1.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，(其中 $g(x)$ 具有二阶导数)，$g(0)=0$，$g'(0)=1$，（1）求 a 的值使 $f(x)$ 连续；（2）求 $f'(x)$；（3）讨论 $f'(x)$ 连续性。

解：(1) $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(g'(x)-\cos x)=0$ （4 分）

$$\left(a=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0\right)$$

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\sin x}{2}=\frac{g''(0)}{2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{1-\cos x}{2x}\right)=\frac{1}{2}g''(0)$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}g''(0) & x=0\end{cases}$$ （8 分）

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(g'(x)-\cos x)-(g(x)-\sin x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\cos x+x(g''(x)+\sin x)-(g'(x)-\cos x)}{2x}$$

$$=\frac{g''(0)}{2}=f'(0),$$

因此 $f'(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 连续。 （10 分）

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(g'(x) - \cos x) - (g(x) - \sin x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(g'(x) - g'(0)) + g'(0)x - x\cos x - (g(x) - \sin x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{g'(0) - \cos x + x\sin x - g'(x) + \cos x}{2x}$$

$$= g''(0) - \frac{1}{2}g''(0) = \frac{1}{2}g''(0) = f'(0)$$

2. (12 分) 设函数 $g(x)$ 有一阶连续导数，$g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=3$，

令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

(1) 求 $f'(x)$；　　(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 **(1)** $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\left(g'(x)+\sin x\right)-\left(g(x)-\cos x\right)}{x^2}$；　　—— 2 分

$$
\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-2x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-2}{2x}\\
&=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+1\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(g''(0)+1\right)\\
&=2
\end{aligned}
$$

—— 6 分

(2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}f'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+x\sin x+\cos x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-xg'(0)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\\
&=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)+1-\frac{1}{2}=2=f'(0),
\end{aligned}
$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　　—— 12 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+x\sin x+\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-xg'(0)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-g(x)+xg'(0)+x\sin x+\cos x}{x^2}$$

$$=g''(0)+\lim_{x\to 0}\frac{-g'(x)+g'(0)+\sin x+x\cos x-\sin x}{2x}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}=2=f'(0)$$

3．设 $f(x)=x+x^3|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（　　）。

（A）1　（B）2　(C) 3　（D）4

4．（10 分）设 $x_1=14$，　$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}\quad(n=1,\quad 2,\quad \cdots)$，

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$　；　（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$

解：（1）用单调有界原理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{4(\sqrt{x+2}-2)-x+2}{x-2}}{x-2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(\frac{1}{2\sqrt{x+2}})-1}{2(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{x+2}}{2(x-2)\sqrt{x+2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x-2}{2(x-2)\sqrt{x+2}(2+\sqrt{x+2})}}=e^{-\frac{1}{16}}$$

5. 若 $f(x)$ 在 x_0 点 n 阶可导，可推出 $f(x)$ 在 x_0 点附近 $n-1$ 阶以下可导。这是因为

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

6.（2012 级期中试题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2+\sin^6 x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}}{\dfrac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}+\dfrac{\sin^6 x}{x^3}}$， 其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^6 x}{x^3}=0,$$

所以 原极限 $=-\dfrac{1}{3}$.

7 . $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2^x+3^x}{5}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2^x+3^x}{5}}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{5}=\ln 3$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)}=3$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{5}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}}=3$$

8. (10 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\left(e^{\sin x}-1\right)\sin x}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x\cdot\sin x}\cdot\ln\left(\frac{\sin x-x}{x}+1\right)$ (3 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ (6 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}$. (10 分)

9. (10 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\tan x\cdot\arctan x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1-x-1-x}{4x\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}$$

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x^3}=(\quad)$

A、$-\frac{2}{3}$. B、$\frac{1}{3}$. C、$-\frac{1}{3}$. D、$\frac{2}{3}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\tan x}{\tan^3 x}\cdot\frac{\tan^3 x}{x^3}+\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{2}{3}$

11. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}}$.

解 $\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}}=e^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}\ln\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)}$,

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}\ln\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x^3}\ln\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2x^3}\cdot\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{2x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{6x^2}=\frac{1}{12},$$

原极限$=\mathrm{e}^{\frac{1}{12}}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2x)}{\left(e^x-1\right)\sin^3x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+\sin^2x}\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2-\sin^2x}{1+\sin^2x}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4(1+\sin^2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$