12. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5$，则

A. $a=0,b=1$　　　　B. $a=1,b=-4$

C. $a=0,b=-4$　　　　D. $a=1,b=1$.

13. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\tan 3x}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\tan 3x}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=2$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)x}{3x}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=6$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ \ (x\to 0)$$

14. 设数列x_n与y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(　　　　)

(A)　若x_n发散，则y_n必发散.

(B)　若x_n无界，则y_n必有界.

(C)　若x_n有界，则y_n必为无穷小.

(D)　若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小.

解：(D)　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cdot x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

(A)　$x_n=n$，$y_n=\dfrac{1}{n^2}$

(B)　$x_n:1,0,2,0,3,0,4,0,\cdots$，　$y_n:0,1,0,2,0,3,0,4,\cdots$

(C)　$x_n=\dfrac{1}{n^2}$，$y_n=n$

15. 设 $f(x)=\dfrac{\tan x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}$，则（　　　）

(A)　$x=0$ 是振荡间断点.　　(B)　$x=0$ 是无穷间断点.

(C)　$x=0$ 是可去间断点.　　(D)　$x=0$ 是跳跃间断点.

16. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=0$，则常数（　　　）

(A)　$a=1$，$b=1$.　　　(B)　$a=1$，$b=-1$.

(C)　$a=-1$，$b=1$.　　　(D)　$a=-1$，$b=-1$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right)=0\Rightarrow a=1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=1$$

17. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x-1}{x}}$，则（　　　）

(A)　$x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B)　$x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C)　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D)　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

18. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪一个区间内有界？________

A．$(-1,0)$；　　　　B．$(0,1)$；

C．$(1,2)$；　　　　D．$(2,3)$．

19.设有下列命题

（1）数列$\{x_n\}$**收敛，则**x_n**有界.**

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+l} = a$**，其中**$l$**为某个确定的正整数.**

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$**.**

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$**.**

则以上命题中正确的个数是（　　　）

(A) 1.　　**(B)** 2.　　**(C)** 3.　　**(D)** 4.

20. 设$f(x)$在$[0,1]$连续，$f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$，证明：

(1) 存在$\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使$f(\xi)=\xi$；(2) $f(x)$在$[0,1]$上最大值大于1

证明：（1）由$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$及$f(x)$在$[0,1]$连续，得$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

令$F(x)=f(x)-x$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，

$$F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由连续函数零点定理知存在 $\xi \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ 使$F(\xi)=0$，

即$f(\xi)=\xi$

(2) 由$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = 1>0$，

由保号性定理知$\forall x \in \left(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\delta\right)$时，

有$f(x)>1$， 故$f(x)$在$[0,1]$上最大值大于1

1. 设函数$f(x)\in C[0,2a]$，且$f(0)=f(2a)$. 证明$\exists\xi\in[0,a]$使得$f(\xi)=f(\xi+a)$

证明：令$F(x)=f(x)-f(x+a)$，则$F(x)\in C[0,a]$

$F(0)=f(0)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

若$f(0)=f(a)$，取$\xi=0$，即证结论成立. 否则$F(0)\cdot F(a)<0$，由零点定理，存在$\xi\in(0,a)$，使$F(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=f(\xi+a)$

2. 设$a_{2m}<0$，证明：实系数多项式

$x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}=0$至少有两个零点

证明：令$f(x)=x^{2m}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$，

因为 $f(x)=x^{2m}\left(1+\dfrac{a_2}{x}+\cdots+\dfrac{a_{2m-1}}{x^{2m-1}}+\dfrac{a_{2m}}{x^{2m}}\right)$ 所以

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故$\exists M>0$，使得$f(-M)>0$，且 $f(M)>0$. 又因为$f(0)=a_{2m}<0$

在闭区间$[-M,0]$和$[0,M]$分别利用零点存在定理，得

$\exists\xi_1\in(-M,0)\subseteq(-\infty,+\infty)$，使得$f(\xi_1)=0$.

$\exists\xi_2\in(0,M)\subseteq(-\infty,+\infty)$， 使得$f(\xi_2)=0$.

故证

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

解： $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3}}{-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{4}}{-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}=\frac{4}{9}-\frac{4}{16}=\frac{7}{36}$$

$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$ （$x\to 0$）

$1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}=-\left(\sqrt{1-\frac{x}{2}}-1\right)\sim-\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$

4． $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

解： $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}})=\lim_{n\to\infty}n2^{\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n2^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3}{2}$$

$x\to 0$， $a^{x}-1\sim x\ln a$

$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{3}-1)-\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)$

$$=\lim_{n\to\infty}n(3^{\frac{1}{n}}-1)-\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n}\ln 3-\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n}\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$