圧縮性 Navier-Stokes 方程式の PISO 法による解法

作成 2024/09/13

1 概要

Issa らによる圧縮性 Navier-Stokes 方程式による解法について述べる。Issa らによる論文 [1]–[3] を参考にした。基礎方程式を有限体積的に積分した方程式を離散化することで解を求める。

2 基礎方程式

ここでは流体は理想気体とし，2 次元の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を考える。基礎方程式が以下。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i e) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j \tau_{ij}) \tag{3}$$

ここで ρ, u, e, p, T は密度，速度，全エネルギー，圧力，温度である。状態方程式は

$$p = \rho R T \tag{4}$$

である。R は気体定数（単位の次元は [J/kg K]）である。τ_{ij} は粘性応力テンソルで

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \tag{5}$$

全エネルギー e は

$$e = C_v T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \tag{6}$$

で，単位は [J/kg] となる。C_v は定積比熱で，比熱比 γ を用いて

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \tag{7}$$

2 次元の場合，式 (1)–(3) を書き下すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho e}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x}(\rho(e+p)u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho(e+p)v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu u\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu v\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\end{aligned} \tag{11}$$

$p = (\gamma - 1)(\rho e - 1/2\rho(u^2 + v^2))$ より

$$\rho(e + p) = \gamma \rho e - \frac{\gamma - 1}{2}\rho(u^2 + v^2) \tag{12}$$

とかける。

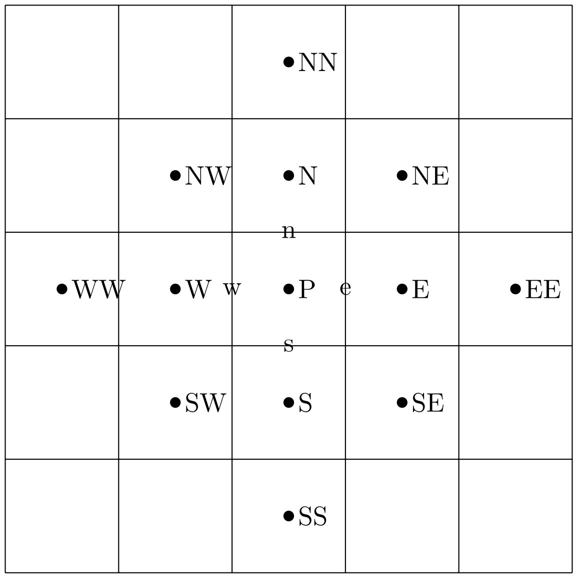

Fig.1　cell coordinate

3　積分と離散化

x, y 方向のセル幅を $\Delta x, \Delta y$ として，方程式を積分する。すべての物理量はセル中央で定義されるものとする。つまりコロケート格子を適用する。質量保存式 (8) を積分すると

$$\int_w^e dx \int_s^n dy \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right) = 0 \tag{13}$$

e, w, n, s は $+x, -x, +y, -y$ 方向のセル界面をそれぞれ表す。上図参照。時間微分は Euler 陰解法で離散化する。時間刻みは Δt とする。

$$\frac{\rho - \rho^n}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left(\rho u|_e - \rho u|_w \right) \Delta y + \left(\rho v|_n - \rho v|_s \right) \Delta x = 0 \tag{14}$$

上付き添字は時間ステップを表すが，n+1 ステップの量は添字を省略している。$\rho u|_e$ はセル界面 e 上で定義される量であることを示す。

x 方向の運動量保存式 (9) の積分では，$\rho uu|_e$ が出てくる。これを次のように離散化する。

$$\rho uu|_e = \rho u|_e \frac{u_P + u_E}{2} \tag{15}$$

添字 P, E はそれぞれ着目セルおよびそれに隣接する $+x$ 方向のセル中央の値を表している。$-x$ 方向，$+y$, $-y$ 方向の隣接セルの値は W, N, S で表すとする。圧力勾配項の積分は

$$\Delta y(p_e - p_w) = \Delta y \left(\frac{p_P + p_E}{2} - \frac{p_P + p_W}{2} \right) = \frac{\Delta y}{2}(p_E - p_W) \tag{16}$$

となる。

以上を踏まえて，運動量保存式，エネルギー保存式 (9)–(11) を積分し，離散化した式が以下で表される。なお，$\rho u|_e$ の評価には 1 次精度風上差分，拡散項の評価には 2 次精度中心差分を用いる。

x 方向の運動量式

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_u + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \rho_P^n u_P^n - \frac{\Delta y}{2}(p_E - p_W) \tag{17}$$

$$a_E = \frac{4}{3}\mu_e \frac{\Delta y}{\Delta x} + \max(-\frac{\Delta y}{2}\rho u|_e, 0) \tag{18}$$

$$a_W = \frac{4}{3}\mu_w \frac{\Delta y}{\Delta x} + \max(\frac{\Delta y}{2}\rho u|_w, 0) \tag{19}$$

$$a_N = \mu_n \frac{\Delta x}{\Delta y} + \max(-\frac{\Delta x}{2}\rho v|_n, 0) \tag{20}$$

$$a_S = \mu_s \frac{\Delta x}{\Delta y} + \max(\frac{\Delta x}{2}\rho v|_s, 0) \tag{21}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \rho_P^n \Delta x \Delta y / \Delta t \tag{22}$$

$$\begin{aligned} S_u = \frac{1}{4}\Big[& -\frac{2}{3}(v_{NE} - v_{SE} + v_N - v_S)\mu_e + \frac{2}{3}(v_N - v_S + v_{NW} - v_{SW})\mu_w \\ & + (v_E - v_W + v_{NE} - v_{NW})\mu_n - (v_E - v_W + v_{SE} - v_{SW})\mu_s \Big] \end{aligned} \tag{23}$$

y 方向の運動量式

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + S_v + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \rho_P^n v_P^n - \frac{\Delta y}{2}(p_E - p_W) \tag{24}$$

$$a_E = \mu_e \frac{\Delta y}{\Delta x} + \max(-\frac{\Delta y}{2}\rho u|_e, 0) \tag{25}$$

$$a_W = \mu_w \frac{\Delta y}{\Delta x} + \max(\frac{\Delta y}{2}\rho u|_w, 0) \tag{26}$$

$$a_N = \frac{4}{3}\mu_n \frac{\Delta x}{\Delta y} + \max(-\frac{\Delta x}{2}\rho v|_n, 0) \tag{27}$$

$$a_S = \frac{4}{3}\mu_s \frac{\Delta x}{\Delta y} + \max(\frac{\Delta x}{2}\rho v|_s, 0) \tag{28}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \rho_P^n \Delta x \Delta y / \Delta t \tag{29}$$

$$\begin{aligned} S_v = \frac{1}{4}\Big[& (u_{NE} - u_{SE} + u_N - u_S)\mu_e - (u_N - u_S + u_{NW} - u_{SW})\mu_w \\ & -\frac{2}{3}(u_E - u_W + u_{NE} - u_{NW})\mu_n + \frac{2}{3}(u_E - u_W + u_{SE} - u_{SW})\mu_s \Big] \end{aligned} \tag{30}$$

エネルギー式

$$a_P e_P = a_E e_E + a_W e_W + a_N e_N + a_S e_S + S_e + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}\rho_P^n e_P^n \tag{31}$$

$$a_E = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{k_e}{C_v} + \max(-\frac{\gamma \Delta y}{2}\rho u|_e, 0) \tag{32}$$

$$a_W = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{k_w}{C_v} + \max(\frac{\gamma \Delta y}{2}\rho u|_w, 0) \tag{33}$$

$$a_N = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{k_n}{C_v} + \max(-\frac{\gamma \Delta x}{2}\rho v|_n, 0) \tag{34}$$

$$a_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{k_s}{C_v} + \max(\frac{\gamma \Delta x}{2}\rho v|_s, 0) \tag{35}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \gamma \rho_P^n \Delta x \Delta y/\Delta t + (1-\gamma)\rho_P \Delta x \Delta y/\Delta t \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
S_e = {} & \Delta y \frac{\gamma - 1}{4}\rho u|_e(u_P^2 + v_P^2 + u_E^2 + v_E^2) - \Delta y \frac{\gamma - 1}{4}\rho u|_w(u_P^2 + v_P^2 + u_W^2 + v_W^2) \\
& + \Delta x \frac{\gamma - 1}{4}\rho v|_n(u_P^2 + v_P^2 + u_N^2 + v_N^2) - \Delta x \frac{\gamma - 1}{4}\rho v|_s(u_P^2 + v_P^2 + u_S^2 + v_S^2) \\
& + \Delta y \left[\mu u \left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_e - \Delta y \left[\mu u \left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_w \\
& + \Delta x \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu v \left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_n - \Delta x \left[\mu u \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu v \left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_s \\
& + \frac{\Delta y}{2C_v \Delta x}(k_e(u_P^2 + v_P^2 - u_E^2 - v_E^2) - k_w(u_W^2 + v_W^2 - u_P^2 - v_P^2)) \\
& + \frac{\Delta x}{2C_v \Delta y}(k_n(u_P^2 + v_P^2 - u_N^2 - v_N^2) - k_s(u_S^2 + v_S^2 - u_P^2 - v_P^2))
\end{aligned} \tag{37}$$

4　圧力速度の連成

Issa らによる計算手順に基づいて，圧力速度の連成手順を示す。

4.1　エネルギー予測

$$a_P e_P^* = \sum_{nb=E,W,N,S} a_{nb} e_{nb}^* + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}\rho_P^n e_P^n + S_e \tag{38}$$

を用いて，エネルギーの予測値 e_P^* を求める。上付き添字の*は予測値であることを示す。これより温度の予測値 T^* を求める。

4.2　速度の予測

$$a_P u_P^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}\rho_P^n u_P^n + S_u - \frac{\Delta y}{2}(p_E^n - p_W^n) \tag{39}$$

$$a_P v_P^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}\rho_P^n v_P^n + S_v - \frac{\Delta x}{2}(p_N^n - p_S^n) \tag{40}$$

を用いて，流速の予測値 u^*, v^* を求める。

4.3　速度の修正

速度の予測式を以下のように変形する。

$$\frac{a_P}{\rho^n}\rho^n u_P^* = \sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^* + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n u_P^n + S_u - \frac{\Delta y}{2}(p_E^n - p_W^n) \tag{41}$$

$$\frac{a_P}{\rho^n}\rho^n v_P^* = \sum_{nb} a_{nb}v_{nb}^* + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n v_P^n + S_v - \frac{\Delta x}{2}(p_N^n - p_S^n) \tag{42}$$

速度の修正式を以下のようにする。

$$\frac{a_P}{\rho^n}\rho^* u_P^{**} = \sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^* + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n u_P^n + S_u - \frac{\Delta y}{2}(p_E^* - p_W^*) \tag{43}$$

$$\frac{a_P}{\rho^n}\rho^* v_P^{**} = \sum_{nb} a_{nb}v_{nb}^* + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n v_P^n + S_v - \frac{\Delta x}{2}(p_N^* - p_S^*) \tag{44}$$

$\widetilde{a_P} = a_P/\rho^n$，圧力の修正量を $p' = p^* - p^n$ とすると

$$\rho^* u_P^{**} = \rho^n u_P^* - \frac{1}{\widetilde{a_P}}\frac{\Delta y}{2}(p'_E - p'_W) \tag{45}$$

$$\rho^* v_P^{**} = \rho^n v_P^* - \frac{1}{\widetilde{a_P}}\frac{\Delta x}{2}(p'_N - p'_S) \tag{46}$$

質量保存式より

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t}\Delta x\Delta y + (\rho^* u^{**}|_e - \rho^* u^{**}|_w)\,\Delta y + (\rho^* v^{**}|_n - \rho^* v^{**}|_s)\,\Delta x = 0 \tag{47}$$

セル界面の値 $\rho u|_e$ を Rhie-Chow 補間により求める。

$$\rho u|_e = \frac{\rho u|_P + \rho u|_E}{2} + \frac{1}{2}(d_P + d_E)(p_P - p_E) - \frac{1}{4}d_P(p_W - p_E) - \frac{1}{4}d_E(p_P - p_{EE}) \tag{48}$$

ここで $d_P = \Delta y/\widetilde{a_P}_P$, $d_E = \Delta y/\widetilde{a_P}_E$ とする。$\widetilde{a_P}_P, \widetilde{a_P}_E$ はセル P，E での $\widetilde{a_P}$ である。これより

$$\rho^* u^{**}|_e = \rho^n u^*|_e - \frac{1}{2}(d_P + d_E)(p'_E - p'_P) \tag{49}$$

質量保存式に代入して，整理すると以下の圧力の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&p'_P\left[\frac{\phi(p^n,T^*)}{\Delta t}\Delta x\Delta y + \frac{\Delta y}{2}(d_P + d_E) + \frac{\Delta y}{2}(d_P + d_W) + \frac{\Delta x}{2}(d_P + d_N) + \frac{\Delta x}{2}(d_P + d_S)\right] \\
&= -\Delta y(\rho^n u^*|_e - \rho^n u^*|_w) - \Delta x(\rho^n v^*|_n - \rho^n v^*|_s) + \frac{\Delta y}{2}(d_P + d_E)p'_E + \frac{\Delta y}{2}(d_P + d_W)p'_W \\
&+ \frac{\Delta x}{2}(d_P + d_N)p'_N + \frac{\Delta x}{2}(d_P + d_S)p'_S - \frac{p^n}{\Delta t}(\phi(p^n,T^*) - \phi(p^n,T^n))\Delta x\Delta y
\end{aligned} \tag{50}$$

ここで $\rho^* = p^*\phi(p^n,T^*)$ であり，

$$\phi(p^n,T^*) = \frac{1}{RT^*} \tag{51}$$

である。

圧力方程式から p', p^* を求め，密度 ρ^* を求める。次に速度の修正式より u^{**}, v^{**} を求める。

4.4　エネルギーの修正

$$a_P e_P^{**} = \sum_{nb} a_{nb}e_{nb}^* + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n e_P^n + S_e \tag{52}$$

を用いて，エネルギーの修正値 e_P^{**} を求める。

4.5 速度の修正

2 回目の速度の修正を行う。速度の修正式を以下のようにする。

$$\frac{a_P}{\rho^*}\rho^{**}u_P^{***} = \sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^{**} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n u_P^n + S_u - \frac{\Delta y}{2}(p_E^{**} - p_W^{**}) \tag{53}$$

$$\frac{a_P}{\rho^*}\rho^{**}v_P^{***} = \sum_{nb} a_{nb}v_{nb}^{**} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n v_P^n + S_v - \frac{\Delta x}{2}(p_N^{**} - p_S^{**}) \tag{54}$$

質量保存式より

$$\frac{\rho^{**} - \rho^n}{\Delta t}\Delta x\Delta y + \left(\rho^{**}u^{***}|_e - \rho^{**}u^{***}|_w\right)\Delta y + \left(\rho^{**}v^{***}|_n - \rho^{**}v^{***}|_s\right)\Delta x = 0 \tag{55}$$

圧力の方程式を得るため，$\rho^{**}u^{***}|_e$ を Rhie-Chow 補間により求める。$\widetilde{a_P^*} = a_P/\rho^*$，$d_P^* = \Delta y/\widetilde{a_{PP}^*}, d_E^* = \Delta y/\widetilde{a_{PE}^*}$ として

$$\begin{aligned}\rho^{**}u^{***}|_e = &\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^{**} + S_u + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_P^n u_P^n}{\widetilde{a_{PP}^*}} + \frac{\sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^{**} + S_u + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_E^n u_E^n}{\widetilde{a_{PE}^*}}\right] \\ &- \frac{1}{2}(d_P^* + d_E^*)(p_E^{**} - p_P^{**})\end{aligned} \tag{56}$$

これを質量保存式に代入し，以下の圧力式が得られる。

$$\begin{aligned}&p_P^{**}\left[\frac{\phi(p^*, T^{**})}{\Delta t}\Delta x\Delta y + \frac{\Delta y}{2}(d_P^* + d_E^*) + \frac{\Delta y}{2}(d_P^* + d_W^*) + \frac{\Delta x}{2}(d_P^* + d_N^*) + \frac{\Delta x}{2}(d_P^* + d_S^*)\right] \\ &= \frac{\rho_P^n}{\Delta t}\Delta x\Delta y + \frac{\Delta y}{2}(d_P^* + d_E^*)p_E^{**} + \frac{\Delta y}{2}(d_P^* + d_W^*)p_W^{**} + \frac{\Delta x}{2}(d_P^* + d_N^*)p_N^{**} + \frac{\Delta x}{2}(d_P^* + d_S^*)p_S^{**} \\ &- \frac{\Delta y}{2}\left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^{**} + S_u + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_E^n u_E^n}{\widetilde{a_{PE}^*}} - \frac{\sum_{nb} a_{nb}u_{nb}^{**} + S_u + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_W^n u_W^n}{\widetilde{a_{PW}^*}}\right] \\ &- \frac{\Delta x}{2}\left[\frac{\sum_{nb} a_{nb}v_{nb}^{**} + S_v + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_N^n v_N^n}{\widetilde{a_{PN}^*}} - \frac{\sum_{nb} a_{nb}v_{nb}^{**} + S_v + (\Delta x\Delta y/\Delta t)\rho_S^n v_S^n}{\widetilde{a_{PS}^*}}\right]\end{aligned} \tag{57}$$

これより p^** を求め ρ^{**} が求まる。次に，u^{***}, v^{***} を求める。

4.6 エネルギーの修正

$$a_P e_P^{***} = \sum_{nb} a_{nb}e_{nb}^{**} + \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho_P^n e_P^n + S_e \tag{58}$$

を用いて，エネルギーの修正値 e_P^{***} を求める。

5 境界条件

セル P の座標を (i, j) とすると，本解析では $i = 1, \ldots, nx+2$, $j = 1, \ldots, ny+2$ だけ座標点が存在する。流体領域の境界面は $i = 1, 2$, $i = nx+1, nx+2$, $j = 1, 2$, $j = ny+1, ny+2$ の中間面とする。そのため，速度，圧力，温度の境界条件を $i = 1$ の e の界面，$i = nx+2$ の w の界面（$i = nx+1$ の e の界面），$j = 1$ の n の界面，$j = ny+2$ の s の界面（$j = ny+1$ の n の界面）に対して設定する必要がある。例として，$i = 1$ の e の界面ですべりなしとする場合，$u[1, j] = -u[2, j]$, $v[1, j] = -v[2, j]$ とする。

またこれらの速度の境界条件を圧力の方程式中の $\rho u|_{e,w}, \rho v|_{n,s}$ に対しても反映し，圧力の方程式を修正する必要がある。

6 例題：Shock Tube

例として，衝撃波管を用いる。解析条件は以下。

1. x 方向 10m，y 方向 1m
2. nx=1000, ny=20，時間刻み 10^{-5}s
3. 流体は空気を想定し，$\gamma = 1.4$，分子量 $M = 0.029$ kg/mol，$R = 286.6$J/kg K
4. 初期条件: $x < 5$m 圧力 10^5Pa, 温度 348.4K, 速度 0m/s; $x > 5$m 圧力 10^4Pa，温度 278.7K，速度 0m/s
5. 境界条件: すべり壁，壁垂直方向圧力勾配なし，断熱

初期状態 0s から 0.06s (600 step) 後の分布が以下。

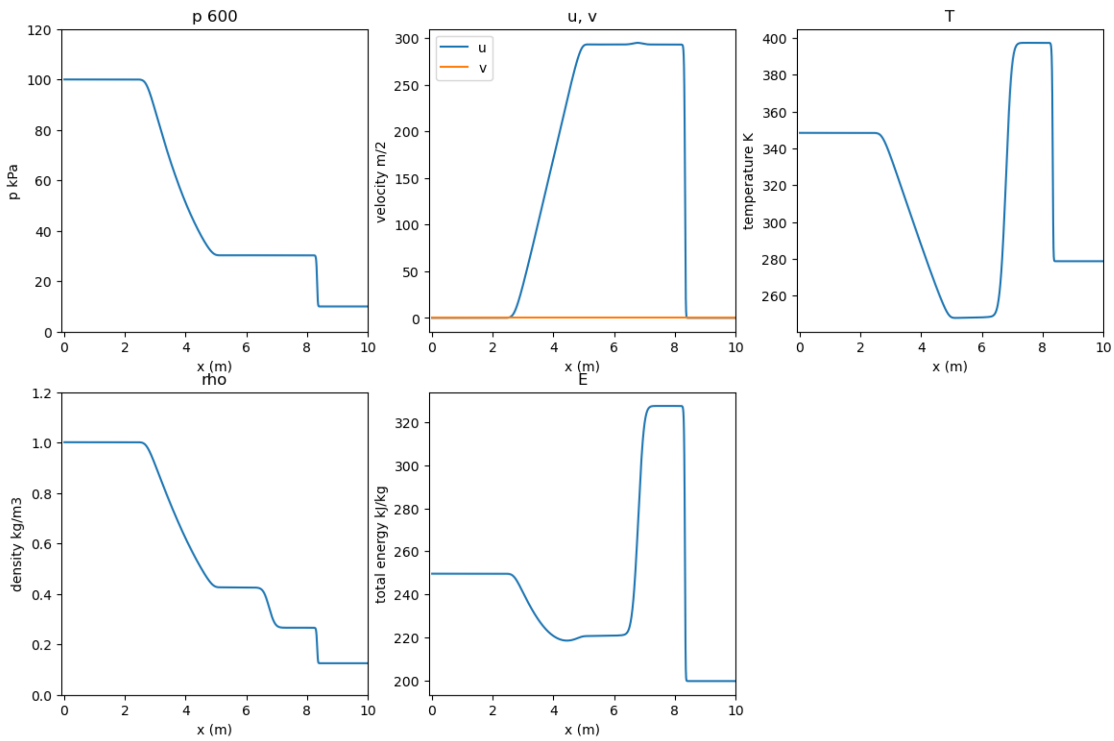

Fig.2 Pressure, velocity, temperature, density and total energy

参考文献

[1] R.I. Issa, B. Ahmadi-Befrui, K.R. Beshay, and A.D. Gosman, “Soultion of the Implicityly Discretized Reacting Flow Equations by Operator-Splitting”, JCP, (93), pp. 388-410, (1991)

[2] R.I. Issa, “Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting”, JCP, (62), pp. 40-65, (1985)

[3] R.I. Issa, A.D. Gosman, and A.P. Watkins, “The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-iterative Implicit Scheme”, JCP, (62), pp. 66-82, (1986)