

## Abstract

CFD コード OpenFOAM で境界条件がどのように扱われているかについて説明する。

## 1 fixedValue, fixedGradient について

これらの境界条件の説明については [1] が詳しい。本節でもこれを元にして説明を行う。

Fig.1 に示すような 1 次元の計算セルでの離散化を考える。セル中心 P と境界 B での境界条件を考える。セル中心 P と境界 B の間の距離を  $\Delta x$  とする。

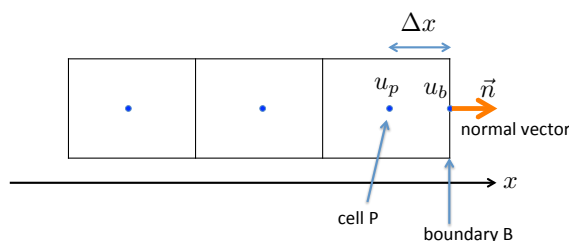


Fig.1 1D mesh

変数  $u$  の移流拡散方程式を有限体積法により解くものとする。 $\nabla \cdot \nabla u$  および  $\nabla \cdot u$  は以下のように離散化される。

$$\int \nabla \cdot (\nabla u) dV = \int \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum \nabla u \cdot \mathbf{n} S_f \quad (1)$$

$$\int \nabla \cdot u dV = \int u \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum u \cdot \mathbf{n} S_f \quad (2)$$

$S_f$  は face でのセル面積である。これらの式から境界での  $\nabla u$  および  $u$  の値が必要であることが分かる。

### 1.1 fixedValue について

はじめに Dirichlet 条件である fixedValue について考える。境界条件として

$$u_b = a \quad (3)$$

を考える。 $a$  は定数とする。

まず  $\nabla u$  の境界条件について考える。

$$\nabla u|_{\text{boundary}} \cdot \mathbf{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x} u_p + \frac{1}{\Delta x} a \quad (4)$$

OpenFOAM では (4) の係数がそれぞれ gradinetInternalCoeff, gradientBoundaryCoeff として扱われる。InternalCoeff はセル内部の未知数に対する係数であり、連立 1 次方程式の係数行列に反映される。一方 BoundaryCoeff は境界の値そのものであり、連立 1 次方程式の右辺ベクトルに反映される。

$$\text{gradientInternalCoeff} = -\frac{1}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\text{gradientBoundaryCoeff} = \frac{1}{\Delta x}a \quad (6)$$

つぎに  $u$  の境界条件について考える。ここではすでに  $u|_{\text{boundary}} = a$  として値は分かっている。これらの値は `valueInternalCoeff`, `valueBoundaryCoeff` として扱われる。

$$\text{valueInternalCoeff} = 0 \quad (7)$$

$$\text{valueBoundaryCoeff} = a \quad (8)$$

## 1.2 fixedGradient について

Neumann 条件である `fixedGradient` について考える。境界条件として

$$\nabla u|_{\text{boundary}} \cdot \mathbf{n} = b \quad (9)$$

を考える。 $b$  は定数。

$\nabla u$  について考えると、すでに境界条件として与えられているので

$$\text{gradientInternalCoeff} = 0 \quad (10)$$

$$\text{gradientBoundaryCoeff} = b \quad (11)$$

つぎに  $u$  の条件を考える。

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} = b \quad (12)$$

より

$$u_b = u_p + b\Delta x \quad (13)$$

よって

$$\text{valueInternalCoeff} = 1 \quad (14)$$

$$\text{valueBoundaryCoeff} = b\Delta x \quad (15)$$

## 2 mixed について

Robin 条件である `mixed` について考える。境界条件として

$$\alpha u_b + (1 - \alpha)\nabla u|_b \cdot \mathbf{n}\Delta x = \alpha a + (1 - \alpha)b \quad (16)$$

を考える。ここで  $\alpha$  は重み係数,  $u_{ref} = a, \nabla u_{ref} \cdot \mathbf{n} = b$  は定数とする。 $a, b$  の値は OpenFOAM ではそれぞれ `refValue`, `refGrad` として扱われる量である。 $\alpha$  は `valueFrac` として扱われる。

$$\nabla u|_b \cdot \mathbf{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} \quad (17)$$

より

$$\alpha u_b + (1 - \alpha)(u_b - u_p) = \alpha a + (1 - \alpha)b \quad (18)$$

$$u_b = (1 - \alpha)u_p + \alpha a + (1 - \alpha)b\Delta x \quad (19)$$

$\nabla u|_b \cdot \mathbf{n}$  について考える。

$$\nabla u|_b \cdot \mathbf{n} = \frac{u_b - u_p}{\Delta x} \quad (20)$$

$$= \frac{-\alpha}{\Delta x}u_p + \frac{\alpha a}{\Delta x} + (1 - \alpha)b \quad (21)$$

であるから

$$\text{gradientInternalCoeff} = \frac{-\alpha}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\text{gradientBoundaryCoeff} = \frac{\alpha a}{\Delta x} + (1 - \alpha)b \quad (23)$$

つぎに  $u_b$  について考えると,

$$u_b = (1 - \alpha)u_p + \alpha a + (1 - \alpha)b\Delta x \quad (24)$$

より

$$\text{valueInternalCoeff} = (1 - \alpha) \quad (25)$$

$$\text{valueBoundaryCoeff} = \alpha a + (1 - \alpha)b\Delta x \quad (26)$$

## 2.1 mixed の使用例としての wallHeatTransfer

熱伝達係数  $h$  を指定した壁面熱伝達の境界条件 `wallHeatTransfer` では `mixed` を使って, 実装されている。`mixed` を用いた具体例として説明する。

Fig.2 に壁面熱伝達の模式図を示す。流体側の壁面隣接セル内部の温度を  $T_i$ , 壁面温度を  $T_w$ , 外部の代表温度を  $T_{inf}$  とする。流体から壁面への熱流束  $q_{in}$  は流体の熱伝導度  $k$  とセルサイズ  $\Delta x$  より以下のように書ける。

$$q_{in} = k \frac{T_i - T_w}{\Delta x} \quad (27)$$

一方壁面から外部への熱流束  $q_{out}$  は熱伝達係数  $h$  を用いて

$$q_{out} = h(T_w - T_{inf}) \quad (28)$$

$q_{in} = q_{out}$  より  $T_w$  についての整理すると

$$T_w = \frac{\frac{k}{\Delta x}T_i + hT_{inf}}{\frac{k}{\Delta x} + h} \quad (29)$$

$$= \frac{\frac{k}{h\Delta x}T_i + T_{inf}}{1 + \frac{k}{h\Delta x}} \quad (30)$$

これが温度の境界条件となる。(19) に示した `mixed` の境界での値  $u_b$  の式と比較すると, 以下のように係数を設定することで `mixed` を用いてこの境界条件を実装できることが分かる。

$$1 - \alpha = \frac{k/h\Delta x}{1 + k/h\Delta x} \quad (31)$$

$$\alpha a = \frac{T_{inf}}{1 + k/h\Delta x} \quad (32)$$

$$b = 0 \quad (33)$$

上式から

$$a = T_{inf} \quad (34)$$

$$b = 0 \quad (35)$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + k/h\Delta x} \quad (36)$$

となる。

wallHeatTransfer の実装をみると (OpenFOAM-2.3.x)

```
refValue() = Tinf_;
refGrad() = 0.0;
```

```
valueFraction() =
    1.0/
    (
        1.0
        + turbModel.kappaEff(patchi)*patch().deltaCoeffs()/alphaWall_
    );
```

となっており, (34)-(36) となるように実装されていることが分かる。ここで  $\kappa_{\text{eff}}(\text{patchi})$  が熱伝導度,  $\text{deltaCoeffs}()$  が  $\Delta x$  の逆数,  $\alpha_{\text{Wall}}$  が熱伝達係数をそれぞれ表している。

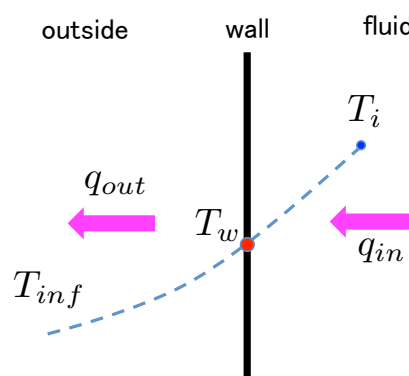


Fig.2 Wall heat transfer

## Reference

- [1] F. Nozaki, OpenFOAM 空間の離散化と係数行列の取り扱い, <http://www.slideshare.net/fumiyanozaki96/openfoam-32087641>