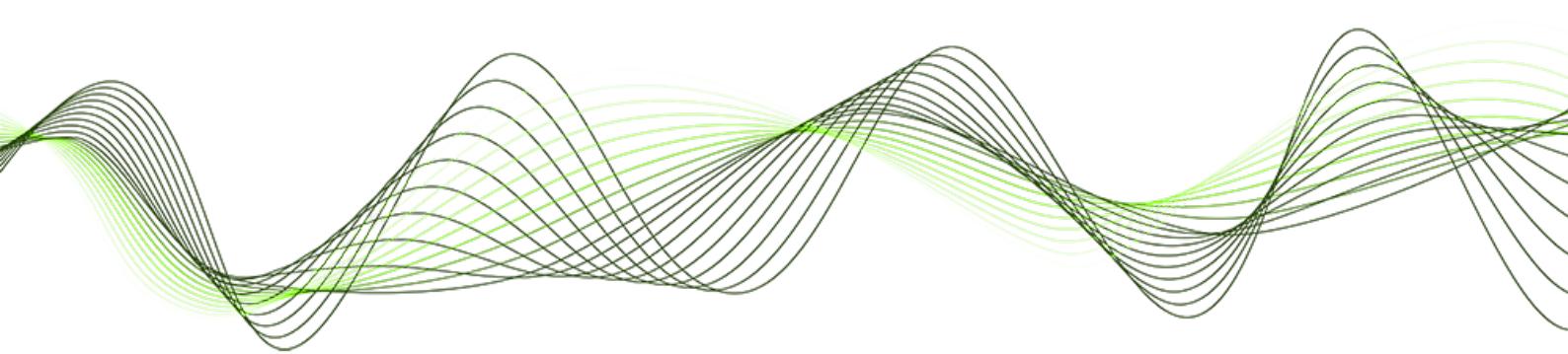


Análise de Sinais

com códigos em Python

George Sand e Susanne Maciel

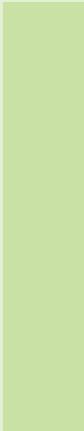


Sumário

| | |
|-----------|---|
| I | Preliminares |
| 1 | Aula 1 7 |
| 1.1 | Introdução à Álgebra Linear 7 |
| 1.1.1 | Operação com vetores 8 |
| 1.1.2 | Operações com Matrizes 9 |
| 1.1.3 | Espaços Vetoriais 11 |
| 2 | Aula 2 17 |
| 2.1 | Teorema da Projeção Ortogonal 17 |
| II | Métodos Matemáticos da Física |
| 3 | Aula 3 23 |
| 3.1 | Séries de Fourier 27 |
| 3.2 | O espectro de uma função 28 |
| 3.3 | Transformada de Fourier 29 |
| 3.4 | Transformada de Fourier e Derivadas 31 |
| 4 | Aula 4 33 |
| 4.1 | Delta de Dirac 33 |
| 4.1.1 | Visão Geral 34 |
| 4.1.2 | Definição 34 |
| 4.1.3 | Propriedades 35 |

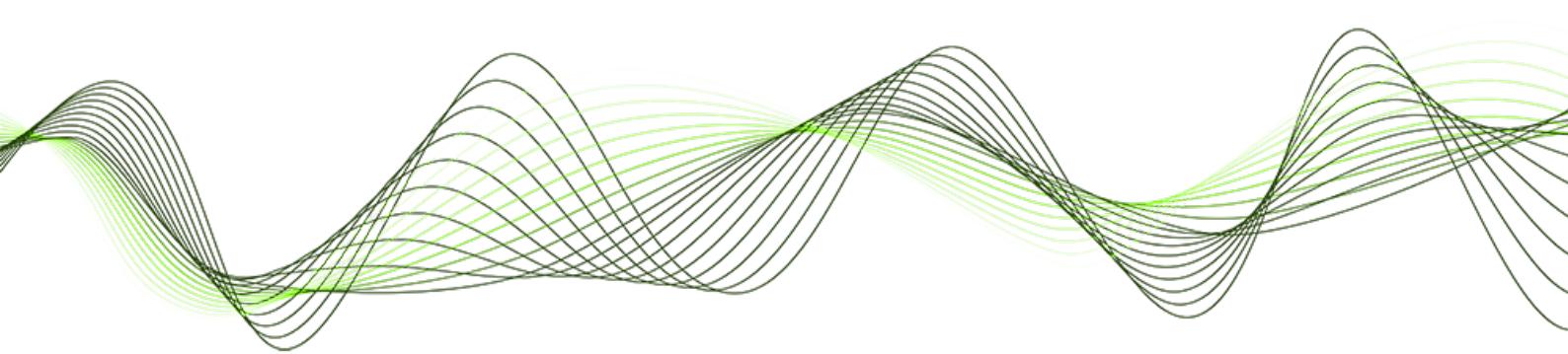
| | | |
|------------|---|-----------|
| 4.1.4 | Transformada de Fourier da Delta de Dirac | 35 |
| 4.2 | Convolução | 35 |
| 4.3 | Teorema de Shannon | 36 |

| | | |
|------------|---------------------------------|-----------|
| III | Sinal Discreto | |
| 5 | Sinal Discreto | 41 |
| | Bibliografia | 43 |
| | Livros | 43 |
| | Artigos | 43 |



Preliminares

| | | |
|----------|-------------------------------|----|
| 1 | Aula 1 | 7 |
| 1.1 | Introdução à Álgebra Linear | |
| 2 | Aula 2 | 17 |
| 2.1 | Teorema da Projeção Ortogonal | |



1. Aula 1

1.1 Introdução à Álgebra Linear

Os conceitos de vetores, espaços vetoriais, base e dimensão são úteis para a compreensão da representação de sinais no domínio da frequência. Nesta sessão, faremos uma breve revisão de conceitos básicos da Álgebra Linear.

Definição 1.1.1 — Vetores.. Um vetor é um arranjo de elementos em uma linha, ou coluna, sendo chamado de vetor-linha, ou vetor-coluna, respectivamente. O número de elementos do vetor define sua *dimensão*. Para o propósito deste curso, consideraremos que os elementos dos vetores são números reais.

■ **Exemplo 1.1**

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, (n \times 1).$$

■ **Exemplo 1.2**

$$\mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m], (1 \times m).$$

A representação de um vetor é feita usualmente usando letras minúsculas em negrito. O símbolo T representa a transposta de vetor:

■ **Exemplo 1.3**

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n].$$

1.1.1 Operação com vetores

Definição 1.1.2 — Adição.. Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores de mesma dimensão. A adição é dada pela soma dos elementos na forma:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_i + b_i] = \mathbf{c} = [c_i]. \quad (1.1)$$

■ **Exemplo 1.4**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2,5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 1.1.3 — Multiplicação por escalar.. Seja k um escalar e \mathbf{a} um vetor. Então o produto é representado por:

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a} = [ka_i] = [b_i]. \quad (1.2)$$

■ **Exemplo 1.5**

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 1.1.4 — Produto interno.. Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores de dimensão $(n \times 1)$. O produto interno produz um escalar que é definido por:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (1.3)$$

■ **Exemplo 1.6**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 6 + 5 + 4 = 19.$$

■

Dois vetores são chamados *ortogonais* quando o produto interno entre eles for igual a zero. Outras notações para produto interno são:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ ou } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (1.4)$$

Definição 1.1.5 — Norma de um vetor.. A magnitude de um vetor é dada pela raiz quadrada do produto interno dele com ele mesmo:

$$\| \mathbf{a} \| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \quad (1.5)$$

Propriedades do produto escalar.

Se X, Y e Z são vetores de \mathbb{R}^n e α é um escalar, então

- a. $X \cdot Y = Y \cdot X$ (comutatividade);
- b. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ (distributividade em relação à soma);
- c. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;
- d. $X \alpha X = \|X\| \geq 0$ e $\|X\| = 0$ se, e somente se, $X = 0$;
- e. $\|X\| = |\alpha| \|X\|$;
- f. $|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz);
- g. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (desigualdade triangular).

Definição 1.1.6 — Produto Externo. Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores de dimensão $(n \times 1)$. O produto externo entre eles produz uma matriz $(n \times n)$ e é definido por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T = [C_{ij}], c_{ij} = a_i b_j. \quad (1.6)$$

■ **Exemplo 1.7**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot -1 & 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot -1 & 3 \cdot 2 \\ -5 \cdot 3 & -5 \cdot 2 & -5 \cdot -1 & -5 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot -1 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 9 & 6 & -3 & 6 \\ -15 & -10 & 5 & -10 \\ 6 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

■

Definição 1.1.7 — Matrizes. Uma matriz A , $m \times n$ (m por n), é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Usamos a notação $A = (a_{ij})$ para descrever o elemento de posição na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz A . Se $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A . Uma matriz que só possui uma linha é chamada *matriz linha*, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada *matriz coluna*.

1.1.2 Operações com Matrizes

Vamos definir as seguintes operações matriciais:

Definição 1.1.8 — Soma de matrizes. A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B \quad (1.7)$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definição 1.1.9 — Multiplicação de matriz por escalar. A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ por um escalar α é definida pela matriz $m \times n$, $B = \alpha A$ obtida multiplicando-se

cada elemento da matriz A pelo escalar α , ou seja, $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$. Dizemos que a matriz B é um múltiplo escalar da matriz A .

Definição 1.1.10 — Multiplicação entre duas matrizes.. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é definido pela matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$

$$C = AB \quad (1.8)$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$.

Observe que o produto de matrizes não é uma operação comutativa! (Isto é, AB não é necessariamente igual a BA . Dependendo do número de colunas de B e do número de linhas de A , BA pode nem ser uma operação definida).

Definição 1.1.11 — Transposta de uma matriz.. A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz $n \times m$

$$B = A^T \quad (1.9)$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Escrevemos também $[A^T]_{ij} = a_{ji}$.

Definição 1.1.12 — Matriz identidade.. Em matemática, matriz identidade é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. É denotada por I_n , onde n é a ordem da matriz, ou simplesmente por I . Ou seja, a matriz identidade I_n tem a seguinte forma:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

A matriz I_n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Mais precisamente, para qualquer matriz A , as seguintes igualdades são válidas:

$$A_{m,n}I_n = A_{m,n}$$

e

$$I_m A_{m,n} = A_{m,n}.$$

Definição 1.1.13 — Inversa de uma matriz.. Uma matriz quadrada A é dita invertível quando

existe outra matriz denotada A^{-1} tal que

$$A^{-1} \cdot A = I \quad (1.10)$$

e

$$A \cdot A^{-1} = I \quad (1.11)$$

I é a matriz identidade.

1.1.3 Espaços Vetoriais

A noção de espaço vetorial é a base de toda a teoria da análise de Fourier. É o terreno onde se desenvolve a Álgebra Linear. Esta seção introduz os axiomas e os conceitos de base, dependência linear e projeções ortogonais.

Um espaço vetorial E envolve quatro objetos matemáticos: dois conjuntos V e S , e duas operações algébricas chamadas adição de vetores e multiplicação por escalar (Seção 1.1.1).

- V é um conjunto não vazio de objetos denominados *vetores*.
- S é um campo escalar - pode ser o campo dos números reais \mathbb{R} ou dos complexos \mathbb{C} .
- Adição de vetores ($\mathbf{a} + \mathbf{b}$) é uma operação entre elementos de V .
- Multiplicação por escalar ($k\mathbf{a}$) é uma operação entre elementos de S e V .

A definição formal de um espaço vetorial estipula como estes quatro objetos se relacionam entre si.

Não é necessário que os vetores em V tenham interpretação geométrica. V pode ser um conjunto formado por quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas abaixo. Polinômios de grau menor ou igual a n , $n \in \mathbb{N}$ formam um espaço vetorial, por exemplo, assim como grupos de matrizes $m \times n$ e o espaço de todas as funções de um conjunto no conjunto \mathbb{R} dos números reais.

Axiomas do espaço vetorial

- a. $(u + v) + w = u + (v + w)$ para $u, v, w \in V$ (associatividade);
- b. Há um elemento $0 \in V$, tal que, para cada $v \in V$, $v + 0 = 0 + v = v$ (existência de elemento neutro);
- c. Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0$ (existência de elemento oposto);
- d. Para cada $v, u \in V$, $u + v = v + u$ (comutatividade para a operação soma);
- e. Para cada $a, b \in S$ e cada $v \in V$, $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$ (associatividade da multiplicação por escalar);
- f. Se 1 é a unidade de S , então, para cada $v \in V$, $1 \cdot v = v$ (existência do elemento neutro em V);
- g. Para cada $a \in S$ e cada $v, u \in V$, $a \cdot (v + u) = a \cdot v + a \cdot u$ (distributiva de um escalar em relação à soma de vetores);
- h. Para cada $a, b \in S$ e cada $v \in V$, $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ (distributiva da soma de escalares em relação à um vetor);

Definição 1.1.14 — Normas.. Uma norma consiste em uma função que a cada vetor de um espaço vetorial associa um número real não-negativo. O conceito de norma está intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento.

Dado um espaço vetorial X sobre o corpo \mathbb{K} dos números reais ou complexos, uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de norma se, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Se esta condição não for atendida, a função será no máximo uma seminorma.
- $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$.
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdade triangular).

Se o espaço vetorial X tem uma norma, ele passa a ser chamado de espaço normado, $(X, \|\cdot\|)$.

■ **Exemplo 1.8** Normas ℓ_p :

- $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p \leq \infty$;
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$;

■ **Exemplo 1.9** Normas L_p :

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, uma função mensurável à Lebesgue definida em domínio D , mensurável.

Se $p \in [1, \infty)$, f é dita p -integrável e pertence ao espaço L_p se sua norma L_p for finita:

$$\|f\|_{L^p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Tipos de espaços vetoriais

Espaço Vetorial Euclidiano. É qualquer espaço real que possui um número finito de dimensões e possui uma operação denominada produto interno.

Espaço de Hilbert. É qualquer espaço vetorial que possui uma operação denominada produto interno e cuja métrica gerada por esse produto interno o torne um espaço completo.

Espaço normado. É qualquer espaço vetorial que possui uma norma definida.

Espaço de Banach. É um espaço vetorial normado completo.

■ **Exemplo 1.10** O espaço $L^2(D)$ é um espaço de Hilbert dotado do seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x) \overline{g}(x) dx.$$

As funções deste espaço são chamadas de *quadrado integráveis* e assumem um papel fundamental na teoria das séries de Fourier. Os espaços L^2 são os únicos espaços de Hilbert entre os espaços L^p .

Espaços \mathbb{R}^n

Já vimos que os vetores no plano são identificados com os pares ordenados de números reais e que vetores no espaço são identificados com ternos ordenados de números reais. Muito do que estudamos sobre vetores no plano e no espaço pode ser estendido para n -uplas de números reais, em que n é um inteiro positivo.

Para cada inteiro positivo n , o espaço vetorial \mathbb{R}^n é definido pelo conjunto de todas as n -uplas ordenadas $X = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais. O plano pode ser representado pelo espaço \mathbb{R}^2 , e o espaço tridimensional pode ser representado pelo espaço \mathbb{R}^3 .

Definição 1.1.15 — Combinação Linear. Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, se existem escalares x_1, \dots, x_k que satisfazem a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = v. \quad (1.12)$$

Neste caso, dizemos também que v pode ser escrito como uma *combinação linear* de v_1, \dots, v_k .

■ **Exemplo 1.11** Sejam $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$ vetores de \mathbb{R}^3 . O vetor $v = (1, 3, 5)$ não é uma combinação linear de v_1 e v_2 , pois a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$$

não possui solução. (Verifique!) ■

■ **Exemplo 1.12** Sejam $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ vetores de \mathbb{R}^3 . O vetor $v = (1, 0, 5)$ é uma combinação linear de v_1 e v_2 , pois a equação

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$$

possui solução, a saber

$$1v_1 + 5v_2 = v$$

Definição 1.1.16 — Independência Linear.. Dizemos que um conjunto $S = v_1, \dots, v_k$ de vetores do \mathbb{R}^n é linearmente independente (L.I.) quando a equação vetorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = 0 \quad (1.13)$$

só possui a solução trivial, ou seja, se a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores v_1, \dots, v_k é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, isto é, se a Eq. 1.13 possui solução não trivial, dizemos que o conjunto S é linearmente dependente (L.D.).

Exercício 1.1 Quais dos seguintes vetores são combinação linear de $v_1 = (4, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$?

- a) $(1, 1, 1)$
- b) $(4, 2, -6)$
- c) $(-2, -1, 1)$
- d) $(-1, 2, 3)$

Exercício 1.2 Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes?

- a) $\{(1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12)\}$
- b) $\{(1, -2, 3), (-2, 4, -6)\}$
- c) $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$
- d) $\{(4, 2, -1), (6, 5, -5), (2, -1, 3)\}$
- e) $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

Exercício 1.3 Para quais valores de λ o conjunto de vetores $\{(3, 1, 0), (\lambda 2 + 2, 2, 0)\}$ é L.D.? ■

Definição 1.1.17 — Base e Dimensão.. Se E é um espaço vetorial sobre um corpo S , chama-se base de E um conjunto de vetores de E linearmente independentes que gera E .

■ **Exemplo 1.13** O espaço vetorial \mathbb{R}^n tem por base o conjunto

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0, 0), (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)\},$$

que se denomina a sua base canônica. ■

■ **Exemplo 1.14** O espaço vetorial dos polinômios $p(x)$ de coeficientes reais tem uma base infinita, o conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$. ■

A cardinalidade da base define a dimensão do espaço vetorial.

■ **Exemplo 1.15** O espaço \mathbb{R}^3 possui dimensão finita igual a 3. ■

Quando os vetores da base são ortogonais entre si, dizemos que a base é *ortogonal*. Se, além da ortogonalidade, os vetores da base forem unitários, dizemos que é uma base *ortonormal*. A base canônica de \mathbb{R}^n é um exemplo de base ortonormal.

Distância entre um elemento a um conjunto

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de um subconjunto S . Queremos calcular a distância $\|D\|$ de um vetor $v \notin S$ até S .

Temos que

$$D = v - \hat{v},$$

$$\langle v - \hat{v}, x \rangle = 0, \quad \forall x \in S,$$

onde \hat{v} é a projeção ortogonal de v em S .

Como x é uma combinação linear de elementos da base de S , temos que

$$\langle v - \hat{v}, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Logo

$$\langle v, v_j \rangle - \langle \hat{v}, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como $\hat{v} \in S$, temos que $\hat{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$, e portanto

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle v_k, v_j \rangle.$$

Como a base é ortogonal, sabemos que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}.$$

■ **Exemplo 1.16** Seja S o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (plano YZ). Para determinar a distância do vetor $v = (7, -2, 3)$ ao plano S (Figura 1.1), precisamos primeiro encontrar a projeção ortogonal \hat{v} de v em S , e então determinar a distância $\|D\| = \|v - \hat{v}\|$.

$$\hat{v} = \alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(0, 0, 1), \tag{1.14}$$

onde $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$. Sabemos que

$$\langle v, v_1 \rangle = (7, -2, 3) \cdot (0, 1, 0) = -2, \tag{1.15}$$

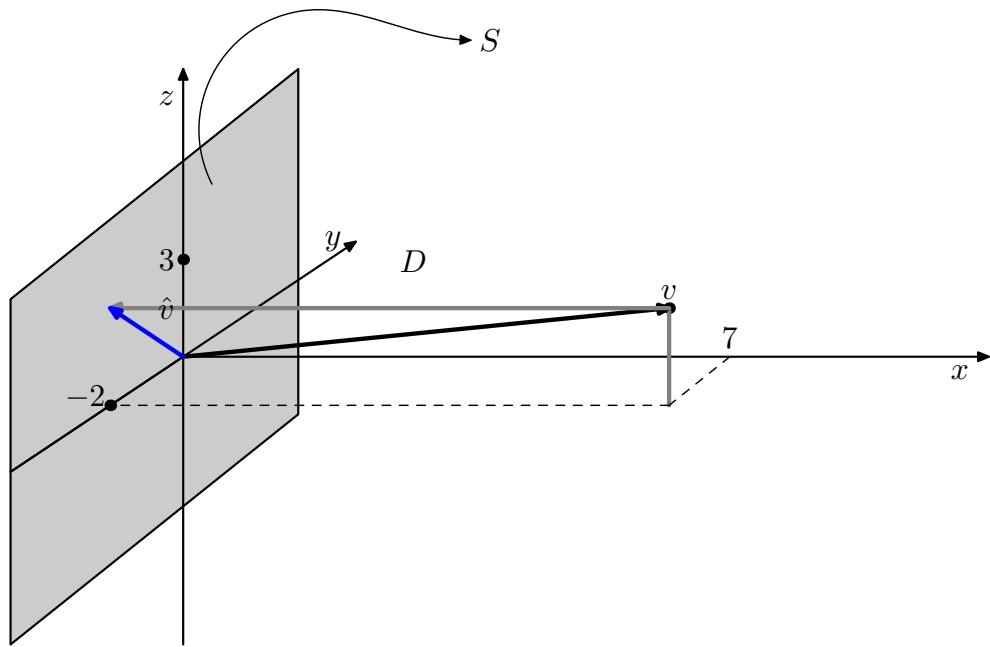


Figura 1.1: Projeção ortogonal \hat{v} (em azul) de $v = (7, -2, 3)$ em S . O vetor $D = v - \hat{v}$ possui norma igual à distância de v a S .

e

$$\langle v, v_2 \rangle = (7, -2, 3) \cdot (0, 0, 1) = 3. \quad (1.16)$$

Logo

$$\hat{v} = -2v_1 + 3v_2 = (0, -2, 3). \quad (1.17)$$

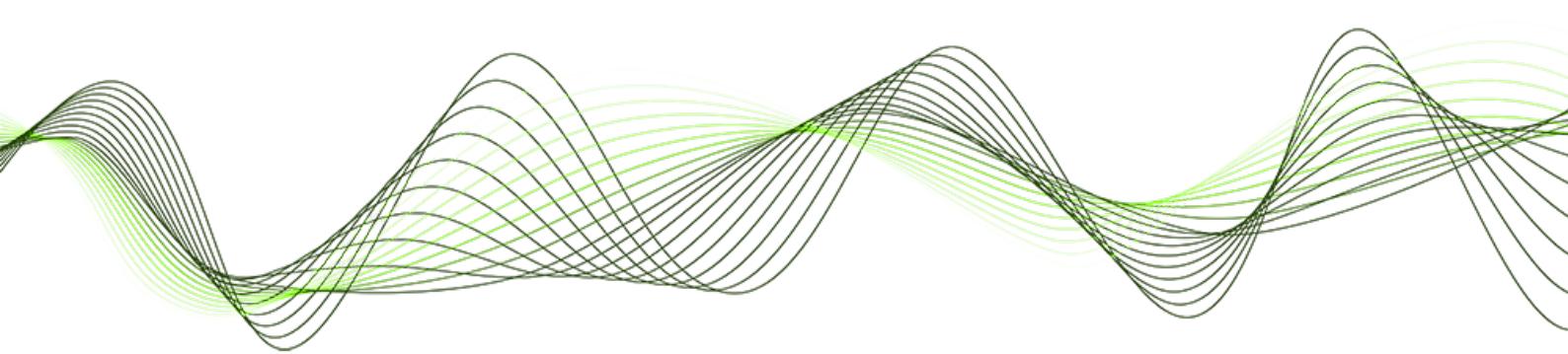
Portanto,

$$D = v - \hat{v} = (7, -2, 3) - (0, -2, 3) = (7, 0, 0) \quad (1.18)$$

■

Exercício 1.4 Seja S o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Determine a distância do vetor $v = (10, -1, 2)$ ao plano S . ■

Exercício 1.5 Seja S o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por $\{(1, 0, 0)\}$. Determine a distância do vetor $v = (10, -1, 2)$ à reta S . ■



2. Aula 2

2.1 Teorema da Projeção Ortogonal

Seja E um espaço vetorial, $F \subseteq E$ um subespaço de E . Sejam v_1, v_2, \dots, v_n uma base ortogonal de F . Então a projeção ortogonal \hat{v} de $v \in E$ em F é dada por

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \text{ onde } \alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \quad (2.1)$$

são os coeficientes de Fourier.

■ **Exemplo 2.1** Seja E o espaço de todas as funções quadrado integrável em $[-\pi, \pi]$

$$E = g : [-\pi, \pi] \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx < \infty$$

onde

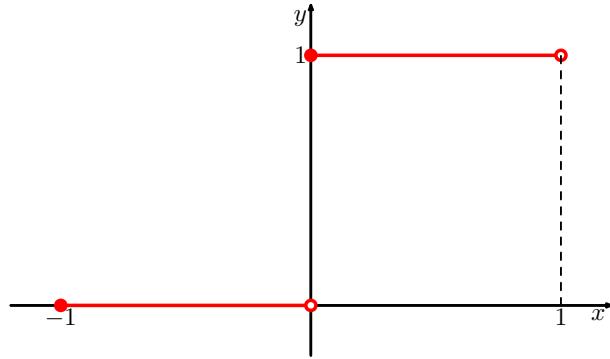
$$\langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)dx,$$

$$\|p\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |p(x)|^2 dx}.$$

Vamos escolher um subespaço $F \subseteq E$, cuja base é dada por

$$B = \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(Nx), \sin(Nx)\}.$$

A dimensão de F é portanto igual a $2N + 1$. Qualquer elemento g_N de F é uma combinação linear dos elementos da base B :

Figura 2.1: Gráfico da função f .

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx).$$

Se g_N é a projeção ortogonal de $g \in E$, então a_n e b_n são os coeficientes de Fourier, e são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx, n = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \quad (2.4)$$

e logo

$$g_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

■

■ **Exemplo 2.2** Tome a função

$$f : [-1, 1] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 1 \leq t < 0 \\ 1 & , \text{ se } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O conjunto $\{1, \cos(\pi t), \sin(\pi t), \dots, \cos(n\pi t), \sin(n\pi t)\}, n = 1, 2, \dots, N$ forma uma base para o subespaço S .

Os coeficientes $\alpha_n = \frac{\langle f(t), \cos(n\pi t) \rangle}{\langle \cos(n\pi t), \cos(n\pi t) \rangle}$ são dados por:

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 \cos(n\pi t) dt = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n \neq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\beta_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par;} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Portanto, a projeção de f em S é dada por:

$$f_{2N+1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin(\pi(2n-1)t). \quad (2.7)$$

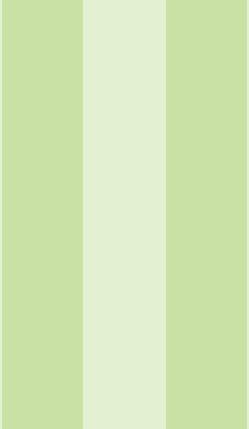
Observe que na descontinuidade em $t = 0$, $f_{2N+1}(0) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$. ■

Exercício 2.1 Mostre que:

- a $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(nx)|^2 dx = \pi$, para $n = 1, 2, \dots, N$;
- b $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(nx)|^2 dx = \pi$, para $n = 1, 2, \dots, N$;
- c $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0$, para $m \neq n$;
- d $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$, para $m \neq n$.

Exercício 2.2 Seja $f : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$. Mostre que:

- a $e^{i2\pi nt/T}$, $n = 1, 2, \dots, N$ forma uma base de um subespaço vetorial;
- b $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) g(t) dt$ é um produto interno;
- c $f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i2\pi nt/T}$, onde $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi nt/T} dt$
- d $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$ (Teorema de Parseval)



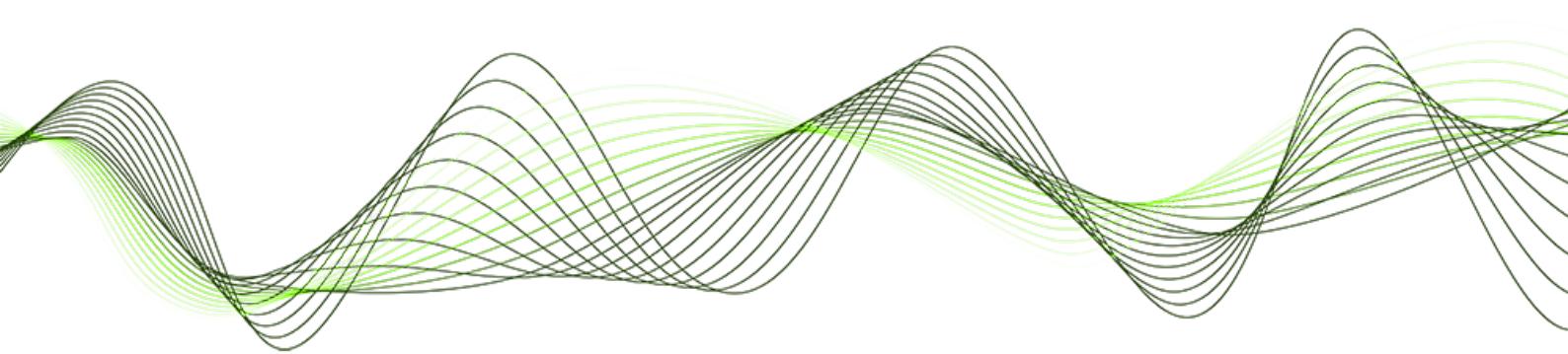
Métodos Matemáticos da Física

3 Aula 3 23

- 3.1 Séries de Fourier
- 3.2 O espectro de uma função
- 3.3 Transformada de Fourier
- 3.4 Transformada de Fourier e Derivadas

4 Aula 4 33

- 4.1 Delta de Dirac
- 4.2 Convolução
- 4.3 Teorema de Shannon



3. Aula 3

O processamento de sinais digitais ganhou grande destaque nos últimos anos no campo da geofísica. Nos variados métodos de aquisição, as ferramentas de processamento desempenham um papel importante na análise e interpretação dos dados adquiridos. Entre as ferramentas do processamento, destaca-se a representação de sinais por Fourier. Esta representação permite passar um dado do domínio do tempo para o domínio da frequência, o que fornece uma estrutura para a determinação ou reconstrução de aspectos obscuros do sinal.

O objetivo deste capítulo é introduzir as Séries de Fourier e as Transformadas de Fourier, que são as formas básicas da representação de Fourier para funções periódicas e aperiódicas.

Definição 3.0.1 Uma função é periódica para qualquer função $f(t)$ real ou complexa de argumento real t , se e somente se;

$$f(t) = f(t + T) \quad (3.1)$$

para todo t . T é um real arbitrário e uma constante positiva. A Equação 3.1 deve satisfazer para diferentes valores de T . O menor valor de T é conhecido como *período fundamental*, e $1/T$ é chamado de *frequência fundamental*. Qualquer função que não satisfazer a equação 3.1 para nenhum T é chamada de aperiódica.

■ **Exemplo 3.1** Uma soma de duas funções periódicas não é necessariamente uma função periódica. Como exemplo, considere a seguinte função:

$$f(t) = \cos(a_1 t) + \cos(a_2 t). \quad (3.2)$$

Observe que f é a soma de duas funções periódicas. No entanto, de acordo com equação 3.1, para $f(t)$ para ser periódica com período T , deve-se satisfazer a seguinte relação:

$$\cos(a_1 t) + \cos(a_2 t) = \cos(a_1(t + T)) + \cos(a_2(t + T)). \quad (3.3)$$

Já que $\cos(\alpha + 2\pi m) = \cos(\alpha)$, para qualquer inteiro m , fazendo $a_1 T = 2\pi m$ e $a_2 T = 2\pi n$, onde m e n são números inteiros, obtemos

$$T = \frac{2\pi m}{a_1} = \frac{2\pi n}{a_2}. \quad (3.4)$$

Logo, $f(t)$ só será periódica se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{n} \quad m, n \text{ inteiros.} \quad (3.5)$$

Isto é, se a razão a_1/a_2 , for um número racional, f é periódica. Caso contrário, f não é. ■

O conceito de representação de Fourier de um determinado sinal envolve a noção de frequência. Para sinais periódicos, é fácil intuir esta noção. Vamos tomar como base para as próximas definições a função cosseno dada por:

$$u(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \phi\right). \quad (3.6)$$

Definição 3.0.2 — Frequência. A frequência é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, oscilações etc) em um determinado intervalo de tempo. A frequência da função cosseno em (3.10), é o inverso do período T :

$$f = \frac{1}{T}. \quad (3.7)$$

O período T é tempo decorrido para uma oscilação. A frequência f indica quantos períodos completos T existem no intervalo de tempo entre 0 e 1 segundo. A unidade de medida para a frequência é o inverso da unidade de tempo. No SI, a unidade usada é o hertz ($\text{Hz} = 1/\text{s}$), em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz.

Definição 3.0.3 — Frequência Angular. Representada usualmente por ω , a frequência angular é a unidade usada para encurtar a expressão em (3.10):

$$\omega = 2\pi f, \quad (3.8)$$

logo

$$u(t) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (3.9)$$

Definição 3.0.4 — Fase. A fase ϕ caracteriza a posição inicial da onda cosseno no tempo $t = 0$. Isto é, a fase indica o quanto a onda cosseno é deslocada em relação à onda referência

$$u(t) = A \cos(\omega t). \quad (3.10)$$

■ **Exemplo 3.2** Considere o sinal

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos[2\pi f(t - t_0)] \\ &= A \cos(2\pi f t - \phi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\phi = 2\pi f t_0$.

O sinal foi deslocado em ϕ radianos, ou t_0 segundos (por exemplo, deslocar $\phi = \pi/2$ em fase é o mesmo que deslocar $t_0 = T/4$ em tempo. Observe que

$$-\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (3.12)$$

e

$$-\frac{T}{2} \leq t_0 \leq \frac{T}{2}. \quad (3.13)$$

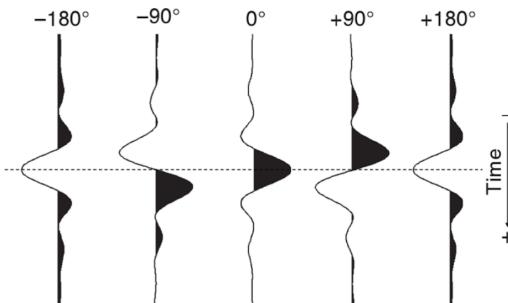


Figura 3.1: Rotações de fase de uma wavelet de fase zero em incrementos de 90° . Observe que para uma rotação de 90° a wavelet se torna assimétrica, e com 180° , há uma inversão de fase.

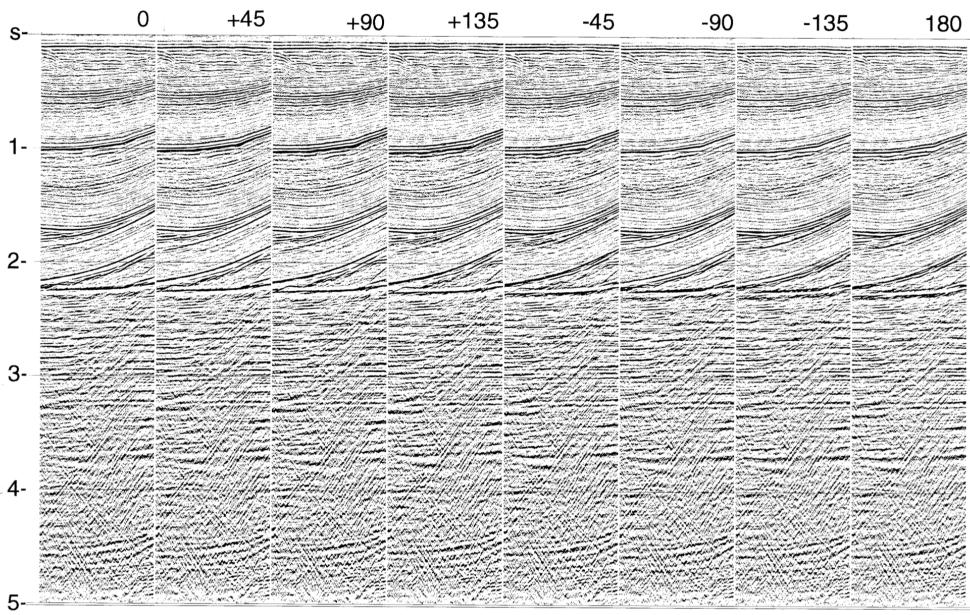


Figura 3.2: Um pedaço de uma sessão sísmica com diferentes graus de rotação de fase.

■ **Exemplo 3.3** A Figura 3.1 mostra como uma wavelet se comporta em variadas rotações de fase. A Figura 3.2 mostra uma porção de uma sessão sísmica com aplicação de diferentes rotações de fase. Note a mudança nas características de onda dos horizontes mais destacados. Estas diferenças

provocadas pelas diferentes rotações de fase são úteis para marcar eventos na fase de interpretação. Um erro comum na interpretação sísmica, é a comparação de duas sessões com fases opostas. ■

Definição 3.0.5 — Sinais. Um sinal é uma função que representa uma quantidade ou variável física, e tipicamente contém informações sobre o comportamento ou natureza deste fenômeno. É uma função que mapeia um domínio em um intervalo, geralmente uma medida física, como a intensidade de uma onda acústica, ou o magnetismo. A maior parte dos sinais medidos na natureza são funções de variáveis contínuas, como o tempo ou espaço, e assumem valores em intervalos também contínuos.

Por exemplo, um sinal sísmico é uma medida da movimentação da terra, que é por natureza, uma grandeza contínua.

■ **Exemplo 3.4** Sinais discretos e contínuos ■

■ **Exemplo 3.5** Sinais pares e ímpares ■

Definição 3.0.6 — Sistemas. Um sistema é um dispositivo físico que opera em um sinal. Um filtro, por exemplo, é um sistema. Matematicamente, dizemos que um sistema é uma função que mapeia um sinal do domínio em um sinal da imagem. Ou seja, um sistema é uma função cujos domínio e imagem são também funções.

■ **Exemplo 3.6** Sísmica e sismologia ■

BOX 3.0.1 — BASE ORTONORMAL DO ESPAÇO DE SINAIS: UMA ANALOGIA AO ESPAÇO VETORIAL. É fato conhecido que o conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base ortonormal do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Qualquer vetor x neste espaço pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3, \quad (3.14)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar, definido no Capítulo 1.

Esta regra não é aplicável apenas aos espaços cartesianos; é válida para qualquer espaço vetorial desde que seja possível definir um produto escalar neste espaço. Nós vimos na Seção 1.1.3 que para o espaço das funções quadrado integráveis no intervalo $[a, b]$, é possível definir o produto escalar como:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad (3.15)$$

onde f e g são duas funções (ou sinais), definidas no intervalo $[a, b]$.

Sabemos do Capítulo 1 que um conjunto de vetores é ortonormal quando

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0, \text{ sempre que } i \neq j, \quad (3.16)$$

e

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 1, \text{ sempre que } i = j. \quad (3.17)$$

Analogamente, podemos definir uma base ortonormal para um espaço de sinais. Qualquer conjunto de sinais

$$e_0(t), e_1(t), \dots, e_n(t), \dots \quad (3.18)$$

que obedeça

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_a^b e_n(t) e_m(t) dt = 0, n \neq m; n, m = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

e

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_a^b e_n(t)^2 dt = 1, n = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

é uma base ortonormal para o espaço de sinais quadrado integráveis.

Com uma base ortonormal definida, qualquer sinal quadrado integrável no intervalo $[a, b]$, digamos $u(t)$, pode ser expresso como uma combinação linear de sinais que constituem a base ortonormal:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u(t), e_n(t) \rangle e_n(t). \quad (3.21)$$

Com a analogia apresentada no BOX 3.0.1, introduziremos o conceito das Séries de Fourier.

3.1 Séries de Fourier

Para o desenvolvimento das séries de Fourier, concentraremos-nos nas representações de sinais periódicos.

Considere um espaço, digamos U , de sinais periódicos de período T . Podemos definir neste espaço o produto escalar de dois sinais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ em U como

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = \int_0^T u_1(t) u_2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} u_1(t) u_2(t) dt. \quad (3.22)$$

O próximo passo é construir uma base ortonormal de funções periódicas com período T , que pode ser usada para representar qualquer sinal de U . A ideia é encontrar um conjunto de sinais simples que possam ser utilizados para reconstruir os sinais mais complexos. Arriscamos dizer que as funções seno e cosseno são as funções mais simples do espaço U . O seguinte conjunto constitui uma base ortonormal de U (verifique!):

$$B = \sqrt{\frac{2}{T}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{2\pi t}{T}, \cos \frac{2\pi t}{T}, \sin \frac{4\pi t}{T}, \cos \frac{4\pi t}{T}, \dots, \sin \frac{2n\pi t}{T}, \cos \frac{2n\pi t}{T}, \dots \right\} \quad (3.23)$$

Desta forma, qualquer função periódica u de período T pode ser escrita unicamente como uma combinação linear dos elementos da base de U :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle u(t), e_i(t) \rangle e_i(t) \quad (3.24)$$

ou em outras palavras

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \quad (3.25)$$

onde

$$a_0 = 2\langle u(t), e_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt, \quad (3.26)$$

$$a_n = 2\langle u(t), e_{2n} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt, \quad (3.27)$$

e

$$b_n = 2\langle u(t), e_{2n-1} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt. \quad (3.28)$$

A quantidade $f_1 = \frac{1}{T}$ é chamada de *frequência fundamental* de u . A soma dada pela Eq. 3.25 é chamada de *Série de Fourier*.

Relembrando a relação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \quad (3.29)$$

podemos estender o resultado (3.25) para os complexos:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}}, \quad (3.30)$$

onde

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & , \text{ se } n \geq 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} & , \text{ se } n < 0. \end{cases}$$

3.2 O espectro de uma função

Definição 3.2.1 — Espectro de uma função. O espectro de amplitude (ou de fase) de uma função f é o gráfico das amplitudes (ou fases) em função das respectivas frequências. Isto é, é a representação da função no domínio das frequências. Podemos definir como o conjunto de pares $(\omega_n, |c_n|)$, onde c_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier, e ω_n é a frequência de f em um determinado n .

A ideia da Série de Fourier é representar um sinal sísmico como uma soma de senos e cossenos. Adicionar cossenos produz um sinal cujas características dependem da frequência, amplitude e fase de cada onda cosseno individual. A Figura 3.4, por exemplo, mostra a soma de duas funções cosseno com fase, amplitude e frequência distintas, a saber, fases 0 e -90° , amplitudes 2 e 1 e frequências 10Hz e 20Hz respectivamente. A soma resultante é um sinal cujo espectro mostrará na frequência 10Hz, amplitude igual a 2 e fase igual a 0, e na frequência 20Hz, amplitude igual a 1 e fase igual a -90° .

Incluir exercício no Python para somar 10 funções cosseno com frequências distintas, resultando em um pulso conhecido.

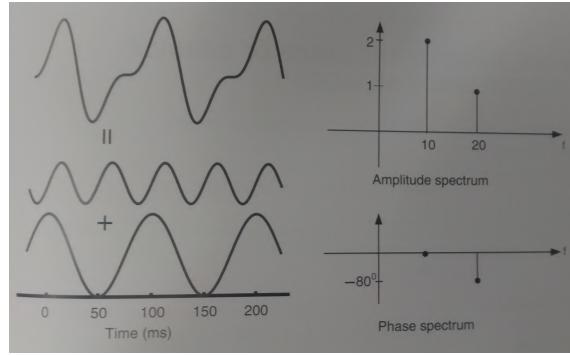


Figura 3.3: Forma de onda e espectro da soma de duas ondas cosseno.

3.3 Transformada de Fourier

Conforme apresentado na seção anterior, qualquer sinal periódico pode ser representado no domínio de Fourier por um espectro de amplitude ou de fase. Nesta seção, nosso objetivo é estabelecer uma relação matemática conhecida como *Transformada de Fourier*, que permite passar uma função em tempo para seu domínio na frequência, e vice versa. Primeiramente mostraremos para os sinais periódicos, e em seguida vamos generalizar para sinais aperiódicos. Seja f periódica de período T , seccionalmente contínua. Sua série de Fourier é dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau \right]. \quad (3.31)$$

Substituindo $\frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$ e $n\Delta\omega = \omega_n$ na Eq. 3.31, obtemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau. \quad (3.32)$$

! Integral de Riemann:

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N g(n \cdot \Delta x + a) \Delta x \quad (3.33)$$

Fazendo o limite $T \rightarrow \infty$, temos $\Delta\omega \rightarrow 0$, o que nos dá

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (3.34)$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.35)$$

Definimos a Equação 3.35 como a *Transformada de Fourier*, e a Equação 3.34 como sua inversa.

A Transformada de Fourier converge para qualquer função em L^1 , com $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (3.36)$$

Vejamos agora alguns exemplos:

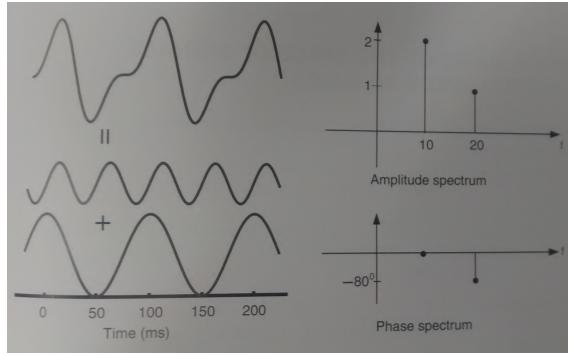


Figura 3.4: Forma de onda e espectro da soma de duas ondas cosseno.

■ **Exemplo 3.7**

■ **Exemplo 3.8** Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} A & , \text{ se } -a \leq t \leq a \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Pela definição 3.35, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = A \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = A \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = \frac{2A}{\omega} \operatorname{sen}(\omega a) = 2Aa \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a}. \quad (3.38)$$

Sabemos que a função $\operatorname{sinc}(t)$ é definida por $\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}$ se $t \neq 0$, e igual a 1 se $t = 0$. Podemos então pensar no problema contrário: e se $h(t) = \operatorname{sinc}(t)$? Qual seria sua transformada?

Sabendo que $\hat{f}(\omega) = 2Aa \frac{\operatorname{sen}(\omega a)}{\omega a}$, temos que $h(t) = \hat{g}(t)$, onde \hat{g} é a Transformada de Fourier de

$$g(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi & , \text{ se } -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.39)$$

Utilizando a definição da inversa da Transformada de Fourier 3.34, temos que $\hat{h}(\omega) = 2\pi g(-\omega)$, que é uma função *banda limitada*.

■ **Exemplo 3.9** Encontre a Transformada de Fourier da função

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (3.40)$$

com $a > 0$.

Pela definição 3.35, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{at} e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \quad (3.41)$$

3.4 Transformada de Fourier e Derivadas

Uma das propriedades mais interessantes da Transformada de Fourier, é que operações complicadas no domínio do tempo podem se tornar operações simples no domínio da frequência. É o caso das derivadas. Considere por exemplo $g(t) = f'(t)$ e $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt$, onde $f \in \mathcal{L}^2$.

Integrando por partes, tem-se que

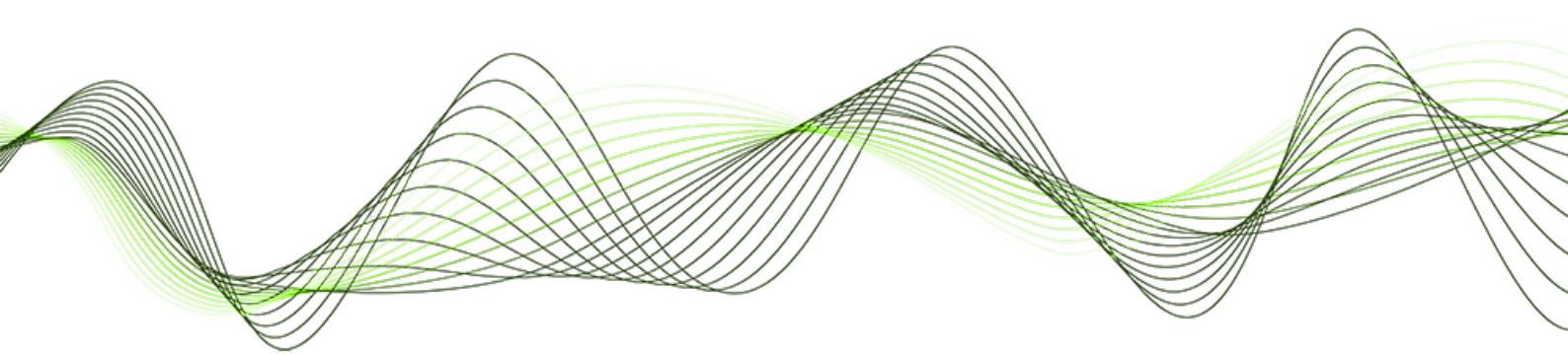
$$u = e^{-i\omega t}, du = -i\omega e^{-i\omega t} dt, dv = f'(t) dt, v = f(t),$$

logo

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt = \\ &= e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por definição, $\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) i\omega e^{-i\omega t} dt$, e a primeira parte da Eq.3.42 é igual a zero. Logo,

$$\hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega). \quad (3.43)$$



4. Aula 4

Para iniciar este Capítulo, traremos a seguinte pergunta:

BOX 4.0.1 Qual é a “função” cuja Transformada de Fourier é a função constante unitária?

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} = \delta(t) \quad (4.1)$$

Isto é, espera-se que a função cuja Transformada de Fourier é igual a $\hat{f}(\omega) = 1$ seja uma função tal que, quando $t = 0$, a função assuma um valor infinito, e quando $t \neq 0$, a função seja igual a zero (estude os Valores Principais de Cauchy para entender porque estamos assumindo $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega = 0$, quanto $t \neq 0$). Formalmente, uma função não pode assumir estes valores. A Delta de Dirac $\delta(t)$ é uma distribuição (generalização de função), isto é, um operador linear contínuo em um espaço de funções que associa cada função a um escalar.

4.1 Delta de Dirac

Esta sessão foi retirada de Wikipédia, a encyclopédia livre.

Em matemática, a função delta de Dirac, também conhecida como função δ , é uma distribuição na reta real, a qual vale infinito no ponto zero e é nula no restante da reta. A integral da função Delta de Dirac em toda reta é definida como tendo valor 1. Foi introduzida pelo físico teórico Paul Dirac em 1930 em seu livro “The Principles of Quantum Mechanics”. Seu análogo no domínio discreto é o delta de Kronecker, o qual vale 0 e 1.

Pode-se pensar no Delta de Dirac como um retângulo infinitamente estreito e infinitamente alto, com área igual à unidade. Em muitos casos, pode ser encarado como o limite de funções que tendem a estas condições. Além disso, se enfocarmos no contexto de processamento de sinais, ela é frequentemente interpretada como um impulso unitário.

Matematicamente, o Delta de Dirac não pode ser caracterizado propriamente como uma função, mas sim como um objeto matemático. Isso porque qualquer função que valha zero em todos os

pontos exceto um, deve ter integral nula em toda a reta. Entretanto, quando em uma integral, ganha sentido matemático e, para a maioria dos propósitos, pode ser encarado e manipulado como uma função.

4.1.1 Visão Geral

Apesar do nome, a função Delta de Dirac não é verdadeiramente uma função. $\delta(x)$ difere de uma função $g(x) = 0$ apenas em zero, e portanto as duas são funções *iguais quase sempre*. Segundo a teoria de integração de Lebesgue, duas funções integráveis e iguais quase sempre, têm necessariamente, integrais idênticas. Entretanto, a integral da função $g(x)$ é zero, e a da função Delta de Dirac vale 1 por definição.

Desconsiderando o formalismo matemático, em termos práticos o Delta pode ser encarado como uma função na maioria dos casos. Geralmente é usado para modelar uma função impulso, isto é, modelar situações pontuais (como massas e cargas pontuais) ou instantâneas (adição instantânea de uma substância em uma reação química ou a dinâmica de um martelo batendo fortemente em um sistema massa mola, por exemplo).

4.1.2 Definição

Para definir matematicamente a função Delta de Dirac, é conveniente utilizar outra função singular, a chamada função de Heaviside, também conhecida por função salto ou degrau. Considera-se o Delta como o limite de funções pulso unitário $f_\varepsilon(t)$, num curto curto intervalo de tempo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, quando o parâmetro ε tende a zero:

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} [u(t + \varepsilon) - u(t - \varepsilon)] = \begin{cases} 0 & t < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \quad (4.2)$$

Para representar um impulso num instante de tempo que não zero, realiza-se um deslocamento na equação anterior:

$$f_\varepsilon(t - a) = \frac{1}{2\varepsilon} [u(t - (a - \varepsilon)) - u(t - (a + \varepsilon))] = \begin{cases} 0 & t < a - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & a - \varepsilon < t < a + \varepsilon \\ 0 & t > a + \varepsilon \end{cases} \quad (4.3)$$

Observa-se que as áreas dos retângulos formados pelas funções pulso unitário $f_\varepsilon(t)$ valem 1 independentemente do valor de ε . Ou seja:

$$A = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f_\varepsilon(t - a) dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1 \quad (4.4)$$

Assim, considerando que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ $f_\varepsilon(t - a) \rightarrow \infty$, define-se a função Delta de Dirac como sendo

$$\delta(t - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - a) \quad (4.5)$$

A função Delta de Dirac pode também ser definida em termos de outras funções com propriedades análogas. Por exemplo:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-t^2}{\varepsilon^2}}}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \quad (4.6)$$

Resumidamente, pode se escrever:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.8)$$

É possível também encarar a distribuição Delta como um limite de aproximações da identidade.

4.1.3 Propriedades

Propriedade da Peneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a). \quad (4.9)$$

Observe que $\delta(t - a)$ é nula quando $t \neq a$, então os limites de integração podem ser alterados para $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. E como $f(t)$ é contínua em $t = a$, seu valor neste intervalo não será muito diferente de $f(a)$. Pode-se dizer que aproximadamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t - a) f(t) dt \approx f(a) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(t - a) dt = f(a) \quad (4.10)$$

4.1.4 Transformada de Fourier da Delta de Dirac

$$\mathcal{F}[\delta(t - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega a} \quad (4.11)$$

4.2 Convolução

Convolução é um operador linear que, a partir de duas funções dadas, resulta numa terceira que mede a área subentendida pela superposição das mesmas em função do deslocamento existente entre elas.

Definição 4.2.1 — Convolução.

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) g(x) dx = [g * f](t) \quad (4.12)$$

■ **Exemplo 4.1** Suponha que f seja um sinal contínuo, obtido de uma medição cheia de ruídos. Uma maneira de encontrar \tilde{f} suavizada, é realizar no domínio contínuo uma operação similar à média aritmética no domínio discreto:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x) dx. \quad (4.13)$$

A Equação 4.13 pode ser escrita como

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x, t) dx, g(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{cases} 0, & |t - x| > \varepsilon \\ 1, & |t - x| < \varepsilon \end{cases}. \quad (4.14)$$

■

BOX 4.2.1 — Propriedades.. 1) $f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x)dx = f(t);$

2) $f(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu(t-x)dx = \int_{-\infty}^t f(t)dx;$

3) $\mu(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^t \mu(x)dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases};$

4) $(\hat{f} * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$ (Prove!)

■ **Exemplo 4.2** Vamos mostrar a propriedade 4:

$$(\hat{f} * g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \right) e^{-i\omega t} dt \quad (4.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)e^{-i\omega t} dt \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega(x+y)} dy \right) dx \quad (4.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\hat{g}(\omega)dx = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega). \quad (4.17)$$

■

4.3 Teorema de Shannon

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *banda limitada* quando $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega > 0.$

Seja f banda limitada (Ω). Então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.18)$$

com $\omega_c > \Omega.$

$$e^{i\omega t} = g(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\pi/\omega_c n \omega}, \quad (4.19)$$

com

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega t} e^{-i2\pi/2\omega_c n \omega} d\omega. \quad (4.20)$$

Sabendo que $\frac{\pi}{\omega_c} = \Delta t$, temos

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega(t-n\Delta t)} d\omega = \frac{1}{2\omega_c} \frac{e^{i\omega(t-n\Delta t)}}{i(t-n\Delta t)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \quad (4.21)$$

$$= \frac{\sin(\omega_c(t-n\Delta t))}{\omega_c(t-n\Delta t)} = \frac{\sin(\pi/\Delta t \omega_c(t-n\Delta t))}{\pi/\Delta t \omega_c(t-n\Delta t)} = \text{sinc}\left(\frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right), \quad (4.22)$$

onde $sinc(x)$ é a função seno cardinal:

$$sinc(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Assim,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\omega n \Delta t} \right) d\omega = \quad (4.24)$$

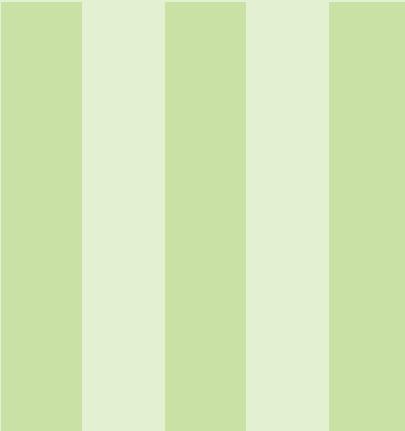
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} sinc\left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(n\Delta t)} d\omega = \quad (4.25)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} sinc\left(\frac{t - n\Delta t}{\Delta t}\right) f(n\Delta t). \quad (4.26)$$

Note que $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}$ e $\omega_c > \Omega$.

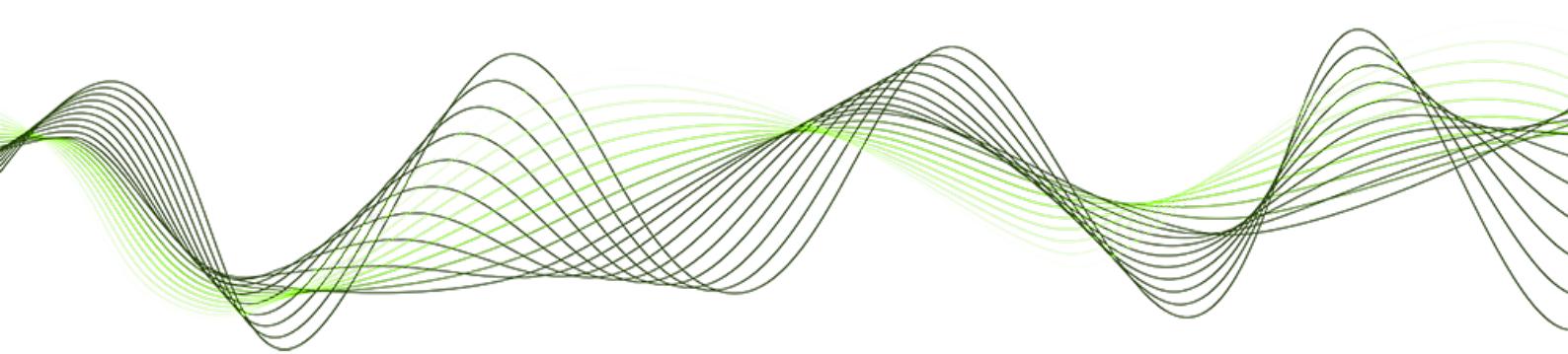
Definição 4.3.1 — Frequência de Nyquist. É a maior frequência que se pode recuperar do sinal.

$$\omega_c = \frac{\pi}{\Delta t}, \omega_c > \Omega, \Delta t < \frac{\pi}{\Omega}. \quad (4.27)$$

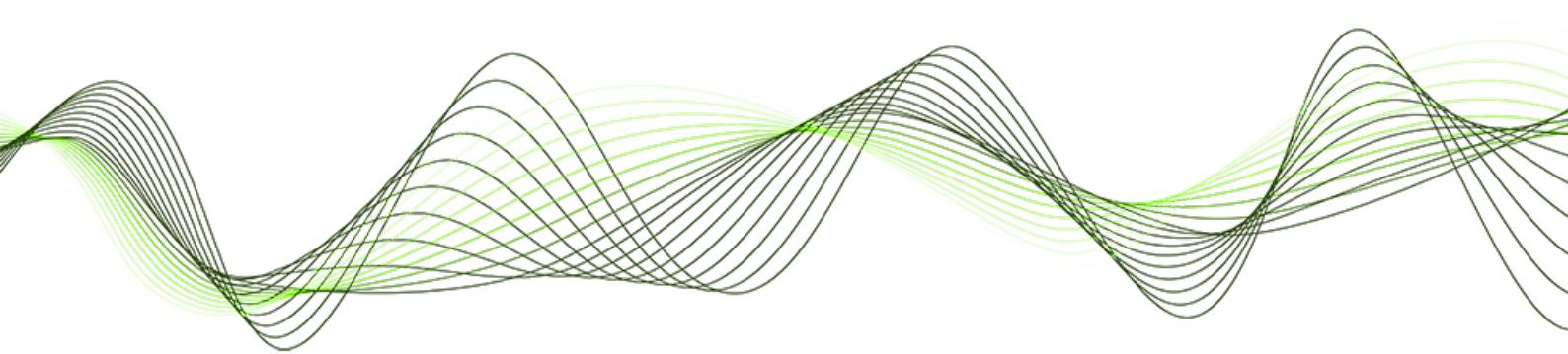


Sinal Discreto

| | | |
|---|----------------------|----|
| 5 | Sinal Discreto | 41 |
| | Bibliografia | 43 |
| | Livros | |
| | Artigos | |



5. Sinal Discreto



Bibliografia

[Livros](#)

[Artigos](#)

