一、(共 40 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的 (B)

A. 跳跃间断点.　　B. 可去间断点.

C. 无穷间断点.　　D. 振荡间断点.

解： $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)$

2. 设函数 $f(x)=x\cos x$，则 $f^{(2021)}(0)=$ (A)

A. 2021.　　B. -2021.

C. $2021!$.　　D. $-(2021!)$.

解： $f(x)=x\cos x=x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{x^{2020}}{2020!}-\cdots\right)$

$$=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\cdots+\frac{x^{2021}}{2020!}-\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}x^{2021}+\cdots$$

$$\frac{1}{2020!}=\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}$$

3. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\cot\dfrac{y}{x}$ 的通解是 (A)

A. $\cos\dfrac{y}{x}=Cx$.　　B. $\cos\dfrac{x}{y}=Cx$.

C. $\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{C}{x}$.　　D. $\cos\dfrac{x}{y}=\dfrac{C}{x}$.

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}$ 的等价无穷小是（　D　）

A．0．　　　　B．$-\frac{x^2}{4}$．

C．$\frac{x^3}{6}$．　　　　D．$-\frac{x^4}{8}$．

解：$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

5. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=$（　D　）

A．$\ln(1+\sqrt{2})$．　　　　B．$2\ln(1+\sqrt{2})$．

C．$\sqrt{2}-1$．　　　　D．$2\sqrt{2}-2$．

解：令 $A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+xA$$

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+A\int_0^1 x\mathrm{d}x$$

$$A=\sqrt{2}-1+A\frac{1}{2}\ \Rightarrow A=2\sqrt{2}-2$$

令 $x=\tan t$　$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan t}{\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec t\mathrm{d}t=\sec t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ e^x-1, & x\geq 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　B　）

A. 不连续.　　　　B. 连续，不可导.

C. 可导，且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.　　　　D. 可导，且 $f'(0)=1$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ ，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0=f(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-\cos\Delta x}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$$

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，则 $y''(0)=$（　A　）

A. -2.　　　　B. 2.

C. -3.　　　　D. 3.

解: $$e^y+6xy+x^2-1=0$$

$$e^y y'+6y+6xy'+2x=0\ ,\quad y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$$

$$y''=-\frac{(6y'+2)(e^y+6x)-(6y+2x)(e^y y'+6)}{(e^y+6x)^2}$$

$$x=0\Rightarrow y=0\qquad y'(0)=0\qquad y''(0)=-2$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=$（　C　）

A. ∞.　　　　B. 1.

C. e^2.　　　　D. e^{-2}.

解: $$\lim_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}}=e^2$$

9. 设函数 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$，则（ C ）

A．函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

B. 函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

C. 函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.

D. 函数 $f(x)$ 没有极值点，曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

解: $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$，　$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=0 \Rightarrow \ x=0$ 是驻点

$$f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow x=0\text{是二阶导数不存在的点}$$

10. 下列各定积分不等于零的是（ C ）

A. $\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{2-x}{2+x}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{x\cos^3 x}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$.

C. $\int_{0}^{\frac{9\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$.　　D. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解: $$\int_{0}^{\frac{9\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+4\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\,\mathrm{d}x+2\int_{0}^{2\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x$$

令 $x=\pi+t$

$$\int_{0}^{2\pi}\sin^9 x\,\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^9 t\,\mathrm{d}t=0$$

A 卷

一、选择题（共 45 分，每小题 3 分）

1、设 $f(x)=\frac{\tan x}{|x|}\arctan\frac{1}{x}$，则（ C ）

(A) $x=0$是振荡间断点.　(B) $x=0$是无穷间断点.

(C) $x=0$是可去间断点.　(D) $x=0$是跳跃间断点.

解: $$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{|x|}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{-x}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{|x|}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

2、$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=$（ A ）

(A) $\frac{1}{2}$.　(B) $-\frac{1}{2}$.　(C) 0.　(D) ∞.

解: $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

3、设 $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=0$，则常数（ A ）

(A) $a=1$，$b=1$.　(B) $a=1$，$b=-1$.

(C) $a=-1$，$b=1$.　(D) $a=-1$，$b=-1$.

解: $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=0\Rightarrow\quad a=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=1$$

4、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（ B ）

(A) $6t+5$.　　(B) $\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$.

(C) $(6t+2)(1+t)^2$.　　(D) $-(6t+2)(1+t)^2$.

解：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)=3t^2+5t+2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(6t+5)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+t}}\right)=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3-ax^2y^2+by^3=0$ 所确定，$y(1)=1$，$x=1$ 是 $y=y(x)$ 的驻点，则常数（ C ）

(A) $a=3$，$b=2$.　　(B) $a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{3}{2}$.

(C) $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$.　　(D) $a=-2$，$b=-3$.

解：　由 $y(1)=1\Rightarrow 1-a+b=0$

$$3x^2-2axy^2-2ax^2yy'+3by^2y'=0$$

由 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 的驻点 $\Rightarrow 3-2a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$

6、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$，则（ C ）

(A) $f(x)$在点$x=0$处不连续.

(B) $f(x)$在点$x=0$处连续，但不可导.

(C) $f(x)$仅在点$x=0$处可导.

(D) $f(x)$处处可导，且$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$.

解：
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\text{不存在}$$

7、设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有三阶连续导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则（ D ）

(A) $f(x_0)$是$f(x)$的一个极大值.

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的一个极小值.

(C) $f'(x_0)$是$f'(x)$的一个极大值.

(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点.

解：
$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)x+\frac{1}{2}f'''(x_0)x^2+o(x^2)=\frac{1}{2}f'''(x_0)x^2+o(x^2)$$

定理 1. 设函数$f(x)$在$x=x_0$处$n(n\geq 2)$阶可导,并且
$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,而$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

(1). 当n为偶数时，x_0必为极值点. 若$f^{(n)}(x_0)<0$，则x_0为极大值点；若$f^{(n)}(x_0)>0$，则x_0为极小值点.

(2). 当n为奇数时，x_0不是极值点.

定理 2. 设函数$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导，且

$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(1). 当n为奇数时，$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

(2). 当n为偶数时，$(x_0,f(x_0))$不是曲线$(x_0,f(x_0))$的拐点.

8、设$f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$，则$f^{(2020)}(0)=$（ B ）

(A) 4^{2018}.　　(B) 4^{2019}.　　(C) 4^{2020}.　　(D) 4^{2021}.

解：$f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$

$$f^{(2020)}(x)=\frac{1}{4}\cdot 4^{2020}\cos\left(4x+2020\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(2020)}(0)=4^{2019}$$

9、定积分$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$（ D ）

(A) $\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$.　　(B) $\ln 2-\dfrac{\pi}{4}$.　　(C) 0.　　(D) $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

解：$\dfrac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{1+x^2}$

$$\int_0^1\frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}(1+x)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$$

10、定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=$（ D ）

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{3}$.　　(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　　(D) $\frac{4}{3}$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\mathrm{d}(\tan x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)$

$$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

11、定积分$\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x=$（ D ）

(A) $\frac{\pi}{3}-1$.　　(B) $1-\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}-1$.

解：$\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\left(\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}-1\right)=1$$

12、定积分$\int_0^{6\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,\mathrm{d}x=$（ D ）

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{3\pi}{4}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $\frac{3\pi}{8}$.

解：$\int_0^{6\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,\mathrm{d}x=3\int_0^{2\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,\mathrm{d}x$

令$x=\pi+t$　　$=3\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin t+\sin^2 t)\cos^4 t\,\mathrm{d}x$

$$=6\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos^4 t\,dt=6\int_0^{\pi}\cos^4 t\,dt-6\int_0^{\pi}\cos^6 t\,dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$$

13、设 D 是由抛物线 $y=x(1-x)\ (0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成的平面图形，则 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V=$（ A ）

(A) $\frac{\pi}{6}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

解：$V=2\pi\int_0^1 xf(x)dx=2\pi\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{\pi}{6}$

14、设曲线 $y=y(x)$ 在其上任一点 (x,y) 处的切线斜率是 $-\frac{2x}{y}$（$y\ne 0$ 时），则此曲线是（ C ）

(A) 摆线.　　(B) 抛物线.　　(C) 椭圆.　　(D) 双曲线.

解：$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\Rightarrow\ ydy=-2xdx\ \Rightarrow\ \int ydy=-2\int xdx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=-2\frac{1}{2}x^2+c\Rightarrow x^2+\frac{1}{2}y^2=c$$

15、(工数)以下命题中错误的是（ B ）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

如：$\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续且有界，但 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

(C) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则

$f(x)$在(a,b)内一致连续.

(D) 若$f(x)$在(a,b)内可导，且$f'(x)$有界，则$f(x)$在(a,b)内一致连续.

15、（高数、微积分）

设$f(x)$连续、单调增加，$f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t$，则（ B ）

(A) $F(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少. (B) $F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加.

(C) $F'(x)\equiv 0$. (D) $F'(x)$在$[0,+\infty)$上变号.

解： 令$x-t=u$

$$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t=-x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$\lim_{x\to 0}F(x)=0=F(0)$$

$$x>0，\quad F'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)>0$$

一、选择题　每小题 3 分，共 45 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的（　　）

(A) 可去间断点.　　(B) 跳跃间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$

2、设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）

(A) 在点 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在点 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

解：由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数 $\Rightarrow f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

3、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}$，则 $f'(x)=$（　　）

(A) $(1+2x)e^{2x}$.　　(B) $(1+x)e^{x}$.　　(C) xe^{2x}.　　(D) 1.

解：$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty} x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}=xe^{2x}$，$f'(x)=(1+2x)e^{2x}$

4、函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在以下哪个区间不一致连续？（　　）

(A) $(0,1)$.　　(B) $(1,2)$.　　(C) $[2,3]$.　　(D) $[3,+\infty)$.

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ (　　)

(A) $\ln 2-1$.　　(B) $\ln 2+1$.　　(C) -1.　　(D) 0.

解：　$2^{xy}\ln 2(y+xy')=1+y'$

$x=0\Rightarrow y=1$　，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\ln 2-1$

6、设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 有二阶连续导数，且 $f''(t)\neq 0$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$

(　　)

(A) $f''(t)+tf'''(t)$.　(B) 1.　　(C) $\frac{t}{f''(t)}$.　　(D) $\frac{1}{f''(t)}$.

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f''(t)}$$

7、设函数 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(2020)}(0)=$ (　　)

(A) 2019.　　(B) 2020.　　(C) 2021.　　(D) 0.

解：$f(x)=xe^x=x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2019}}{2019!}+\cdots\right)$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^{2020}}{2019!}+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!}x^{2020}+\cdots$$

$$\frac{1}{2019!}=\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!}$$

8、设周期为 4 的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的斜率为（　　）

(A) 1.　　(B) -1.　　(C) 2.　　(D) -2.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$

$$f'(1)=-2$$

9、函数 $f(x)=\int_0^x \dfrac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为（　　）

(A) $\ln\dfrac{3}{4}$.　　(B) $\ln\dfrac{3}{2}$.　　(C) 0.　　(D) $\ln 3$.

解：$f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$$f(-1)=\int_0^{-1}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{-1}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=\ln 3$$

$$f(1)=\int_0^{1}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{1}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}(t^2-t+1)=\ln\frac{3}{4}$$

10、定积分 $\int_0^{\pi} 2e^x\sin x\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $-e^{\pi}+1$.　　(B) $-e^{\pi}-1$.　　(C) $e^{\pi}+1$.　　(D) $e^{\pi}-1$.

解：$\int_0^{\pi} 2e^x\sin x\mathrm{d}x=2(e^x\sin x\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\mathrm{d}x)=-2\int_0^{\pi}e^x\cos x\mathrm{d}x$

$$=-2(e^x\cos x\big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\mathrm{d}x)$$

$$\int_0^{\pi} 2e^x\sin x\mathrm{d}x=-e^x\cos x\big|_0^{\pi}=e^{\pi}+1$$

11、定积分 $\int_{\pi}^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $\frac{\pi}{2}$.　　(B) $\frac{3\pi}{8}$.　　(C) $\frac{\pi}{4}$.　　(D) $\frac{\pi}{8}$.

解：　令 $x=\pi+t$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin^4 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}$$

12、定积分 $\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{10}{3}$.　　(C) 5.　　(D) $\frac{20}{3}$.

解：令 $\sqrt{2x+1}=t$

$$\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}}{t}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{10}{3}$$

13、心形线 $r=1+\cos\theta$（极坐标系下的方程）所围平面图形的面积为（　　）

(A) $\frac{3\pi}{8}$.　　(B) $\frac{3\pi}{4}$.　　(C) $\frac{3\pi}{2}$.　　(D) 3π.

解：$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi$

14、函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为（　　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3 .

解：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0\Rightarrow x=e$

$0<x<e$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}>0$ ，　$x>e$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}<0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-\frac{x}{e}+1)=-\infty$，

$f(e)=1>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{\frac{x}{e}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e}}=0<1$$

当 x 充分大时，$\frac{\ln x+1}{\frac{x}{e}}<1\Rightarrow \ln x+1<\frac{x}{e}\Rightarrow f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+1<0$

15、微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x\cdot\csc y$ 的通解为（　　）

(A) $\sin x+\cos y=c$.　　(B) $\sin x-\cos y=c$.

(C) $\cos x-\sin y=c$.　　(D) $\cos x+\sin y=c$.

A 卷

一、选择题：每小题 3 分，共 24 分，下列每题给出的三个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=$（A）.

A. e^3.　　B. $e^{\frac{1}{3}}$.　　C. 1.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}=e^3$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=$（B）.

A. 0.　　B. $\dfrac{1}{6}$.　　C. $\dfrac{1}{5}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$

3、设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f^{(2019)}(0)=$（A）.

A. 2019.　　B. $\dfrac{1}{2019}$.　　C. 0.

解：$f(x)=xe^{-x}=x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\cdots+\dfrac{x^{2018}}{2018!}-\cdots\right)$

$$=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\cdots+\frac{x^{2019}}{2018!}-\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}x^{2019}+\cdots$$

$$\frac{1}{2018!}=\frac{f^{(2019)}(0)}{2019!}$$

4、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x>0\end{cases}$，则在点$x=0$处（A）.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.　　B. $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.　　C. $f(x)$不可导.

解：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}$$

5、设$\begin{cases}x=\tan t\\ y=\sec t\end{cases}$（$0<t<\dfrac{\pi}{2}$），则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（C）.

A. $\cos t$.　　B. $\cos^2 t$.　　C. $\cos^3 t$.

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec t\tan t}{\sec^2 t}=\sin t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\cos t\cdot\frac{1}{\sec^2 t}=\cos^3 t$$

6、定积分$\int_0^{2\pi}\sin^4 x\cdot\cos^2 x dx=$（C）.

A. $\dfrac{\pi}{32}$.　　B. $\dfrac{\pi}{16}$　　C. $\dfrac{\pi}{8}$.

解：　令$x=\pi+t$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 x\cdot\cos^2 x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt=2\int_0^{\pi}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt=4\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$$

7、以下三个反常积分中，发散的是（B）．

A．$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$． B．$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x$． C．$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$．

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b+\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}b^2=+\infty$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

8、方程$x^5+x-1=0$，（A）．

A．只有一个实根． B．只有三个实根． C．有五个实根．

解：$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+x-1)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+x-1)=+\infty$

$$f(x)=x^5+x-1\Rightarrow f'(x)=5x^4+1>0$$

二、选择题：每小题 4 分，共 16 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)>0$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=$（ B ）.

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 不存在.

解：$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ln x}=e^0=1$$

2、 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则（B）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$

C. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$　　D. $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

3. 设存在常数 $L>0$，使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|^2$（$\forall x_1$，$x_2\in(a,b)$），则（D）.

A. $f(x)$ 在 (a,b) 内有间断点

B. $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，但有不可导点.

C. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f'(x)\ne 0$

D. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f'(x)\equiv 0$

解：$\forall x_0\in(a,b)$，$|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|^2$

$$0\le\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le\lim_{x\to x_0}\frac{L|x-x_0|^2}{|x-x_0|}=0$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

4、方程 $y''-3y'+2y=1+e^x\cos 2x$，则其特解形式为（D）（高数、微积分）

A. $y=b+e^x A\cos 2x$.

B. $y=b+e^x\left(\left(a_0x+a_1\right)\cos 2x+\left(c_0x+c_1\right)\sin 2x\right)$.

C. $y=b+xe^x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$.

D. $y=b+e^x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$.

4、以下四个函数中，在指定的区间上不一致连续的是（ B ）.（工数）

A. $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

B. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上.

C. $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

D. $f(x)=\ln x$ 在 $(1,2)$ 上.

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）（正确的涂 T，错误的涂 F）

1、设 $f(x)$ 可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 必为 $f(x)$ 的一个原函数.

（F）

2、设非负函数 $f(x)$ 有连续的导数，由曲线 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的面积微元为：$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}x$.

（F） $\mathrm{d}S=2\pi f(x)\mathrm{d}s$

3、设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 仍以 T 为周期.

（T）

解：　$f(x+T)=f(x)\Rightarrow f'(x+T)=f'(x)$

4、设 $x\to a$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，$n<m$，那么 $f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

（T）

解：　$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=k_1$，$k_1\neq 0$ ；$\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}=k_2$，$k_2\neq 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^m}(x-a)^{m-n}=k_1$$

5、设 $x_n\le z_n\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

（F）

解：　$x_n=\sqrt{n^2-1}$，$z_n=n$，$y_n=\sqrt{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=0$$