1. 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 是否存在？

解 选路径 $y=kx\,(k\neq -1)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{kx^2}{(1+k)x}=0$

选路径 $y=x^2-x$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}\dfrac{x(x^2-x)}{x^2}=-1$

2. 设 k 为不等于零常数，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2\sin ky}{x^2+y^4}$ (   ).

(A) 等于 0；(B) 等于 $\dfrac{1}{2}$；(C) 不存在； (D) 存在与否与 k 的取值有关.

解 (A) $0\leq\left|\dfrac{xy^2\sin ky}{x^2+y^4}\right|\leq\dfrac{\left|xy^2\right|}{x^2+y^4}|ky|\leq\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^4)}{x^2+y^4}|ky|=\dfrac{1}{2}|ky|$

3. 设 k 为不等于零常数，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\sin ky}{x^4+y^2}$ (   ).

(A) 等于 0； (B) 等于 $\dfrac{1}{2}$；(C) 不存在；(D) 存在与否与 k 的取值有关.

解 (C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\sin ky}{x^4+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2ky}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx^2}}\dfrac{kmx^4}{(1+m^2)x^4}=\dfrac{km}{1+m^2}$

4. 以下四个函数中，在点 $O(0,0)$ 处连续的是(   ).

(A) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$； (B) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

(C) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$； (D) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

解 (C) $0\leq\left|\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

由夹逼法则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$,

(B) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\dfrac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}$

(D) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$

5. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，则 $f(x,y)$ **(　　　　)**.

(A) 处处有极限，但不连续；　　**(B)** 处处连续；

(C) 除 $(0,0)$ 点外处处连续；　　**(D)** 仅在 $(0,0)$ 点连续.

解　**(B)**

当 $x^2+y^2=0$ 时　　$0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

6. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq0\\ 0\ ,\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　　　).

(A) 连续，偏导数存在；　　(B) 连续，偏导数不存在；

(C) 不连续，偏导数存在；　　(D) 不连续，偏导数不存在.

解　**(C)**

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

7. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin x^2y, & xy\neq0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x'(0,1)=($　　　　$)$.

(A) 3；　　　(B) 2；　　　(C) 1；　　　(D) 0.

解　(C)

$$f_x'(0,1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\sin x^2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$$

8. 设函数 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则(　　　　).

(A) $f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在；(B) $f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在；

(C) $f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都存在；　　(D) $f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都不存在.

解　(B)

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\text{不存在}$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=0\text{存在}$$

9. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy & |x|\geq|y|\\ -xy & |x|<|y|\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$和$f_{yx}(0,0)$.

解　当 $y\neq0$ 时

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-xy}{x}=-y$$

当 $y=0$时，　$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$

总之有　$f_x(0,y)=-y$，　　类似得　$f_y(x,0)=x$

从而得

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{x-0}{x}=1$$