3. 确定常数a，使得下列函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0\\ 3x+a\ , & x\geq 0\end{cases}$

确定常数a，使得函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, & x<0\\ 3x+a\ , & x\geq 0\end{cases}$在$[-1,+\infty)$上连续

解：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+a)=a$，

$f(0)=a$，

$a=1$

§1.3　实数理论

定理 1.1 (确界存在定理)　有上(下)界的非空实数集必有上(下)确界.

定理 1.4（单调有界收敛定理）单调递增(减)且有上(下)界的数列必收敛，极限为数列的上(下)确界.

定义 1.16　设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是一系列的闭区间，如果满足

（1）$\forall n\in\mathbf{N}_+,[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则称$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套.

定理 1.5（区间套定理）设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$为一个闭区间套，则存在唯一的$\xi$，使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$，即$\forall n\in\mathbf{N}_+,\xi\in[a_n,b_n]$.

定理 1.6(致密性定理,又名 Bolzano-Weistrass 定理)有界数列必有收敛子列.

定义 1.17 若数列$\{x_n\}$满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，使得当$n,m>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

定理 1.7(Cauchy 收敛原理) 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

确界存在定理$\Rightarrow$单调有界收敛定理$\Rightarrow$区间套定理$\Rightarrow$致密性定理$\Rightarrow$Cauchy收敛原理

定理:(有限覆盖定理) 若闭区间$[a,b]$被一组开区间$D=\{(a_\lambda,b_\lambda)\}$覆盖，即$[a,b]\subseteq\bigcup_\lambda(a_\lambda,b_\lambda)$，则从中必可选出有限个开区间$(a_1,b_1)$，$(a_2,b_2)$，$\cdots$，$(a_m,b_m)$，使得这有限个开区间也覆盖$[a,b]$.

定义. 设E是数轴上的非空数集，a是数轴上一定点(可以属于E,也可以不属于E)，若$\forall\delta>0$，$\overset{0}{U}(a,\delta)$都含有E中点，则称a是E的一个**聚点**

定理: (聚点定理) 数轴上有界无限点集E至少有一个聚点

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^6+x^3+1}}-\sin\frac{1}{x}\right)$$

解： 令 $x=\frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^6+x^3+1}}-\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^5+t^3}{t^6+t^3+1}}-\sin t\right)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^5+t^3}{t^6+t^3+1}}-t+t-\sin t\right)}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^5+t^3}{t^6+t^3+1}}-t\right)}{t^3}+\lim_{t\to0^+}\frac{(t-\sin t)}{t^3}$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^5+t^3}{t^6+t^3+1}}-t\right)}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^6+t^3+1}}-1\right)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{t^2-t^6-t^3}{t^6+t^3+1}}-1\right)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{t^2-t^6-t^3}{t^6+t^3+1}\right)}{t^2}=\frac{1}{3}$$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ （$x\to0$）

$$\lim_{t\to0^+}\frac{(t-\sin t)}{t^3}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^6+x^3+1}}-\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ （$a,b,c>0$）

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3}\right)}$

$a^x-1\sim x\ln a$， $x\to 0$

$$=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\tan\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+n\tan\frac{1}{n}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$\tan x-x\sim\dfrac{1}{3}x^3$ ， $(x\to 0)$

$\tan\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n^3}$ ，($n\to\infty$)

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{2}{e^{\frac{4}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4}}{\frac{1}{e^{\frac{4}{x}}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+\cos x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$

解： $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}=0$，

令 $t=\dfrac{1}{x-1}$，$x\to 1^+$，$t\to +\infty$， $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{e^t}{t^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$不存在

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{2}{x}}=$（　　　　）

A. ∞.　　　　**B.** 1.

C. e^2.　　　　**D.** e^{-2}.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}$，则其（　　）

（A）有无穷多个第一类间断点；　　**（B）**只有一个跳跃间断点；

(C). 只有两个可去间断点；　　**（D）**有三个可去间断点；

8. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则（　　　）

(A)　$f(x)$连续.　　　　(B)　有间断点 $x=1$.

(C)　有间断点 $x=-1$.　　　　(D)　有间断点 $x=0$.

解：(B) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1+x, |x|<1\\ 1, x=1\\ 0, x=-1\\ 0, |x|>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$ ， $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$

9. 设 $f(x)=\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的__________.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

解：A $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=\dfrac{1}{2}$

10. 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的（　　）

(A) 可去间断点.　　(B) 跳跃间断点.

(C) 无穷间断点.　　(D) 振荡间断点.

解：(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$

11. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sqrt[3]{x}}}{x^k}=c$（$c$ 为非零常数，k 为常数），则 __________.

A. $k=\dfrac{1}{3}, c=1$；　　B. $k=\dfrac{1}{3}, c=-1$；

C. $k=1, c=1$；　　D. $k=1, c=-1$.

解：B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sqrt[3]{x}}}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}(e^{x-\sqrt[3]{x}}-1)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}(x-x^{\frac{1}{3}})}{x^k}=c$