1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

解： $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sin x}\ln\left(1+\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1\right)}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1}{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}}{\sin x(e^x-1)\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}}{x^2}$$

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\qquad \cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$$x-(e^x-1)\cos\sqrt{x}=x-\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

$$=x-x+\frac{x^2}{2}-o(x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}-o(x^3)-o(x^2)+o(x^3)=\frac{x^3}{4}+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}-1}{\sin x}=0\ ,\quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=1$$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有二阶连续导数，则

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=$$

(A) $f'(x_0)$　　**(B)** $f''(x_0)$　　**(C)** $-f''(x_0)$　　**(D)** $-f'(x_0)$

P114 例 2.7.9

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处具有二阶连续导数，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

解：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(\Delta x)^2$$，ξ_1介于x_0与$x_0+\Delta x$之间

$$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(\Delta x)^2$$， ξ_2介于x_0与$x_0-\Delta x$之间

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}f''(\xi_1)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\right)=f''(x_0)$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=a\neq 0$成立的充要条件是(　　)

(A)　与k无关　　　　**(B)**　$k>1$

(C)　$k>0$　　　　**(D)**　$k\neq 1$

解: $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{k-1}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{(k-1)\frac{1}{x}}=a\neq 0$$

4. 证明 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$　　（$0<a<b$）

令$f(x)=\ln x$，　在$[a,b]$上利用 **Lagrange** 中值定理

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}=f'(\xi)\ ,\qquad a<\xi<b$$

$$\frac{1}{\xi}>\frac{2a}{a^2+b^2}\qquad a^2+b^2-2a\xi>a^2+b^2-2ab\geq 0$$

证：　要证 $\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}-\ln b+\ln a>0$

令 $f(x)=\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}-\ln x+\ln a$，（$x>a$），$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}-\ln x+\ln a$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x+a-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{x}\cdot\sqrt{a}}>0,$$

所以　$x>a$，$f(x)$单调增加；又因为$f(a)=0$且$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，因此　$x>a$，$f(x)>f(a)=0$．又因为$b>a$，所以　$f(b)>0$，即

$$\frac{b-a}{\sqrt{ab}}-\ln b+\ln a>0\Rightarrow\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

5.设函数$f(x)$在$x=a$的某邻域内有定义，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在是$f(x)$在$x=a$处可导的一个

(A)　充分条件　　　　(B) 充要条件

(C)　必要条件　　　　(D)既非充分也非必要条件

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}\quad,\quad a=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\big(f(a+h)-f(a)\big)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2f'(a)-f'(a)=f'(a)$$

答案：C

6. P152 页习题 2.10（A）8

设 $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$（$x>0$，$a_2>0$，$\cdots$ ，$a_n>0$），求 $f(x)$ 的最小值，进而用数学归纳法证明：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

解 $$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n+\frac{n}{x}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n+\frac{1}{x}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{x}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{x}\left(\frac{x+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)\right)=0$$

得驻点 $x_0=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}$ ，进而 $f''(x_0)>0$ ，从而 x_0 是极小值点，也是最小值点.

最小值 $f(x_0)=\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}$

当 $n=2$ 时，$\sqrt{a_1a_2}\le\frac{a_1+a_2}{2}$ 成立

假设对 $n-1$ 成立，

$\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$，即：$a_1a_2\cdots a_{n-1}\le\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$

现在证明对 n 成立 由上面求最小值可知

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\le\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

又由假设知

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}\le\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\le\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$$

即 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

7. 曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的渐进线有（　　　　）

(A)　1条.　　(B)　2条.　　(C)　3条.　　(D)　4条.

解:

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ 没水平渐近线

$$\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} == \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x} = \infty$$

$x=0$是铅直渐近线

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x^2}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = 0$$

有斜渐近线 $y = x$

答案：B

8. 曲线 $y = \dfrac{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为(　　　)

A、 3． B、2． C、1．　D、4．

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=\infty$ 没水平渐近线

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)}{-\frac{3x^2}{x^6}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\infty$$

$x=0$，$x=1$是铅直渐近线

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}}{x(x-1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3e^{\frac{1}{x^2}}-x^3}{x^2-2x+1}+\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(e^{\frac{1}{x^2}}-1)}{x^2-2x+1}+2=2$$

有斜渐近线 $y=x+2$

答案：A