Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρονικής κι Υπολογιστών

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Πρώτο Παραδοτέο

Εργασία
του
Ισίδωρου Τσαούση-Σειρά

14 Νοεμβρίου 2022

Τεχνικές Βελτιστοποίησης
Πρώτο Παραδοτέο

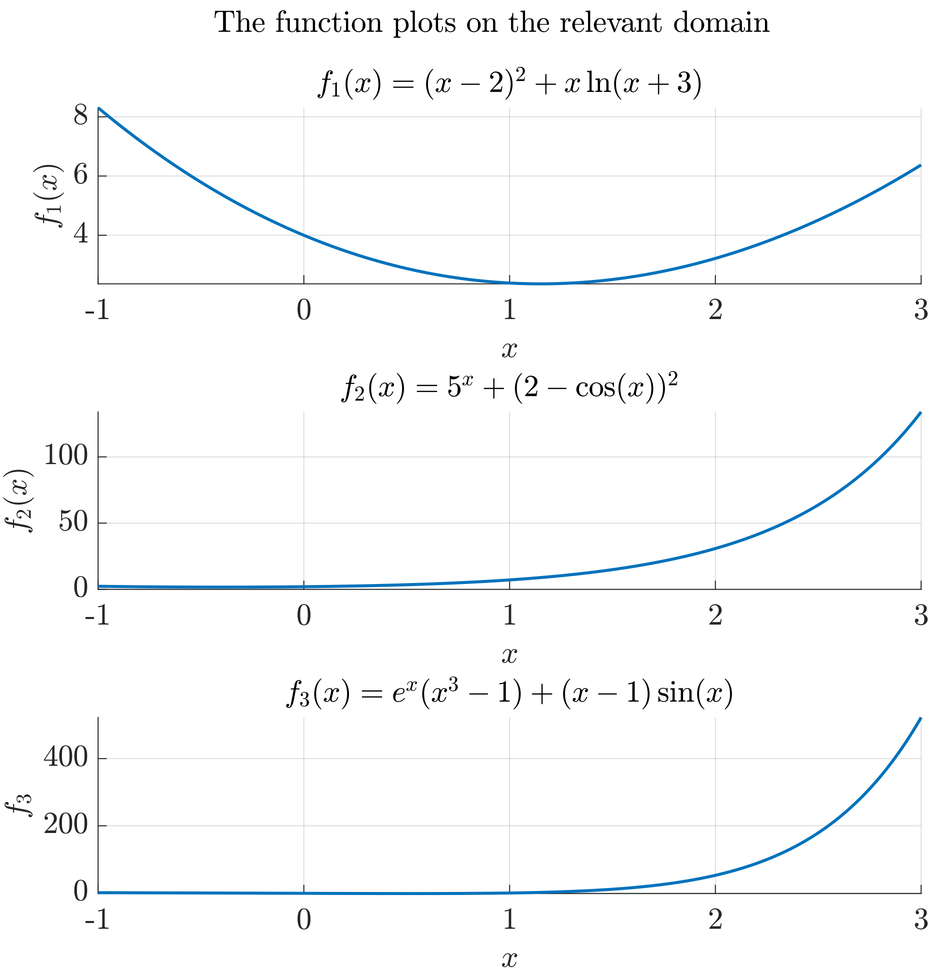
Ισίδωρος Τσαούσης-Σειράς
isidtsao@ece.auth.gr

14 Νοεμβρίου 2022

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη τεσσάρων αλγορίθμων αναζήτησης ελαχίστου. Η μελέτη θα γίνει πάνω στις παρακάτω συναρτήσεις στο διάστημα $[-1, 3]$, και θα παρατηρηθεί η συμπεριφοράς των αλγορίθμων καθώς αλλάζουμε τις εσωτερικές τους παραμέτρους.



Σχήμα 1: Οι τιμές των συναρτήσεων στο διάστημα υπό εξέταση

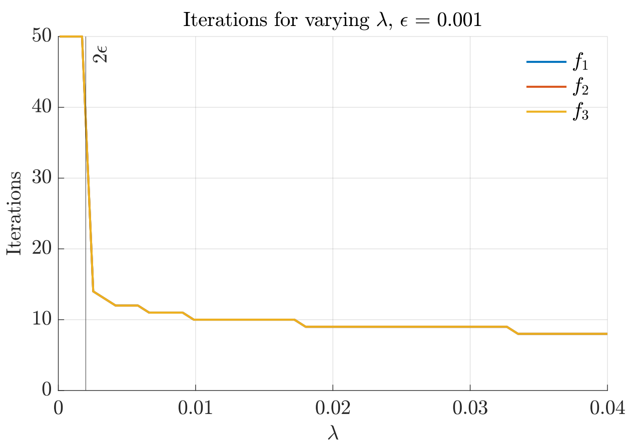
Κεφάλαιο 1

Πρώτο Παραδοτέο

1.1 Αλγόριθμος της Διχοτόμου

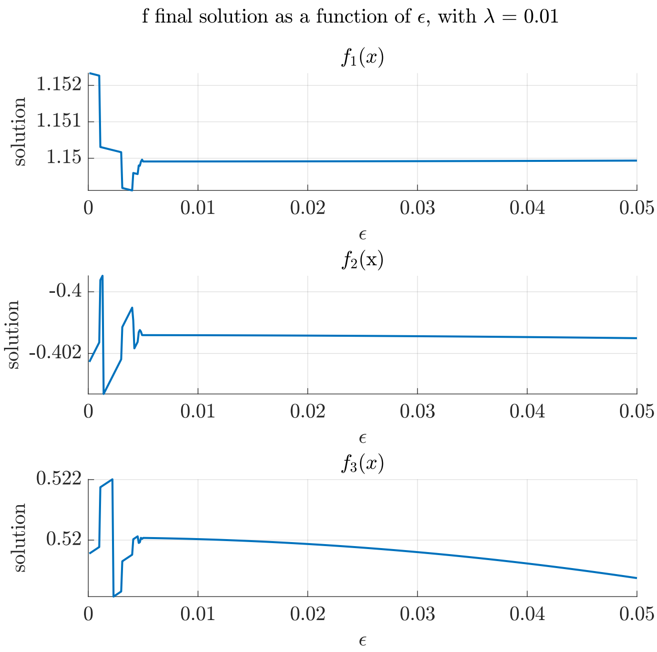
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της διχοτόμου σε σχεδόν κυρτή συνάρτηση προσεγγίζουμε όλο και πιο μικρό διάστημα που περιέχει το ελάχιστο. Οι εσωτερικές παράμετροι του αλγορίθμου είναι το λ που ορίζει το εύρος των άκρων στο οποίο λήγει η αναζήτηση, και το ϵ που ορίζει το μέγεθος του κάθε υποδιαστήματος $[a, \frac{a+b}{2} + \epsilon]$ και $[\frac{a+b}{2} - \epsilon, b]$. Ο αλγόριθμος συνεχίζεται μέχρι το μέτρο του διαστήματος να είναι λ ή μικρότερο, κι επιστρέφει το μέσο των άκρων ως αποτέλεσμα.

Για σταθερό $\lambda = 0.01$, όσο $2\epsilon > \lambda$ ο αλγόριθμος δε τερματίζει φυσιολογικά, καθώς το ελάχιστο δυνατό εύρος είναι ίσο με 2ϵ, που είναι μεγαλύτερο απο το εύρος τερματισμού. Τερματίζει τεχνητά χρησιμοποιώντας θετό όριο 50 επαναλήψεων. Αυτό φαίνεται και στο διάγραμμα των βημάτων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου σε σχέση με το μέγεθος λ. Επίσης φαίνεται πως όταν μεγαλώνει το αποδεκτό εύρος, ο αλγόριθμος το φτάνει σε λιγότερα βήματα.



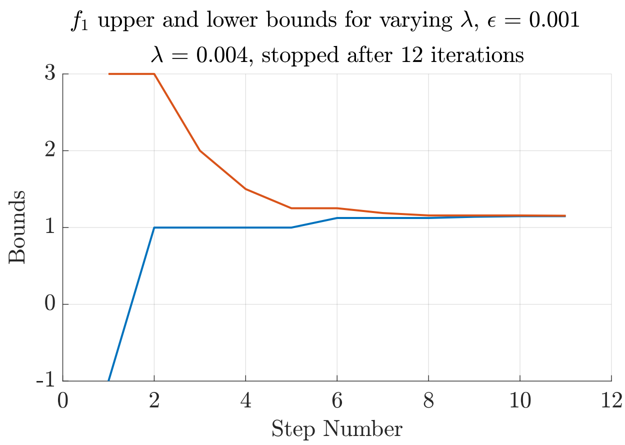
Σχήμα 1.1: Ο αριθμός των βημάτων για διάφορα λ

Για μεγάλα ϵ εκτελούνται και τα 50 βήματα όποτε το διάστημα συγκλίνει πάνω από κάποια τιμή, ενώ όταν τερματίζει νωρίς, δηλαδή μικρά $\epsilon < \lambda/2$ είναι τυχαίο το που ακριβώς θα καταλήξει.



Σχήμα 1.2: Η τελική τιμή των αλγορίθμων για διάφορα ϵ

Όσων αφορά το ρυθμό της προσέγγισης της λύσης, στα πρώτα βήματα ελαττώνεται το εύρος με μεγαλύτερη ταχύτητα απο ότι στα επόμενα, και συγκλίνει στο ℓ. Όταν το φτάσει ο αλγόριθμος τερματίζει.



Σχήμα 1.3: Τα άκρα ανά το βήμα για την f_1 για $\ell = 0.004$, $\epsilon = 0.001$

Μεταβάλλοντας το ℓ αλλάζουν μόνο οι τελικές τιμές που επιστρέφει ο αλγόριθμος, καθώς κι ο αριθμός των συνολικών βημάτων. Δεν αλλάζουν οι τιμές των άκρων σε κάποιο βήμα.

Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 1.4, που απεικονίζει την εξέλιξή των άκρων για διάφορα λ

1.2 Αλγόριθμος του Χρυσού Τομέα

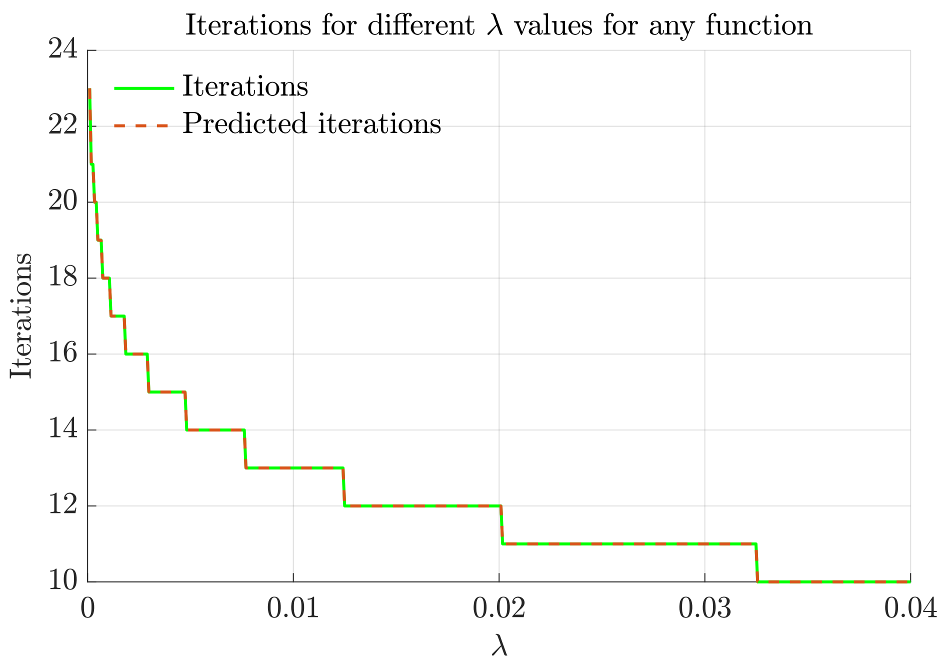
Στον αλγόριθμο αυτό το μέτρο κάθε διαστήματος διαφέρει από το προηγούμενο του κατά σταθερό παράγοντα γ. Έτσι το διάστημα k έχει μέτρο

$$w_{k+1} = \gamma w_k \implies w_k = (b-a)\gamma^k$$

οπού b, a τα αρχικά άκρα του διαστήματος. Έτσι, λύνοντας προς το k όταν $w_k \leq \lambda$ προκύπτει

$$k = \lceil \frac{\log(\lambda) - \log(b-a)}{\log(\gamma)} \rceil$$

Πράγματι, τρέχοντας τον αλγόριθμο για διάφορα λ παίρνουμε τα δεδομένα:



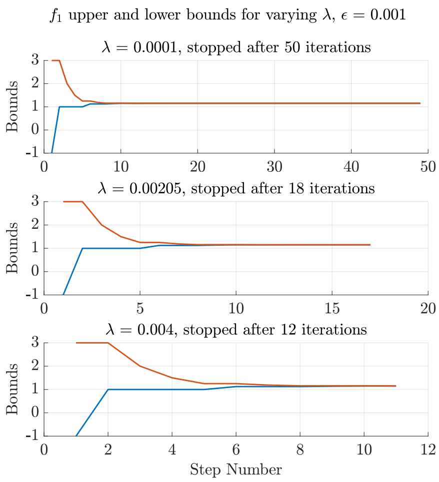
Σχήμα 1.5: Τα βήματα μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου Χρυσού Τομέα για διάφορα λ

Η συνάρτηση f δεν επηρεάζει το μέτρο του επόμενου υποδιαστήματος σε κανένα βήμα, οπότε το διάγραμμα αυτό ισχύει για κάθε συνάρτηση.

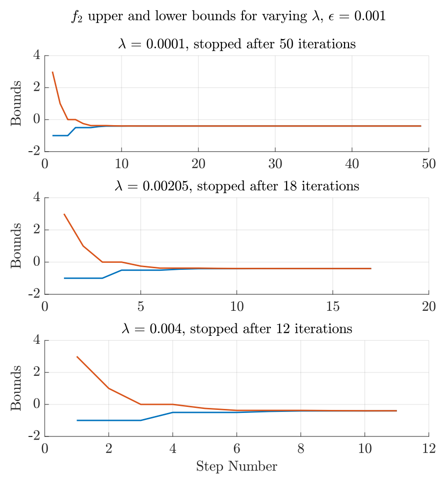
Τα άκρα ανα το βήμα είναι σημειωμένα στο Σχήμα 1.6.

1.3 Αλγόριθμος του Fibonacci

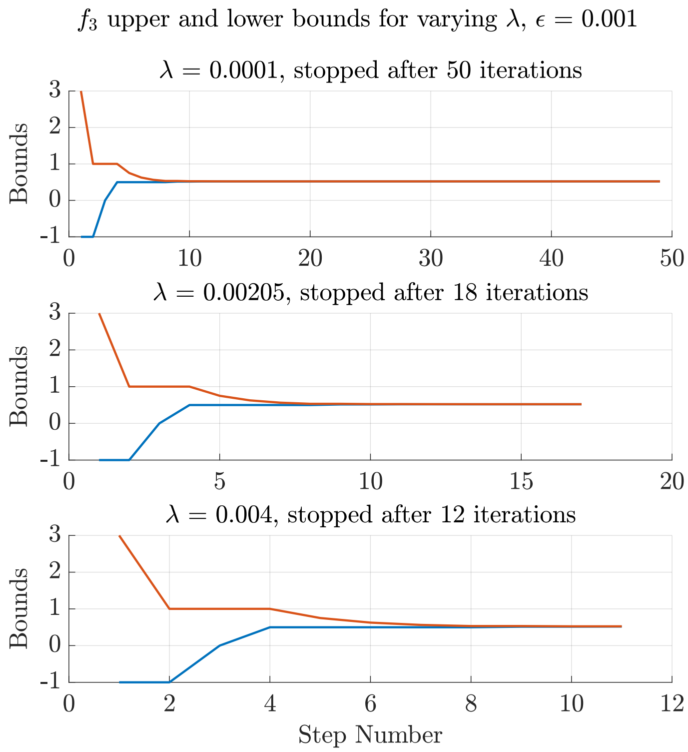
Στον αλγόριθμο αυτό το μέτρο του επόμενου υποδιαστήματος αναζήτησης καθορίζεται από το μέτρο του τωρινού, καθώς και του αριθμού του βήματος, με βάση την ακολουθία Fibonacci.



(α΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_1

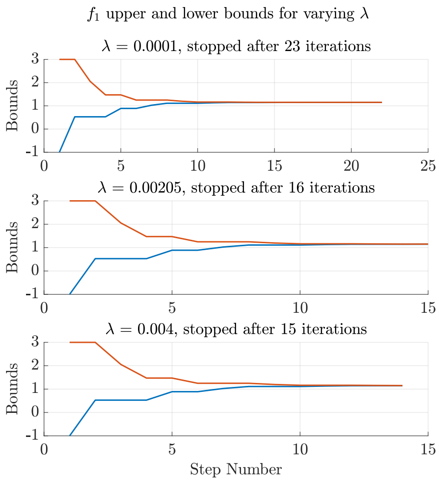


(β΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_2

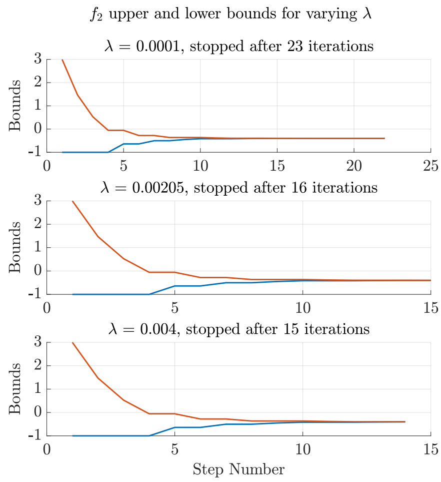


(γ΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_3

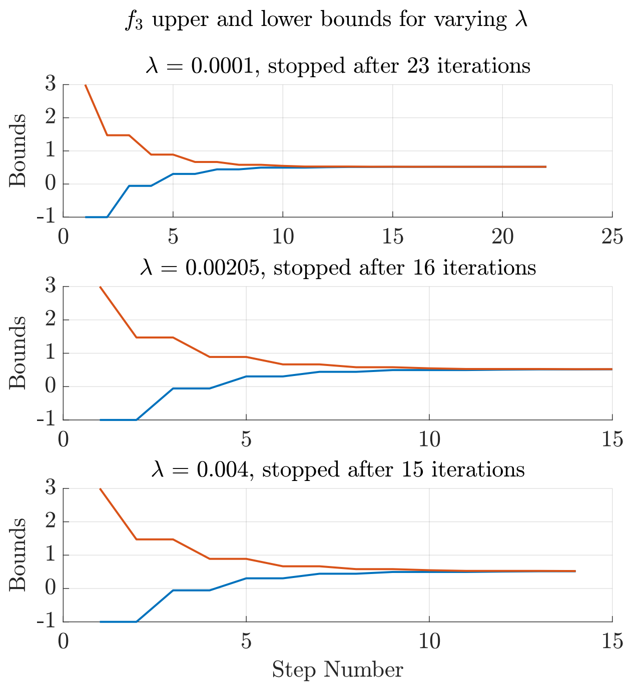
Σχήμα 1.4: Τα άκρα για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3



(α΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_1

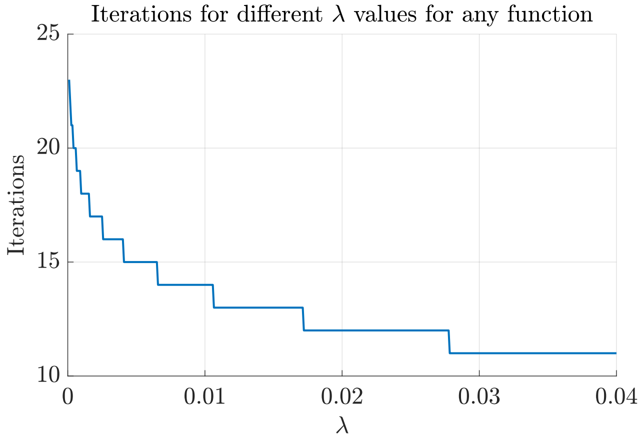


(β΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_2



(γ΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_3

Σχήμα 1.6: Τα άκρα του αλγορίθμου Χρυσού Τομέα για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3

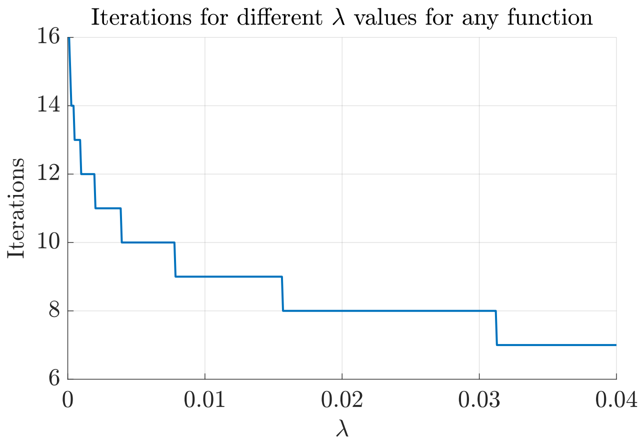


Σχήμα 1.7: Ο αριθμός των βημάτων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου Fibonacci για διάφορα λ

Και τα άκρα συγκλίνουν στο διάστημα που περιέχει το ελάχιστο με τον ρυθμό που φαίνεται στο Σχήμα 1.8.

1.4 Αλγόριθμος της Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου

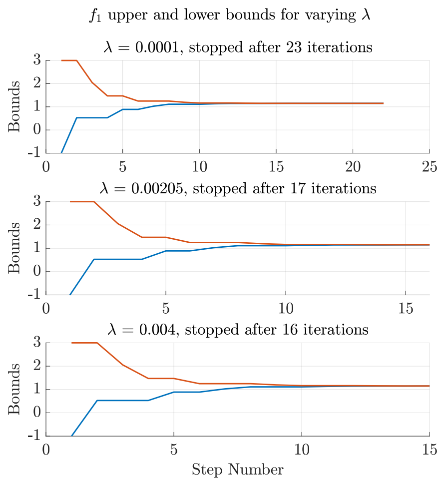
Πρόκειται για δυαδική αναζήτηση για το μηδενικό της παραγώγου. Τα βήματα ελαττώνονται με εκθετικό ρυθμό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.9 και τα άκρα το διαστήματος συγκλίνουν στο λ όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.10



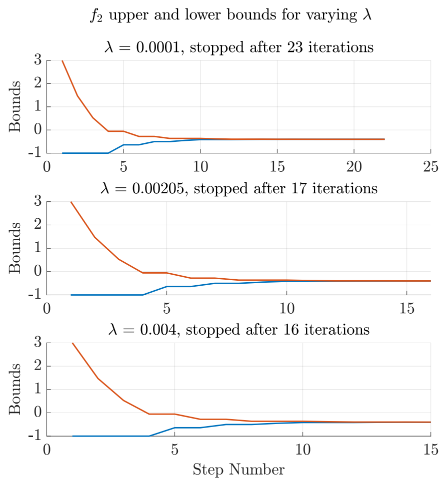
Σχήμα 1.9: Ο αριθμός των βημάτων μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου Fibonacci για διάφορα λ

1.5 Σύγκριση των αλγορίθμων

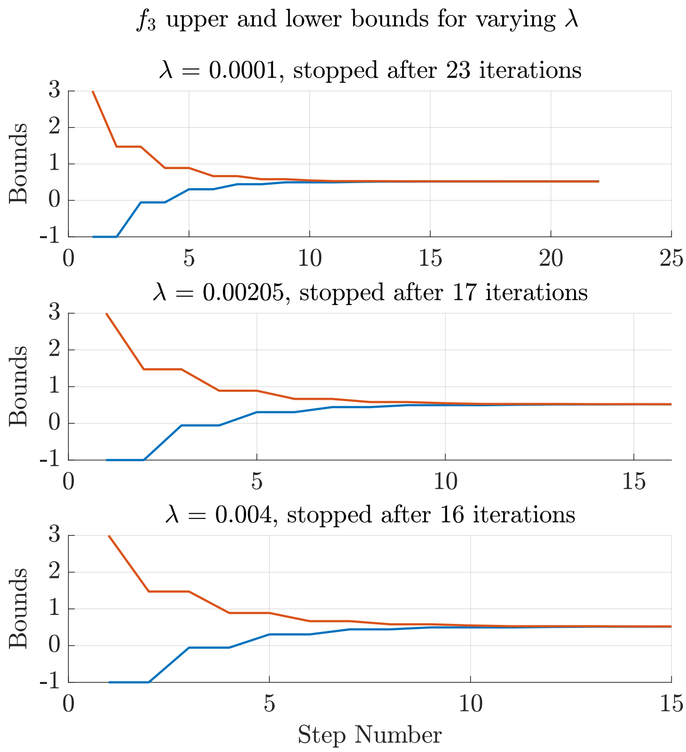
Ο αλγόριθμος που φέρνει το μικρότερο (δηλαδή και πιο ακριβές) διάστημα σε σχέση με τις κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η Διχοτόμος με χρήση παραγώγου.



(α΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_1

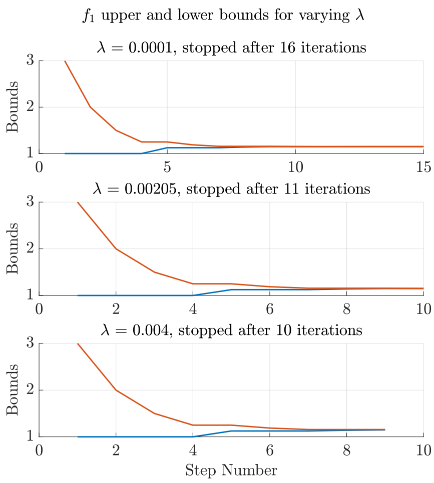


(β΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_2

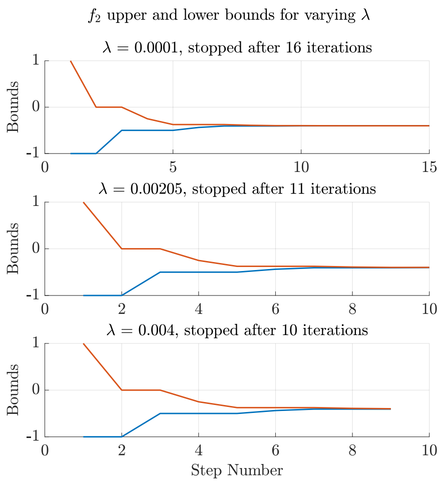


(γ΄) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_3

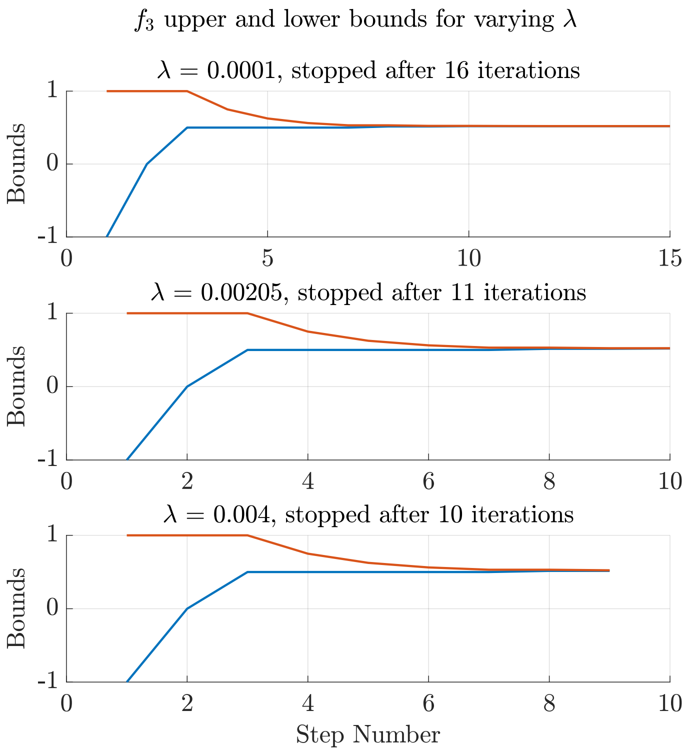
Σχήμα 1.8: Τα άκρα του αλγορίθμου Fibonacci για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3



(α′) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_1



(β′) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_2

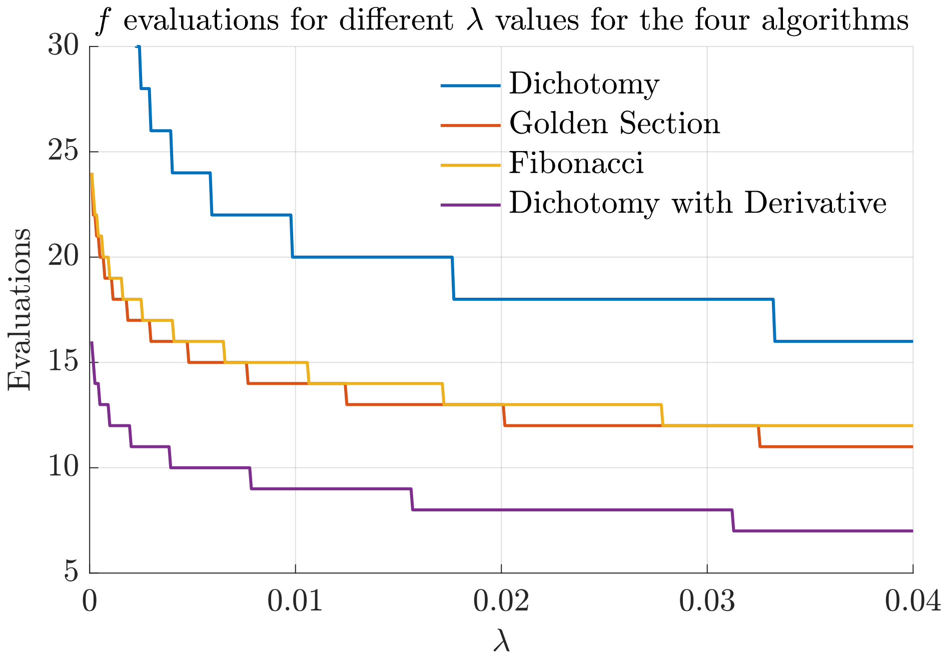


(γ′) Τα άκρα για τη συνάρτηση f_3

Σχήμα 1.10: Τα άκρα του αλγορίθμου της Διχοτόμου με Παράγωγο για τις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ίδιος με τον κανονικό αλγόριθμο της Διχοτόμου για $\epsilon \to 0$, καθώς για μικρό ϵ το πρόσημο της παραγώγου περιγράφει αν $f(x-\epsilon) > f(x+\epsilon)$ ή $f(x-\epsilon) < f(x+\epsilon)$ ή $f(x-\epsilon) = f(x+\epsilon)$. Έτσι με έναν υπολογισμό κάνει το ίδιο που κάνει ο αρχικός αλγόριθμος με δύο.

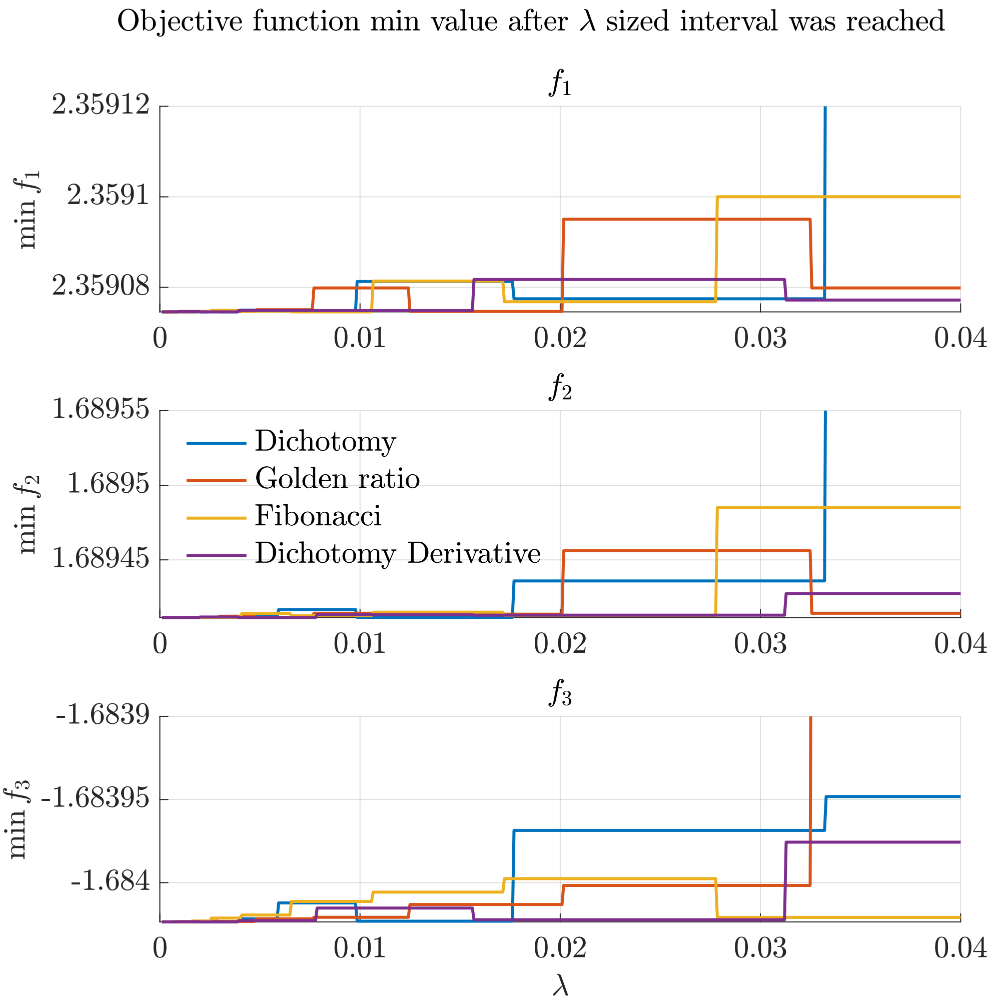
Επίσης στον αλγόριθμο της διχοτόμου με παράγωγο κάθε υποδιάστημα είναι μισό από το προηγούμενο, ενώ στους υπόλοιπους αλγορίθμους υπάρχει πάντα επικάλυψη στα δύο υποψήφια επόμενα υποδιαστήματα, δηλαδή είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερα από το μισό. Η υπεροχή του φαίνεται στο Σχήμα 1.11 που απεικονίζει τις κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης που χρειάζονται για να επιτευχθεί κάποιο δεδομένο μέγεθος διαστήματος.



Σχήμα 1.11: Ο αριθμός των βημάτων μέχρι τον τερματισμό των αλγορίθμων για διάφορα λ

Οι αλγόριθμοι Fibonacci και Χρυσού Τομέα είναι έχουν παρόμοια απόδοση καθώς για μεγάλα n ο λόγος F_{n-k-1}/F_{n-k} προσεγγίζει το γ ενώ ο λόγος F_{n-k-1}/F_{n-k} προσεγγίζει το $1-\gamma$, δηλαδή για μεγάλα n ο αλγόριθμος Fibonacci προσεγγίζει τον αλγόριθμο του χρυσού τομέα.

Επίσης όπως είναι αναμενόμενο, το ελάχιστο που υπολογίζουν όλοι οι αλγόριθμοι βελτιώνεται όσο μικραίνει το λ.



Σχήμα 1.12: Η τιμή της f όταν τερματίζουν οι αλγόριθμοι για διάφορα λ

Το Σχήμα 1.12, δεν αποτελεί σύγκρισή των αλγορίθμων. Η σχετική τους θέση για τα διάφορα λ είναι καθαρά τυχαία και προκύπτει από την αυθαίρετη επιλογή να θεωρώ τιμή της λύσης το μέσο του τελευταίου διαστήματος.