Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Física
Física General I FIS110
2^{do} semestre 2022

Ejercicios Trabajo y Energía

Problemas resueltos

1. Una persona desea trasladar una caja de masa m desde el punto 1 al punto 3 de la Fig. 1, esto mediante una cuerda. El coeficiente de roce entre la caja y la superficie en cualquier parte es μ. Si durante todo el traslado el movimiento se realizó a rapidez constante v_0, realice lo siguiente:

   a) Diagramas de cuerpo libre mientras sube por el plano inclinado y mientras se mueve por la superficie horizontal.

   b) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas tras mover la caja del punto 1 al 2.

   c) Calcule el trabajo realizado por cada una de las fuerzas tras mover la caja del punto 2 al 3.

   d) ¿En qué tramo del trayecto total la persona debe realizar un esfuerzo mayor? Justifique su respuesta.

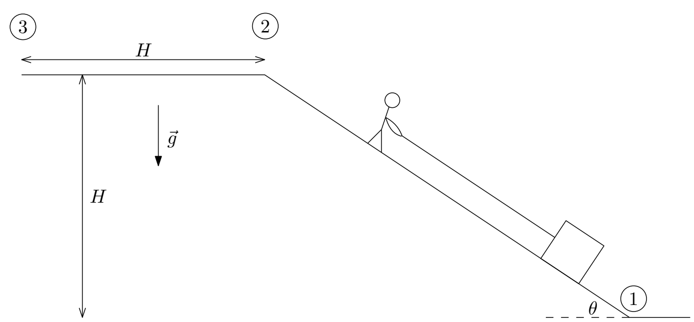

Figura 1: Esquema de la situación planteada.

Solución:

a) Los diagramas de cuerpo libre se encuentran represetandos en la Fig. 2.

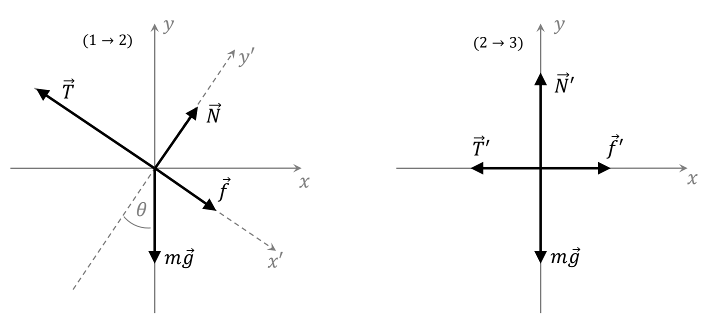

Figura 2: Diagramas de cuerpo libre: Durante el trayecto de 1 a 2 (izquierda) y entre 2 y 3 (derecha).

b) A partir de los diagramas de cuerpo libre de la Fig. 2, identificamos las fuerzas presentes en cada uno de los trayectos. Primero notamos que entre los puntos 1 y 2, el desplazamiento $\vec{D}_{12}$ es paralelo a la tensión. Además, de acuerdo a las ecuaciones de Newton, tenemos que $N = mg\cos(\theta)$ y con ello $f = \mu mg\cos(\theta)$. Luego, usando el sistema de referencia prima, tenemos

$$\begin{aligned}
W_N &= \vec{N}\cdot\vec{D}_{12} = N\hat{\jmath}\cdot D_{12}(-\hat{\imath}) = 0\,, &(1)\\
W_{\text{peso}} &= m\vec{g}\cdot\vec{D}_{12} = mg(\sin(\theta)\hat{\imath} - \cos(\theta)\hat{\jmath})\cdot D_{12}(-\hat{\imath}) = -mgH\,, &(2)\\
W_f &= \vec{f}\cdot\vec{D}_{12} = \mu mg\cos(\theta)\hat{\imath}\cdot D_{12}(-\hat{\imath}) = -\mu mgH\cot(\theta)\,, &(3)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $D_{12} = H/\sin(\theta)$. Para calcular el trabajo realizado por la tensión, haremos uso del teorema trabajo y energía cinética. Como todo el trayecto se realiza a velocidad constante, tenemos que $\Delta K = 0$, por tanto $W_{\text{Total}} = \Delta K = 0$, lo que nos conduce a

$$W_T = -W_{\text{peso}} - W_f = mgH(1 + \mu\cot(\theta))\,. \tag{4}$$

c) En el trayecto desde 2 a 3, el desplazamiento $\vec{D}_{23}$ es completamente horizontal. Usando el sistema de referencia propuesto en el diagrama de cuerpo libre, notamos que $N' = mg$ y $f' = \mu mg$. Con esto obtenemos

$$\begin{aligned}
W_{N'} &= \vec{N}'\cdot\vec{D}_{23} = N'\hat{\jmath}\cdot D_{23}(-\hat{\imath}) = 0\,, &(5)\\
W_{\text{peso}} &= m\vec{g}\cdot\vec{D}_{23} = mg(-\hat{\jmath})\cdot D_{23}(-\hat{\imath}) = 0\,, &(6)\\
W_{f'} &= \vec{f}'\cdot\vec{D}_{23} = \mu mg\hat{\imath}\cdot D_{23}(-\hat{\imath}) = -\mu mgH\,, &(7)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $D_{23} = H$. Nuevamente, entre 2 y 3 se tiene que $W'_{\text{total}} = \Delta K = 0$, por tanto

$$W_{T'} = -W_{f'} = \mu mgH\,. \tag{8}$$

d) A partir de la razón entre los trabajos realizados por la tensión en ambos trayectos, tenemos

$$\frac{W_T}{W_{T'}} = \frac{mgH(1 + \mu\cot(\theta))}{\mu mgH} = \frac{1}{\mu} + \cot(\theta)\,. \tag{9}$$

Como se tiene que $W_T > W_{T'}$, la persona debe realizar un mayor esfuerzo en el trayecto de 1 hacia 2.

2. Un bloque de masa m se libera desde el reposo sobre un resorte vertical, cuya masa es despreciable, al igual que la plataforma donde se ubica el bloque. En el momento en que se libera el bloque, el resorte se encuentra en su largo natural l_0, como se indica en la Fig. 3.

a) Construya gráficos de energía que le permitan determinar la máxima compresión que experimenta el resorte.

b) ¿Cuál es la máxima velocidad que experimenta la masa durante la compresión del resorte?

c) Calcule el trabajo que ha realizado cada una de las fuerzas al momento de la máxima compresión.

*Solución:

a) Tomando como referencia de altura ($h = 0$) el punto en donde se alcanza la máxima compresión del resorte, los gráficos de energía se muestran en la Fig. 4. A partir de estos, se establece que

$$mgx = \frac{1}{2}kx^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2mg}{k}\,. \tag{10}$$

Por tanto, la máxima compresión del resorte es $x = 2mg/k$.

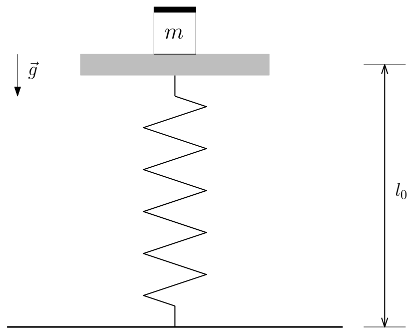

Figura 3: Esquema de la situación planteada en el instante inicial.

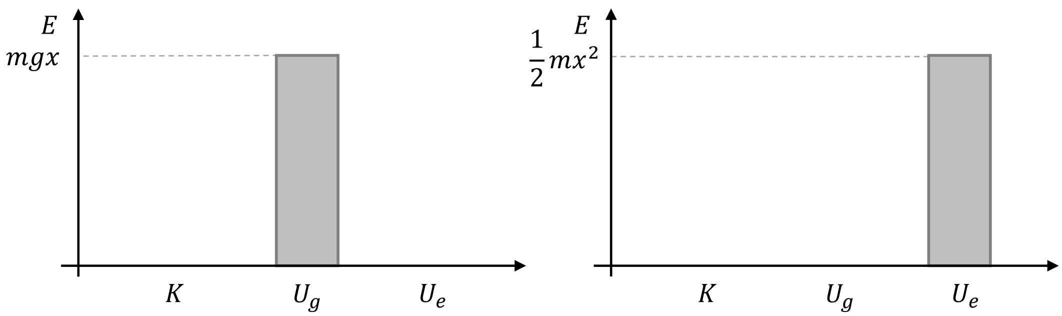

Figura 4: Diagramas de energía: En el instante inicial (izquierda) y al momento de la máxima compresión del resorte (derecha).

b) A medida que el resorte se comprime, la masa va aumentando su rapidez. Sin embargo, cuando la compresión es tal que la fuerza elástica es mayor al peso del bloque, este último comienza a disminuir su rapidez. Por tanto, la velocidad máxima del bloque se logra en el instante en que $kx' = mg$, es decir, en el momento en que la compresión es $x' = mg/k = x/2$. Los gráficos de energía entre el instante inicial y el instante en que el bloque alcanza la máxima velocidad se muestran en la Fig. 5. Con esta información, podemos escribir

$$mgx = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 + mgx' \,. \tag{11}$$

Como $x' = x/2 = mg/k$, tenemos que

$$\begin{aligned} v'^2 &= \frac{2}{m}\left(mg(x-x') - \frac{1}{2}kx'^2\right) \\ &= \frac{m}{k}g^2 \\ v' &= g\sqrt{\frac{m}{k}} \,. \end{aligned} \tag{12}$$

c) Durante el movimiento del bloque, dos fuerzas actúan sobre él, el peso y la fuerza elástica. El trabajo que realiza el peso, que es una fuerza constante, viene dado por

$$W_{\text{peso}} = -mg\hat{\jmath} \cdot x(-\hat{\jmath}) = mgx = 2\frac{(mg)^2}{k} \,. \tag{13}$$

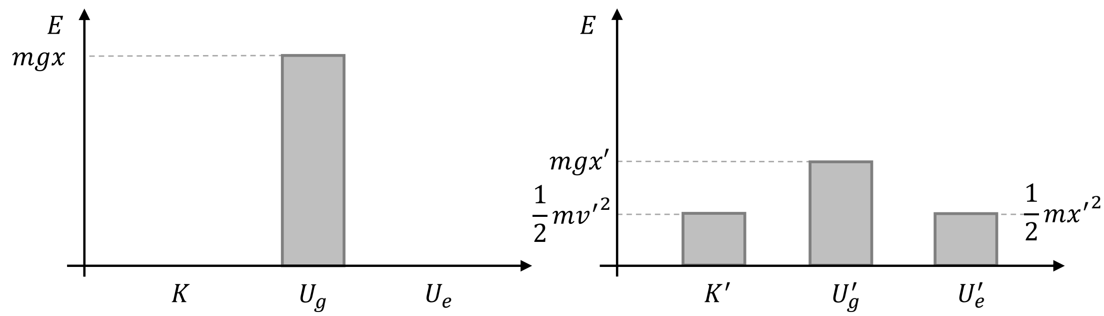

Figura 5: Diagramas de energía: En el instante inicial (izquierda) y en el instante en la velocidad de la masa es máxima (derecha).

Entre los momentos considerados se tiene que $\Delta K = 0$, por lo que el trabajo que realiza la fuerza elástica es $W_{F_e} = -W_{\text{peso}} = -2\frac{(mg)^2}{k}$.

3. En la cima de un tobogán sin fricción se ubica una masa m. Cuando ésta se deja caer desde el resposo, desciende hasta alcanzar una superficie horizontal, en donde existe una zona rugosa de largo L y de coeficiente de roce $\mu = 0{,}2$. Al final de la superficie horizontal, fuera de la zona rugosa, existe un resorte de constante elástica k, como se muestra en la Fig. 6. Use gráficos de energía para determinar

   a) La rapidez de la masa justo antes de entrar a la zona rugosa.

   b) La rapidez de la masa justo después de salir de la zona rugosa.

   c) La compresión máxima del resorte.

   d) ¿Cuántas veces pasa la masa por la zona rugosa si $L = 3H/2$? Justifique su respuesta.

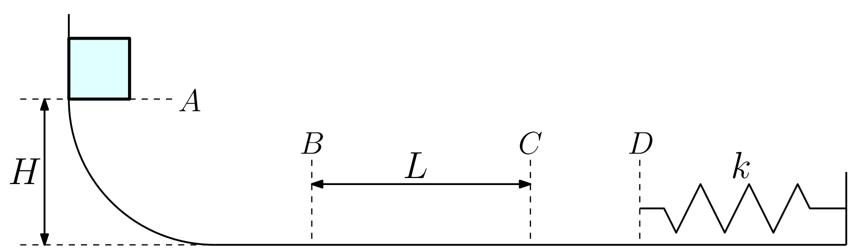

Figura 6: Esquema del momento inicial de la situación planteada. La zona rugosa de largo L está comprendida entre los puntos B y C.

Solución:

a) La Fig. 7 muestra los gráficos de energía para los puntos A y B, entre los cuales la energía se conserva. Por tanto, calculamos la rapidez del bloque en B como

$$mgH = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gH}\,. \tag{14}$$

b) Entre los puntos B y C el bloque pierde energía por acción de la fuerza roce. En la Fig. 8 se muestra el balance energético entre estos puntos. Luego, satisface que

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + W_{\text{roce}} = \frac{1}{2}mv_C^2\,. \tag{15}$$

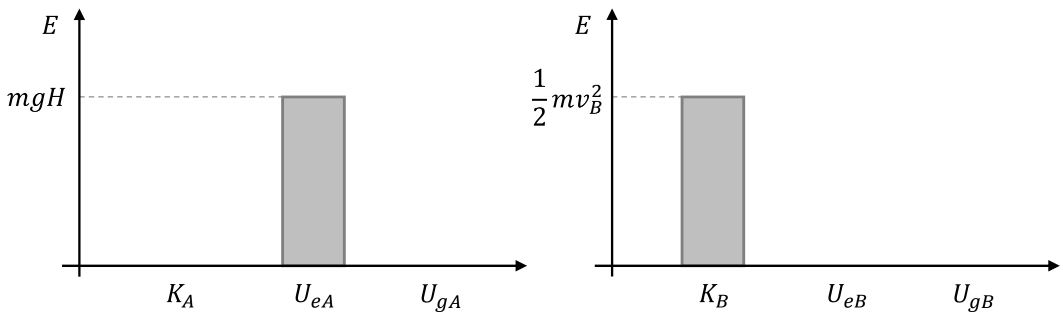

Figura 7: Diagramas de energía: En el punto A (izquierda) y en el punto B (derecha).

Como la superficie es horizontal, la componente normal de la fuerza que ejerce la superficie es $N = mg$, por tanto la fuerza de roce tiene magnitud $f = \mu mg$. Entonces, la rapidez del bloque en C está dada por

$$v_C = \sqrt{2g(H - L/5)}\,. \tag{16}$$

Proponemos al lector encontrar la Ec. (16) mediante el uso del teorema de trabajo y energía cinética, $W_{\text{total}} = \Delta K$.

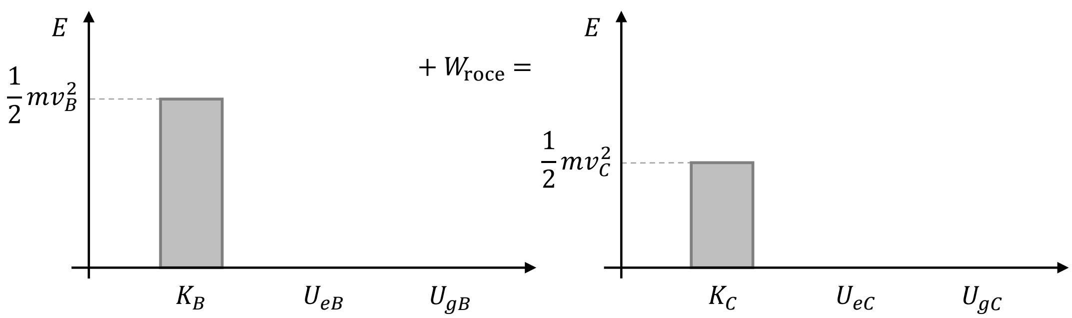

Figura 8: Diagramas de energía: En el punto B (izquierda) y en el punto C (derecha). Notar que la diferencia entre ambas figuras se debe al trabajo efectuado por el roce.

c) Entre el punto C y el punto en donde ocurre la máxima compresión del resorte, punto que llamaremos E, se conserva la energía, con el correspondiente balance mostrado en la Fig. 9. Entonces la máxima compresión del resorte x está dada por

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2\frac{m}{k}g(H - L/5)}\,. \tag{17}$$

d) La zona rugosa sobre la superficie horizontal es la única en la cual no existe conservación de la energía. Luego de comprimir el resorte en el punto E, la masa volverá a alcanzar el punto C, ingresando nuevamente a la zona rugosa. Si logra salir de ella, alcanzará alguna altura $h < H$ sobre el tobogán, para volver a descender y pasar nuevamente por el punto B. Esto se repite sucesivamente hasta que el bloque pierda toda su energía, quedando totalmente el reposo. Inicialmente, la energía que contiene el bloque es únicamente potencial gravitatoria, que entonces corresponde a la energía mecánica (total) inicial. Suponiendo que el bloque queda sin energía tras haber pasado n veces por la zona rugosa, tenemos

$$mgH + nW_{\text{roce}} = 0 \tag{18}$$

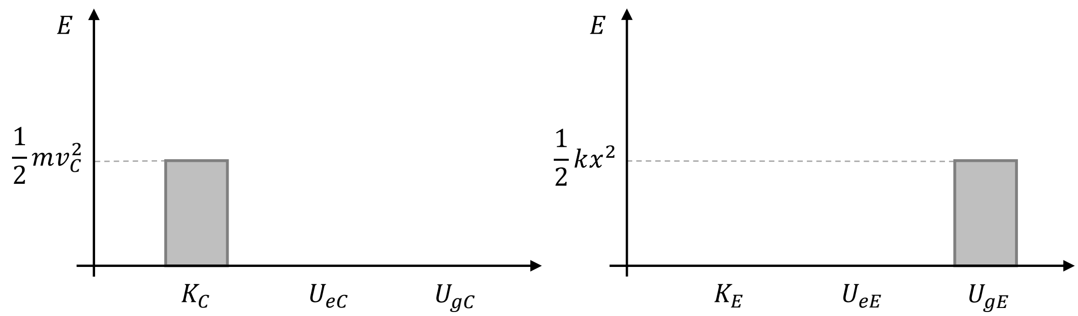

Figura 9: Diagramas de energía: En el punto C (derecha) y en el instante en que se alcanza la máxima compresión del resorte, E (izquierda).

por lo que

$$n = -\frac{mgH}{W_{\text{roce}}} = \frac{10}{3}\,. \tag{19}$$

Entonces, el bloque alcanza a recorrer 3,33 veces la zona rugosa, por lo que podemos interpretar que se detiene tras recorrer un tercio de la zona rugosa luego de robotar por segunda vez en el resorte.

4. Una esfera muy pequeña de masa $m = 2$ [kg] se encuentra inicialmente adosada a un resorte comprimido una longitud $x = 0{,}5$ [m] y de constante elástica $k = 950$ [N/m], como se muestra en la Fig. 10. Al liberar el resorte de su estado de compresión, éste empuja a la esfera, la cual se desplaza sobre una superficie horizontal con fricción ($\mu_{\text{k}} = 0{,}5$), entrando a una pista semicircular (*loop*) sin fricción de radio $R = 0{,}5$ [m]. La esfera recorre una distancia horizontal $d = 10$ [m], justo antes de entrar al *loop*. A partir de gráficos de energía realice lo siguiente.

   a) Calcule la rapidez en el punto A.

   b) Calcule la rapidez en un punto sobre el *loop* donde el ángulo es $\theta = 25°$.

Figura 10: Momento inicial de la situación planteada.

Solución:

a) Mientras que la esfera se mueve sobre la superficie horizontal, la componente normal de la fuerza que ejerce la superficie sobre ella es $N = mg$. El balance energético entre el punto inicial y el punto A está en la Fig. 11. Resolviendo se tiene que

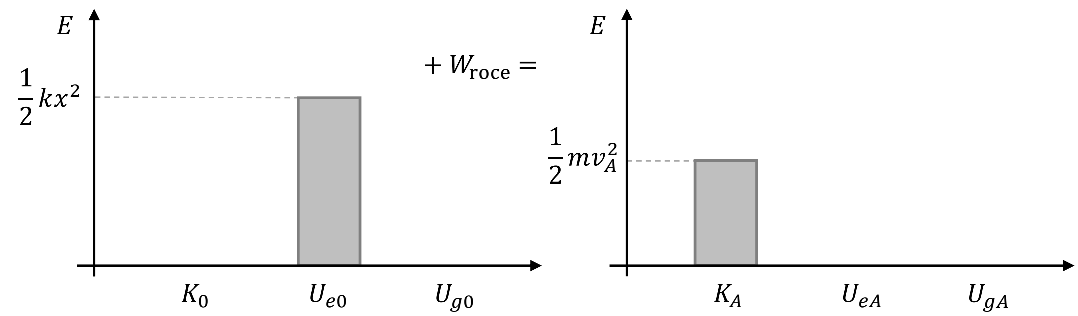

Figura 11: Diagramas de energía: En el instante inicial (izquierda) y en el instante en que ingresa al *loop*, A (derecha). Notar que la diferencia de energía se debe al trabajo efectuado por el roce.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 + W_{\text{roce}} &= \frac{1}{2}mv_A^2 \qquad (20) \\ \frac{1}{2}kx^2 - \mu mgd &= \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kx^2 - \mu mgd\right)} = 4{,}33\,[\text{m/s}]\,. \qquad (21)$$

b) Entre el punto A y el punto donde se tiene $\theta = 25°$ en el *loop*, que llamaremos punto C, se conserva la energía. A partir de los gráficos de energía mostrados en la Fig. 12, se obtiene que

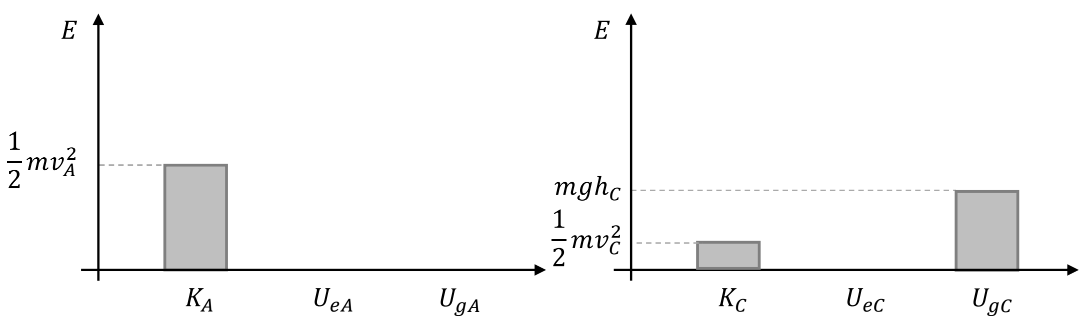

Figura 12: Diagramas de energía: En el punto A (izquierda) y en el punto C (derecha).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_A^2 &= mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2 \\ v_C^2 &= v_A^2 - 2gR(1 + \sin(\theta)) \\ v_C &= 2{,}13\,[\text{m/s}]\,. \qquad (22) \end{aligned}$$

1. Problemas propuestos

1. Un objeto de masa $m = 5$ [kg] es liberado desde una altura $h = 2$ [m], en el punto (1) más alto de un plano inclinado en un ángulo $\theta = 45°$. Al alcanzar la base del plano inclinado (2), el objeto continúa moviéndose sobre una superficie horizontal, donde el tramo final posee fricción de coeficiente de roce $\mu = 0{,}5$, como se indica en la Fig. 13.

   a) Determine la energía mecánica inicial del sistema.

   b) Calcule la rapidez del objeto al llegar a la base del plano inclinado.

   c) Obtenga la energía cinética en el instante en que el objeto está a punto de ingresar a la zona con roce (3).

   d) Determine la longitud de la zona con roce d, si el objeto se detiene completamente al final de esta (4).

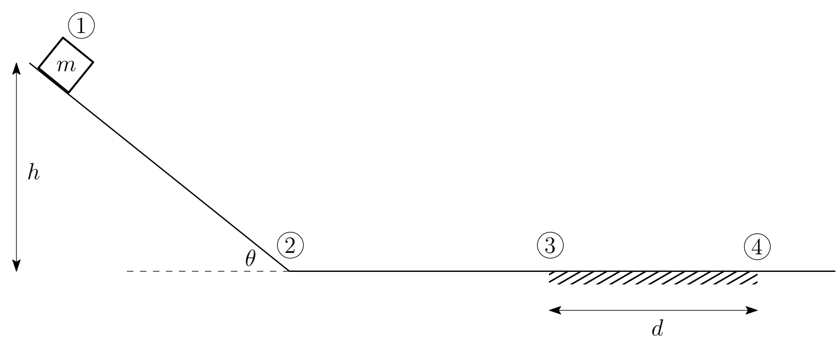

Figura 13: Situación inicial.

2. Un bloque de $m = 2$ [kg] de masa está situado sobre un plano inclinado ($\theta = 60°$) rugoso está conectado a un resorte de masa despreciable y constante elástica $k = 100$ [N/m], como se indica en la Fig. 14. El bloque es liberado desde el reposo en el momento en que el resorte está en su largo natural, luego de lo cual alcanza nuevamente el reposo tras recorrer una distancia $d = 20$ [cm]. Construya un modelo y úselo para calcular el coeficiente de roce cinético entre el plano inclinado y el bloque.

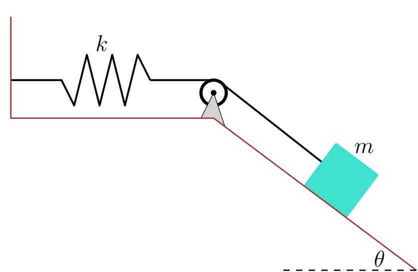

Figura 14: Situación inicial.

3. Un bloque de masa m es liberado desde el reposo sobre un punto ubicado en un plano inclinado en un ángulo θ. Dicho punto se encuentra a una distancia d de un resorte de constante elástica k, que se encuentra en su largo natural cuando el bloque es liberado, como se muestra en la Fig. 15. El bloque desliza descendiendo por la superficie, para entrar en contacto con el resorte. Construya un modelo que le permita determinar la máxima compresión del resorte.

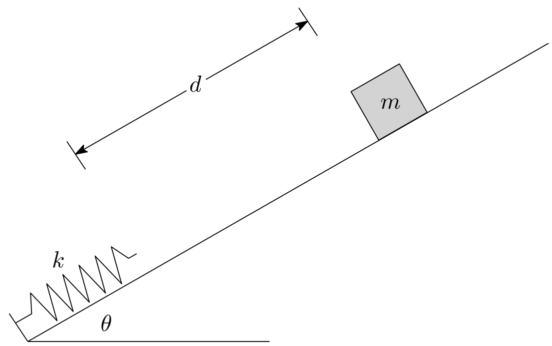

Figura 15: Situación inicial.

4. Un péndulo, compuesto de una cuerda ligera de largo L y bola de masa m, es liberado cuando la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Luego de iniciado su movimiento, la cuerda golpea una clavija ubicada a una distancia l por debajo del punto de suspensión del péndulo, como se indica en la Fig. 16. Construya un modelo energético que le permita:

   a) Mostrar que si la esfera es liberada desde una posición por debajo de la clavija, ésta retornará a su posición inicial luego de golpear la clavija.

   b) Mostrar que si el ṕendulo es liberado desde la posición horizontal ($\theta = 90°$) y logra completar un círculo en torno a la clavija, entonces el mínimo valor de l debe ser $3L/5$.

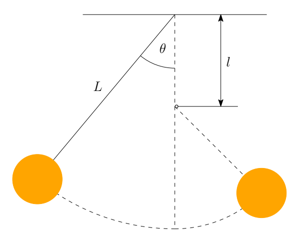

Figura 16: Situación inicial.

5. Una pequeña masa m reposa sobre la cima de un montículo de nieve hemiesférico de radio R, como se muestra en la Fig. 17. Si la masa empieza a resbalar desde el reposo, suponiendo que no existe roce, construya un modelo que le permita determinar la ubicación del punto P, donde la masa deja de tener contacto con la superficie.

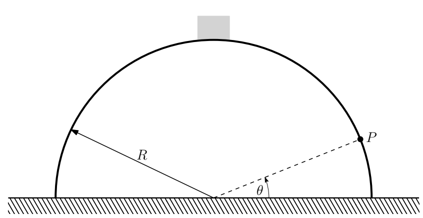

Figura 17: Situación inicial.