

解：令 $x-t=u$

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$$

求导 $\quad \int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\sin x$

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\mathrm{d}u=\sin\frac{\pi}{2}=1，\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=1$$

5. 设 $f(x)$ 连续，$f(1)=1$ 且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

解：令 $2x-t=u$

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\mathrm{d}u=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=2x\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\mathrm{d}u$$

求导

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u+2x[2f(2x)-f(x)]-[4xf(2x)-xf(x)]=\frac{x}{1+x^4}$$

$$2\int_x^{2x}f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$$

令 $x=1$，$\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{3}{4}$ $\quad\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$

6. 计算 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

解：$$原式=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}(1+x^4)=\frac{1}{6}(1-\sqrt{2})$$

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则下列结论正确的是（　A　　）

(A)　当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

证：　　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$

令 $t=-u$ ，因为 $f(x)$ 是奇函数,

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$$

(B)　当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

$f(x)=\cos x$ ，$F(x)=\sin x+1$

(C)　当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

$f(x)=\cos x+1$ ，　　$F(x)=\sin x+x$

(D)　当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

$f(x)=x$ ，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$

8. 设连续函数 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则以下命题中正确的是（　A　　）

(A) 若 $F(x)$ 是周期函数，则 $f(x)$ 也是周期函数.

证：　$F(x+T)=F(x)$ ，　$F'(x+T)=F'(x)\Rightarrow f(x+T)=f(x)$

(B) 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $F(x)$ 也是周期函数.

$f(x)=\cos x+1$ ，　　$F(x)=\sin x+x$

(C)　　若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也是奇函数.

$f(x)=\sin x$ ，　$F(x)=-\cos x$

(D)　　若 $F(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 也是奇函数.

$F(x)=\sin x$ ，　　$f(x)=\cos x$

9. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，对任何$a>0$，求证：

$$\int_0^a\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

证明：

$$\int_0^a\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^a-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)(a-x)\mathrm{d}x$$

10. 设$f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$， $x>0$，求$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

解： $t=\frac{1}{u}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\ln t\mathrm{d}\ln t=\frac{1}{2}\ln^2 x$$

11．设$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=A$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x$

解：令$x=2t$，则

$$A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{4(t+1)^2}2\mathrm{d}t，\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=2A$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 2x}{x+1}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\frac{\pi}{2}+1}-1+2A\right]=\frac{1}{2(\pi+2)}+\frac{1}{4}-\frac{A}{2}$$

12．设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=0$，证明：在 $[-1,1]$ 上至少存在一点 η，使 $f''(\eta)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，

ξ 介于 0 和 x 之间

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}[f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1)}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，故一定存在最大值 M 和最小值 m，使得

$$m\le f''(x)\le M$$

故有
$$\frac{m}{3}=\frac{m}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{3}$$

即
$$m\le\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x\le M$$

于是由介值定理可知，存在 $\eta\in[-1,1]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f''(\xi)x^2\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2)}$$

由**(1), (2)**知

$$f''(\eta)=3\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

13．若 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 二阶导数连续，且 $f(3)=0$，证明 $\exists\xi\in[2,4]$ 使 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

证明：

$$3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=3\int_2^4[f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-3)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\text{，}\xi_1\text{介于}3\text{和}x\text{之间}$$

由 $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续，必存在最大值 M 和最小值 m，使 $m\le f''(x)\le M$，从而

$$\frac{3}{2}m\int_0^4(x-3)^2\mathrm{d}x\le\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\le M\frac{3}{2}\int_2^4(x-3)^2\mathrm{d}x$$

即
$$m\le\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x\le M$$

由 f'' 得连续性及介值定理，$\exists\xi\in[2,4]$ 使 $f''(\xi)=\frac{3}{2}\int_2^4 f''(\xi_1)(x-3)^2\mathrm{d}x$，

即
$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

14. $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ n 为正整数.

证明:令 $x=t+\frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

15. $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ n为正偶数.

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$，

令$x=t+\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

16. $\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=0$ n为正奇数.

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$，

令$x=t+\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t+\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

所以$\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=0$

17．若$f(x)$、$g(x)$都在$[a,b]$上可积，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

证明：对任一实数t，考虑二次三项式

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[tf(x)+g(x)\right]^2\mathrm{d}x\ge0$$

故其判别式$\Delta\le0$， 即

$$\left[2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le0$$

从而
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

（此不等式称为柯西-施瓦茨不等式）

18． $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算$\int_0^\pi f(x)dx$

解：$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \pi f(\pi) - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t - \int_0^\pi (x-\pi+\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x - \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2$$