2010 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．函数 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & x\ge 0 \\ \dfrac{e^{bx}-1}{x} & x\prec 0 \end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$__________，若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 a , b 满足_________ 。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=$_____ ，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$_______ 。

3．曲线 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为________，切线方程为_______________ 。

4． $e^{x+y}-xy=1$，$dy=$________________，$y''(0)=$__________________ 。

5．若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$，则 $a=$________，$b=$___________ 。

二、单项选择题（每题 4 分, 共 20 分）

1．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则（　　）

（A） $a=\dfrac{2}{3}$， （B） $a=3$， (C). $a=\dfrac{3}{2}$， （D） $a=2$

2．下列结论中不正确的是（　　）

（A）可导奇函数的导数一定是偶函数；

（B）可导偶函数的导数一定是奇函数；

(C). 可导周期函数的导数一定是周期函数；

（D）可导单调增加函数的导数一定是单调增加函数；

3．设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}$，则其（　　）

（A）有无穷多个第一类间断点； （B）只有一个跳跃间断点；

(C). 只有两个可去间断点； （D）有三个可去间断点；

4．设 $f(x)=x+x^3|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（　　）。

（A）1 （B）2 (C) 3 （D）4

5．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$ ， 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$ 为（　　）。

（A）。 0 （B） $\dfrac{1}{6}$， (C) 1 （D） ∞

三.（10 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\tan x\cdot\arctan x}$

四.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，$g(0)=0$，$g'(0)=1$，（1）求 a 的值使 $f(x)$ 连续；（2）求 $f'(x)$；（3）讨论 $f'(x)$ 连续性。

五.（10 分）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x\prec 0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x\succ 0\end{cases}$ 问 a 为何值，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（1）连续；（2）为可去间断点；（3）为跳跃间断点；（4）为第二类间断点；

六.（10 分）设 $x_1=14$，　$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$　；　（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4(x_{n+1}-2)}{x_n-2}\right)^{\frac{1}{x_n-2}}$

七.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续，$(a,\ b)$ 可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$

2011 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n=$________ ；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{(1+x\sin\frac{1}{x})\tan x}=$________。

2．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________ ，曲线 $y=y(x)$ 在 $(0\,,1)$ 点处切线方程为__________。

3．设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确立，则函数 $y(x)$ 单调增加的 x 的取值范围是________，曲线 $y=y(x)$ 下凸的 x 取值范围是__________。

4．设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $a=$____，$b=$__。

5．设 $f(x)=x^3\sin x$，则 $f'(0)=$______， $f^{(2011)}(0)=$__________。

二、单项选择题（每题 4 分, 共 20 分）

1．下列结论正确的是（　　　）

（**A**）.如果 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 可导。

（**B**）.如果 $f(x)$ 可导，则 $f'(x)$ 连续.

(C). 如果 $f'(x)$ 不存在，则不 $f(x)$ 连续

（**D**）. x_n 落在 $(a-\varepsilon\,,a+\varepsilon)$ 外如果 $f(x)$ 可导，则 $f(x)$ 连续.

2．数列 $\{x_n\}$ 极限是 a 的充要条件是（　　）

（**A**）对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时有无穷多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon\,,a+\varepsilon)$ 中

（**B**）对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时有无穷多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon\,,a+\varepsilon)$ 外

(C). 对任意 $\varepsilon>0$，至多有有限多个 x_n 落在 $(a-\varepsilon\,,a+\varepsilon)$ 外

（**D**）以上结论均不对。

3．设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sin\pi x}$，则其（　　）

（**A**）有无穷多个第一类间断点；　　（**B**）只有一个可去间断点；

(C).有两个跳跃间断点；　　（**D**）有两个可去间断点；

4．曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的渐进线有（　　）条。

（A）1 条；　　　（B）2 条；　　　(C).3 条；　　　（D）4 条。

5．设 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导，则函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 不可导的充分条件是（　　）

（A） $f(a)>0$ 且 $f'(a)>$ **O**；　　　**（B）** $f(a)<0$ 且 $f'(a)<$ **O**；

(C). $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq$ **O**；　　　**（D）** $f(a)=0$ 且 $f'(a)=$ **O**

三.（10 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\arctan x\sqrt{1+2x^2}}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

四.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，$g(0)=0$，$g'(0)=1$，$g''(0)=2$，（1）求 a 的值使 $f(x)$ 连续；（2）求 $f'(x)$；（3）讨论 $f'(x)$ 连续性。

五.（10 分）比较 2011^{2012} 和 2012^{2011} 的大小，并叙述理由。

六.（10 分）$f''(x)>0$，$f(0)<0$，证明函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调增加。

七.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 连续，$(0,\ 1)$ 可导，$f(1)=0$，证：存在 $x_0\in(0,\ 1)$ 使 $nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0$，n 为正整数。

2012 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n+3^n}{5}\right)^{\frac{1}{n}}=$ __3__；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+\sin^2 x}=$ __3__．

(2) 曲线 $y=x^n\ (n\in N^+)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 __$y-1=n(x-1)$__，记该切线与 x 轴的

交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n^n=$ __e^{-1}__．

(3) 设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __$\dfrac{1}{2(t+1)^2}$__，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ __$\dfrac{-1}{2(t+1)^4}$__．

(4) $\cos 2x$ 的 ***Maclaurin***（麦克劳林）公式为 $\cos 2x=$ __$1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}$__ $+o(x^5)$，

设 $g(x)=x^2\cos 2x$，则 $g^{(4)}(0)=$ __-48__．

(5) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=tan^2x-x^2$ 是 x 的 __4__ 阶无穷小（写出阶数），

$f'''(0)=$ __0__．

二、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

(1) 以下极限计算中正确的是________．

A．$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$；　　B．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$；

C．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=\infty$；　　D．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=1$．

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪一个区间内有界？________

A．$(-1,0)$；　　B．$(0,1)$；

C．$(1,2)$；　　D．$(2,3)$．

(3) 对于定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$，下列命题中正确的是________．

A．如果当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值；

B．如果 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，则存在 $0<\delta\le1$，使得 $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调增加，在 $(0,\delta)$ 内单调减少；

C. 如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值；

D. 如果 $f(x)$ 为偶函数且可导，则 $f'(0)=0$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则________.

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$；　　B. $a=1,b=\dfrac{5}{2}$；

C. $a=1,b=-2$；　　D. $a=0,b=2$.

(5) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内三阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=-1$，则________.

A. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值；

B. $f(0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值；

C. $f'(0)$ 为 $f'(x)$ 的一个极大值；

D. $f'(0)$ 为 $f'(x)$ 的一个极小值.

三、(10 分)已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y^2+y=1\,(y>0)$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$，并求 $y=y(x)$ 的极值.

四、(10 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2+\sin^6 x}$

五、(10 分) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{a+b\cos x}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，求常数 a 和 b .

六、(10 分)(**1**) 证明：$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}\quad (n\in N^+)$；

(2) 设 $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\quad (n\in N^+)$，证明数列 $\{u_n\}$ 收敛.

七、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，$f(0)=0$. 证明：至少存在一点

$\xi\in(0,\pi)$，使 $2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}\cdot f(\xi)$.

2013 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ =____________，曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为________。

2. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$ 确定，则该函数表示的曲线在 $t=\pi$ 处的切线斜率为____，函数 $y=f(x)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的微分 $dy\big|_{t=\frac{\pi}{2}}=$____。

3. 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $a=$____，$b=$____。

4. 长方形的长 x 以 $2cm/s$ 的速率增加，宽 y 以 $3cm/s$ 的速率增加。则当 $x=12cm, y=5cm$ 时，长方形对角线增加的速率为________。

5. 设 $f(x)=x^3\sin x$，则 $f''(0)$=________，$f^{(2013)}(0)$=_________。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1．函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数是（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

2．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax-b}{x^2+x-2}=2$，　则（$a,b$）=(　　)

(A) $a=-1, b=2$　　**(B)** $a=-2, b=3$

(C) $a=-3, b=4$　　**(D)** $a=-4, b=5$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & ,x<0 \\ a+bx & ,x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（　　）

（A）$a=1,b=-1$　（B）$a=1,b=0$　（C）$a=1,b=1$　（D）$a=1,b=2$

4．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

（A）若$\{x_n\}$ 收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　　（B）若$\{x_n\}$ 单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

（C）若$\{f(x_n)\}$ 收敛，则$\{x_n\}$收敛　　（D）若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

5．设$f(x)$在$x=a$可导，则函数$|f(x)|$在$x=a$不可导的充分条件是（　　）

(A) $f(a)>0$且$f'(a)>0$　　(B) $f(a)<0$且$f'(a)<0$

(C) $f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$　　(D) $f(a)=0$且$f'(a)=0$

三.（10 分）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin^3 x}[(\dfrac{2+\cos x}{3})^x-1]$

四、（10 分）设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\sin x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中$g(x)$具有二阶连续导数，

$g(0)=0, g'(0)=1, g''(0)=2$，(1)求$a$的值使$f(x)$连续；(2)求$f'(x)$。

五、（10 分）设函数$y=y(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定，求$y=y(x)$的驻点，并判别它是否为极值点，如果是极值点，并求极值。

六、（10 分）证明$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geq (x-1)^2$

七、（10 分）**已知函数$f(x)$具有二阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明：存在点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=0$.**

2014 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. 方程 $e^y + xy = e$ 确定隐函数 $y = y(x)$，则 $y'|_{x=0}=$____及 $y''|_{x=0}=$_____。

2. 函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确立，求函数 $y(x)$ 的单调减少的 x 的取值范围__________及曲线 $y = y(x)$ 的拐点__________。

3. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\dfrac{1}{n})^{n^2}$ =__________。

4. 设有一个球体，其半径以 $0.1m/\min$ 的速率增加，则当半径为 1m 时，其体积增加的速率为_________和表面积增加的速率为_________。

5. 设函数 $f(x) = x^2\ln(1+x)$，则 $f'''(0)=$_________，$f^{(2014)}(0)=$_________。

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1．设 $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{\sin \pi x}$，则其 （　　）

（A）只有一个可去间断点　　　（B）有两个跳跃间断点

（C）有三个可去间断点　　　（D）有无穷多个第一类间断点

2．曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$（　）。

（A）即有水平又有铅直渐近线；（B）即有铅直又有斜渐近线 ；

（C）即无水平又无斜渐近线；　（D）即无铅直又无斜渐近线。

3．当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 2\arctan x - \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是（　　）阶的无穷小量。

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导，$f''(x) > 0$，令 $u_n = f(n)(n = 1,2,...)$，则下列结论正确的是(　)

（A）若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　（B）若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

（C）若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　（D）若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

5．函数 y=$f(x)$ 在 x_0 处可微，$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$， 下列说法“①$dy$ 是 h 的等价无穷小② $f'(x) \neq 0$ 时，Δy 与 dy 是等价无穷小③ $\Delta y - dy$ 是 h 的同阶无穷小④

$\Delta y - dy$ 是 h 的高阶无穷小” 中正确的是(   )

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）②④

三、(**10 分**) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x)$

四、(**10 分**) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x} & x>0 \\ ax+b & x \le 0 \end{cases}$，其中 $g''(0)=5$，$g'(0)=2$，

$g(0)=1$，试确定 a，b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

五、(**10 分**) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 内连续，且 $f(x)\ne g(x)$，$g(x)\ne 0$，如果 $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 $x=x_0$ $(a<x_0<b)$ 取极大值，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=x_0$ 取极小值。

六、(**10 分**) 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且满足 $f(0)<0$，$f'(0)>0$，当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$. 证明：在 $(0,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根。

七、(10 分) $f(x), g(x)$ 设$[a，b]$连续，(a，b) 内可导，且 $g'(x)\ne 0, x\in(a,b)$，证明存在 $\zeta\in(a,\ b)$ 使 $\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

2015 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题 (共 30 分，每题 6 分)

1、设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b) = 0$，**则** $a = \underline{1}$，$b = \underline{-1}$.

2、设 $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x\cdot\sin 5x$，**则** $f'''(0) = \underline{90}$，$f^{(4)}(0) = \underline{0}$.

3、设 $\begin{cases} x=\cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$，**则** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \underline{\tan t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\frac{1}{t}\sec^3 t}$.

4、设函数 $y=y(x)$ **由方程** $e^{x+y} - xy = 1$ **确定，则** $y'(0) = \underline{-1}$，$y''(0) = \underline{-2}$.

5、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{6}}$，$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \underline{-\frac{1}{3}}$.

二、选择题 (共 20 分，每题 4 分)

1、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x\ln x, & x>0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的____**A**____.

A. 可去间断点；　　**B.** 跳跃间断点；

C. 无穷间断点；　　**D.** 振荡间断点.

2、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ ax+b, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则____**B**____.

A. $a=2$，$b=0$；　　**B.** $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$；

C. $a=2$，$b=1$；　　**D.** $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.

3、设 $f(x)$，$g(x)$ 为大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则对于 $a<x<b$，有____**A**____.

A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$；　　**B.** $f(x)g(a)>f(a)g(x)$；

C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　　**D.** $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

4、设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-f(x-1))=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+c}{x-c})^x$，则常数 c 为____**C**____.

A. 2；　　**B.** -2；

C. $\dfrac{1}{2}$；　　**D.** $-\dfrac{1}{2}$.

5、设偶函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(0)\neq 0$，则 $x=0$____**C**____.

A. 一定不是 $f(x)$ 的驻点；　　**B.** 一定不是 $f(x)$ 的极值点；

C. 一定是 $f(x)$ 的极值点；　　**D.** 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点.

三、(**10** 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)+x^4\cos\dfrac{1}{x}}$.

解　因　为　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot x^2}{x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{x^3}=0$$

（**6** 分）

所以，原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x-x}{x^3}}{\frac{(\sqrt{1+x}-1)\ln(1+x^2)}{x^3}+\frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$ （**10** 分）

四、（**10** 分）证明：当 $0<x<1$ 时，$\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

证　令 $f(x)=(1-x)e^{2x}-(1+x)\ (x\in[0,1))$，则 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上二阶可导，（**2** 分）

且 $f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$，$f''(x)=-4xe^{2x}<0\quad(x>0)$，（**6** 分）

所以 $f'(x)$ 在 $[0,1)$ 上单减，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$；进而可知 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单减，

所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(0)=0$. 不等式得证.　　　　（**10** 分）

五、（**10** 分）讨论方程 $xe^{-x}=a\quad(a>0)$ 的实根个数.

证 显然，方程在 $(-\infty,0]$ 上没有根，因此方程只可能有正根.

令 $f(x)=xe^{-x}-a\quad(x\in[0,+\infty))$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，驻点 $x=1$，

当 $0\le x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(1)=e^{-1}-a$ 是 $f(x)$ 的最大值.　　（**4** 分）

所以，当 $e^{-1}<a$ 时，$f(x)<0$，方程没有实根；当 $e^{-1}=a$ 时，方程有唯一实根 $x=1$；当 $e^{-1}>a>0$ 时，

$f(1)>0$，$f(0)=-a<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$，由零点定理可知，方程有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$

内 .

（10 分）

六、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)+2f(1)=3f(2)$.

证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 因为 $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)\le\dfrac{f(0)+2f(1)}{3}\le\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$，所以由连续函数的介值定理，存在 $c\in[0,1]$，使得

$f(c)=\dfrac{f(0)+2f(1)}{3}=f(2)$;

（5 分）

因为 $f(x)$ 在 $[c,2]$ 上连续，在 $(c,2)$ 内可导，且 $f(c)=f(2)$，所以由 **Rolle** 定理，存在

$\xi\in(c,2)\subset(0,2)$，

使 得

$f'(\xi)=0$.

（10 分）

七、（10 分）（1）设常数 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_k>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$.

（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\quad(x\ge0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

（1）证 因 $a_1^n\le a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n\le ka_1^n$，$a_1\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{k}\cdot a_1$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1=a_1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}\cdot a_1=a_1$，所以由夹逼准则，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a_1$.　　（7 分）

（ 2 ）

$$f(x)=\max\{1,x,\frac{x^2}{2}\}=\begin{cases}1, & 0\le x\le1\\ x, & 1<x<2\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\ge2\end{cases}$$.

（10 分）

2016 工科数学分析基础（微积分）试题

一、填空题 (共 30 分，每题 6 分)

1.已知极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=C$$

其中 k, C 为常数，且 $C\neq 0$，则 $k=$____________，$C=$______________ 。

2.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-2x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$___________，

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=$___________。

3. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y'(0)=$______，

$y''(0)=$___________。

4.函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_________________，该函数表示的曲线在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____________________。

5.设函数 $f(x)=e^{x^2}\sin x$，则 $f'''(0)=$__________，$f^{(2016)}(0)=$__________。

二、选择题 (共 20 分，每题 4 分)

1．函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=g(y)$ 在同一直角坐标系 0xy 中的图像是（　　）

（A）完全不同；　　（B）部分相同，部分不同；

（C）完全相同；　　（D）关于直线 $y=x$ 对称。

2．在函数在一点处的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义中，ε 与 δ 的关系是 （　　）

（A） ε 与 δ 无关；　　（B）先给定 ε，后确定 δ，但 δ 的取值不唯一；

（C）先给定 δ，后确定 ε；　　（D）先给定 ε，后唯一确定 δ 。

3．设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，并且 $f(a)$ 为其极大值。则存在

$\delta > 0$，使得当$x \in (a-\delta, a+\delta)$时，必有 （　　）

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)] \ge 0$；　　（B）$(x-a)[f(x)-f(a)] \le 0$；

（C）$x \ne a$，且$\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(x)-f(t)}{(x-t)^2} \ge 0$；　（D）$x \ne a$，且$\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(x)-f(t)}{(x-t)^2} \le 0$。

4．函数$f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$的渐近线有（　　）。

（A）1 条；　　（B）2 条；　　（C）3 条；　　（D）4 条。

4．下列四个函数，哪一个在$(-\infty, +\infty)$内不一致连续（　　）

（A）$\sin x$　　（B）$x+\sin x$　　（C）$\sin x^2$　　（D）$\arctan x$

5．设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二次可微并且$f''(x) > 0$。则以下数值的正确顺序是（　　）

（A）$f'(1) > f(1)-f(0) > f'(0)$；　　（B）$f(1)-f(0) > f'(1) > f'(0)$；

（C）$f'(1) > f'(0) > f(1)-f(0)$；　　（D）$f'(1) > f(0)-f(1) > f'(0)$。

三、(**10 分**) 设ξ为$f(t) = \arcsin t$在区间$[0,x]$上使用拉格朗日中值定理的“中值”，

求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\xi}{x}$。

四、（10 分） 设$e < a < b < e^2$，证明：$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$。

五、（每题 5 分，共 10 分）

（1）设函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi \in (a,b)$，使得

$f''(\xi)=g''(\xi)$。

（2）给定曲线 C：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$-\infty<t<+\infty$，求该曲线的曲率，并讨论曲率在 $t=2\pi$ 处是否有极限。

得分	

六、（10 分）给定函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1;\\ x^3, & -1\le x\le 2;\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

问：$f(x)$是否有间断点、不可导点。若有，指出这些点。

得分	

七、（10 分）设 $x_1>0$。令 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$。

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛并求出其极限。

2017 工科数学分析基础（微积分）试题

得分	

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=2017$，则 $\alpha=$__________，

   $\beta=$__________.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy-2e^x=0$ 确定，则

   $dy=$__________，$y=y(x)$在$x=0$处的切线方程为__________ .

3. 已知$f(x)$在$x=0$邻域内 2 阶可导，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，则

   $f'(0)=$__________，$f''(0)=$__________ .

4. 函数$y=y(x)$由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定，则

   $\frac{dy}{dx}=$__________;函数$y=ln(1-x)$的n阶导数

$y^{(n)} =$______________________.

5. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=$ ____________________________,

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=$__________________.

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、设$f(x)=\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}$, 则$x=1$是 $f(x)$ 的____________.

A. 可去间断点　　　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　　　D. 振荡间断点

2、设$f(x)=\begin{cases}\frac{arcsinx-x}{x^2}, & x>0\\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则____________.

A. $a=2$，$b=0$　　B. $a=\frac{1}{6}$，$b=0$　　C. $a=2$，$b=1$　　D. $a=\frac{1}{2}$，$b=1$

3、当$x\to 0$时，$e^{\sin x}-e^x$是x的____________无穷小.

A. 3 阶　　B. 2 阶　　C. 同阶　　D. 等价

4、数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$，以下正确的是____________.

A. 若$\{x_n\}$发散，则$\{y_n\}$发散　　　　B. 若$\{x_n\}$无界，则$\{y_n\}$有界

C. 若$\{x_n\}$有界，则$\{y_n\}$为无穷小　　　　D. 若$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小，则$\{y_n\}$为无穷小

5、曲线$f(x)=\frac{1}{x}+arctan(1+x^2)$的渐近线的条数为____________.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

三、(10 分) 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{arctanx-arcsinx}{tanx-sinx}$.

四、（10 分）设函数$f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2 & x\le 0 \\ \ln(1+x) & x>0 \end{cases}$.

（1）求$f'(x)$；(2) 函数$f(x)$在$x=0$处是否二阶可导？若可导，求$f''(0)$.

五、（10 分）证明： $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

六、（10 分）在抛物线 L: $y^2=px(p>0)$上求一点，使该点的法线被抛物线 L 所截得的线段最短.

七、（10 分）若 $f(x)$ 在$[0,a]$上可导$(a>0)$，且 $f(0)=1, f(a)=0$，证明：在$(0,a)$内必存在两个点x_1,x_2使得 $f'(x_1)f'(x_2)=\frac{1}{a^2}$.