1. 长方形的长 x 以 $2\text{cm}/\text{s}$ 的速率增加，宽 y 以 $3\text{cm}/\text{s}$ 的速率增加。则当 $x=12\text{cm}, y=5\text{cm}$ 时，长方形对角线增加的速率为 _____ .

解：设长方形对角线为 z，则

$z^2=x^2+y^2$，它们都是 t 的函数，两边同时对 t 求导，有

$$2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

当 $x=12\text{cm}, y=5\text{cm}$ 时，$z=13$．且 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\text{cm}/\text{s}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/\text{s}$

所以 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3\text{cm}/\text{s}$

2. 设有一个球体，其半径以 $0.1\text{m}/\text{min}$ 的速率增加，则当半径为 1m 时，其体积增加的速率为______和表面积增加的速率为______ .

解： $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0.4\pi$$

$$S=4\pi r^2$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=4\pi\cdot 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=8\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0.8\pi$$

3. 当$x\to 0$时, 无穷小$(1+x)^{x^2}-1$, $e^{x^4-2x}-1$和$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$ 的阶数分别是:

(A) 1, 2和3阶, (B) 3, 2和1阶, (C) 3, 1和2阶, (D) 2, 3和1阶

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}\right)\left((1+2x)^{\frac{5}{2}}+(1+2x)^{\frac{4}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}+(1+2x)^{\frac{3}{2}}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+2x)^{\frac{2}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{3}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+(1+3x)^{\frac{5}{3}}\right)}{x^k\left((1+2x)^{\frac{5}{2}}+(1+2x)^{\frac{4}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}+(1+2x)^{\frac{3}{2}}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+2x)^{\frac{2}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{3}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+(1+3x)^{\frac{5}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{6}{2}}-(1+3x)^{\frac{6}{3}}}{x^k\left((1+2x)^{\frac{5}{2}}+(1+2x)^{\frac{4}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}+(1+2x)^{\frac{3}{2}}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+2x)^{\frac{2}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{3}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+(1+3x)^{\frac{5}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x+12x^2+8x^3-1-6x-9x^2}{x^k\left((1+2x)^{\frac{5}{2}}+(1+2x)^{\frac{4}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}+(1+2x)^{\frac{3}{2}}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+2x)^{\frac{2}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{3}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+(1+3x)^{\frac{5}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+8x^3}{x^k\left((1+2x)^{\frac{5}{2}}+(1+2x)^{\frac{4}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}+(1+2x)^{\frac{3}{2}}(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+2x)^{\frac{2}{2}}(1+3x)^{\frac{3}{3}}+(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+(1+3x)^{\frac{5}{3}}\right)}$$

4. 设$f(x)$可导, $F(x)=f(x)\left(1-\left|\ln(1+x)\right|\right)$, 则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的(　　　　)

(A)　充分必要条件.　　　　　(B)　充分条件但非必要条件.

(C)　必要条件但非充分条件.　(D)　既非充分又非必要条件.

$$F'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\left(1-\ln(1+x)\right)-f(0)}{x}=f'(0)-f(0)$$

$$F'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)\left(1+\ln(1+x)\right)-f(0)}{x}=f'(0)+f(0)$$

5. 设周期为4的函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$ ，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的斜率为

（　　　）

(A)　1．　(B)　-1．　(C)　2．　(D)　-2．

6．下列结论中不正确的是（　　　）

（A）可导奇函数的导数一定是偶函数；

（B）可导偶函数的导数一定是奇函数；

(C) 可导周期函数的导数一定是周期函数；

（D）可导单调增加函数的导数一定是单调增加函数；

7．若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$ ，　则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$为（　　　）

（A） 0　（B）$\dfrac{1}{6}$，　(C) 1　（D）∞

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[6]{n^6+n^5}-\sqrt[6]{n^6-n^5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^6+n^5)^{\frac{1}{6}}-(n^6-n^5)^{\frac{1}{6}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}(n^6-n^5)^{\frac{1}{6}}\left(\left(1+\frac{2n^5}{n^6-n^5}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^5}{n^6-n^5}=\frac{1}{3}$$

1. 求函数 $y=\frac{x^n}{1+x}$ 的 n 阶导数.

解：当 n 为奇数

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)$$

$$\frac{x^n}{1+x}=(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)-\frac{1}{x+1}$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

当 n 为偶数

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

$$x^n-1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+x-1)$$

$$\frac{x^n}{1+x}=(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots-x+1)+\frac{1}{x+1}$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{x^n}{1+x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

2. 求函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的 n 阶导数.

解：$y'=\left(x^{-1}\ln x\right)'=(-1)x^{-2}\ln x+x^{-2}=(-1)x^{-2}(\ln x-1)$

$$y''=(-1)(-2)x^{-3}(\ln x-1)+(-1)x^{-3}$$

$$=(-1)(-2)x^{-3}(\ln x-1-\frac{1}{2})$$

$$y'''=(-1)(-2)(-3)x^{-4}(\ln x-1-\frac{1}{2})+(-1)(-2)x^{-4}$$

$$=(-1)(-2)(-3)x^{-4}(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= (-1)^n n! x^{-(n+1)} (\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)
\end{aligned}
$$