1. 习题 3.3(B)3.

证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$

证明：令 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in\left[a,b\right]$，则 $G'(x)=f(x), x\in\left[a,b\right]$，故 $G(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以

$$G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)，$$

即
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a), \xi\in(a,b)$$

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+\sin^3 x}-1)(3+\sin x)}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\dfrac{\sin^3 x}{3}\cdot 3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

1．设 $f(x)$ 为连续函数，求证：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，

并由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

证明：（1）设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

（2）设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$

于是 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\arctan(\cos x)]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

现在来证：$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

令 $x=\frac{\pi}{2}+t$　则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2}+t))\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

所以 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

2．计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\mathrm{d}x$

解： $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)\mathrm{d}x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\sin^4(-x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\sin^4 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}$$

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，证明：

$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x$ ，$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x$（$a$ 为任意实数）

证明：

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$$

令 $x=T+t$

$$\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{a} f(T+t)\mathrm{d}t=\int_0^{a} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T} f(x)\mathrm{d}x+\cdots$$

$$+\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\mathrm{d}x+\int_{nT}^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x$$

令 $x=nT+t$

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x$

解：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{21}{2}\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+10\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x=10\int_0^{\pi}\sin^6 x\mathrm{d}x=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=20\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$，并由此计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$

解：

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln 2$$

6．设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，当

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x\text{，求 } f(x)$$

解：令 $A=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$

$$f(x)\sin x=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}+A\sin x$$

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+A\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$ （由上面第 1 题）

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$$

7. 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$

解：

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x=4(\sqrt{2}-1)$$