

# REVISÃO DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Ivan Camargo

Revisão 1 (abril de 2007)

## 1) Introdução

Duas grandezas vetoriais estão relacionadas com o campo magnético: a Intensidade do Campo (**H**) e a densidade do campo (**B**).

A intensidade de campo magnético (**H**), relacionada diretamente à causa (ou à origem do campo), ou ainda com a corrente elétrica pela chamada Lei de Ampère.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

Onde:

**H** é a intensidade do campo magnético [A/m];

**dl** é o comprimento infinitesimal [m];

**J** a densidade de corrente [A/m<sup>2</sup>]; e

**ds** o elemento infinitesimal de superfície [m<sup>2</sup>].

Todas as grandezas são vetoriais e o produto definido em (1) é o produto escalar entre estes vetores.

### Exemplo 1

Determinar a intensidade de campo a uma distância “r” de um condutor muito longo, no vácuo, percorrido por uma corrente “I”.

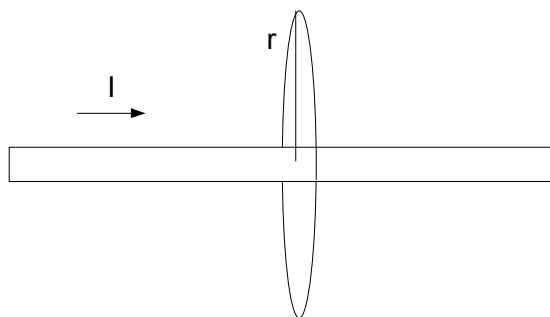


Figura 1.1: Intensidade do campo magnético em um condutor longo

### Solução

A uma distância “r” do centro do condutor, supondo que o meio tenha permeabilidade constante, ou seja, que **H** tenha módulo constante, seja perpendicular a “r” em todo ponto da circunferência e co-linear com o vetor **I**, a integral da equação (1) se simplifica muito, ficando apenas:

$$H \oint dl = H \cdot 2\pi r \quad (2)$$

O lado direito da equação representa a corrente total envolvida pela linha de integração. Neste caso particular o valor da corrente é dado e igual a I. Portanto:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

Observe que **H** é uma grandeza vetorial, portanto definida com módulo e direção. O módulo é dado pela equação (3) e a direção é dada pela “regra da mão direita”.

A segunda grandeza vetorial importante no estudo dos circuitos magnéticos é a densidade de campo **B**. Esta grandeza está relacionada com os efeitos do campo magnético, com a força (ou conjugado) magnética e com a tensão gerada.

No vácuo, os dois vetores **B** e **H** são sempre proporcionais e co-lineares. A relação entre eles é dada por:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo. No sistema MKS (que será usado em toda parte nestas notas) o valor desta constante é:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (5)$$

A densidade de fluxo está relacionada com o fluxo pela seguinte expressão:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (6)$$

Onde:

$\phi$  é o fluxo magnético [weber] ou [Wb];

**B** é a densidade de campo magnético [tesla] ou [T];

$ds$  é o elemento de área [ $m^2$ ]

Se N espiras de uma bobina for envolvida por um fluxo  $\phi$ , diz-se que o fluxo concatenado com a bobina será dado por:

$$\lambda = N\phi \quad [\text{Wb}] \quad (7)$$

A tensão gerada nos terminais desta bobina é dada pela lei de Faraday:

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \quad [\text{V}] \quad (8)$$

Essa talvez seja a equação mais importante para entender e simular problemas relacionados com conversão de energia.

## 2) Materiais Ferromagnéticos

A característica básica dos materiais ferromagnéticos é a de produzir um grande efeito, ou seja, um elevado valor de **B**, para uma pequena causa (**H** ou **I** pequenos).

Esta característica pode ser visualizada nas figuras 2.1 e 2.2.

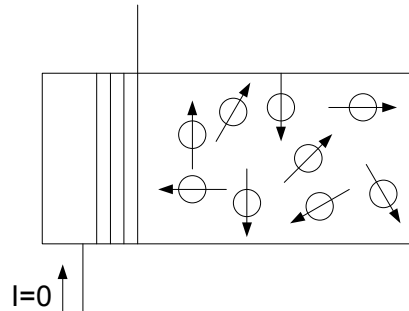


Figura 2.1: Domínios Magnéticos orientados de forma aleatória

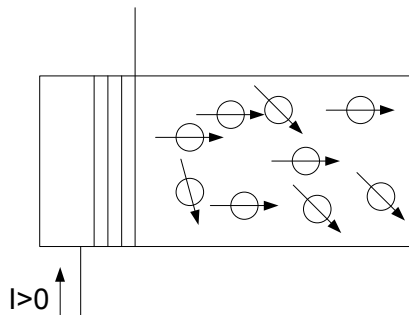


Figura 2.2: Domínios Magnéticos sob o efeito de um campo de intensidade  $H$ .

Em materiais ferromagnéticos existem “domínios magnéticos” ou bipolos que normalmente estão orientados de forma aleatória. Havendo a circulação de uma corrente “ $I$ ” pelo condutor, o campo magnético criado polariza os “domínios magnéticos” do material amplificando bastante o efeito da corrente, como pode ser visto na figura 2.2.

A densidade de campo resultante será composta por uma pequena parcela ( $\mu_0 H$ ) que polariza os bipolos e uma outra componente, em geral muito maior, de densidade de campo produzida pelos bipolos orientados.

$$B = \mu_0 H + B_i \quad (9)$$

É possível, em uma determinada faixa, encontrar uma relação de proporcionalidade entre a densidade e a intensidade do campo produzida pelos bipolos magnéticos. Combinando as duas parcelas da equação (9) obtém-se:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (10)$$

onde  $\mu_r$  é a permeabilidade relativa do material. A permeabilidade relativa é uma grandeza adimensional que pode variar de 100 a 100.000. Para os materiais

ferromagnéticos usados em equipamentos elétricos este número está na faixa de 2.000 a 4.000.

A figura 2.3 mostra a relação entre B e H no vácuo e em um material ferromagnético (M-19). Observa-se, neste último, que a relação linear entre B e H só ocorre para pequenos valores de H.

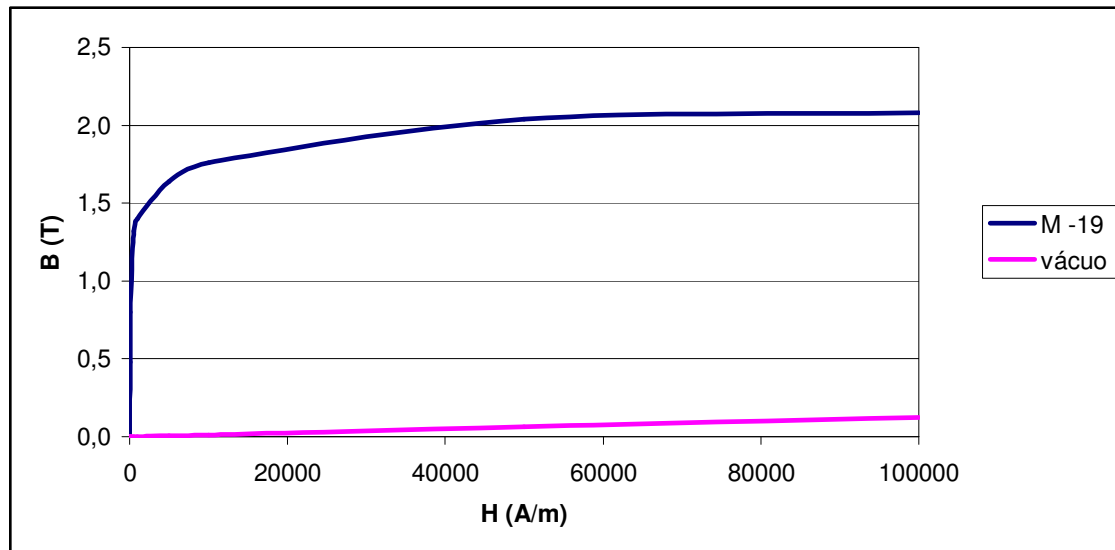


Figura 2.3: Relação entre B e H

A figura 2.3 mostra claramente que a utilização de materiais ferromagnéticos faz com que pequenas causas (H pequeno) produzam grandes efeitos (B grande). Reduzindo-se a escala para evidenciar a parte linear da curva, obtém-se a figura 2.4.

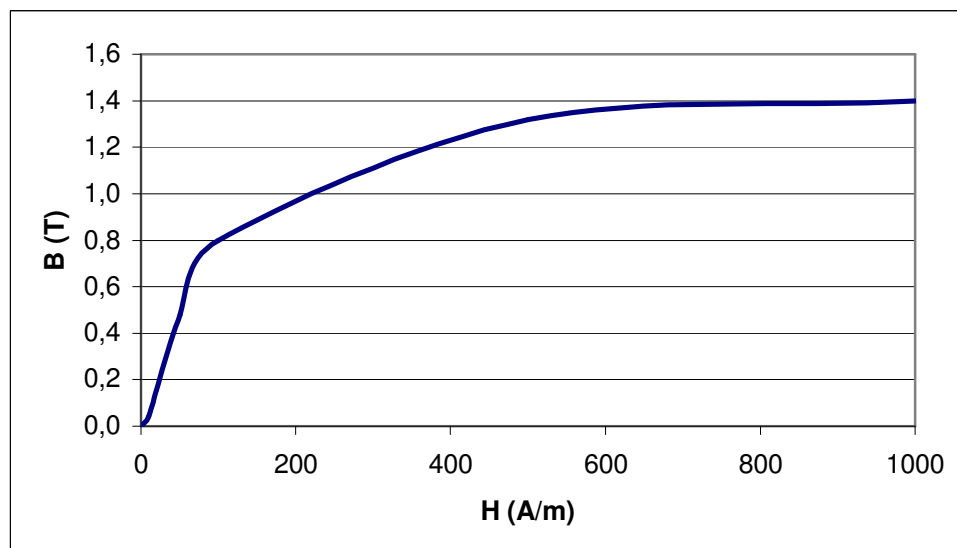


Figura 2.4: Característica B x H (detalhe)

Evidentemente, quando a intensidade de campo atinge um determinado valor onde todos os bipolos do material estejam orientados, não adianta mais aumentar o valor de H que o valor de B só aumenta proporcionalmente a permeabilidade do vácuo. Diz-se, então, que o material está saturado.

A figura 2.5 mostra, esquematicamente, a relação entre  $B$  e  $H$  (considerando uma aproximação de trechos de retas) levando em conta a saturação.

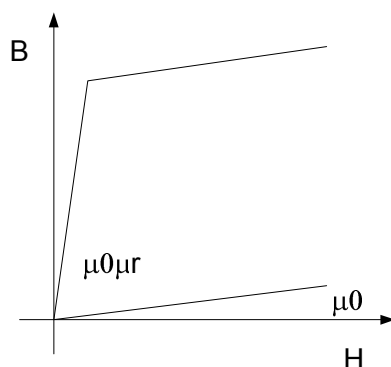


Figura 2.5: Curva  $B \times H$  com saturação

A saturação magnética é uma das características mais importantes dos materiais magnéticos. O dimensionamento de um dispositivo de conversão tem que levar em consideração este efeito. O ponto onde o material satura depende das suas características físicas. Em alguns materiais este valor é 0,3 T, em outros 2 T. Pode-se considerar 1 T como um valor típico.

Outro efeito importante no comportamento dos materiais ferromagnéticos é a Histeresis. A curva  $B \times H$  real, medida em um material ferromagnético não é uma reta e depende da derivada de  $H$ . Para um mesmo valor de  $H$  pode-se ter mais de um valor de  $B$  dependendo se o  $H$  estiver aumentando ou diminuindo. Variando-se ciclicamente a corrente em um condutor envolvendo um núcleo de ferro, obtém-se uma curva com as características mostradas na figura 2.6 onde se observa o efeito da histerese.

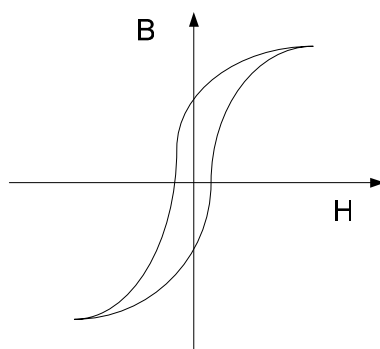


Figura 2.6: Curva de histeresis

A energia fornecida ao material para passar de um valor de densidade de campo  $B = 0$  até  $B = B_{\text{máx}}$  não é devolvida quando a intensidade de campo volta a zero. Estas perdas são chamadas de perdas por Histeresis e são tanto maiores quanto maior for o nível de saturação do material.

## Exemplo 2

Quais seriam as perdas por histeresis em um material ferro-magnético?

### Solução

É possível avaliar a energia perdida em um material ferro-magnético quando submetido a uma fonte senoidal de tensão ( $v$ ) operando a uma frequência ( $f$ ). Basta supor que o material tenha uma área “ $A$ ” e um comprimento médio “ $l$ ”. A energia será dada por:

$$E = \int p dt$$

$$p = ei$$

$$e = N \frac{d\phi}{dt}$$

Supondo uma intensidade de campo ( $H$ ) constante ao longo do comprimento “ $l$ ”, a corrente pode ser dada pela lei de Ampère:

$$i = \frac{Hl}{N}$$

Então:

$$E = \int AlHdB = vol \int_{B1}^{B2} HdB$$

A energia, portanto, é proporcional ao volume e à integral de intensidade do campo em função da densidade  $B$ . Esta integral corresponde à área interna da curva de histeresis.

### 3) Circuitos Magnéticos

A alta permeabilidade dos materiais magnéticos permite definir um caminho para o fluxo da mesma forma que a baixa resistividade do cobre permite definir um caminho para circulação de corrente.

O conhecimento que os alunos de engenharia elétrica têm com circuitos elétricos faz com que uma analogia entre circuitos elétricos e magnéticos facilite bastante a compreensão dos efeitos magnéticos.

Esta analogia se baseia nas equações que descrevem os campos:

$$i = \iint \vec{J} d\vec{s} \quad (11)$$

A corrente em um condutor é igual à integral da densidade da corrente na superfície.

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

O equivalente no circuito magnético é o fluxo.

$$v = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

A tensão, ou diferença de potencial (ddp) ou força eletromotriz (fem), é igual a integral da intensidade de campo elétrico ao longo de um caminho.

$$Ni = F = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (14)$$

O equivalente nos circuitos magnéticos é a força magnetomotriz (ou fmm).

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (15)$$

A densidade de corrente é igual a condutividade do material multiplicada pela intensidade do campo elétrico.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (16)$$

O equivalente nos circuitos magnéticos é a densidade de fluxo.

### Definição de Relutância

O conceito de relutância é análogo ao de resistência. Para um condutor o conceito de resistência à passagem de corrente elétrica é bastante óbvio. Supondo um condutor de seção transversal “S” com uma densidade de corrente constante **J**, tem-se:

$$i = J.S = \sigma E.S = \frac{\sigma S}{l} \cdot v \quad (17)$$

Define-se, então resistência como:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (18)$$

de onde se obtém a relação entre tensão e corrente em um circuito elétrico conhecida como a lei de Ohm.

$$v = Ri \quad (19)$$

Uma dedução semelhante pode ser feita para a resistência à passagem de um fluxo em um determinado circuito magnético.

### Exemplo 3

Calcular a intensidade do campo em um toróide a uma distância “r” do seu centro, supondo que o toróide tenha permeabilidade constante.

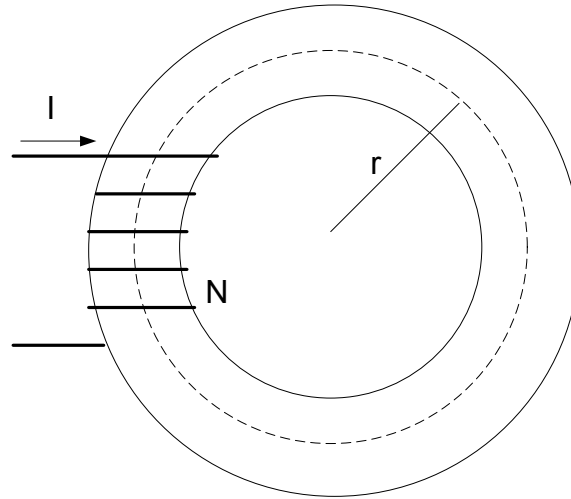


Figura 3.1: Toróide de seção retangular e largura “w”

### Solução

De (14) tem-se:

$$Ni = F = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

A uma distância “r” do centro, supondo a permeabilidade constante, a intensidade do campo permanece constante. A direção é dada pela regra da mão direita e será sempre colinear com o vetor  $d\vec{l}$ , desta forma a integral definida em (20) tem resolução simples e direta:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad (21)$$

### Exemplo 4

Calcular o fluxo no toróide supondo que a sua largura seja “w”, seu raio interno  $r_1$  e seu raio externo  $r_2$ .

### Solução

A densidade do fluxo está relacionada com a intensidade pela característica de permeabilidade do material.

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi r} \quad (22)$$

Usando a definição de fluxo (6):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (23)$$

lembrando que os vetores são colineares e que a área infinitesimal pode ser dada por:



$$ds = wdr \quad (24)$$

tem-se:

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \mu_r \frac{Ni w}{2\pi r} dr \quad (25)$$

$$\phi = \mu_0 \mu_r \frac{Ni w}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (26)$$

A pequena dificuldade na integração se deve à variação da intensidade do campo com o raio. Para simplificar ainda mais o problema, em muitas situações, é razoável supor uma intensidade de campo média ao longo do circuito magnético. Neste caso, supondo que a intensidade média seja aquela que percorre o caminho médio do toróide, tem-se:

$$H(\text{médio}) = \frac{Ni}{\bar{l}} \quad (27)$$

Onde, neste caso:

$$\bar{l} = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (28)$$

Sendo a intensidade de campo média suposta constante ao longo do circuito magnético, a densidade de campo também será constante e a integral que define o fluxo se restringe a integração da área infinitesimal ao longo da própria área, portanto:

$$\phi = B(\text{médio}) \int ds = \mu_0 \mu_r H(\text{médio}) . S \quad (29)$$

ou

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r S}{\bar{l}} Ni \quad (30)$$

Definindo relutância como:

$$\mathfrak{R} = \frac{l(\text{médio})}{\mu_0 \mu_r S} \quad (31)$$

Tem-se uma relação análoga à lei de ohm para circuitos magnéticos:

$$\phi = \frac{F}{\mathfrak{R}} \quad (32)$$

é interessante notar que a definição de relutância está relacionada com as características físicas do circuito magnético, ou seja, com o seu comprimento, com a sua área e com a permeabilidade do material.

Este conjunto de simplificações permite que, para um determinado circuito magnético, com características físicas conhecidas, a relação entre B e H pode ser alterada para uma relação entre a força magnetomotriz e o fluxo. Para isto, basta alterar um fator de escala no gráfico. Ou seja, multiplicar a escala vertical (B) pela área e a horizontal (H) pelo comprimento médio. A figura 3.2 mostra esta alteração.

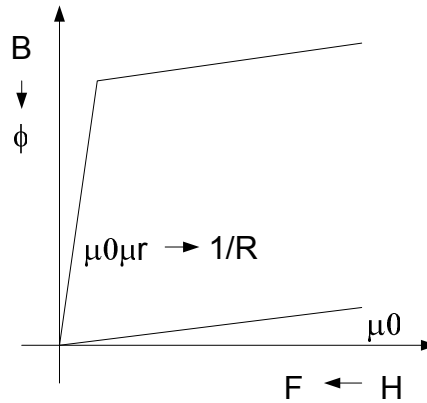


Figura 3.2: Relação entre fluxo e fmm

A declividade da curva da Figura 3.2 é o inverso da relutância. Esta grandeza é chamada de permeância.

$$P = \frac{\mu_0 \mu_r S}{l(\text{médio})} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \quad (33)$$

### Definição de Indutância

Pode-se ir além, em circuitos magnéticos envolvidos por uma bobina de N espiras, supondo que todo o fluxo esteja restrito ao circuito e por conseqüência envolva (ou concatene) as N espiras da bobina. Multiplicando-se o eixo vertical da figura 3.2 por N, obtém-se o fluxo concatenado com a bobina (pela própria definição). Dividindo-se o eixo horizontal pelo mesmo N obtém-se a corrente e o gráfico da figura 3.2 passa a relacionar fluxo concatenado com corrente. A relação entre estas duas grandezas é chamada de indutância.

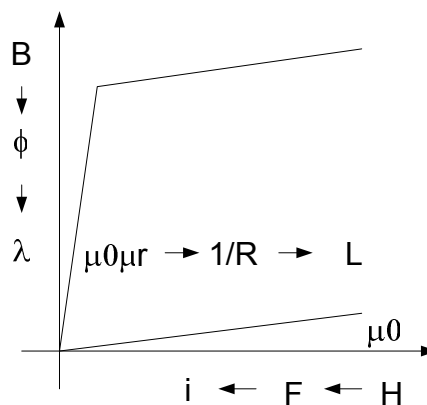


Figura 3.3: Relação entre fluxo concatenado e corrente

Matematicamente, tem-se:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (34)$$

Pode-se derivar outras expressões definindo a indutância, usando, por exemplo, a definição de relutância, tem-se:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{\frac{F}{N}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (35)$$

Usando a definição de permeância:

$$L = N^2 P \quad (36)$$

É importante notar que a indutância (assim como a relutância) depende das características físicas do circuito magnético, do número de espiras (ao quadrado), do comprimento, da área e da permeabilidade relativa do material.

Para que haja conversão eletromecânica de energia é necessário que haja movimento entre as partes. Portanto, em conversão, os circuitos magnéticos normalmente têm uma parcela com ar, ou como é comumente chamado, um entreferro.

### Exemplo 5

Calcular o fluxo no toróide com entreferro da figura (8) abaixo.

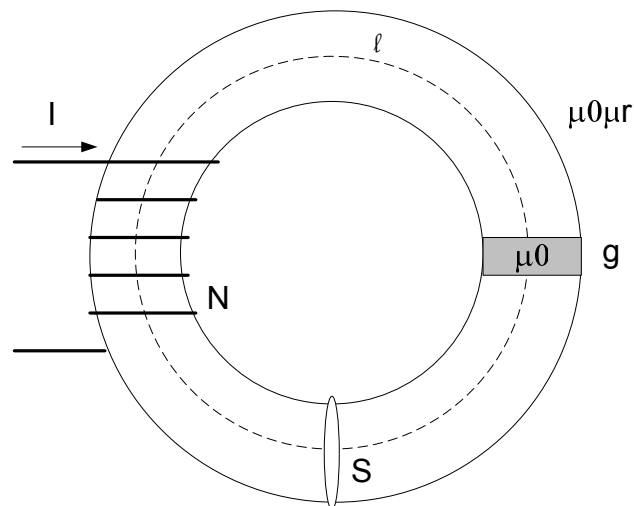


Figura 3.4: Circuito Magnético com entreferro

### Solução

O primeiro passo é o cálculo da intensidade de campo ao longo do percurso. Usando a lei de Ampère, tem-se:

$$Ni = \int H dl \quad (37)$$

Neste exemplo a permeabilidade é diferente nos dois meios, portanto não é possível supor  $H$  constante. Para retirar a intensidade de campo da integral é preciso dividi-la em duas partes: núcleo e entreferro. Considerando a intensidade constante em cada um destes caminhos, tem-se:

$$Ni = H_n \cdot \ell + H_g \cdot g \quad (38)$$

Onde  $H_n$  é a intensidade de campo no núcleo,  $\ell$  é o caminho médio do circuito magnético,  $H_g$  é a intensidade de campo no entreferro (ou gap) e “g” é o comprimento do entreferro.

A área da seção transversal do toróide é facilmente definida e pode ser dada por “ $S$ ”. Por outro lado, a área do entreferro tem uma definição um pouco mais delicada uma vez que não existe nenhum limite físico para o ar que envolve o toróide. Considerando que é possível defini-la e que ela é dada por “ $A_g$ ”, e lembrando que ao longo de um caminho magnético o fluxo é contínuo, tem-se:

$$\phi = B_n S = B_g A_g \quad (39)$$

Tomando a relação de proporcionalidade entre a densidade de fluxo e a intensidade do campo:

$$\begin{aligned} B_n &= \mu_0 \mu_r H_n \\ B_g &= \mu_0 H_g \end{aligned} \quad (40)$$

Substituindo-se (39) e (40) em (38), obtém-se:

$$F = Ni = \phi \left\{ \frac{\ell}{S \mu_0 \mu_r} + \frac{g}{A_g \mu_0} \right\} \quad (41)$$

Voltando à definição de relutância, tem-se:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{\ell}{S \mu_0 \mu_r} \\ R_g &= \frac{g}{A_g \mu_0} \end{aligned} \quad (42)$$

$$F = \phi \{ R_n + R_g \} \quad (43)$$

É interessante observar que as relutâncias, da mesma forma que as resistências, em série, se somam. Uma análise da equação (42) mostra também que, mesmo quando o comprimento médio do circuito magnético é muito maior que o entreferro, a relutância do entreferro é a predominante uma vez que a permeabilidade relativa do material ferromagnético é muito grande.

Desprezar a relutância do caminho magnético (ou do núcleo de ferro) simplifica bastante qualquer problema, uma vez que, com esta simplificação o circuito passa a ser linear. Com esta simplificação, a indutância da bobina é dada simplesmente por:

$$L = \frac{N^2}{R_g} \quad (44)$$

Quanto maior o entreferro, menor a indutância. É importante lembrar que o conceito de indutância está relacionado com a proporcionalidade entre corrente e fluxo concatenado, ou seja, causa e efeito. Para que se tenha grandes efeitos, é necessário que as indutâncias sejam grandes, em outras palavras, que os entreferros sejam os menores possíveis.

### Exemplo 6

Calcular a indutância da bobina do circuito magnético da Figura 3.5. Suponha que é possível desprezar a relutância do material ferromagnético.

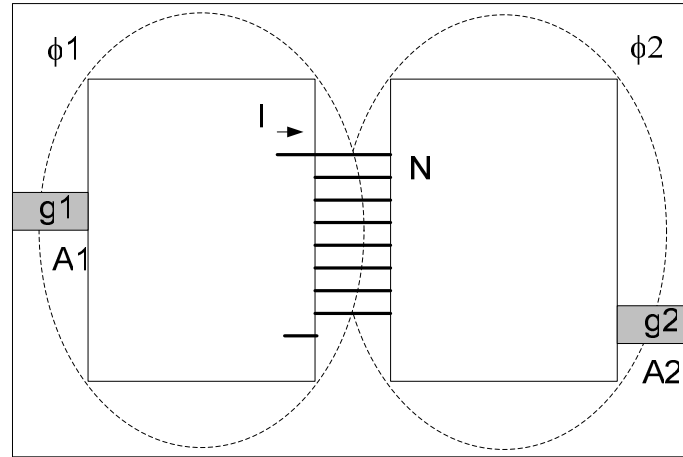


Figura 3.5: Circuito magnético do exemplo 6

### Solução

O fluxo é calculado da mesma forma que nos exemplos anteriores. Pela lei de Ampère, tem-se que:

$$Ni = \int H_1 dl \Rightarrow Ni = H_1 g_1 \quad (45)$$

Da mesma forma, escolhendo um caminho de integração que envolva a outra perna do circuito magnético:

$$Ni = \int H_2 dl \Rightarrow Ni = H_2 g_2 \quad (46)$$

A densidade de fluxo é proporcional à permeabilidade do vácuo e o fluxo será a integral da densidade ao longo da área. Mantendo as hipóteses de densidade de fluxo constante é possível calcular (com muita facilidade) o fluxo em cada uma das pernas do circuito magnético:

$$\phi_1 = A_1 B_1 = A_1 \mu_0 H_1 = N i \frac{\mu_0 A_1}{g_1} \quad (47)$$

Da mesma forma:

$$\phi_2 = A_2 B_2 = A_2 \mu_0 H_2 = N i \frac{\mu_0 A_2}{g_2} \quad (48)$$

Usando a definição da permeância (inverso da relutância), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= F \cdot P_1 \\ \phi_2 &= F \cdot P_2 \end{aligned} \quad (49)$$

O fluxo total concatenado pela bobina será dado pela soma dos fluxos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , multiplicado pelo número de espiras.

$$\lambda = N(\phi_1 + \phi_2) = N^2 i (P_1 + P_2) \quad (50)$$

é fácil perceber que, da mesma forma que nos circuitos elétricos, as permeâncias em paralelo se somam.

Finalmente, a indutância é dada por:

$$L = N^2 (P_1 + P_2) \quad (51)$$

#### 4) Circuitos Elétricos Acoplados Magneticamente

Os conceitos vistos no item anterior são absolutamente fundamentais para a compreensão de circuitos elétricos acoplados. Suponha dois circuitos acoplados como mostra a figura 4.1.

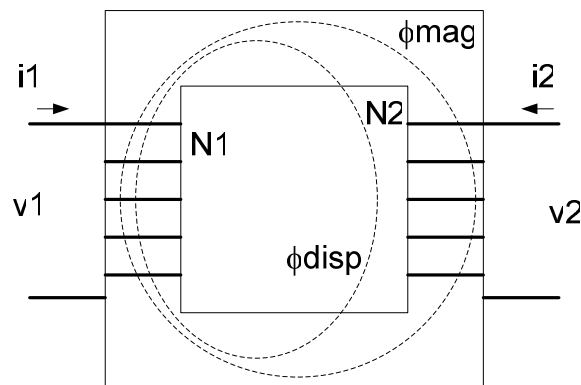


Figura 4.1: Dois circuitos acoplados

#### Exemplo 7

Quais seriam as equações que descrevem estes dois circuitos elétricos?

### Solução

A solução é trivial. À tensão aplicada se opõe uma queda de tensão devido à resistência do enrolamento e outra devido à variação do fluxo concatenado dado pela lei de Faraday.

$$\begin{aligned}v_1 &= r_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} \\v_2 &= r_2 i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt}\end{aligned}\tag{52}$$

A análise foi feita para dois circuitos acoplados mas pode, evidentemente, ser estendida para qualquer número de circuitos. Usando uma notação matricial, tem-se:

$$[v] = [r][i] + \frac{d}{dt}[\lambda]\tag{53}$$

onde:

$$[v] = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]^T\tag{54}$$

$$[r] = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix}\tag{55}$$

$$[i] = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_n]^T\tag{56}$$

e

$$[\lambda] = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]^T\tag{57}$$

Para resolver este sistema de equações é preciso definir qual o fluxo concatenado com cada uma das bobinas.

### Exemplo 8

Qual o fluxo concatenado com a bobina 1?

### Solução

Se houver uma corrente  $i_1$  circulando na bobina 1, haverá uma força magnetomotriz e um fluxo produzido por esta corrente. O fluxo será inversamente proporcional a relutância do caminho magnético. A relutância do caminho magnético visto pela bobina pode ser dividida em duas, a primeira relacionada ao caminho magnético do ferro e a

outra relacionada com os outros caminhos alternativos por onde é possível que o fluxo passe.

A parcela do fluxo que envolve o circuito magnético, ou, mais precisamente, concatena a bobina que está acoplada com a bobina 1 é chamado de fluxo de magnetização ( $\phi_{mag}$ ). O fluxo que não concatena a outra bobina é chamado fluxo de dispersão ( $\phi_{disp}$ ).

A circulação de corrente pelo circuito 2 produz um efeito semelhante, ou seja, uma parte do fluxo se dispersa e outra magnetiza a outra bobina. Considerando apenas estas duas bobinas acopladas o fluxo concatenado com a bobina 1 será dado por:

$$\lambda_1 = N_1(\phi_{disp1} + \phi_{mag1} + \phi_{mag2}) \quad (58)$$

Da mesma forma, para a bobina dois:

$$\lambda_2 = N_2(\phi_{disp2} + \phi_{mag2} + \phi_{mag1}) \quad (59)$$

Como foi visto, é conveniente relacionar fluxo concatenado com corrente para eliminar das equações (52) (ou 53) a variável fluxo. Desta forma, pode-se identificar três componentes do fluxo: dispersão e magnetização relacionados à própria corrente circulando na bobina e magnetização provocada pela corrente circulando na outra bobina.

$$\lambda_1 = \lambda_{mag1} + \lambda_{disp1} + \lambda_{mag21} \quad (60)$$

Definindo, então, os seguintes coeficientes de indutância:

$$L_{mag} = \frac{\lambda_{mag}}{i_1} \quad (61)$$

chamada indutância de magnetização.

$$L_{disp} = \frac{\lambda_{disp}}{i_1} \quad (62)$$

chamada indutância de dispersão, e

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{i_2} \quad (63)$$

chamada indutância mútua.

A equação de tensão pode, então, ser simplificada para:

$$v_1 = r_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_{mag} + L_{disp})i_1 + \frac{d}{dt}L_{12}i_2 \quad (64)$$



Fazendo uma análise semelhante, obtém-se, para a bobina 2 a seguinte expressão:

$$v_2 = r_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_{mag} + L_{disp})i_2 + \frac{d}{dt}L_{21}i_1 \quad (65)$$

É possível definir as indutâncias em função das relutâncias dos caminhos magnéticos.

### Exemplo 9

Definir as indutâncias em função da relutância do caminho magnético.

### Solução

Os fluxos definidos na Figura 4.1 podem ser colocados em função da relação entre a força magnetomotriz e a relutância. Assim:

$$\phi_{disp1} = \frac{N_1 i_1}{R_{disp1}} \quad (66)$$

$$\phi_{disp2} = \frac{N_2 i_2}{R_{disp2}} \quad (67)$$

$$\phi_{mag1} = \frac{N_1 i_1}{R_{mag1}} \quad (68)$$

$$\phi_{mag2} = \frac{N_2 i_2}{R_{mag2}} \quad (69)$$

A relutância de magnetização é fácil de calcular. Ela é dada pela relação entre o comprimento médio do circuito magnético pelo produto da permeabilidade e a área. Portanto:

$$R_{mag1} = R_{mag2} = R_{mag} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (70)$$

Substituindo estas definições nas equações que definem os fluxos concatenados, tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{N_1^2}{R_{disp1}} i_1 + \frac{N_1^2}{R_{mag}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_{mag}} i_2 \quad (71)$$

Usando a definição apresentada do coeficiente de indutância, pode-se definir coeficientes específicos relacionados ao caminho de dispersão e ao de magnetização.

$$L_{disp1} = \frac{N_1^2}{R_{disp1}} \quad (72)$$

$$L_{mag1} = \frac{N_1^2}{R_{mag}} \quad (73)$$

Estas indutâncias, como foi visto, são chamadas respectivamente de dispersão e magnetização. A relação entre o fluxo total produzido pela corrente na bobina “1” e esta corrente é chamada indutância própria da bobina. Diretamente das equações anteriores tem-se:

$$L_{11} = L_{mag1} + L_{disp1} \quad (74)$$

A indutância mútua, por definição, relaciona o fluxo concatenado com uma bobina devido a uma corrente em outra bobina. Então:

$$L_{12} = \frac{\lambda_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \quad (75)$$

$$L_{21} = \frac{\lambda_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} \quad (76)$$

Usando a equação (71) tem-se:

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_{mag}} \quad (77)$$

Como a relutância do caminho de magnetização é única, é óbvio que  $L_{12} = L_{21}$ .

Todas as indutâncias estando definidas, é possível descrever o vetor de fluxo concatenado em função das correntes.

$$[\lambda] = [L][i] \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{disp1} + L_{mag} & L_{12} \\ L_{21} & L_{disp2} + L_{mag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

E a equação de tensão pode ser reescrita da mesma forma que em (64) e (65). Observe que, nestas equações aparecem 5 coeficientes de indutância diferentes.

### Exemplo 10

Propor uma mudança de variáveis de forma a simplificar o circuito equivalente de dois circuitos acoplados.

### Solução

Para simplificar o circuito equivalente é interessante que a mútua e as indutâncias de magnetização tenham o mesmo valor numérico. Para isto, considera-se uma corrente fictícia  $i'_2$  que produz a mesma fmm que  $i_2$  se estivesse circulando no enrolamento 1. Ou seja:

$$i'_2 = \frac{N_2}{N_1} i_2 \quad (81)$$

Este procedimento é chamado referir o enrolamento “2” ao enrolamento “1”. Evidentemente seria possível fazer a mesma coisa em relação ao enrolamento “1”.

Para que neste novo sistema a potência permaneça inalterada, tem-se:

$$p_2 = v_2 i_2 = v'_2 i'_2 \quad (82)$$

Então:

$$v'_2 = \frac{N_1}{N_2} v_2 \quad (83)$$

Como o tempo também deve permanecer inalterado em qualquer troca de variáveis, a relação entre os fluxos concatenados real e fictícios é dada por:

$$\lambda'_2 = \frac{N_1}{N_2} \lambda_2 \quad (84)$$

Substituindo na equação (80) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{disp1} + L_{mag1} & \frac{N_1}{N_2} L_{12} \\ \frac{N_1}{N_2} L_{21} & \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 (L_{disp2} + L_{mag2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Voltando à definição das indutâncias, observa-se facilmente que:

$$L_{mag1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 L_{mag2} = \frac{N_1}{N_2} L_{12} = L_M \quad (86)$$

A equação de tensão pode então ser reescrita como:

$$v_1 = r_1 i_1 + L_{disp1} \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) \quad (87)$$

$$v'_2 = r'_2 i'_2 + L'_{disp2} \frac{di'_2}{dt} + L_M \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2) \quad (88)$$

E o circuito equivalente é dado por:

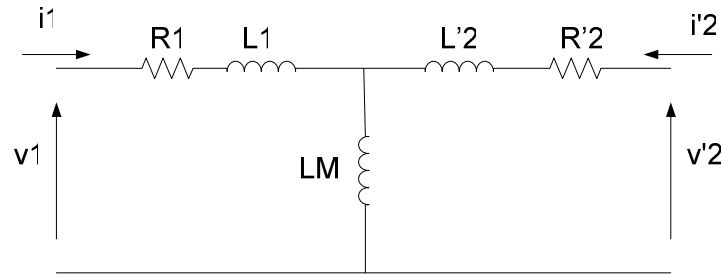


Figura 4.2: Circuito “T” equivalente de circuitos elétricos acoplados

Para simplificar a notação o índice “disp” das indutâncias de dispersão foi eliminado na figura 4.1.

### Aplicações do conceito de indutância

#### Exemplo 11

Traçar a curva da corrente em função do tempo no dispositivo da Figura 4.3 considerando que o dispositivo abre em  $t = T_0$  e fecha em  $t = T_1$ .

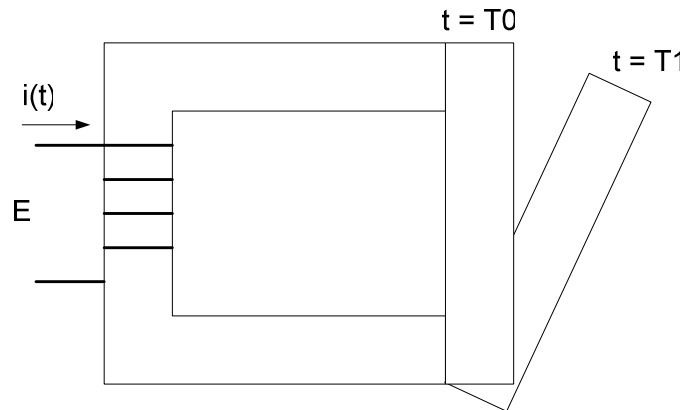


Figura 4.3: relé do Exemplo 11

#### Solução

Considerando que o dispositivo estivesse fechado no tempo anterior a  $t = T_0$ , é muito fácil calcular a corrente circulando na bobina. De fato, a equação que relaciona corrente e tensão é dada por:

$$v = ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (89)$$

A fonte de tensão é contínua, portanto  $v = E$ . O fluxo produzido pela força magnetomotriz, seja qual for, é constante, então:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (90)$$

Portanto, para os tempos anteriores a  $t = T_0$ , tem-se  $i = E/R$ .

Em  $t = T_0$  o dispositivo é aberto. Esta abertura provoca um aumento significativo da relutância do caminho magnético, ou seja, o fluxo tenderia a diminuir. Como o fluxo não pode variar instantaneamente, caso contrário a derivada da equação (89) tende a infinito, então a corrente aumenta de forma a manter o produto  $Li$  constante. Com o passar do tempo, e as perdas inerentes da resistência da bobina, a corrente volta a se estabilizar no mesmo valor  $E/R$ . É claro que, neste novo equilíbrio, o fluxo é muito menor que o inicial.

Finalmente, fechando novamente o dispositivo, o processo se repete ao contrário, ou seja, a corrente diminui instantaneamente para depois voltar ao seu valor de regime. O gráfico da corrente em função do tempo é mostrado na Figura 4.3.

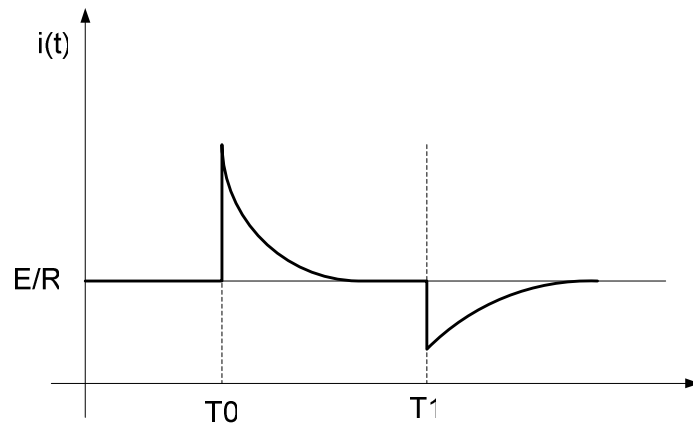


Figura 4.3: Corrente em função do tempo em um relé

### Exemplo 12

Calcular a indutância vista pela bobina “1” quando a bobina “2” está curto-circuitada. Desprezar o valor das resistências.

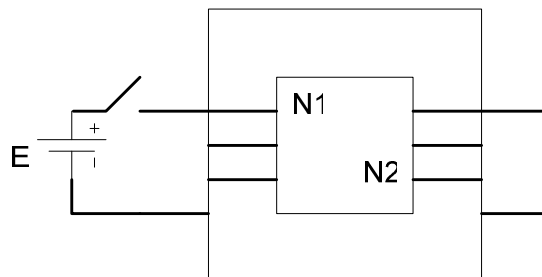


Figura 4.4: Dispositivo do exemplo 12.

### Solução

Considerando, inicialmente, que o material esteja desmagnetizado o fluxo de magnetização é nulo. Portanto, o fluxo concatenado com as duas bobinas é nulo.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (91)$$

Fechando a chave, a taxa de variação da corrente é dada pela indutância vista. O aumento da corrente na bobina 1 provoca um aumento do fluxo no circuito magnético. No entanto, como o fluxo inicial na bobina 2 é nulo e como a resistência está sendo desprezada, este valor deve permanecer inalterado. Usando a definição do fluxo concatenado tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = 0 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \\ i_2 &= -\left(\frac{L_{21}}{L_{22}}\right)i_1 \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo na expressão que define o fluxo concatenado com a bobina “1”, tem-se:

$$\lambda_1 = L_{11}\left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}}\right)i_1 \quad (94)$$

Define-se o termo entre parênteses da equação (94) como coeficiente de dispersão.

$$\sigma_{12} = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}} \quad (95)$$

A relação entre o fluxo e a corrente será dada por:

$$\frac{\lambda_1}{i_1} = L_{11}\sigma_{12} \quad (96)$$

É interessante notar que, sem deixar o fluxo variar na bobina dois, o único caminho disponível para o fluxo produzido pela fmm da bobina um é o caminho de dispersão. Como o coeficiente dispersão é sempre menor que um, a indutância vista por bobinas acopladas em situação de curto circuito é pequena provocando grandes valores de correntes.

### Exemplo 13

Calcule o coeficiente de dispersão usando o circuito “T” equivalente.

### Solução

Com as hipóteses feitas no exemplo 12, a resistência é desprezada e a relação entre o fluxo e a corrente pode ser visualizada com o secundário em curto circuito.

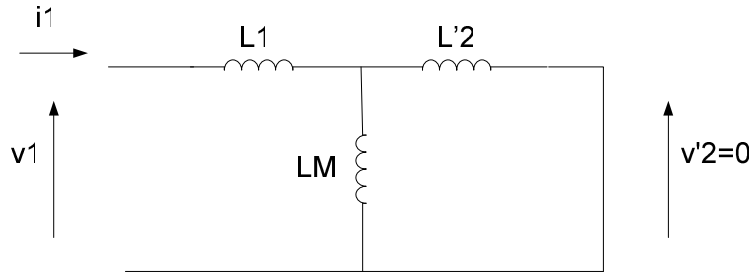


Figura 4.5: Circuito equivalente

A indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq} = L_1 + \frac{L_M L'_2}{L_M + L'_2} = L_1 + \frac{L_M L'_2 + L_M^2 - L_M^2}{L_M + L'_2} = L_1 + L_M - \frac{L_M^2}{L_{22}} = L_{11} \left(1 - \frac{L_M^2}{L_{11} L_{22}}\right) = L_{11} \sigma_{12} \quad (97)$$

Como era esperado.

#### 5) Corrente de Excitação

O circuito equivalente da figura 4.2 mostra o caso de duas bobinas acopladas quando a relação entre fluxo concatenado e corrente é linear. Na realidade, a característica B x H dos materiais ferro-magnéticos, além de não ser linear, apresenta a histeresis. É interessante calcular a corrente de excitação considerando esta particularidade.

#### Exemplo 14

Suponha uma bobina alimentada por uma tensão puramente senoidal. Qual a forma de onda da corrente de excitação.

#### Solução

Supor que a tensão seja senoidal equivale a dizer que o fluxo também é senoidal. As duas grandezas estão defasadas de 90°.

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi \sin(\omega t) \\ v &= \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \\ v &= N\Phi\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (98)$$

Sendo, por hipótese, o fluxo uma onda puramente senoidal, deve-se determinar qual o valor da corrente, no tempo, que produza esta onda senoidal, levando em consideração que a relação B x H não seja linear.

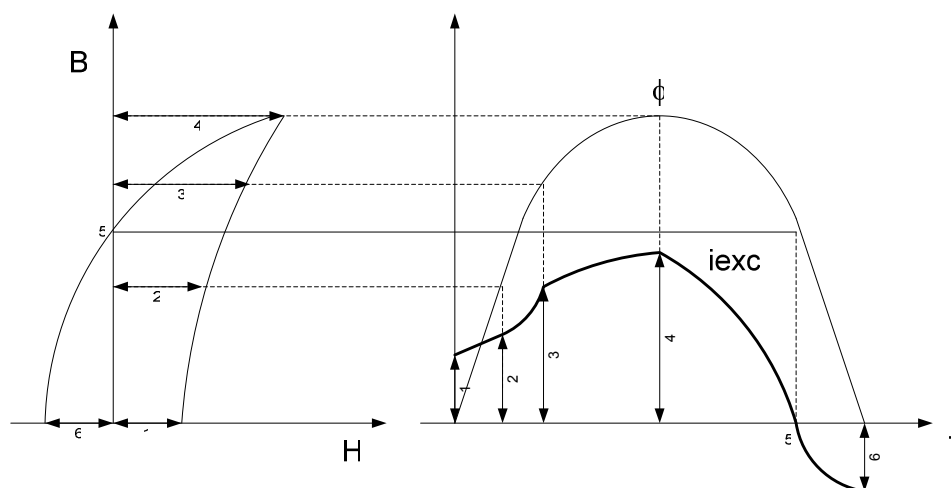


Figura 5.1: corrente de excitação

A corrente de excitação não é senoidal mas é periódica.

A saturação provoca uma distorção no valor de pico da corrente (4) e a histeresis provoca um adiantamento da corrente em relação ao fluxo.

Como a onda é periódica, é possível fazer a sua decomposição em série de Fourier. Esta decomposição mostra que o harmônico mais importante é o terceiro.

Normalmente, para analisar o transformador em regime permanente, usa-se desprezar as harmônicas e considerar que a corrente de excitação tenha apenas sua componente fundamental.

Considerando apenas a componente fundamental da corrente de excitação (60 Hz) ela pode ser representada através de um diagrama fasorial. A figura 5.2 mostra o diagrama fasorial que representa a corrente de excitação. Como foi visto, a corrente está adiantada em relação ao fluxo devido ao efeito da histeresis. Observa-se uma componente importante, em fase com o fluxo, chamada de corrente de magnetização. A componente em fase com a tensão é chamada de corrente de perdas no núcleo. Fasorialmente, tem-se:

$$\bar{I}_{exc} = \bar{I}_{mag} + \bar{I}_n \quad (99)$$

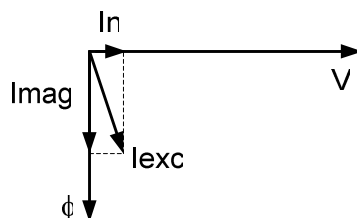


Figura 5.2: Diagrama Fasorial

Levando em consideração que a corrente de perdas no núcleo pode representar não apenas a histeresis, mas também as correntes de Foucault, o circuito equivalente de duas bobinas acopladas pode ser aperfeiçoado com a inclusão de uma resistência equivalente



que representaria todas as perdas no núcleo. Esta resistência é chamada de resistência de perdas no núcleo ( $R_n$ ). A figura 5.3 mostra o circuito equivalente completo.

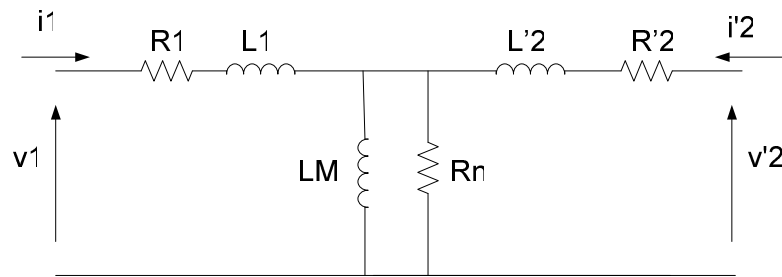


Figura 5.3: Circuito equivalente de duas bobinas acopladas

Evidentemente, o circuito equivalente do transformador tem que ser semelhante ao circuito mostrado na figura 5.3.

## 6) Referências Bibliográficas

- [1] SEN, P.C. "Principles of Electric Machines and Power Electronics", New York, John Wiley and Sons, 1996.
- [2] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [3] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétricas", McGraw Hill, São Paulo, 1979.
- [4] Kimbark, E.W., "Power System Stability", Dover Publication, Inc, NY, 1956.
- [5] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [6] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.