若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$（ ）

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

1．求$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2. 求$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

解：$$\lim_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin x+\cos x-1)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}}=e^2$$

$x\to0$，$a^x-1\sim x\ln a$ $\Rightarrow$ $n\to\infty$，$a^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln a$，$a^{\frac{2}{n}}-1\sim\frac{2}{n}\ln a$

$x\to0$，$\ln(1+x)\sim x$ $\Rightarrow$ $n\to\infty$，$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$，$\ln(1+\frac{2}{n})\sim\frac{2}{n}$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+2}\ln(1+\frac{5}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+2}\cdot\frac{5}{n}=5$$

4. 设$a>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})=\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\ln a=\ln a$

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim\limits_{n\to\infty} n(3^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}})=\lim\limits_{n\to\infty} n2^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} n2^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2}$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$， $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$， $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin^3 x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$ $x\to 0$ ， $e^x-1\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$ $x\to 0$， $\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1$

9. 设常数 $a>0$，且 $a\neq 1$，确定 p 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 存在

解：

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^p a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln a=\lim_{x\to+\infty}a^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x^p}{x(x+1)}\ln a=\begin{cases}0, p<2\\ \ln a, p=2\end{cases}$$

10. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=2017$，求 α，β

解：

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ \ (x\to 0)\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta-1\sim\beta\frac{1}{n}\ \ (n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\beta-n^\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta-1\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta\beta\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-\beta+1}}{\beta}=2017$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta+1=0,\ \beta=\frac{1}{2017}\Rightarrow\alpha=-\frac{2016}{2017}$$