学号：__________

院系：__________

____级____班

课程名称：线性代数与解析几何　试卷：B　考试形式：闭卷

授课院（系）：数学科学学院　考试日期：2021年6月23日　试卷共6页

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 标准分 | 45 | 20 | 10 | 8 | 10 | 7 | 100 |
| 得　分 | | | | | | | |

装

订

线

| 得　分 |
|---|
| |

一、（每小题3分，共45分）选择题

1. 已知向量组$\alpha_1=[2,0,1]^T,\alpha_2=[0,1,-1]^T,\alpha_3=[k,-1,2]^T$线性相关，则$k=$(　　)

（A）2.　（B）$-2$.　（C）1.　（D）$-1$.

2. 已知三元二次方程 $kx^2+ky^2+(k-1)z^2-2xz+2yz=1$ 为椭球面，则 $k$ 的取值范围为(　　)

（A）$0<k<2$.　（B）$2<k<+\infty$.

（C）$-2<k<2$.　（D）$-\infty<k<-2$.

3. 若直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{k-1}=\frac{z+2}{-1}$与$\frac{x-1}{k}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$垂直，则$k=$(　　)

（A）0.　（B）1.　（C）$-1$.　（D）2.

4. 已知空间中三个点A(1, 1, 0), B(2, 1, -1), C(1, 2, -1)，则以AB, AC为邻边的平行四边形的面积为(　　)

（A）$\sqrt{2}$.　（B）$\sqrt{3}$.　（C）1.　（D）$\sqrt{5}$.

5. 对于实对称矩阵$A$，若存在一个可逆矩阵$B$，使得$A=B^TB$，并且$3A^2-4A-4E=O$，则 $A$ 的特征值为(　　)

（A）$-\frac{2}{3}$.　（B）2.　（C）$-\frac{4}{3}$.　（D）4.

6. 设$A$为$n(n\ge 2)$阶可逆矩阵，其伴随矩阵为$A^*$，常数$k\neq 0$，则$(kA)^*=$(　　)

（A）$kA^*$.　（B）$k^{n-1}A^*$.　（C）$k^nA^*$.　（D）$\frac{1}{k}A^*$.

13. 设$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$是$R^2$的一个基, $\beta_1,\beta_2$是$R^2$的另一个基, 且从基$\alpha_1,\alpha_2$到基$\beta_1,\beta_2$的过渡矩阵为$\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$, 则(　　)

(A) $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$.　　(B) $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$.

(C) $\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.　　(D) $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$.

14. 设三阶方阵 $A$ 的特征值为 $1,-1,2$, 则$|2A^*-3E|=$(　　)

(A) 25.　(B) 15.　(C) 35.　(D) 5.

15. 设$\alpha$和$\beta$是正交的$n$元单位列向量, $n>1$, $A=\alpha\alpha^T$, $B=\alpha\beta^T$, 则(　　)

(A) $A$和$B$等价且相似.　　(B) $A$和$B$相似但不等价.

(C) $A$和$B$等价但不相似.　　(D) $A$和$B$既不等价也不相似.

| 得 分 |
| --- |
| |

二、(每小题 4 分, 共 20 分) 简答题

1. 设矩阵$A$满足$A^2-A-4E=O$, 求$(A+E)^{-1}$.

2. 设矩阵$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$的秩为2, 且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, $\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$, 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

3. 求经过点P(1,1,0)且垂直于直线$\begin{cases}2x-y+1=0\\x+z-3=0\end{cases}$的平

4. 已知$\alpha,\beta$是正交的三元单位列向量，$A=\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T$，求$A$的全部特征值.

5. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，计算$AA^T$.

| 得 分 |
| --- |
| |

三、（10分）已知向量组$\alpha_1=(1,3,0,5)^T,\alpha_2=(1,2,1,4)^T,\alpha_3=(1,1,2,3)^T$，$\alpha_4=(1,-3,6,-1)^T,\alpha_5=(1,a,3,b)^T$的秩为2，（1）试确定$a$与$b$的值，(2) 求该向量组的极大无关组，并将其余向量由此极大无关组线性表示.

| 得 分 |
| --- |
| |

四、（8 分）1. $k$取何值时，线性方程组$\begin{cases} x+y-z=k \\ x+ky+z=1 \\ kx+y-z=1 \end{cases}$

有唯一解；无解；有无穷多个解？

2. 根据参数$k$的取值判别下面三个平面的相对位置.

$$\pi_1: x+y-z=k,\ \pi_2: x+ky+z=1,\ \pi_3: kx+y-z=1$$

| 得 分 |
| --- |
| |

五、（10 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，求正交阵$\boldsymbol{Q}$和对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$，

使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

| 得 分 |
| --- |
| |

六、（7 分）设$A$为$m$阶正定矩阵，$C$为$m\times n$矩阵，

证明 $C^T AC$正定的充要条件是$r(C)=n$.