行列のできなかった過去の自分への覚書

石橋朋樹

Contents

1 はじめに

今回，行列とか線形代数とかいわれる分野に関して，自分なりに考えて腑に落ちた理解のしかたについて書き記しておきたい．まず最初に断っておくべきこととして，私は決して数学をちゃんと勉強した人間ではない，ということだ[1]．むしろ，高校や大学では数学は落ちこぼれで，何一つ楽しさがわからなかった．センター試験の数学は，自己採点で 3 割くらいしか取れてなかったし，大学の二次試験も，おそらく数学は 0 点だったのではないだろうか．そういうこともあって，大学時代が終わるまで私は数学が大嫌いだった．しかし，大学院時代にエイッと一念発起して数学を勉強し直し，その結果，**数学の美しさみたいなもの**に触れることができたのだ．

今は，ありがたいことに数学が好きになり，数学の世界から産み落とされた数々の成果を，(その初歩的な部分のほんのカケラだけだが，) 自分の研究やラボメンバーとの議論に使えるようになれた (気がする)．その **“数学の美しさ” に触れる機会をくれたのが行列だった**．だから，私の尊敬する DPZ ライターである加藤まさゆきさんが，行列わかんねーというブログを書いていらっしゃることに，うかうか反応してしまったのである．

> 何より自分が脱落してるなあと感じさせられたのは「行列」が 1 ミリたりとも理解できなかったことである。カッコの中に 4 つ数字が並んでいて、それをなんか特殊な方法で足し算したり掛け算したりする不気味な分野である。この数字の並びや規則がこの世界の何を表現しようとしているのか、さっぱり掴むことができなかったからである。**行列のできない高校物理教員** *(まさゆき研究所)*/加藤まさゆきより

私も行列が特に意味不明だった人間なので，この感覚はとても共感する．足し算はまだしも，“掛け算” はなんでこんな奇怪な操作をさせられるんだ? こういう複雑な掛け算で，結局何が表現されてるんだ? と，加藤さんと同

[1] 私は，学部から博士課程までショウジョウバエの胚発生，現在はポスドクとしてシロアリのカースト分化機構を研究している，ゴッリゴリの生物学者だ．

じことが気になって，何一つ理解する気になれなかった．とはいえ，そんな私でもなんとかかんとか，ゆっくりやれば行列が表現しようとする世界を理解できたのだ．だからこそ，このブログの後半で語られる，“加藤さんの友人”が説明する行列への納得のしかたに対して，忸怩たるモノを感じたのだ;

> 行列は何も表してはいない。ただの計算様式だ。行列のできない高校物理教員 *(*まさゆき研究所*)*/加藤まさゆきより

違う!!! これは，たとえ方便だとしても，嘘を言っている．“行列の不気味な掛け算”は，決してただの計算様式じゃない．行列は，掛け算をあんなふうに計算することで，実はとんでもないことを表現しているのだ．

それだけじゃない，“行列の掛け算”について考えていくことで見えてくる様々な“不思議”にこそ，数学の面白さが存在している．私は，行列の掛け算をじっと見つめることで数学の美しい世界へと足を踏み入れるキッカケを手に入れた．本稿では，行列の奇怪な側面を通して，数学者の営みの偉大さに対して素人ながらに言及したい．願わくば，これが，加藤さんのように行列わからんチンとなってる人々へ，ほんの少しでも助けとなり，そして数学への興味のキッカケとなりますよう．

2 まずは行列の意味不明な点からはじめよう

行列は，本当に意味不明なことしかない．本当は，行列式だの基底だの固有値だのと，(実は初歩的な) 専門用語を使って意味不明度合いをブーストしてもいいのだが，まずは以下の入門してすぐに訳わかんなくなる部分に集中しよう．

1. カッコの中に，なんか無造作に数字が並んでいる
2. 掛け算[2]とかいいながら，なんか縦とか横とかに掛けたり足したりする

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

少なくとも，私が高校生だったり大学生だったりした頃，この 2 つが特に意味不明だった．

少しだけ解説させてほしい．**行列とは，“なんか数とかを縦横に並べたもの”**である．横方向のラインを “行” と読んで，縦方向のラインを “列” と呼ぶ．行列が複数あると，**ふだん使っている数字のように**計算することが可能だ．たとえば足し算．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

ほうほう，なんか同じ位置にある数字を足すのね…

足し算ができるってことは引き算もできるね．うむうむ，納得だ．よし，

[2] 本職の方にはマサカリを投げられることうけあいな表現である．本当は，線形代数の専門用語をビシバシ使うべきなのだろうが，まあそこは初心者向けということで…

じゃあ 2 つの行列の掛け算をしよう[3].

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

!?!?!?!?!?!?!?!? え，こうじゃないの!?!?!?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{pmatrix}$$

このあたりで，当時の私はノックアウトだ．リングにタオルが投げ入れられて，私は白い灰になったり千の風になったりする．これを読んでる数学嫌いのみんなもそうだろう．

オーケーオーケー，少し冷静になろう．何に対してそんなに混乱しているのかね，チミたちは．なに? “行列の掛け算のやり方は**ふだん使っている数字**の掛け算のやり方みたいじゃない” だって?? うーん，じゃあそもそもチミたちが言うところの “**ふだん使っている数字**” とやらから始める必要があるかもしれない．

[3] この記事でいうところの行列の掛け算を，便宜上 $\cdot$ で書く．なんで $\times$ じゃ無いんだ，と思うかもしれないけど，$a \cdot b$ とか書くよね?じゃあよくない?

3 ふだんづかいの掛け算

まず，言葉の整理をしよう．**ふだん使っている数字**，たとえば 0 とか 1 とか 2 とか 100 とか -1 とか $\sqrt{2}$ とか，円周率 π も入れてもいいし，なんなら虚数単位 i も OK. ひとまず，“ふだん計算に使う数字” のことを，いったん “**スカラー**” と名付けることにしよう．スカラーの足し算はどんな感じだったかというと，

$$1 + 2 = 3$$

だとか，

$$1/3 + 2 = 7/3$$

だとかいう方法で計算する．

引き算も似たような感じだ．

$$6 - 2 = 4$$

だとか

$$4 + \pi - (-1) = \pi + 5$$

だとか．

じゃあ掛け算に移ろう．

$$2 \times 3 = 6$$

ふむ，まあ当然だね．なんの疑問もない．

私が線形代数を勉強し直した時，なぜスカラーの掛け算はこんなふうなのに，行列の掛け算は “**スカラーとは違うやり方**” なんだろうと考えた．そんなふうに考えて，じっとスカラーの掛け算と行列の掛け算を眺めていた．あのとき，私に 2 つの天啓が降りたのだ[4].

[4] 未だに閃いた感覚を覚えている．すごい衝撃が走った．ビビっと．

閃きその一 なんか計算って**両辺で不公平**じゃね?
閃きその二 もしかして，見え方が違うだけで，実は**スカラーと行列の掛け算は同じ**なのでは??

当時，私は直感的に，この2つの閃きが行列を理解するヒントになると(なぜだか)分かったのだ．みなさんにもその追体験をしていただくべく，

1. まずは閃きその1について解説することで，**スカラーにおける“掛け算= パラレルワールド”という視点**を手にしてもらいたい．
2. 次に，閃きその2をヒントに，**“掛け算 = パラレルワールド”**の視点**をスカラーと行列の両方に拡げよう．**
3. 最後に，行列が分かると何が面白いのかを，これらの視点を交えながら議論して，本稿の結びとしたい．

準備はいいか? 少し難しく感じたとしても大丈夫だ，ときには自分の手でちゃんと計算すれば，必ず分かる．

4 計算を公平にすると "掛け算 = パラレルワールド" がわかる

閃きその一をもう一度おさらいしよう: **"なんか計算って両辺で不公平じゃね?"** というやつだ．どういう意味かを言いたいから，スカラーの掛け算を見てみよう．

$$2 \times 3 = 6$$

私が抱いた閃きとは，つまりこういうことだ "**左辺 (2×3) には，$\times$ の記号があるのに，右辺 (6) には無い!!** 不公平だ!"

なんとなく，みなさんは "別に不公平じゃなくね?" と思ってるだろうことが伝わってくる．よーしよし，オーケーオーケー，よーく分かった落ち着くんだ，ほら，大丈夫大丈夫．まずは一旦，飲み込んでくれ．私は当時，確かに "不公平だ" と思ったんだ．不平を垂れ流すより，一緒に考えてくれ．

どうしたら公平になる? そうだね，右辺にも "$\times$" 記号をいれればいいんだ．どうしたら，式に矛盾を生じさせずに，右辺にも "$\times$" 記号を加えられるだろうか．こうだ．

$$2 \times 3 = 1 \times 6$$

さて，両辺が公平になったところで，この等式の意味するところを考えよう．この等式はつまり，こういう事が言いたい[5]．

> **"2 を 3 回ぶん足したものは，1 を 6 回ぶん足したものと同じ"**

少し SF チックにいってみようか．我々 (そう，いまこれを読んでいる君のことだ) の存在している世界線では，**"1" を単位にしている**だろう．

[5] こういうことが言いたいと，なかば天下り的にでもそう思ってくれ．頼む．

Figure 1: 6 頭の女王シロアリ

“シロアリが 6 頭” とは，つまり “シロアリ 1 単位が 6 頭ぶん” ということだ (Fig. 1)[6].

ここで**パラレルワールド**を想像してみよう (Fig. 2)．便宜上，いま説明した世界線を A 世界線，次に説明する世界線を B 世界線と呼ぶ．B 世界線は A 世界線と重なりあって存在するのだが，驚くべきことに，**B 世界線では “2” を単位にものを考えるのだ.**

[6]昆虫の数え方は “頭” だ．まあ “匹” でもいいんだけどサ．

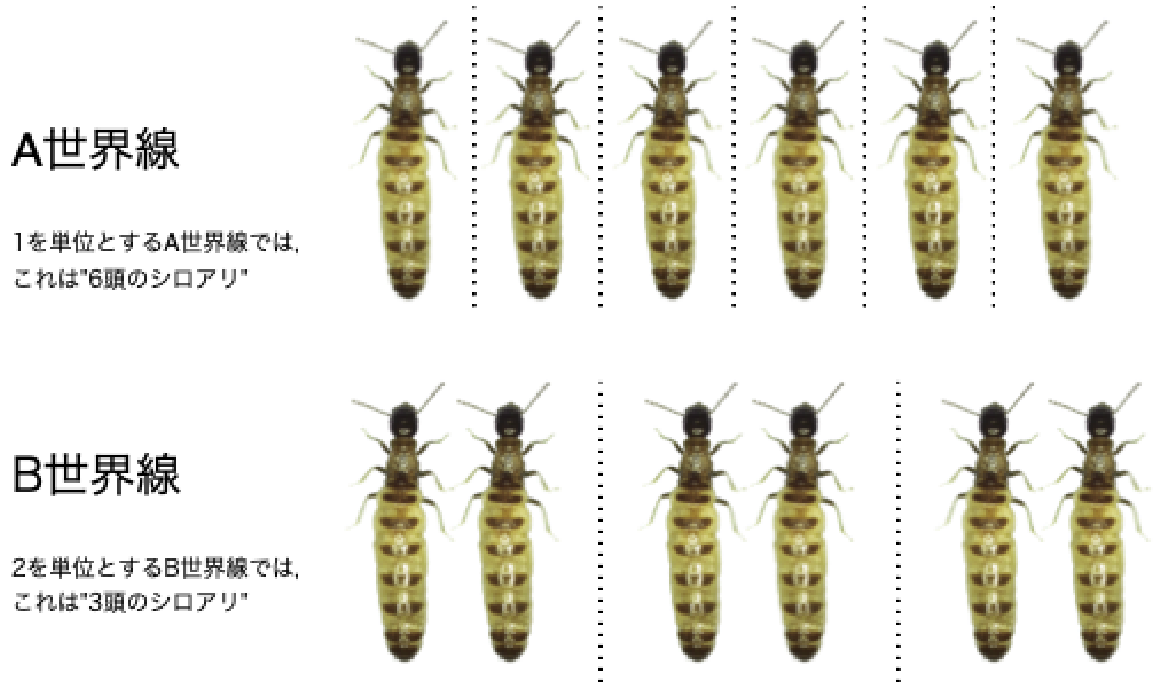

Figure 2: 2を単位に考える平行世界と重なり合っているのだ，俺たちは

だから，B世界線の人々は，さっきの画像 (Fig. 1) をこんなふうに言う．

> "シロアリが **3** 頭"

と．

彼らは，2単位を基準にすべてのモノを考えるので，上の画像は，彼らにとって，まぎれもなく"(2単位の) シロアリが3頭"の画像だ．ここで，この2つの並行世界を俯瞰できる神様は言う．"B世界線にとってこの画像はシロアリ2単位が3つ分，A世界線にとってこの画像はシロアリ1単位が6つ分，この **2つの世界線での表現は違うけれど，これらは同じものなの** ね"，と (Fig. 3).

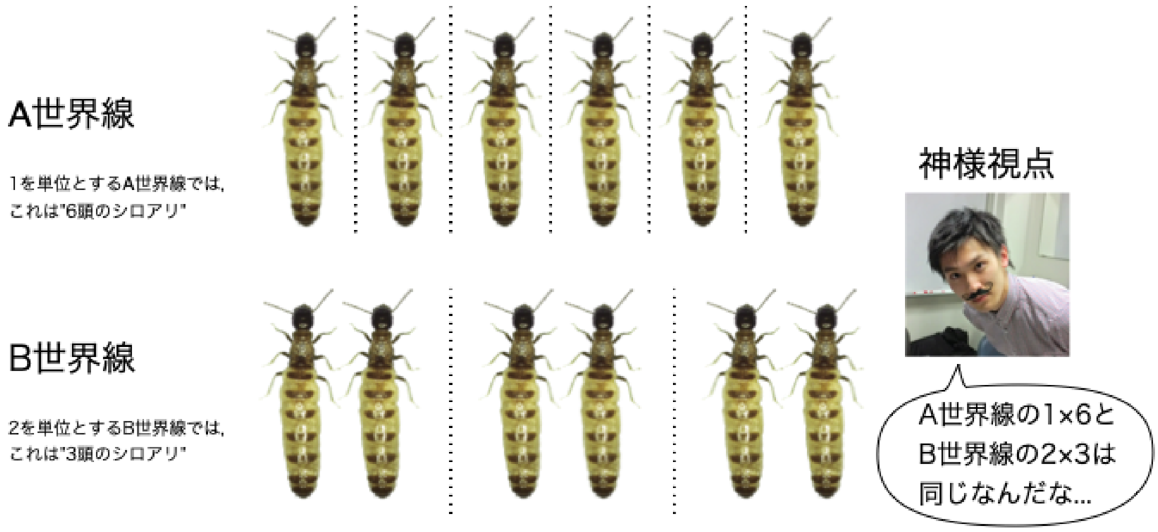

Figure 3: 神様の視点からモノをいう偉そうな筆者

よし，ここで数式に舞い戻ろう．掛け算 $2 \times 3 = 1 \times 6$ は，つまり平行世界線の繋がりを示した数式なのだ．この数式は，左辺 2×3，すなわち“2 を単位に考える世界での 3 単位ぶん”と，右辺 $6 = 1 \times 6$，すなわち“1 を単位に考える世界での 6 単位ぶん”は，世界線は異なるけど同じもの (=) だ，ということを主張しているのだ!!

なんとなく言わんとすることは分かっていただけているだろうか．実は，数式では，イコール記号 (=) が出てくるたびに異なる世界線へと渡っているのだ．この視点でみてみると，ふだん使っている数式ですら，少し神秘的に見えてこないだろうか．

5 行列だって，“パラレルワールド”に行きたい

さきほど我々は，**閃きその一**を通して，**“掛け算 = パラレルワールド”**という視点を手に入れた (Fig. 4).

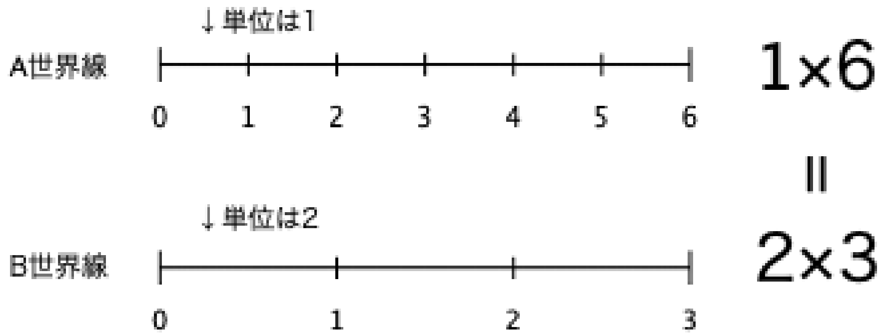

Figure 4: すげー分かりにくいけど，ココで言いたいこと

さて，ここで少し話がズレるのだが，基礎科学というものについて少しお話したい．これはとても大事なことなのだけれど，**基礎科学の世界で行われているものは，どんな領域であったとしても，“普遍的・抽象的・一般的な法則”を探し求める営み**だ．数学は特にそのケが強く，なんでもかんでも抽象化して，共通する法則を見出そうとする．

たとえばさっきの図，Fig. 4．これは，A 世界線と B 世界線を 1 次元の “直線” で表している．“これ，もっと一般化して，多次元にしたらどうなるんだろう” ってことを，基礎科学の徒は考えてしまうのである．たとえば，我々が生きている世界は，なんだかタテ・ヨコ・高さがあって，妙な立体感のある三次元世界だ．こういう，3 次元の世界線どうしでも，これまで見てきたような “掛け算 = パラレルワールド” の視点が通用するのだろうか．

これが，**閃きその二**: “もしかして，見え方が違うだけで，実はスカラーと行列の掛け算は同じなのでは??” で言いたかったことだ．3 次元だとややこしいから，2 次元の世界線で “掛け算 = パラレルワールド” の視点を使えないか試行錯誤してみよう．

さっきまでの直線の世界を 2 次元にするために，直線を 2 本にしてみよう (Fig. 5).

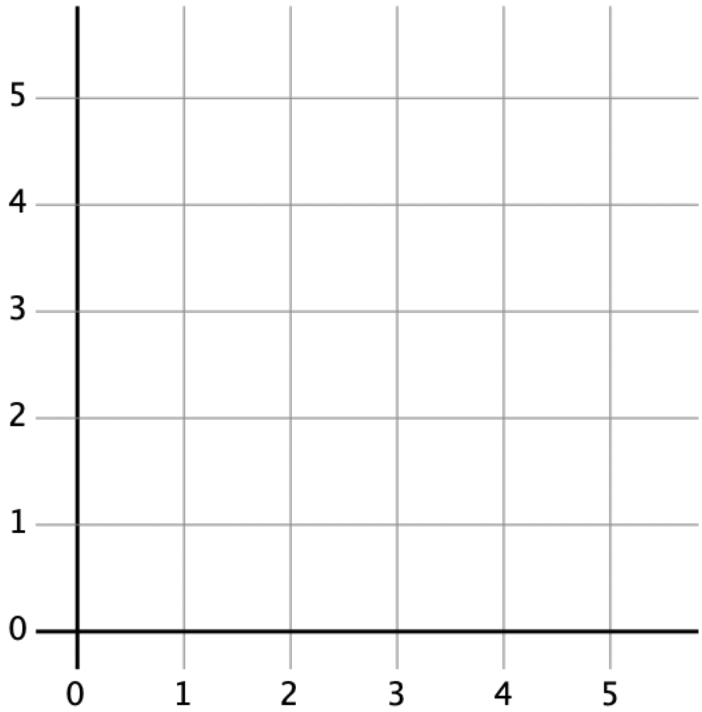

Figure 5: 2 次元の世界

おお，座標ができた．よし，では座標の上に点を置いてみよう (Fig. 6)．点 a の座標は，$(x, y) = (4, 4)$ だ．せっかくの **2** 次元なんだから，もう一個点を置こうか．点 b の座標は，$(x, y) = (2, 1)$ だ．

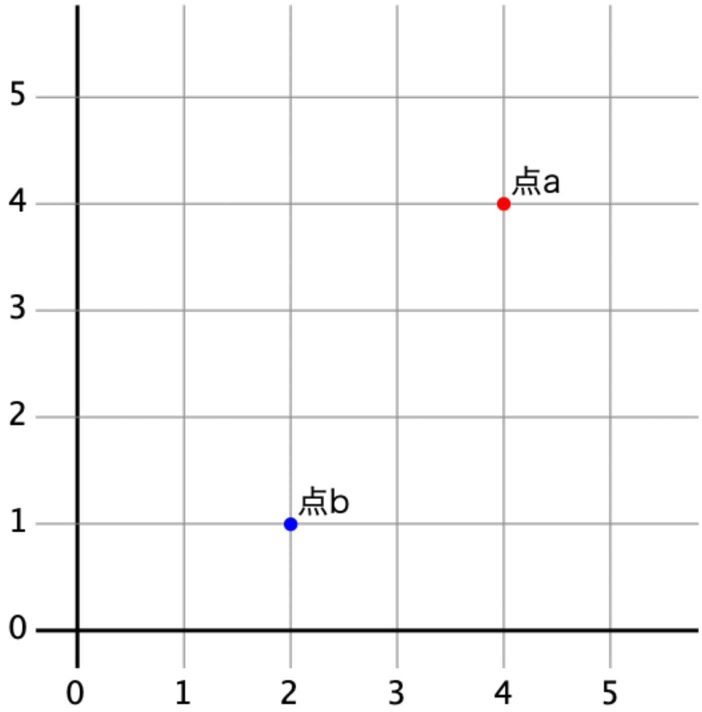

Figure 6: 2つ点を置いてみた

ここで例の単位の話を考えてみよう．いま，**我々の世界線での単位は，相変わらず “1”** なはずだ．点 a は，x 軸に関して 1 単位が 4 つぶんの場所 (1×4) にあって，y 軸に関しても 1 単位が 4 つぶんの場所 (1×4) の位置にある．点 b も同様に，x 軸に関して 1 単位が 2 つぶんの場所 (1×2) で，y 軸に関して 1 単位が 1 つぶんの場所 (1×1) の位置にあるといえる．

なんか x 軸に関して，とか y 軸に関して，とかいうのが面倒だ．**“単位” も 2 次元に拡張**した言い方にしてみよう．

すこし天下り的に “単位” を拡張するが，**“x 軸に関して 1 単位が 4 つぶん” というのは，“$(x, y) = (1, 0)$ を単位として 4 つぶん” と言い換えられそうだ (Fig. 7)**．よしよし，じゃあ “y 軸に関して 1 単位が 4 つぶん” というのも，“$(x, y) = (0, 1)$ を単位として 4 つぶん” と言い換えられるね．

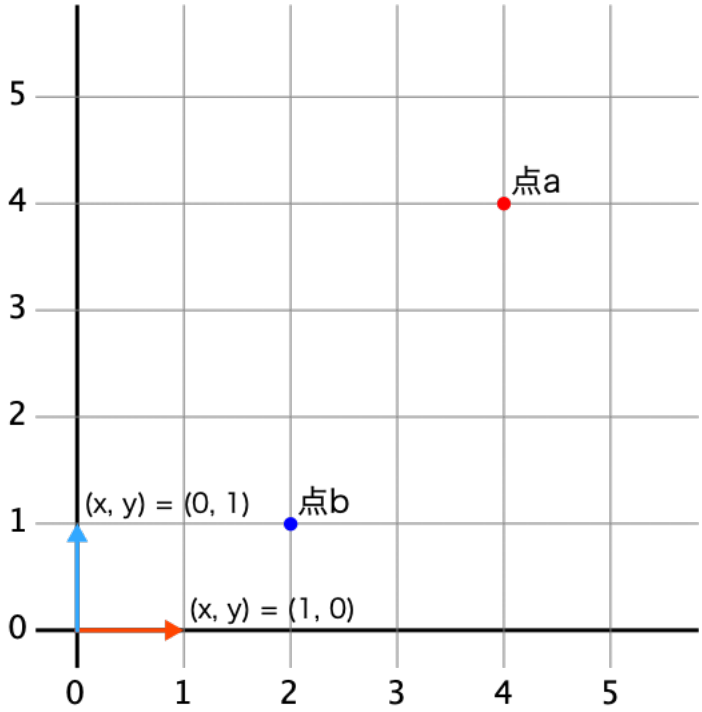

Figure 7: 単位を導入して，点の位置を考える

この言い方で，もう一度，点 a と点 b について表現しよう．点 a は，$(x, y) = (1, 0)$ を単位として 4 つぶん，$(x, y) = (0, 1)$ を単位として 4 つぶんの位置にある．点 b は，$(x, y) = (1, 0)$ を単位として 2 つぶん，$(x, y) = (0, 1)$ を単位として 1 つぶんの位置にある．

いいねいいね，じゃあここで，さっき "6" のことを "1×6" と言い直したように，点 $a : (x, y) = (4, 4)$ を，"ホニャララ $\times (4, 4)$" と言い直してみよう! … どうやって?

さてさて，ここでようやく行列の記法が登場する．ここだけは，そういうものだと思って諦めてほしいんだけれど[7]，"ホニャララ $\times (4, 4)$" を表現するために，こんなふうに書くことにしよう．

[7]でもよく考えたら，"1 という数" を表すのに "1" なんて記号を使っているのも，"そういうものだと思ってる" から使ってるだけじゃんね，)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これはつまり，

$$\begin{pmatrix} \text{ひとつめの"単位"} & \text{ふたつめの"単位"} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{ひとつめの単位が何個あるか} \\ \text{ふたつめの単位が何個あるか} \end{pmatrix}$$

を表現している．

なんか，すくなくとも左側の $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は行列ぽい，というか行列だ．そして右側の $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ も，なぜか向きが縦向きになっちゃってるけど，点 a の座標 $(x, y) = (4, 4)$ をうまく表現できている気がする．せっかくなので，点 $b : (x, y) = (2, 1)$ についても右側に加えちゃおう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

おー，これで左側も右側も両方 “行列” になった．

さて，これは，スカラーで言うところの “$1 \times$ ホニャララ”，すなわち “1 単位が~~ぶん” を表現している，といった．つまり，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が “1 単位” のことで，$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ が “~~ぶん” の代わりだ．

よし, これでパラレルワールドへ向かう準備ができた. 我々の世界線を相変わらず A 世界線と呼ぶことにしよう. そして, W 世界線での点 p のことを, 特別に p_W と呼ぶことにしよう. たとえば, A 世界線の点 a は $a_A : (x, y) = (4, 4)$

みたいなことだ．まず，y 軸は **A 世界線と同じだけれども，**x **軸が A 世界線よりも 2 倍の単位で考える世界線 (B 世界線)** について考えてみよう (Fig. 8).

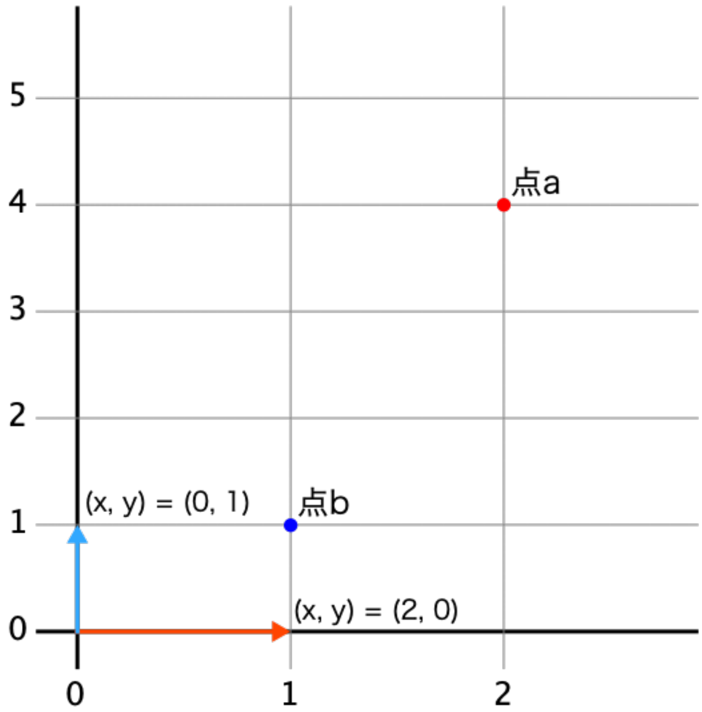

Figure 8: x 軸について 2 倍の単位でものを考える B 世界線にて

この B 世界線での点 a_B と点 b_B は，神様視点からみると，点 a_A と点 b_A と同じだということに気をつけてほしい．必要ならば，Fig. 7 と Fig. 8 とを見比べて，異なる世界線でも点の位置が同じことを確認しよう．A 世界線でいうところの点 $a_A : (x, y) = (4, 4)$ は，B 世界線においては x 軸に関して 2 単位を基準に考えるので，点 $a_B : (x, y) = (2, 4)$ と表現するはずだ．もうすこし丁寧にいうと，**点** a_B **は，**$(x, y) = (2, 0)$ **を単位として 2 つぶん，**$(x, y) = (0, 1)$ **を単位として 4 つぶんの位置にある，**という言い方になるかな．点 b_B にもこの表現を適用すると，$(x, y) = (2, 0)$ を 1 つぶん，$(x, y) = (0, 1)$ を 1 つぶんだから，B 世界線では点 $b_B : (x, y) = (1, 1)$ と

表現するはずだ．これを，さっき使った“行列ぽい記法”で表現するとこうなる．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ほうほうほうほう．よし，この 2 つのパラレルワールドをイコールで繋げよう!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

おー! なんか**行列の等式**ができたね．これは **2 つの世界線を俯瞰できる神様視点からすると正しい等式**だ．だから，**計算方法とかはいったん置いといて**，“この数式は矛盾がなく正しい”ということにしよう．

さて，じゃあ次にもう少し複雑な世界 (C 世界線) を覗いてみよう．この世界線は単位がゆがんでいて，“我々の世界でいうところの”$(x, y) = (2, 1)$ と $(x, y) = (0, 2)$ を単位として考える世界だ (Fig. 9).

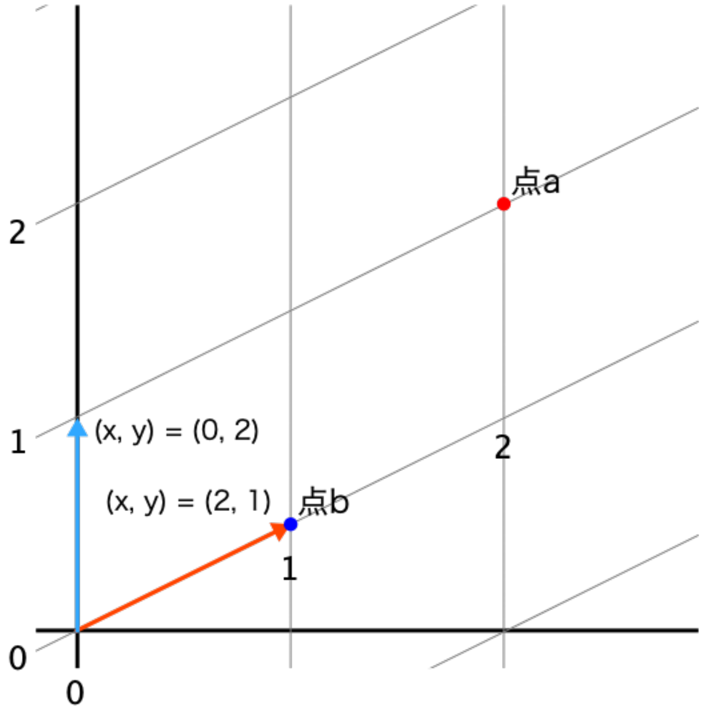

Figure 9: 単位の歪んだ C 世界線にて

これも，Fig. 7 と Fig. 9 を見比べて，点は同じだけど，単位が異なることを確認してほしい．よし，じゃあ，C 世界線では，点 a_C と点 b_C はどう表現できるかな．

ほうほう，なるほど，C 世界線では，点 a は，$(x, y) = (2, 1)$ を単位として 2 つぶん，$(x, y) = (0, 2)$ を単位として 1 つぶんの位置にある．点 b は，$(x, y) = (2, 1)$ を単位として 1 つぶん，$(x, y) = (0, 2)$ を単位として 0 の位置にある．といえそうだ．

こちらも行列的な表現をすると，こう書ける．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

よっしゃ!例によってパラレルワールドをつなげるぞ!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ついでにB世界線もいれちゃおう!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

これも，**計算方法は置いとくとして**，正しい数式ということにしよう．

さて，今回はA世界線から始まってC世界線の点について考えていたから良かったものの，ときには，どうすればC世界線の点をA世界線で見たかのように表現できるか，すなわち，2×3と6を等号で結んだように，C世界線の点を俯瞰してA世界線に落とし込む方法を知りたくなる．なぜならば，さっきみたように，B世界線とC世界線の点が，同じA世界線の点を指していることがわかれば，B世界線とC世界線を等号で結ぶことも可能になるからだ．これは例えば，2×3と1.5×4が，同じ6に等しいことがわかれば，$2 \times 3 = 1.5 \times 4$と書くことができるのと同じことだ．

こういった需要から，ここらでそろそろ**どんな世界線の点でもA世界線での座標に変換できる計算方法を決めておく**ほうがよさそうだ，という気になってくる．うーん，どうやれば，そんな上手いことといくかなあ，と悩み始めたアナタ! ここで朗報がある．実は，**どんな世界線の点でもA世界線での座標に変換できる計算方法は，すでに数学者が見つけてくれている**のだ! これだ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

!!!!!!! **最初に見たあの奇怪な計算するやつだ!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!** え?ほんとに?C 世界線で検算してみよう．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ほんとだ!!!!!!!!

，ということで，まわりまわって，行列の掛け算のやり方が意味していたことがここで初めて分かるのだ．**行列の掛け算のやり方は，ふだん使ってる (1 次元の) 数字の "掛け算 = パラレルワールド" の視点を，より高次元に拡張したものである**，と．行列の掛け算が複雑なルールをとっているのは，後付けなのだ．あんな計算方法をとることで，"ふだん使いの数" を，"掛け算という操作ができるモノ" にまで抽象化しているということだ．

どうだ，これって凄いことじゃないか．少なくとも，私はこれに気付けたとき，ぶったまげたね．さて，これで行列の雰囲気を掴めたら，たとえばこの行列が，"$(x, y) = (0, 0)$ を中心に，任意の点を θ° 回転させる行列" を意味することだって分かってくるんじゃないか．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta^\circ & -\sin\theta^\circ \\ \sin\theta^\circ & \cos\theta^\circ \end{pmatrix}$$

一度，自分で座標軸上にこの行列が意味するところを描画してみよう．これで君の行列へのチャクラが開くはずだ．大丈夫，ここまでこれば，行列式だの固有値だのと言われても，怯まずに立ち向かう気になれる．ここからは，自力で勉強をやり直そう．必ずなんとかなる．

6 抽象的な世界の描写から，世界の本質を知る

さて，ここまで書いてきたことは，いわゆる“線形代数学”と呼ばれる数学領域の，基礎中のキソ，地面掘り返してマントルに到達するんじゃないかってくらいの基礎的な内容だそうだ．この線形代数学というのは，これまた，代数学とよばれる領域の基礎分野らしい．

どんな基礎研究もそうだが，基礎数学も，高度な領域に行くほど抽象的なモノやコトの中に存在する法則性の研究に近づいている．現代において，この代数学ってのが何をやっているかというと，もはや掛け算とか足し算とかの“具体的な計算”から脱却し，それらを抽象化した“演算”というコトについての性質や，それら“演算”が作用できるモノについての性質を研究している．そんなふうにして，一般化・抽象化された演算を考えていくと，実は，我々の“ふだん使いの数”が，ものすごく異常だったことに気付く．

たとえば，2×3 と 3×2 が等しいことに，我々はなんの疑問も感じない．そりゃ，まあ 2 単位が 3 つぶんと，3 単位が 2 つぶんは同じでしょうよ，と．でも，行列だとこうはいかないことが，少し考えればわかる．たとえば，$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ は，掛け算の順番を入れ替えても同じだろうか．言い換えるならば，“$(x, y) = (7, -1)$ と $(x, y) = (2, 3)$ を単位として考える世界での点 $(1, 0)$ と点 $(1, 4)$” は，“$(x, y) = (1, 0)$ と $(x, y) = (1, 4)$ を単位として考える世界での点 $(7, -1)$ と点 $(2, 3)$” と，神様視点で同じだろうか．なんとなく，違いそうな気がしないだろうか．まず，座標に書いてみて，実際違うことを確かめてほしい．それができたら，行列を計算してみよう．

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

こんなふうに，順番を変えるとうまくいかなくなる操作ってのは案外多い．たとえば，サイコロに対して，“右に 90° 回す” という演算と，“奥に倒す” という演算を考えてみよう (Fig. 10).

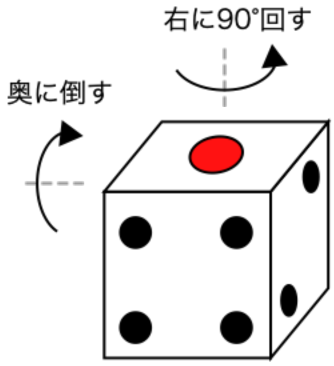

Figure 10: サイコロに対する回転の演算

この 2 つの演算を順番を変えて組み合わせることで，“右に 90° 回してから奥に倒す (式 1)” と，“奥に倒してから右に 90° 回す (式 2)” という 2 種類の演算がつくれる．これを行列っぽく書いてみよう．まずは式 1 から．

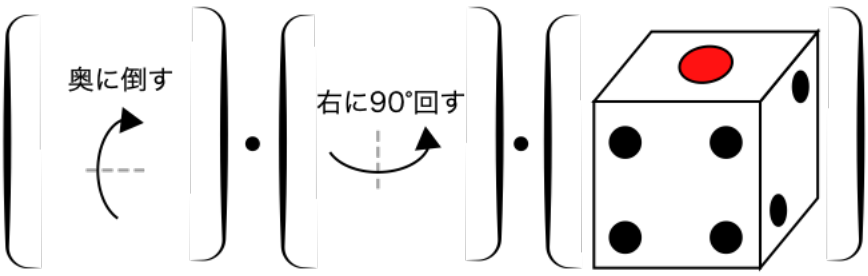

Figure 11: 式 1 の演算

サイコロに一番近い演算がサイコロへと作用して，まずサイコロは右に 90° 回る．

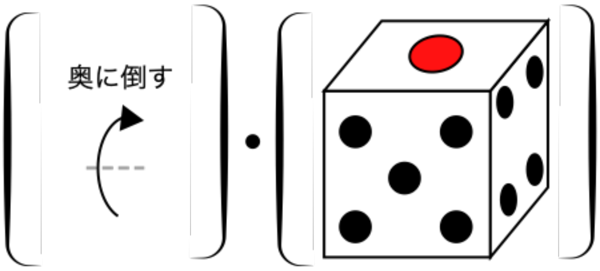

Figure 12: まず右に 90° 回ったサイコロ

その次に，奥に倒す演算が行われる．計算結果がこちらだ．

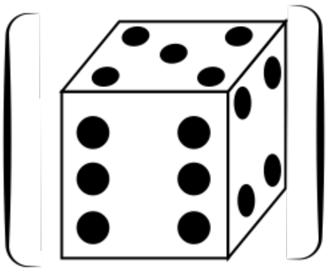

Figure 13: その後，奥に倒れたサイコロ

よし，じゃあ次は式 2.

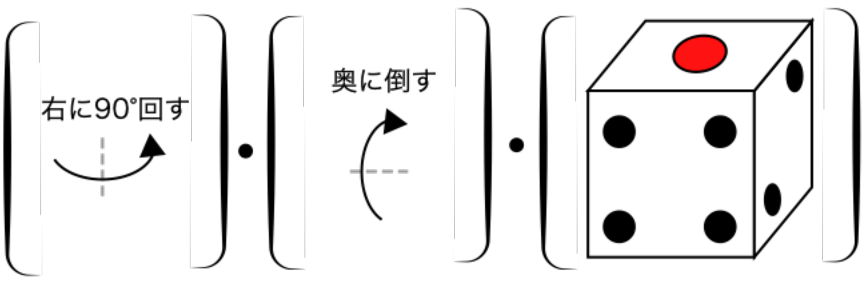

Figure 14: 式 2 の演算

サイコロはまず奥に倒されて，

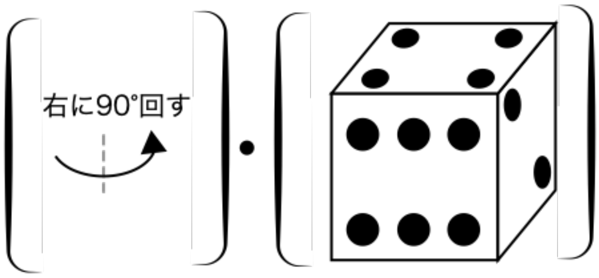

Figure 15: まず奥に倒れたサイコロ

そして右に 90° 回る．計算結果はこれだ．

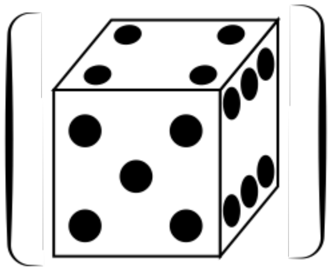

Figure 16: その後，右に 90° 回ったサイコロ

Fig. 13 と Fig. 16 を見くらべて分かるように，“サイコロを回す演算” は，順番が大事なのだ．きっと，数学嫌いは今まさに，“いや，サイコロ回す例えはまあそうかもしれんけど，でも行列の計算とは別物やん” って思ったのではないだろうか．なんと!! じつはサイコロを回すという説明は，まったく例えではないのだ．それどころか，サイコロを回すのと，行列の掛け算を計算するのは，本質的に同じなのだ．これらが本質的に同じ，ということが，まさに抽象的な代数学から言えてしまう．

これは本当に凄いことだと私は思う．物事を極限まで抽象化し，本質を抽出していくことで，この世で起こることを数学的に一本化してゆく．これこそが数学の美しい営みだ．その扉は，行列を学ぶことで開き始める．

お菓子を会社の人に配った余りの数について考えることと，曜日や時間に基づいてスケジュールを考えること．折り紙を折ることと，決められた時間内で仕事を終らせるために悩むこと．こんな一見無関係に思える日常の出来事が，数学という自然科学の女王の名のもとに統合される．これをみすみす見逃すのは，あんまりロックじゃないよね．