Универзитет у Крагујевцу

Природно-математички факултет

Институт за математику и информатику

Математика 3

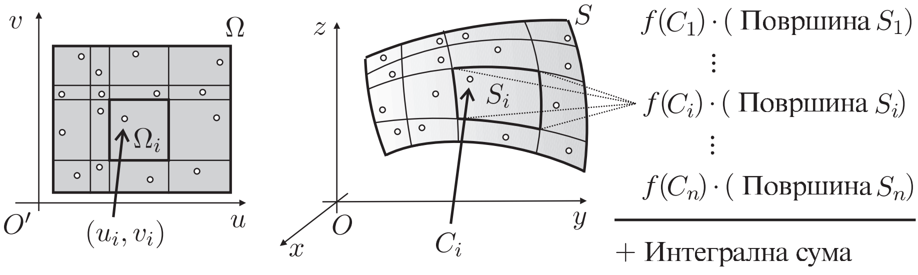
2017/2018.

Површински интеграл прве врсте

Претпоставимо да је површ S задата неком регуларном параметарском репрезентацијом :

$$\vec{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega.$$

Нека је дата функција $f : D \to \mathbb{R}$, $S \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$, која је непрекидна у свим тачкама површи S осим можда у коначно много њих.
Уочимо произвољну поделу $\Pi = \{\Omega_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ области Ω. Подела Π индукује поделу $\Pi' = \{S_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ површи S.



У сваком делу S_i изаберимо тачку $C_i(x_i, y_i, z_i)$, при чему је $x_i = X(u_i, v_i)$, $y_i = Y(u_i, v_i)$, $z_i = Z(u_i, v_i)$, за неки пар (u_i, v_i) из Ω_i, $i = 1, \ldots, n$. Означимо са $\varrho(S_i)$ тзв. *дијаметар* скупа S_i који је дефинисан као супремум међусобних растојања сваког пара тачака из S_i, $i = 1, \ldots, n$. Нека је $\varrho(\Pi) = \max\{\varrho(S_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. Са ΔS_i означићемо површину дела S_i, $i = 1, \ldots, n$. Интегрална сума за уочену поделу Π и изабране тачке $\Xi = \{C_1, \ldots, C_n\}$ је

$$\sigma(f, S; \Pi, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Број I је ***површински интеграл прве врсте*** функције f по површи S, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваку поделу Π области Ω (на коначно много делова) такву да је $\varrho(\Pi) < \delta$ и сваки избор тачака Ξ на одговарајућим деловима површи S важи $|\sigma(f, S; \Pi, \Xi) - I| < \varepsilon$. Уколико постоји, број I се обележава са

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\, S.$$

Теорема

Нека постоје интеграли $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$ *и* $\iint\limits_S g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$.

(1) *За све бројеве* α *и* β *важи*

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \big(\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)\big)\,\mathrm{d}\,S\\ =&\alpha\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S+\beta\iint\limits_S g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S.\end{aligned}$$

(2) *Ако је* $S=S_1\cup S_2$ *и површи* S_1 *и* S_2 *немају заједничких унутрашњих тачака, тада је*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S=\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S+\iint\limits_{S_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S.$$

Важи:

- површина површи S једнака је интегралу $\iint\limits_S \,\mathrm{d}\,S$.

Израчунавање површинског интеграла прве врсте своди се на израчунавање двојног интеграла:

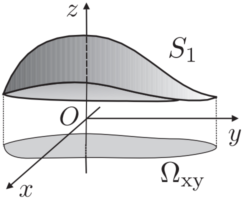
$$(*) \qquad \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$$
$$= \iint\limits_\Omega f(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v,$$

где су E, F и G Гаусови коефицијенти површи S.

Ако је S_1 површ која се једнозначно пројектује на област Ω_{xy} у координатној равни Oxy, онда је

$$\iint\limits_{S_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S = \iint\limits_{\Omega_{\mathrm{xy}}} f(x,y,Z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

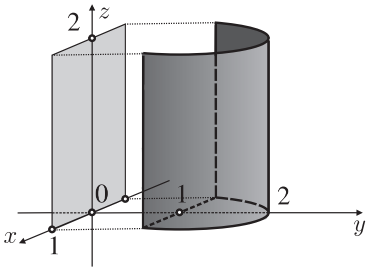
$$z = Z(x,y),\ (x,y)\in\Omega_{\mathrm{xy}}$$



Пример

Нека је S *део полуцилиндра* $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ *који се налази између равни* $z = 0$ *и* $z = 2$ *. Израчунати површински интеграл прве врсте*

$$\iint\limits_S (x+1)(y-1)(z+2)\,\mathrm{d}\,S.$$



Дати интеграл најједноставније сводимо на двојни ако површ S пројектујемо на Oxz раван. Тада је пројекција Ω_{xz} правоугаоник одређен неједнакостима: $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2$. Приметимо да је једначина површи S облика $y = Y(x,z)$, при чему је $Y(x,z) = 1 + \sqrt{1-x^2}$. Како је $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\dfrac{\partial Y}{\partial z} = 0$, имамо да је

$$\iint\limits_S (x+1)(y-1)(z+2)\,\mathrm{d}\,S$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{\mathrm{xz}}} (x+1)(1+\sqrt{1-x^2}-1)(z+2)\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{\mathrm{xz}}} (x+1)(z+2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}\,x \cdot \int_0^2 (z+2)\,\mathrm{d}\,z = 12.$$

Површински интеграл друге врсте

Претпоставимо да је површ S задата неком регуларном параметарском репрезентацијом

$$\vec{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)), \quad (u,v) \in \Omega.$$

При томе, претпостављајући да је S двострана површ, посматраћемо и једну њену страну одређену непрекидним векторским пољем $\vec{n}$ које свакој тачки површи додељује јединични вектор нормале. Ако је $T(x,y,z)$ произвољна тачка површи, означимо са $\varphi_{\mathbf{x}}(x,y,z)$, $\varphi_{\mathbf{y}}(x,y,z)$ и $\varphi_{\mathbf{z}}(x,y,z)$ углове које вектор $\vec{n}(x,y,z)$ заклапа редом са координатним осама Ox, Oy и Oz. Тада је

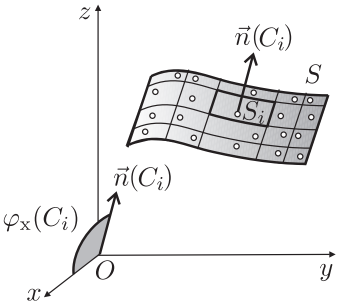
$$\vec{n}(x,y,z) = \left(\cos\varphi_{\mathbf{x}}(x,y,z), \cos\varphi_{\mathbf{y}}(x,y,z), \cos\varphi_{\mathbf{z}}(x,y,z)\right).$$

Ако је $f : D \to \mathbb{R}$, $S \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$, функција која је непрекидна у свим тачкама површи S осим можда у коначно много њих, онда се површински интеграли прве врсте

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\cos\varphi_{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}\,S,\quad \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\varphi_{\mathbf{y}}\,\mathrm{d}\,S,\quad \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\varphi_{\mathbf{z}}\,\mathrm{d}\,S$$

називају ***површинским интегралима друге врсте*** и означавају се редом са

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z,\quad \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z,\quad \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$



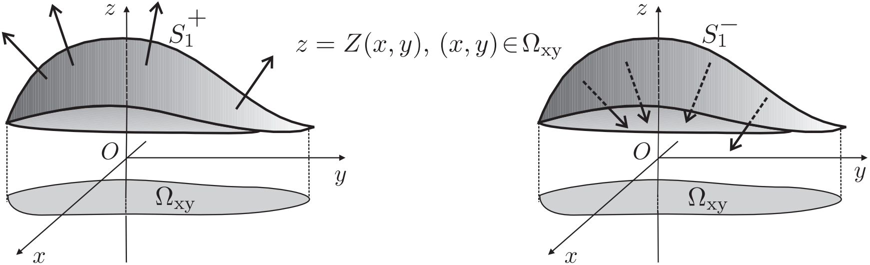
$$f(C_1)\cos\varphi_{\mathrm{x}}(C_1)\cdot(\text{Површина } S_1)$$
$$\vdots$$
$$f(C_i)\cos\varphi_{\mathrm{x}}(C_i)\cdot(\text{Површина } S_i)$$
$$\vdots$$
$$f(C_n)\cos\varphi_{\mathrm{x}}(C_n)\cdot(\text{Површина } S_n)$$

$$+\ \text{Интегрална сума за } \iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Ако је S површ која се једнозначно пројектује на неку област у једној од координатних равни, онда се површински интеграл друге врсте

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\ \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + g(x,y,z)\ \mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + h(x,y,z)\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

једноставно директно своди на одговарајући двојни интеграл.
Нека је S_1 површ дата на слици.



$$\iint\limits_{S_1^+} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(f(x,y,Z(x,y))\left(-\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + g(x,y,Z(x,y))\left(-\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + h(x,y,Z(x,y))\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$\iint\limits_{S_1^-} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + g(x,y,z)\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + h(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(f(x,y,Z(x,y))\frac{\partial Z}{\partial x} + g(x,y,Z(x,y))\frac{\partial Z}{\partial y} - h(x,y,Z(x,y))\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

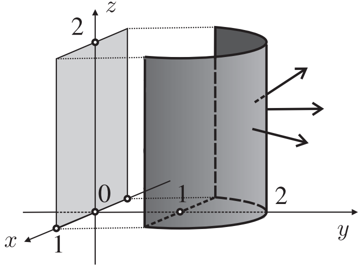
Пример

Нека је S део полуцилиндра $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ који се налази између равни $z = 0$ и $z = 2$. Израчунати површински интеграл друге врсте

$$\iint\limits_{S^+} x(y-1)z \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z + xy \,\mathrm{d}\, z \,\mathrm{d}\, x + z \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y,$$

ако S^+ означава ону страну површи која се не види при посматрању из координатног почетка.

Површ S пројектујемо на Oxz раван у правоугаоник $\Omega_{\mathrm{xz}} : -1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.



Једначина површи S је облика $y = Y(x,z)$, при чему је $Y(x,z) = 1 + \sqrt{1-x^2}$. Како је $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\dfrac{\partial Y}{\partial z} = 0$ и јединичне нормале које одређују изабрану страну површи заклапају оштре углове са осом Oy, имамо да је

$$\iint\limits_{S^+} x(y-1)z \,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + xy \,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + z \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{\mathrm{xz}}} \left(x(1+\sqrt{1-x^2}-1)z \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x(1+\sqrt{1-x^2}) + z \cdot 0 \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{\mathrm{xz}}} \left(x^2 z + x + x\sqrt{1-x^2} \right) \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\,x \int_0^2 \left(x^2 z + x + x\sqrt{1-x^2} \right) \mathrm{d}\,z = \frac{4}{3}.$$

Интегралне формуле

- Гринова формула

Гринова формула даје везу између криволинијског и двојног интеграла.

Теорема

Нека је D област у равни ограничена затвореном кривом C и нека су $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрекидне функције у области D и на кривој C. Тада је

$$\oint_C P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

при чему се интеграција по кривој C врши у позитивном смеру, тј. смеру супротном кретању казаљке на сату.

Обележимо са $P(D)$ површину затворене области D у равни. Ако је $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, тада је, према Гриновој формули,

$$P(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \oint_C P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y.$$

Специјално, за $P(x,y) = 0$ и $Q(x,y) = x$ добијамо да је $P(D) = \oint_C x\,\mathrm{d}\,y$, а за $P(x,y) = -y$ и $Q(x,y) = 0$ добијамо $P(D) = \oint_C (-y)\,\mathrm{d}\,x$. Дакле,

$$2P(D) = \oint_C x\,\mathrm{d}\,y + \oint_C (-y)\,\mathrm{d}\,x.$$

Тиме смо доказали следећу последицу Гринове формуле.

Последица

Ако је област D у равни ограничена затвореном кривом C, тада се површина области D рачуна по формули

$$P(D) = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x.$$

Пример

Израчунати криволинијски интеграл

$$I = \oint_L \frac{x \,\mathrm{d}\, y - y \,\mathrm{d}\, x}{x^2 + y^2}$$

по кружној линији орјентисаној у позитивном смеру:
а) $x^2 + y^2 = R^2$; *б)* $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

а) На решавање задатка се не може применити Гринова формула јер функције $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ имају прекид у тачки $(0, 0)$. Међутим, пошто се интеграција врши по кривој линији L, а тачке криве L задовољавају једначину $x^2 + y^2 = R^2$, то је

$$I = \oint_L \frac{x \,\mathrm{d}\, y - y \,\mathrm{d}\, x}{x^2 + y^2} = \oint_L \frac{x \,\mathrm{d}\, y - y \,\mathrm{d}\, x}{R^2} = \frac{1}{R^2} \oint_L x \,\mathrm{d}\, y - y \,\mathrm{d}\, x,$$

где је $P_1(x, y) = -y$ и $Q_1(x, y) = x$. Сада су испуњени услови за примену Гринове формуле, па је

$$I = \frac{1}{R^2} \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \frac{1}{R^2} \iint\limits_D (1 - (-1)) \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$$

$$= \frac{2}{R^2} \iint\limits_D \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \frac{2}{R^2} R^2 \pi = 2\pi,$$

јер је $\iint\limits_D \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = R^2\pi$ (површина круга полупречника R).

б) Крива L је кружница $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ која ограничава област D у којој се не налази координатни почетак, тако да су испуњени сви услови за примену Гринове формуле:

$$I = \oint_L P \, \mathrm{d}\, x + Q \, \mathrm{d}\, y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = \iint\limits_D 0 \cdot \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = 0.$$

- Стоксова формула

Стоксова формула даје везу између криволинијског и површинског интеграла.

Теорема

Нека је једначином $z = z(x, y)$ дата глатка површ S коју права паралелна оси Oz продире само у једној тачки и нека је C крива која ограничава површ S. Тада је

$$\oint_C P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

при чему је смер криволинијског интеграла такав да приликом обилажења површи S она остаје са леве стране.

Напомена

Прегледније, Стоксова формула се записује на следећи начин:

$$\oint_C P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y + R\,\mathrm{d}\,z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z & \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z & \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Пример

Користећи Стоксову формулу израчунати интеграл

$$I = \oint_C (y-z)\,\mathrm{d}\,x + (z-x)\,\mathrm{d}\,y + (x-y)\,\mathrm{d}\,z$$

дуж елипсе C: $x^2+y^2=a^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$, $a>0$, $h>0$, *у смеру супротном смеру кретања казаљке на часовнику ако се посматра из тачке* $(a,0,0)$.

Крива C ограничава површ која је део равни $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$. Правилом десне шаке одређујемо смер вектора нормале у произвољној тачки површи.

Значи, $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{a},0,\dfrac{1}{h}\right)$, $|\vec{n}|=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{h^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{ah}$, тако да је јединични вектор дат са $\vec{n_0}=\dfrac{(h,0,a)}{\sqrt{a^2+h^2}}$, односно $\cos\alpha=\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\cos\beta=0$ и $\cos\gamma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Како је $z=h\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, то је $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{h}{a}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ и

$\mathrm{d}\,S=\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$. Према томе,

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C (y-z)\,\mathrm{d}\,x + (z-x)\,\mathrm{d}\,y + (x-y)\,\mathrm{d}\,z \\
&= \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \mathrm{d}\,S \\
&= \iint\limits_S \big((-1-1)\cos\alpha - (1+1)\cos\beta + (-1-1)\cos\gamma\big)\,\mathrm{d}\,S \\
&= -2\iint\limits_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,\mathrm{d}\,S \\
&= -2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = -2\frac{a+h}{a} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
&= -2\frac{a+h}{a}a^2\pi = -2(a+h)a\pi.
\end{aligned}
$$

- Формула Гаус-Остроградског

Формула Гаус-Остроградског даје везу између површинског и тројног интеграла.

Теорема

Нека је S затворена површ која ограничава област V у простору и нека су $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ непрекидне функције које имају непрекидне парцијалне изводе првог реда у $V \cup S$. Тада је

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

при чему се интеграција врши по спољашњој страни површи S.

Пример

Израчунати површински интеграл

$$I = \iint\limits_S x^3 \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z + y^3 \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, z + z^3 \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y$$

по спољашњој страни сферне површи $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Како је $P(x,y,z) = x^3$, $Q(x,y,z) = y^3$ и $R(x,y,z) = z^3$, то је $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2$ и $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$. Применом формуле Гаус-Остроградског добијамо

$$I = \iint\limits_S x^3 \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z + y^3 \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, z + z^3 \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 3 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z.$$

Преласком на сферне координате $x = \rho \cos\varphi \sin\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ и $z = \rho\cos\theta$, за $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, добијамо

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\,\theta \int_0^a \rho^4 \,\mathrm{d}\,\rho = 3\varphi \Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^a = \frac{12}{5} a^5 \pi.$$