1.设函数$z=f(x,y)$的全微分$\mathrm{d}z=(x-2)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y$，则点$(2,-1)$(　　).

(A) 不是$f(x,y)$的连续点；　　(B) 不是$f(x,y)$的极值点；

(C) 是$f(x,y)$的极大值点；　　(D) 是$f(x,y)$的极小值点.

解　(D)

$f_x=x-2=0$，$f_y=y+1=0$，$(2,-1)$是驻点

$A=f_{xx}=1$，$B=f_{xy}=0$，$C=f_{yy}=1$

$AC-B^2=1>0$，$A=1>0$　所以是极小值

2.设函数$u(x,y)$在平面有界闭区域$D$上有连续二阶偏导数，在$D$内$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则函数$u(x,y)$(　　).

(A) 最大值点和最小值点必定都在$D$的内部；

(B) 最大值点和最小值点必定都在$D$的边界上；

(C) 最大值点在$D$的内部，最小值点在$D$的边界上；

(D) 最小值点在$D$的内部，最大值点在$D$的边界上.

解　(B)

$$B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow\quad A+C=0\Rightarrow C=-A$$

$$AC-B^2=-A^2-B^2<0$$

3.设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$，则(　　).

(A) $f_x(0,0)$不存在；　　(B) $f_x(0,0)$存在但不为零；

(C) $f(x,y)$在点$(0,0)$处取极大值；　(D) $f(x,y)$在点$(0,0)$处取极小值.

解　(C)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}=-2<0 \quad\Rightarrow\quad \text{由保号性}\, f(x,y)<0=f(0,0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{\frac{1}{2}x^2}=-2\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}=-1$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}\cdot x=0$$

**4.**设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为可微函数，且 $g'_y(x,y)\neq0$，已知点 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　　).

**(A)**若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；**(B)**若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$；

**(C)**若 $f'_x(x_0,y_0)\neq0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$；**(D)**若 $f'_x(x_0,y_0)\neq0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$.

解　**(D)**

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

$$\begin{cases}L_x=f'_x(x_0,y_0)+\lambda g'_x(x_0,y_0)=0\\ L_y=f'_y(x_0,y_0)+\lambda g'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}\Rightarrow f'_x(x_0,y_0)-\frac{f'_y(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}\cdot g'_x(x_0,y_0)=0$$

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot g'_y(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)\cdot g'_x(x_0,y_0)$$

**5.**设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，且满足 $f(0)>0, g(0)<0$，$f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　　　)

（A） $f''(0)<0, g''(0)>0$.　　　（B） $f''(0)<0, g''(0)<0$.

（C） $f''(0)>0, g''(0)>0$.　　　（D） $f''(0)>0, g''(0)<0$.

**解　(A)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{点}(0,\ 0)\text{是驻点}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$$

$$A=f''(0)g(0),\quad B=f'(0)g'(0)=0,\quad C=f(0)g''(0)$$

点$(0,\ 0)$处取得极小值　　$A=f''(0)g(0)>0 \Rightarrow f''(0)<0$

$$AC-B^2=f''(0)g(0)f(0)g''(0)>0 \Rightarrow\ g''(0)>0$$

**6**.已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则(　　　　).

**(A)** 点$(0,0)$不是函数$f(x,y)$的极值点;

**(B)** 点$(0,0)$是函数$f(x,y)$的极大值点;

**(C)** 点$(0,0)$是函数$f(x,y)$的极小值点;

**(D)** 根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为函数$f(x,y)$的极值点.

解 **(A)**

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 和 $f(x,y)$在点$O(0,0)$连续$\Rightarrow f(0,0)=0$

给定$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，　$\exists\delta>0$，　当$(x,y)\in\overset{0}{U}(O,\delta)$时，

$$\left|\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}-1\right|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}<\frac{3}{2}$$

当$xy>0$时，　$f(x,y)>xy+\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2>0$；

当$0<|x|<\frac{1}{3}$， $y=-x$时，

$$f(x,y)<xy+\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2=-x^2+6x^4<-x^2+9x^4=-9x^2(\frac{1}{9}-x^2)<0$$

所以点$(0,0)$不是函数$f(x,y)$的极值点;

7. 设$f(x,y)=(x^2-1)(y^2-1)$，则下列说法正确的是（　　）

(A) $f(0,0)$是$f(x,y)$的一个极小值.

(B) $f(0,0)$是$f(x,y)$的一个极大值.

(C) $f(1,1)$是$f(x,y)$的一个极小值.

(D) $f(1,1)$是$f(x,y)$的一个极大值.

解 (B)

8. 设$z=f(x,y)$是由方程$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$所确定的二元函数，求$z=f(x,y)$的极值和极值点。

解 方程两边同时对$x,y$求偏导

$$\begin{cases}2x-6y-2yz_x-2zz_x=0\\-6x+20y-2z-2yz_y-2zz_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_x=\dfrac{x-3y}{y+z}\\z_y=\dfrac{-3x+10y-z}{y+z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}z_x=0\\z_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3y\\z=y\end{cases}$$

可求得$P_1(9,3)$，$z_1=3$ ，　$P_2(-9,-3)$，$z_2=-3$

再利用充分条件，

对$P_1(9,3)$，$A=\frac{1}{6}>0, AC-B^2=\frac{1}{36}>0$ 所以$P_1(9,3)$为极小值点，3为极小值。

对 $P_2(-9,-3)$，$A=-\frac{1}{6}<0, AC-B^2=\frac{1}{36}>0$ 所以 $P_2(-9,-3)$ 为极大值点，$-3$ 为极大值。

9. 用拉格朗日(Lagrange)乘子法求函数 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

解：令 $L(x, y, \lambda)=x^2+4xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$。

由 $\begin{cases} L_x=2x+4y+2\lambda x=0 \\ L_y=4x+2y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$，得 （5 分）

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}, \begin{cases} x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_4=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=3$，最大值；

$f(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})=-1$，最小值。 （10 分）

10. 函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 $\Delta z=(2x-3)\Delta x+(2y+4)\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$，且 $f(0,0)=0$，求 $z=f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 25$ 上的最值.

解：由题意，$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+4$ $\Rightarrow$

$z=x^2-3x+\varphi(y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(y)=2y+4 \Rightarrow \varphi(y)=y^2+4y+c$

$\Rightarrow z=x^2-3x+y^2+4y+c$

由 $f(0,0)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow z=x^2-3x+y^2+4y$

由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-3=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+4=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}\\ y_1=-2\end{cases}$，$f\left(\dfrac{3}{2},-2\right)=-6.25$

$$L(x,y,\lambda)=x^2-3x+y^2+4y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

由$\begin{cases}L_x=2x-3+2\lambda x=0\\ L_y=2y+4+2\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-25=0\end{cases}$，

得$\begin{cases}x_2=3\\ y_2=-4\end{cases}$，$f\left(3,-4\right)=0$；$\begin{cases}x_3=-3\\ y_3=4\end{cases}$，$f\left(-3,4\right)=50$

所以最小值$-6.25$，最大值$50$

11. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$处是否连续、偏导数是否存在、是否可微?

解

$0\le\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\dfrac{\left(xy\right)^2}{\left(2xy\right)^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}\left(xy\right)^{\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f\left(0,0\right)$，连续.

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=0,\ f_y\left(0,0\right)=0,\ \text{偏导数存在.}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left(\Delta x\cdot\Delta y\right)^2}{\left[\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2\right]^2}\overset{\Delta x=\Delta y}{=}\frac{1}{4}\neq 0,$$

不可微.

12.2020 级下学期期末考试题(10 分)

通过$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u\\ y=\mathrm{e}^v\end{cases}$，变换方程$2x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解 $u=\ln x,v=\ln y$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{x}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{y}$；　　（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}$$　（8 分）

$$2x^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{1}{xy}\right)+y^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y^2}\right)=0,$$

$$2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0,$$

即 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$.（10 分）