11. 以下命题中正确的是（　　）

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}$ 收敛;

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 ;

(D) 若 $u_n \le v_n,(n=1,2,...)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

解　证明 **C** 对.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, 由保号性，$n$ 充分大时，$|u_{n+1}|>|u_n| \Rightarrow u_n \not\to \mathbf{0}$

(A) $u_n:1,-1,1,-1,\cdots$ **(B)** $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **(D)** $u_n=-\dfrac{1}{n}$，$v_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

12. 设有命题

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}a_n$ 收敛.

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散.

(4) 若 $a_n \le b_n \le c_n\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数为(　　　)

(A)．0　　　**(B)．1**　　　**(C)．2**　　　**(D)．3**

解　答案 **(B)**

证明 **(4)**对. 因为$0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，

由$b_n=(b_n-a_n)+a_n$，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

(1) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **(2)** $a_n=\dfrac{1}{n}$ **(3)** $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$，$b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

13. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数是

（**A**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$ （**B**） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ （**C**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ （**D**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

解　答案**(D)**

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛

（**A**）$u_1=1$，$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ $n=2,3,\cdots$ （**B**）$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ （**C**）$u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$

14. 设$0\le a_n<\dfrac{1}{n}$，下列级数中肯定收敛的**(　　)**

（**A**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ （**B**） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ （**C**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ （**D**）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

解　答案**(D)**

因为$0\le a_n<\dfrac{1}{n}\Rightarrow 0\le a_n^2<\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$收敛.

（**A**）$a_n=\dfrac{1}{2n}$ （**B**）$a_n=0$ n为奇数，$a_n=\dfrac{1}{2n}$ n为偶数（**C**）$a_n=\dfrac{1}{2n}$

15．以下命题中正确的是________．

A．若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛．

B．若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$．

C．若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}v_n=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛．

D．若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，且$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛．

解　证明 **D** 对．

令$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$前n项和为S_n，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛$\Rightarrow S_{2n}$收敛，令$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$，

又因为$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-u_{2n})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}u_{2n}=S+0=S$

所以$\lim_{n\to\infty}S_n=S\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

其它不对举反例如下:

(A) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ **(B)** $u_n=\frac{1}{n^2}$ **(C)** $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

16. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 的敛散性，是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解：因为 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$，所以原级数不绝对收敛.

设 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$，则 $y'=-\frac{1}{2x^{3/2}}\left(\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})+\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)<0$，故 u_n 单调减少，又显然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故原级数条件收敛.

17. 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\left(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ 是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解　因为 $3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\ln 3\ (n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)}{\frac{1}{n}}=\ln 3$

由比较判别法：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$ 发散.

令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1)$，$f'(x)=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}(3^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1+\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}3^{\frac{1}{\sqrt{x}}})<0\quad(x\ge 2)$

故 $\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\ \ (n\ge 2)$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)=0$

由莱布尼兹判别法原级收敛，故原级数条件收敛.

18. 判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$敛散性

解　由于$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\ln x)^2}}=0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\ln n)^2}}=0$$

由比较判别法极限形式，原级数发散.

19. 判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$敛散性

解　由 $\ln[(\ln n)^{\ln n}]=\ln n\cdot\ln(\ln n)$ ，又由n充分大时，$\ln(\ln n)>2$

所以，n充分大时，$\ln[(\ln n)^{\ln n}]=\ln n\cdot\ln(\ln n)>2\ln n=\ln n^2$

从而n充分大时，$(\ln n)^{\ln n}>n^2$，$\Rightarrow\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$

由比较判别法，原级数收敛.

展开

$\frac{1}{2n^2}$

20. 以下四个级数之中，发散的是(　　)

t ~~(A)~~ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.　　**(B)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n+1}$.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}\cdot\sqrt{\ln n}}$.　　**(D)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$

21. 以下四个正项级数中，发散的是（　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.　　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$.　　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$.

$\frac{1}{2n^2}$

$> \frac{1}{2n+1}$

解 (A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$　　用比值法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\text{，收敛}$$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2\ln n}{n^4-\cos n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln n}{n^2}}{1-\frac{\cos n}{n^4}}=1\quad\text{由比较法极限形式}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^4-\cos n}$ 收敛　　$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$.

$$\frac{1}{2n}\le 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$ ，由比较法

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$ 发散

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+2)^{\frac{n+1}{2}}}$ $\qquad \sqrt[n]{\ } \qquad \frac{n}{\sqrt{\cdots}}$

解: $\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{(n^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(2n^2+\ln n+2)^{\frac{n+1}{2}}}$

$$=\frac{(n^2)^{\frac{n+1}{2}-1}}{(2n^2+\ln n+2)^{\frac{n+1}{2}}}=\left(\frac{n^2}{2n^2+\ln n+2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{1}{n^2}$$

根值法

$\frac{n}{\sqrt{\cdots}}$