1．用微元法推出：由平面图形$0 \le a \le x \le b$，$0 \le y \le f(x)$，绕y轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

并计算正弦曲线$y = \sin x$在$0 \le x \le \pi$的一段与x轴围成的图形绕y轴旋转所得的旋转体的体积.

解：任取$[a,b]$的一个分割Δ：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

并记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$，则曲边梯形在$x_{i-1} \le x \le x_i$一段的平面图形绕$y$轴旋转所得的旋转体(柱壳)的体积

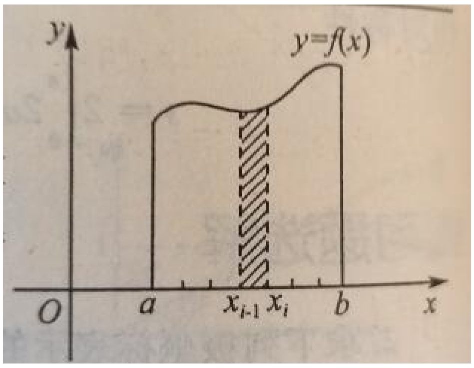
$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

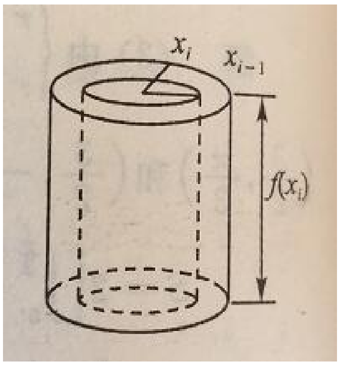
（近似值取为侧面积$2\pi x_i f(x_i)$与厚度的Δx_i乘积），于是

旋转体的体积

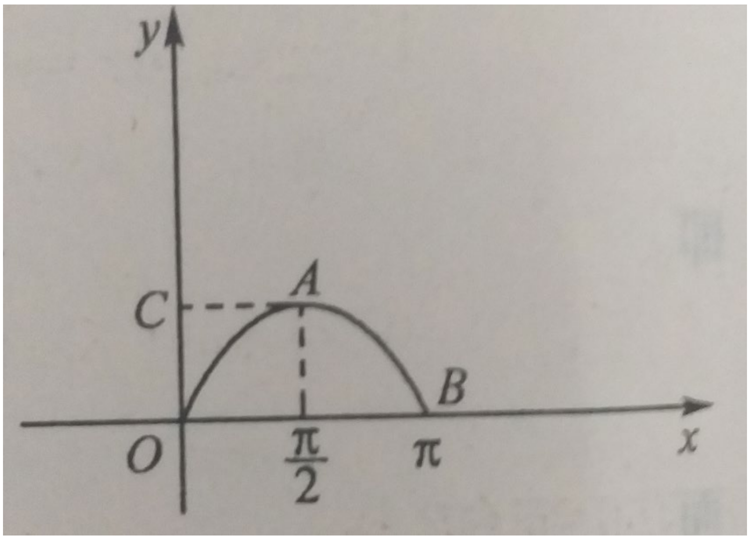
$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

这种计算方法称为“柱壳法”.





$$V=2\pi\int_0^{\pi}xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2$$



$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1[\pi-\arcsin y]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$
$$=\pi^2\int_0^1(\pi-2\arcsin y)\mathrm{d}y=2\pi^2$$

$y=\sin x$， $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ， $x=\arcsin y$ ， $y\in[-1,1]$

$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$， $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$， $\pi-x=\arcsin y$， $x=\pi-\arcsin y$