一般情况下，在求$f(x)$的 **Taylor** 公式时，需要计算$f(x)$的各阶导数，这往往是一项比较繁杂的计算工作。因此经常用间接方法求一些函数的 **Taylor** 公式。这种方法的理论根据是下述定理：

定理：（Taylor 多项式唯一性定理）设函数$f(x)$在点x_0处有直至n阶的导数，如果多项式$a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$满足条件

$$f(x)-[a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n]=o[(x-x_0)^n]\quad(x\to x_0)$$

则必有

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\quad\cdots,\quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

这就是说满足本定理条件的多项式$a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$必定是$f(x)$在点$x_0$的$n$阶 **Taylor** 多项式，即具有唯一性。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n]}{(x-x_0)^n}=0$$

例如在求e^{x^2}的麦克劳林展开式时，就可以用x^2代替e^x展开式中的x得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n})$$

1. [习题 2.9(A)第 5 题]设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(99)}(0)$.

解；因为 $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{x^{97}}{97!}+o(x^{97})$

则有 $f(x)=x^2\sin x = x^3-\dfrac{x^5}{3!}+\dfrac{x^7}{5!}-\cdots+\dfrac{x^{99}}{97!}+o(x^{99})$

$$f(x)=x^2\sin x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(99)}(0)}{99!}x^{99}+o\left(x^{99}\right)$$

$$\frac{f^{(99)}(0)}{99!}=\frac{1}{97!}，\quad f^{(99)}(0)=98\times 99$$

考虑 $f^{(98)}(0)=?$ ， $f^{(100)}(0)=?$

2. [习题 2.9(A)第 7 题] 设 $f(x)$在（$-\infty,+\infty$）内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，又已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$存在，证明当 $x\neq 0$时， $f(x)>0$.

证明： $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}\cdot x^2=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0=f'(0)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2>0\ \text{，}x\neq 0\text{，}$$

ξ介于 x 与 0 之间.

3. 设函数 $f(x)=x\cos x$，则 $f^{(2021)}(0)=$（　　）（2021 级期末考题）

A. 2021.　　　　B. -2021.

C. $2021!$.　　　　D. $-(2021!)$.

解：$f(x)=x\cos x=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^{2020}}{2020!}-\cdots\right)$

$$=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\cdots+\frac{x^{2021}}{2020!}-\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}x^{2021}+\cdots$$

$$\frac{1}{2020!}=\frac{f^{(2021)}(0)}{2021!}$$

4. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}$ 的等价无穷小是（　　）（2021 级期末考题）

A. 0.　　　　B. $-\frac{x^2}{4}$.

C. $\frac{x^3}{6}$.　　　　D. $-\frac{x^4}{8}$.

解：$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+o(x^4)$$

$$\sqrt{1+x^2}-1-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

5. 设 $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$，则 $f^{(2020)}(0)=$（　B　）（2020 级期末考题）

(A) 4^{2018}.　　(B) 4^{2019}.　　(C) 4^{2020}.　　(D) 4^{2021}.

解： $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

$$f^{(2020)}(x)=\frac{1}{4}\cdot 4^{2020}\cos\left(4x+2020\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$f^{(2020)}(0)=4^{2019}$

6. 设 $f(x)=\cos^2 x$，则当 $n\geq 1$ 时，$f^{(n)}(x)=($ $\qquad$ $)$（2022 级期末考题）

A、$2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$． B、$2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$．

C、$2^n\cos(2x+n\cdot\pi)$． D、$2^{n-1}\cos(2x+n\cdot\pi)$．

解： $\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-1}\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，x_1，x_2，x_3 是 (a,b) 内相异的三点，证明：$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$

证明：令 $x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，由泰勒公式

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间

$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$，$\xi_1$ 介于 x_1 与 x_0 之间

$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2$，$\xi_2$ 介于 x_2 与 x_0 之间

$f(x_3)=f(x_0)+f'(x_0)(x_3-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_3)(x_3-x_0)^2$，$\xi_3$ 介于 x_3 与 x_0 之间

所以 $$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=3f(x_0)++\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_3)(x_3-x_0)^2$$

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)>3f(x_0)$$

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\left|f''(\xi)\right|\geq 4\frac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$$

证明：由泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)(\frac{a+b}{2}-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{a+b}{2}-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2$$

$$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

同理 $$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-b)^2$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)(\frac{a+b}{2}-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{a+b}{2}-b)^2=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(a-b)^2$$

$$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$$

$$0=f(a)-f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

$$4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}=\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\le\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$

于是将$|f''(\xi_1)|$，$|f''(\xi_2)|$中较大者设为$|f''(\xi)|$，则有

$$|f''(\xi)|\ge 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

9．已知 $f(a)=2$，$f'(a)=3$。求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)}$

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right)$$

$$=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=e^{\frac{3}{2}}$$

10. 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\ne\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$