例 2.7.3 设函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并且$g(a)=1, g(b)=0$，证明：必存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right].$$

要证明：

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]\Rightarrow \varphi'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]=0\Rightarrow$$

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\left[f(a)-f(b)\right]$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=f(x)-g(x)\left[f(a)-f(b)\right]$$

$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，　　$g(a)=1, g(b)=0$

$$\varphi(a)=f(a)-g(a)\left[f(a)-f(b)\right]=f(b)$$

$$\varphi(b)=f(b)-g(b)\left[f(a)-f(b)\right]=f(b)$$

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]=0$$

$$f'(\xi)=g'(\xi)\left[f(a)-f(b)\right]$$

七．2010年期中考试试题（10分）设函数$f(x)$在$[a, b]$连续，(a, b)可导，证明：至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$

证：要证明$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}\Rightarrow \varphi'(\xi)=f'(\xi)(b-\xi)-(f(\xi)-f(a))$

$$\varphi'(x)=f'(x)(b-x)-(f(x)-f(a))$$

对$\varphi(x)=(f(x)-f(a))(b-x)$用罗尔定理

欲证 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0 \Rightarrow \varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$，对 $\varphi(x)=xf(x)$ 用罗尔定理

(1) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=f(x)g(x)$

(2) $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(3) $f(x)+f'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=e^{x}f(x)$

(4) $\lambda f(x)+f'(x) \Rightarrow \varphi(x)=e^{\lambda x}f(x)$

(5) $nf(x)+xf'(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=x^{n}f(x)$

(6) $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0 \Rightarrow \varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$

(7) $f(\xi)\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=0 \Rightarrow \varphi(x)=[\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t]^2$

(8) $g(\xi)\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\int_{\xi}^{0} g(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \varphi(x)=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t\int_{x}^{0} g(t)\mathrm{d}t$

七．2011 年期中考试试题（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 连续，$(0,\ 1)$ 可导，$f(1)=0$，证：存在 $x_0\in(0,\ 1)$ 使 $nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0$，n 为正整数。

证明：令 $F(x)=x^{n}f(x)$

则 $F(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 连续，$(0,\ 1)$ 可导，$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，至少存在 $x_0\in(0,\ 1)$ 使 $F'(x_0)=0$，即

$$nx_0^{n-1}f(x_0)+x_0^{n}f'(x_0)=x_0^{n-1}(nf(x_0)+x_0f'(x_0))=0$$

又 $x_0^{n-1}\neq 0$，故 $nf(x_0)+x_0f'(x_0)=0$

1.（习题2.7(B) 4）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使 $\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi)$

证 令 $F(x)=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)f(x) \quad \big(x\in[a, b]\big)$ ，

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且

$$F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=F(b),$$

所以由罗尔定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $\big(f(b)-f(a)\big)g'(\xi)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(\xi)$

【注】辅助函数也可取为

$F(x)=\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)-\big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)$

$\big(x\in[a, b]\big)$.

2.（习题2.7(B)7）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且

$$F(a)=e^{-a}f(a)=0=e^{-b}f(b)=F(b),$$

所以由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $e^{-\xi}f'(\xi)-e^{-\xi}f(\xi)=0 \Rightarrow \ e^{-\xi}\big(f'(\xi)-f(\xi)\big)=0 \Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)$