OpenFOAMの境界条件の取扱い方について

作成　2016/03/10

Abstract

CFDコードOpenFOAMで境界条件がどのように扱われているかについて説明する。

1　fixedValue, fixedGradient について

これらの境界条件の説明については [1] が詳しい。本節でもこれを元にして説明を行う。

Fig.1 に示すような1次元の計算セルでの離散化を考える。セル中心Pと境界Bでの境界条件を考える。セル中心Pと境界Bの間の距離を Δx とする。

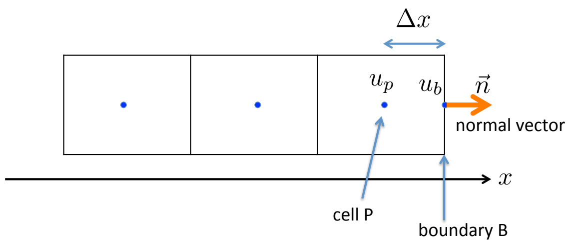

Fig.1　1D mesh

変数 u の移流拡散方程式を有限体積法により解くものとする。$\nabla\cdot\nabla u$ および $\nabla\cdot u$ は以下のように離散化される。

$$\int \nabla\cdot(\nabla u)dV = \int \nabla u\cdot \boldsymbol{n}dS \approx \sum \nabla u\cdot \boldsymbol{n}S_f \tag{1}$$

$$\int \nabla\cdot u dV = \int u\cdot \boldsymbol{n}dS \approx \sum u\cdot \boldsymbol{n}S_f \tag{2}$$

S_f は face でのセル面積である。これらの式から境界での ∇u および u の値が必要であることが分かる。

1.1　fixedValue について

はじめに Dirichlet 条件である fixedValue について考える。境界条件として

$$u_b = a \tag{3}$$

を考える。a は定数とする。

まず ∇u の境界条件について考える。

$$\nabla u|_{boundary}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{u_b-u_p}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x}u_p + \frac{1}{\Delta x}a \tag{4}$$

OpenFOAM では (4) の係数がそれぞれ gradinetInternalCoeff, gradientBoundaryCoeff として扱われる。InternalCoeff はセル内部の未知数に対する係数であり，連立1次方程式の係数行列に反映される。一方 BoundaryCoeff は境界の値そのものであり，連立1次方程式の右辺ベクトルに反映される。

$$gradientInternalCoeff = -\frac{1}{\Delta x} \tag{5}$$

$$gradientBoundaryCoeff = \frac{1}{\Delta x}a \tag{6}$$

つぎに u の境界条件について考える。ここではすでに $u|_{boundary} = a$ として値は分かっている。これらの値は valueInternalCoeff, valueBoundaryCoeff として扱われる。

$$valueInternalCoeff = 0 \tag{7}$$
$$valueBoundaryCoeff = a \tag{8}$$

1.2 fixedGradient について

Neumann 条件である fixedGradient について考える。境界条件として

$$\nabla u|_{boundary} \cdot \boldsymbol{n} = b \tag{9}$$

を考える。b は定数。

∇u について考えると，すでに境界条件として与えられているので

$$gradientInternalCoeff = 0 \tag{10}$$
$$gradientBoundaryCoeff = b \tag{11}$$

つぎに u の条件を考える。

$$\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} = b \tag{12}$$

より

$$u_b = u_p + b\Delta x \tag{13}$$

よって

$$valueInternalCoeff = 1 \tag{14}$$
$$valueBoundaryCoeff = b\Delta x \tag{15}$$

2 mixed について

Robin 条件である mixe について考える。境界条件として

$$\alpha u_b + (1-\alpha)\nabla u|_b \cdot \boldsymbol{n}\Delta x = \alpha a + (1-\alpha)b \tag{16}$$

を考える。ここで α は重み係数，$u_{ref} = a, \nabla u_{ref} \cdot \boldsymbol{n} = b$ は定数とする。a, b の値は OpenFOAM ではそれぞれ refValue, refGrad として扱われる量である。α は valueFrac として扱われる。

$$\nabla u|_b \cdot \boldsymbol{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} \tag{17}$$

より

$$\alpha u_b + (1-\alpha)(u_b - u_p) = \alpha a + (1-\alpha)b \tag{18}$$
$$u_b = (1-\alpha)u_p + \alpha a + (1-\alpha)b\Delta x \tag{19}$$

$\nabla u|_b \cdot \boldsymbol{n}$ について考える。

$$\nabla u|_b \cdot \boldsymbol{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} \tag{20}$$
$$= \frac{-\alpha}{\Delta x}u_p + \frac{\alpha a}{\Delta x} + (1-\alpha)b \tag{21}$$

であるから

$$gradientInternalCoeff = \frac{-\alpha}{\Delta x} \tag{22}$$

$$gradientBoundaryCoeff = \frac{\alpha a}{\Delta x} + (1-\alpha)b \tag{23}$$

つぎに u_b について考えると，

$$u_b = (1-\alpha)u_p + \alpha a + (1-\alpha)b\Delta x \tag{24}$$

より

$$valueInternalCoeff = (1-\alpha) \tag{25}$$

$$valueBoundaryCoeff = \alpha a + (1-\alpha)b\Delta x \tag{26}$$

Reference

[1] F. Nozaki, OpenFOAM 空間の離散化と係数行列の取り扱い, `http://www.slideshare.net/fumiyanozaki96/openfoam-32087641`