例 2.10.4 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$

证明　设 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内可导，且在 $(1,+\infty)$ 内

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)>0,$$

因此，$f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加，又因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续且 $f(1)=0$，于是，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

即 $2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)>0$，亦即 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}\ (x>1)$.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln(\sin x)}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln(\sin x)}\frac{e^{x\ln x-x\ln(\sin x)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x-x\ln(\sin x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln(\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-\ln(\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\frac{1}{6}$$

1. 讨论函数$f(x)$的单调性和极值.

方法：求出函数$f(x)$的驻点和不可导点，用驻点和不可导点把函数$f(x)$的定义域分成若干个子区间，在每个子区间上看$f'(x)$是大于零还是小于零，若$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在这个子区间是单调增加的，若$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在这个子区间是单调减少的。

驻点和不可导点是可疑的极值点，用一阶充分条件或二阶充分条件来判断驻点和不可导点是否是极值点，是极大值点还是极小值点.

2. 讨论曲线$y=f(x)$的凹凸性和拐点

方法：求出函数$f(x)$二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点，用这些点把函数$f(x)$的定义域分成若干个子区间，在每个子区间上看$f''(x)$是大于零还是小于零，若$f''(x)>0$，则函数$f(x)$在这个子区间上的曲线$y=f(x)$是凹的，这个子区间称为凹区间；若$f''(x)<0$，则函数$f(x)$在这个子区间的曲线$y=f(x)$是凸的，这个子区间称为凸区间.

曲线的拐点$(x_0,f(x_0))$对应着$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在. 检查$f''(x_0)$在x_0左、右两侧的符号，当两侧的符号相反时，点$(x_0,f(x_0))$是拐点，当两侧的符号相同时，点$(x_0,f(x_0))$不是拐点.

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 并且

$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1). 当 n 为偶数时，x_0 必为极值点. 若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则 x_0 为极大值点；

若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则 x_0 为极小值点.

(2). 当 n 为奇数时，x_0 不是极值点.

定理 2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，且

$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1). 当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(2). 当 n 为偶数时，$(x_0,f(x_0))$ 不是曲线 $(x_0,f(x_0))$ 的拐点.

当 $n=3$ 时，

$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}<0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}<0$$

1．(2017 级期末考试试题) 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$，则

（　　）.

A. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

B. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

C. $f(2)$ 不是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

D. $f(2)$ 不是 $f(x)$ 的一个极值，点 $(2,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

解：设 $f(x)=(x-2)^3 g(x)$， $g(x)=(x-1)^2(x-3)^4$

$$g(2)\neq 0，\quad g(x)=g(2)+g'(2)(x-2)+\cdots$$

$$f(x)=g(2)(x-2)^3+g'(2)(x-2)^4+\cdots$$

则 $f'(2)=f''(2)=0$ ， $f'''(2)=6g(2)\neq 0$

答案：C

2．设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(1)=0$， $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$，则

(　　　)

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(1,f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点.

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(1,f(1))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f''(x)=0=f''(1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta),\ f''(x)>0，$$

所以 $(1,f(1))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点. $f'(x)$ 在 $(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 上是单

调增加的，

又因为 $f'(1)=0$，所以 $x<1$，$f'(x)<0$；$x>1$，$f'(x)>0$.

答案：B

3. 设 $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，则 $x=0$ 是（　　　　）

(A)　驻点非极值点.

(B)　驻点且极小值点.

(C)　驻点且极大值点.

(D)　不可导点.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{x}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0=f'(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2>0 \Rightarrow x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta), f(x)>0=f(0)$

答案：B

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(　　　　)

(A)　$f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 单调上升.

(B)　$f(x)>f(x_0)$，$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

(C)　$f(x)>f(x_0)$，$x\in(x_0, x_0+\delta)$.

(D)　$f(x)<f(x_0)$，$x\in(x_0, x_0+\delta)$.

解：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0$

$\Rightarrow x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

$\Rightarrow x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) > f(x_0)$.

答案：C

如果 $f(x)$ 在 x_0 点附近可导且 $f'(x)$ 在 x_0 点连续

$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) > 0 \Rightarrow x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta), f'(x) > 0$，又因为 $f'(x_0) > 0 \Rightarrow x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 单调上升.

5.（2013 年期中）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

（B）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

（C）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛

（D）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

（B）证：因为 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

（A）$x_1 = 1$，$x_2 = -\frac{1}{2}$，$x_3 = \frac{1}{3}$，$x_4 = -\frac{1}{4}$，$\cdots$，

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan x, x \geq 0 \\ \arctan x \in, \ x < 0 \end{cases}$$

（C）$x_n = n$

（D）$x_n = n$

答案：B

6.（2014 年期中）设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导，$f''(x) > 0$，令 $u_n = f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$，则下列结论正确的是（　　）

（A）若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　（B）若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

（C）若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛　（D）若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散

证：$f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-2)^2$

$$f(1)=f(2)-f'(2)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$f'(2)=f(2)-f(1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}>0$$

$$u_n=f(n)=f(2)+f'(2)(n-2)+\frac{f''(\xi_n)}{2}(n-2)^2\to+\infty\ (n\to\infty)$$

(A)　$f(x)=-\ln x$，$u_1>u_2$，　$u_n\to-\infty\quad(n\to\infty)$

(B)　$f(x)=\frac{1}{x}$，$u_1>u_2$，　$u_n\to 0\quad(n\to\infty)$

(C)　$f(x)=x^2$，$u_1<u_2$，　$u_n\to+\infty\quad(n\to\infty)$

答案：D

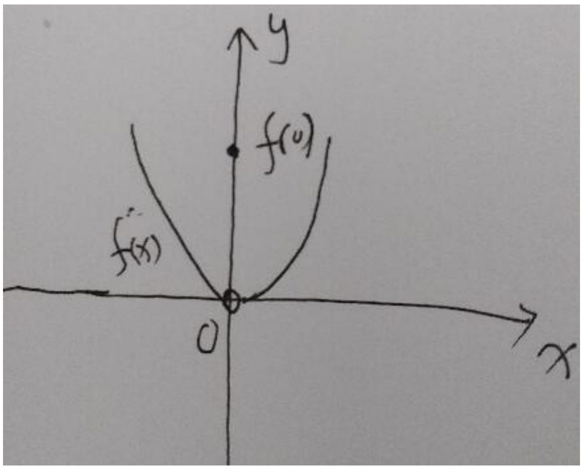
7. 对于定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$，下列命题中正确的是________.

A．如果当$x<0$时$f'(x)<0$，当$x>0$时$f'(x)>0$，则$f(0)$为$f(x)$的极小值；

B．如果$f(0)$为$f(x)$的极大值，则存在$0<\delta\le 1$，使得$f(x)$在$(-\delta,0)$内单调增加，在$(0,\delta)$内单调减少；

C．如果$f(x)$为偶函数，则$f(0)$为$f(x)$的极值；

D．如果$f(x)$为偶函数且可导，则$f'(0)=0$．



$f(-x)=f(x)\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)\Rightarrow -f'(0)=f'(0)\Rightarrow f'(0=0$

答案：D

8. 设偶函数$f(x)$具有二阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$，则$x=0$_____.

A．一定不是$f(x)$的驻点； B．一定不是$f(x)$的极值点；

C．一定是$f(x)$的极值点； D．不能确定是否为$f(x)$的极值点.

答案：C