2022级工科数学分析基础1试题与答案

一. 单选题 （共13题52分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}+\dfrac{\tan x-x}{x^3}\right)=$（　　）

A、$e^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}$.　B、$e^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}$.　C、$e^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}$.　D、$e^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}$，则（　　）

A、$f'(0)=0$，$f''(0)=-\dfrac{1}{3}$.　B、$f'(0)=0$，$f''(0)=-\dfrac{1}{6}$.

C、$f'(0)=1$，$f''(0)=\dfrac{1}{3}$.　D、$f'(0)=1$，$f''(0)=\dfrac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^5\sin\frac{1}{x}}{e^x+\ln(1+x^3)}=$（　　）

A、0.　B、1.　C、4.　D、∞.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}$，则（　　）

A、$a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$.　B、$a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$.

C、$a=-1$，$b=\dfrac{1}{2}$.　D、$a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$.

5. 设 $f(x)=\left(x^2-1\right)\arctan\dfrac{1+2x^2}{1+x+x^2}$，则 $f'(1)=$（　　）

A、$\dfrac{\pi}{2}$.　B、$\dfrac{\pi}{3}$.　C、$\dfrac{\pi}{4}$.　D、$\dfrac{\pi}{6}$.

6. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\sin^8 x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=$（　　）

A、$\dfrac{5\pi}{32}$.　B、$\dfrac{\pi}{8}$.　C、$\dfrac{5}{16}$.　D、$\dfrac{5}{32}$.

7. 设$\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$，则（　　）

A、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(6t+5)(1+t)}{t}$.　　B、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=6t+5$.

C、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=(6t+2)(1+t)^2$.　　D、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-(6t+2)(1+t)^2$.

例 8. 设D是由曲线$y=x^2$和直线$y=1$所围成的平面图形，则D绕直线$y=1$旋转一周所成的旋转体的体积$V=$(　　)

A、$\dfrac{16\pi}{15}$.　B、$\dfrac{4\pi}{3}$.　C、$\dfrac{2\pi}{5}$.　D、$\dfrac{8\pi}{15}$.

9. 在以下命题中，错误的是(　　)

A、函数$\sin^{2022}x$的所有原函数都是周期函数，并且也以π为周期.

B、函数$\dfrac{\cos x}{1+x^2}$有且仅有一个原函数是奇函数.

C、函数$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$的所有原函数都是偶函数.

D、函数$f(x)=\begin{cases} 1, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$在区间$[-1,1]$上可积，但是在$[-1,1]$上没有原函数.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)=$(　　)

A、$\dfrac{\pi}{4}$.　B、$\dfrac{1}{2}\ln 2$.　C、0.　D、1.

11. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=1$，则(　　)

A、$x=1$为$f(x)$的极小值点.

B、$x=1$为$f(x)$的极大值点.

C、$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

D、其它选项均不对.

12. 曲线 $y=\frac{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为(　　)

A、 3．　B、2．　C、1．　D、4．

13. 在以下反常积分中，发散的是(　　)

A、 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$．　B、$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$．　C、$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$．　D、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$．

二. 计算题 （共 2 题 22 分）

1. (10 分) 设函数 $g(x)$ 连续，且 $g(x)>0$， $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)g(t^2)\mathrm{d}t$．

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；　(2) 求 $f(x)$ 的极小值.

解 $f(x)=x^2\int_1^{x^2}g(t^2)\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\cdot g(t^2)\mathrm{d}t$， —— 1 分

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}g(t^2)\mathrm{d}t+x^2\cdot g(x^4)\cdot 2x-x^2\cdot g(x^4)\cdot 2x=2x\int_1^{x^2}g(t^2)\mathrm{d}t$， —— 3 分

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $-1,0,1$. —— 4 分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

—— 8 分

(1) $f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$；单调增加区间为 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$.

(2) 极小值为 $f(-1)=f(1)=0$. —— 10 分

2. (12 分) 设函数 $g(x)$ 有一阶连续导数，$g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=3$，令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

(1) 求 $f'(x)$；　(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 (1) $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x\left(g'(x)+\sin x\right)-\left(g(x)-\cos x\right)}{x^2}$；　—— 2 分

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-2}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(g''(0)+1\right)$$

$$=2$$

—— 6 分

(2)

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+x\sin x+\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-xg'(0)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)+1-\frac{1}{2}=2=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　—— 12 分

三. 论述题 (共 3 题 26 分)

1. (10 分) 设 $a_1=\sqrt{6}$，$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明 用数学归纳法证明数列$\{a_n\}$的单调性和有界性：

单调性 $a_2=\sqrt{6+6}>\sqrt{6}=a_1$. 若$a_k>a_{k-1}$，则$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}>\sqrt{6+a_{k-1}}=a_k$.

所以数列$\{a_n\}$单调增加. —— 4 分

有界性 $a_1=\sqrt{6}<3$. 若$a_k<3$，则$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}<\sqrt{6+3}=3$. 所以数列$\{a_n\}$有上界.

—— 8 分

综上，由单调有界原理知数列$\{a_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$A=\sqrt{6+A}$，解方程$A^2=6+A$，得$A=3$或$A=-2$（舍去），所以

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$. —— 10 分

2. (8 分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数，

证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

证明 $f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$， —— 2 分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+0+\int_a^b\frac{f''(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$. —— 4 分

设$f''(x)$在$[a,b]$上的最大值为M，最小值为m，则

$$\frac{m}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\le\int_a^b\frac{f''(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$\frac{(b-a)^3}{24}m\le\int_a^b\frac{f''(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^3}{24}M,$$

存在$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b\frac{f''(\xi_x)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$， —— 7 分

从而有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$. —— 8 分

证法 2

设 $g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g'(x)=f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数.

$$g(x)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}g''\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{g'''(\xi_x)}{3!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3$$

—— 2 分

分别令 $x=a$ 和 $x=b$，则有

$$0=g(a)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2!}g''\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\frac{g'''(\xi_1)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=g(b)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2!}g''\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{g'''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

两式相减，注意到 $g'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^3}{24}$$ —— 5 分

设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则

$$m\le\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\le M$$

由介值定理，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$， —— 7 分

从而有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$. —— 8 分

3. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上具有二阶连续导数，且 $f''(x)\geq 0$.

证明：$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos x\mathrm{d}x\geq 0$.

证明 证法 1

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\sin x=\left(\sin x\cdot f(x)\right)_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{—— 2分}$$

$$=\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}\cos x=\left(\cos x\cdot f'(x)\right)_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos x\cdot f''(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{—— 4 分}$$

$$=\left(f'(2\pi)-f'(0)\right)-\int_0^{2\pi}\cos x\cdot f''(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{—— 5 分}$$

$$=\int_0^{2\pi} f''(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}\cos x\cdot f''(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{—— 7 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos x)\cdot f''(x)\,\mathrm{d}x\geq 0. \quad \text{—— 8 分}$$

证法 2

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\sin x=\left(\sin x\cdot f(x)\right)_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{—— 2分}$$

$$=-\int_0^{\pi}\sin x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$ （第二个积分做换元：$x=\pi+t$）

$$=-\int_0^{\pi}\sin x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\left(-\sin t\right)\cdot f'(\pi+t)\,\mathrm{d}t \quad \text{—— 5 分}$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\cdot\left(f'(\pi+x)-f'(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\cdot f''(\xi_x)\pi\,\mathrm{d}x\geq 0. \quad \text{—— 8 分}$$