ALGORITMIA

Tema 1:

Análisis de Algoritmos

Grado en Ingeniería Informática en Tecnologías de la Información
Escuela Politécnica de Ingeniería – Campus de Gijón
Universidad de Oviedo

Búsqueda Secuencial

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso ($A[1] = x$)

$$T_{MC}(n) = 2 \in \theta(1)$$

- Peor caso ($(\forall i)\ (A[i] \neq x : 1 \leq i \leq n)$)

$$T_{PC}(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 + n \in \theta(n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(1) \wedge T(n) \in O(n)$$

Ejemplo 1

Procedimiento DosA: No presenta mejor y peor caso. La pregunta ($\boldsymbol{n \geq 2}$) no determina ni mejor ni peor caso dado que está relacionada con la talla del problema. El hecho de que $\boldsymbol{n}$ sea menor que 2 es irrelevante de cara a la eficiencia, pues ésta es una propiedad de carácter asintótico.

Procedimiento DosB: Sí presenta mejor y peor caso. La pregunta ($A[1] \geq 2$) determina mejor y peor caso dado que depende de la naturaleza de los datos de entrada y provoca un comportamiento distinto del algoritmo en el caso de que $A[1]$ sea mayor o igual que 2 y en el caso de que $A[1]$ sea menor que 2.

Ejemplo 2

No presenta mejor y peor caso. Para una **talla fija** ($n = valor$) el algoritmo siempre hace lo mismo. No obstante, según la paridad de la talla hace una cosa u otra, por lo que se debe estudiar por separado (acotar) la complejidad en las situaciones posibles. En este problema:

- Cuando n es par

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \in \theta(n)$$

- Cuando n es impar

$$T(n) = 1 \in \theta(1)$$

Luego

$$T(n) \in \Omega(1) \wedge T(n) \in O(n)$$

Ejemplo 3

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 + n \in \theta(n)$$

Ejemplo 4

Talla: **(n, m)**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n,m) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} m = nm \in \theta(nm)$$

Ejemplo 5

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = 4 + \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} 2 = 4 + n + 2n \in \theta(n)$$

Ejemplo 6

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n}\left(2 + \sum_{j=1}^{n} 2\right) = 2 + \sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} 2n = 2 + 2n + 2n^2 \in \theta(n^2)$$

Ejemplo 7

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**
El bucle realiza $1 + log2\ n$ iteraciones. Sabemos que la base del logaritmo no influye con respecto a su orden, luego:

$$T(n) = 2 + \sum_{i=0}^{log_2 n} 2 = 2 + 2(log_2 n + 1) = 4 + 2\, log_2 n \in \theta(log_2 n)$$

Ejemplo 8

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2 + n) = \sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} n = 2n + n^2 \in \theta(n^2)$$

Ejemplo 9

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(2+i) = \sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} i = 2n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5n+n^2}{2} \in \theta(n^2)$$

Ejemplo 10

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso $((\forall i)(A[i] \geq A[pos]: 1 \leq i \leq n))$

$$T_{MC}(n) = 2 + \sum_{1}^{n} 1 = 2 + n \in \theta(n)$$

- Peor caso $((\forall i)(A[i] < A[pos]: 1 \leq i \leq n))$

$$T_{PC}(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 + n \in \theta(n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(n) \wedge T(n) \in O(n) \Longrightarrow T(n) \in \theta(n)$$

Ejemplo 11

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso $(A[n] = x)$

$$T_{MC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n = 0) \\ c_2 & si\ (n > 0) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T_{MC}(n) \in \theta(1)$$

- Peor caso $((\forall i)(A[i] \neq x: 1 \leq i \leq n))$

$$T_{PC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n = 0) \\ T_{PC}(n-1) + c_2 & si\ (n > 0) \end{cases}$$

$T_{PC}(n) = T_{PC}(n-1) + c_2 = T_{PC}(n-2) + 2c_2 = \cdots = T_{PC}(n-i) + ic_2$. La base se alcanza cuando $(n-i) = 0$, esto es, cuando $i = n$. Sustituyendo,

$$T_{PC}(n) = \cdots = T_{PC}(n-n) + nc_2 = T_{PC}(0) + nc_2 = c_1 + nc_2 \in \theta(n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(1) \wedge T(n) \in O(n)$$

Ejemplo 12

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n = 1) \\ 2T(n-1) + c_2 & si\ (n > 1) \end{cases}$$

$$T(n) = 2T(n-1) + c_2 =$$
$$= 2[2T(n-2) + c_2] + c_2 = 2^2T(n-2) + 2c_2 + c_2 = 2^2T(n-2) + (2^2-1)c_2 =$$
$$= 2^2[2T(n-3) + c_2] + (2^2-1)c_2 = 2^3T(n-3) + 2^2c_2 + (2^2-1)c_2 = 2^3T(n-3) + (2^3-1)c_2 =$$
$$\ldots$$
$$= 2^iT(n-i) + (2^i-1)c_2$$

La base se alcanza cuando $(n-i) = 1$, por lo que $i = n-1$. En consecuencia,

$$T(n) = 2^{(n-1)}T(1) + \left(2^{(n-1)} - 1\right)c_2 \approx 2^nc_1 + 2^nc_2 \in \theta(2^n)$$

Ejemplo 13

Talla: $\boldsymbol{j - i + 1}$. Por simplicidad, la denominaremos **n**.
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \le 1)\ \ (\equiv i \ge j) \\ 2T(n\ div\ 2) + nc_2 + c_3 & si\ (n > 1)\ \ (\equiv i < j) \end{cases}$$

$$T(n) = 2T(n\ div\ 2) + nc_2 + c_3 =$$
$$= 2[2T(n\ div\ 2^2) + (n\ div\ 2)c_2 + c_3] + nc_2 + c_3 =$$
$$= 2^2T(n\ div\ 2^2) + 2(n\ div\ 2)c_2 + nc_2 + 3c_3 =$$
$$= 2^2T(n\ div\ 2^2) + 2nc_2 + 3c_3 \qquad \text{si } n \text{ es par}$$
$$= 2^2T(n\ div\ 2^2) + (n-1)c_2 + nc_2 + 3c_3 \qquad \text{si } n \text{ es impar}$$

Acotando

$$\approx 2^2T(n\ div\ 2^2) + 2nc_2 + 3c_3$$
$$= 2^2[2T(n\ div\ 2^3) + (n\ div\ 2^2)c_2 + c_3] + 2nc_2 + 3c_3 =$$
$$\approx 2^3T(n\ div\ 2^3) + 3nc_2 + 7c_3$$

En la iteración *i-esima*

$$\approx 2^iT\left(n\ div\ 2^i\right) + inc_2 + \left(2^i - 1\right)c_3$$

Alcanzaríamos la base cuando $\left(n\ div\ 2^i\right) \le 1$ y esto sucede cuando $i \approx \log_2 n$. Reemplazamos i por $\log_2 n$ en la expresión anterior y tendremos

$$\approx 2^{\log_2(n)}c_1 + n\log_2(n)\,c_2 + \left(2^{\log_2(n)} - 1\right)c_3 = nc_1 + nc_2\log_2 n + (n-1)c_3 \in \theta(n\log_2 n)$$

Ejemplo 14

Talla: $(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i} + \mathbf{1})$. Por simplicidad, la denominaremos **n**.
Mejor y peor caso: **Sí**

Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso $(A[1] \neq A[n])$

$$T_{MC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 1) \\ c_2 & si\ (n > 1) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T_{MC}(n) \in \theta(1)$$

- Peor caso $((\forall(i,j)(A[i] = A[j]))$

$$T_{PC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 1) \\ T_{PC}(n-2) + c_2 & si\ (n > 1) \end{cases}$$

$T_{PC}(n) = T_{PC}(n-2) + c_2 = T_{PC}(n-4) + 2c_2 = \cdots = T_{PC}(n-2i) + ic_2$. La base se alcanza cuando $(n-2i) = 1$, esto es, cuando $i = n\ div\ 2$. Sustituyendo,

$$T_{PC}(n) = \cdots = c_1 + (n\ div\ 2)c_2 \in \theta(n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(1) \wedge T(n) \in O(n)$$

Ejemplo 15

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 2) \\ T(n-1) + T(n-2) + c_2 & si\ (n > 2) \end{cases}$$

En la expresión anterior aumenta el número de términos según avanzamos hacia la base, siendo difícil establecer alguna fórmula general. Para solventar este problema podemos acotar $T(n)$ con las ecuaciones $T_1(n)$ y $T_2(n)$ siguientes:

$$T_1(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 2) \\ 2T_1(n-2) + c_2 & si\ (n > 2) \end{cases} \quad y \quad T_2(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 2) \\ 2T_2(n-1) + c_2 & si\ (n > 2) \end{cases}$$

Las ecuaciones $T_2(n)$ ya ha sido resueltas en Ejemplo 12.

$$T_1(n) = 2T_1(n-2) + c_2 =$$
$$= 2[2T_1(n-4) + c_2] + c_2 = 4T_1(n-4) + 3c_2 =$$
$$= 4[2T_1(n-6) + c_2] + 3c_2 = 8T_1(n-6) + 7c_2 =$$
$$\ldots$$
$$= 2^i T_1(n-2i) + (2^i - 1)c_2$$

La base se alcanza cuando $n - 2i = 2$, en consecuencia $i = \frac{n-2}{2} \approx \frac{n}{2}$ Sustituyendo,

$$T_1(n) = \cdots = 2^{\frac{n}{2}}c_1 + \left(2^{\frac{n}{2}} - 1\right)c_2 \approx 2^{\frac{n}{2}}c_1 + 2^{\frac{n}{2}}c_2 \in \theta\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega\left(2^{n/2}\right) \wedge T(n) \in O(2^n)$$

Ejemplo 16

Talla: $(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{i} + \mathbf{1})$. Por simplicidad, la denominaremos **n**.
Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso ($A[(1+n)\ div\ 2] = x$)

$$T_{MC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n = 0) \\ c_2 & si\ (n > 0) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad T_{MC}(n) \in \theta(1)$$

- Peor caso $((\forall m)(A[m] \neq x))$. Observar que en el peor caso, la siguiente llamada recursiva trata aproximadamente la mitad de la sección anterior, es decir, se pasa de la sección $A[i \dots j]$ a la sección $A[i \dots m-1]$ o a la sección $A[m+1 \dots j]$ donde m es la posición del elemento central. En consecuencia,

$$T_{PC}(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n = 0) \\ T_{PC}(n\ div\ 2) + c_2 & si\ (n > 0) \end{cases}$$

$T_{PC}(n) = T_{PC}(n\ div\ 2) + c_2 = T_{PC}(n\ div\ 4) + 2c_2 = \cdots = T_{PC}(n\ div\ 2^i) + ic_2$. La base se alcanza cuando $(n\ div\ 2^i) = 0$, esto es, cuando (aproximadamente) $n = 2^i \Longrightarrow i = \log_2 n$. Sustituyendo,

$$T_{PC}(n) = \cdots = c_1 + \log_2(n)\, c_2 \in \theta(\log_2 n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(1) \wedge T(n) \in O(\log_2 n)$$

Ejemplo 17

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **No**

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 1) \\ T(n-1) + T(n-2) + T(n\ div\ 2) + c_2 & si\ (n > 1) \end{cases}$$

En la expresión anterior aumenta el número de términos según avanzamos hacia la base, siendo difícil establecer alguna fórmula general. Acotamos $T(n)$ con las ecuaciones $T_1(n)$ y $T_2(n)$ siguientes:

$$T_1(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 1) \\ 3T_1(n\ div\ 2) + c_2 & si\ (n > 1) \end{cases} \quad y \quad T_2(n) = \begin{cases} c_1 & si\ (n \leq 1) \\ 3T_2(n-1) + c_2 & si\ (n > 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_1(n) &= 3T_1(n\ div\ 2) + c_2 = \\ &= 3[3T_1(n\ div\ 4) + c_2] + c_2 = 9T_1(n\ div\ 4) + (3c_2 + c_2) = \\ &= 9[3T_1(n\ div\ 8) + c_2] + (3c_2 + c_2) = 27T_1(n\ div\ 8) + (9c_2 + 3c_2 + c_2) = \\ \dots \\ &= 3^i T_1(n\ div\ 2^i) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j c_2 \end{aligned}$$

La base se alcanza cuando $n\ div\ 2^i = 1$, en consecuencia $i = \log_2 n$ Sustituyendo,

$$T_1(n) = \cdots = 3^{\log_2 n} c_1 + \sum_{j=0}^{\log_2(n)-1} 3^j c_2$$

Aplicando cambio de base ($\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$) se tiene que $3^{\log_2 n} = 3^{\frac{\log_3 n}{\log_3 2}} = n^{\frac{1}{\log_3 2}} = n^{1.58}$. También se puede enfocar como: $3^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)(\log_2 3)} = n^{\log_2 3} = n^{1.58}$. Además, se sabe que $\sum_{i=1}^{n} r^i \approx r^n$, por lo que $\sum_{j=0}^{\log_2 n-1} 3^j c_2 = c_2\left(1 + 3^{\log_2 n-1}\right) \approx c_2 3^{\log_2 n} = c_2 n^{1.58}$. Por tanto,

Por tanto,

$T_1(n) = \cdots = c_1 n^{1.58} + c_2 n^{1.58} \in \theta(n^{1.58})$

Ahora $T_2(n)$

$$
\begin{aligned}
T_2(n) &= 3T_2(n-1) + c_2 = \\
&= 3[3T_2(n-2) + c_2] + c_2 = 9T_2(n-2) + (3c_2 + c_2) = \\
&= 9[3T_2(n-3) + c_2] + (3c_2 + c_2) = 27T_2(n-3) + (9c_2 + 3c_2 + c_2) = \\
&\dots \\
&= 3^i T_2(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j c_2
\end{aligned}
$$

La base se alcanza cuando $(n-i) = 1 \Longrightarrow i \approx n$, sustituyendo:

$$T_2(n) = \cdots = 3^n c_1 + \sum_{j=0}^{n-1} 3^j c_2 \approx 3^n c_1 + 3^n c_2 \in \theta(3^n)$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(n^{1.58}) \wedge T(n) \in O(3^n)$$

Ejemplo 18

Talla: **n** (número de elementos de la lista)

Mejor y peor caso: **Sí**. El número de veces que itera el bucle mientras es $(1 + \log n)$ y los valores que va tomando la variable m dentro del mismo son: $\{2^0, 2^1, \dots, 2^i, \dots, 2^{\log n}\}$. Por tanto:

- Mejor caso ($(\forall m)\ (Am = 0)$)

$$T_{MC}(n) = 3 + \sum_{i=0}^{\log n} 1 = 3 + 1 + \log n \in \theta(\log n)$$

- Peor caso ($(\forall m)(A[m] \neq 0)$)

$$
\begin{aligned}
T_{PC}(n) &= 3 + \sum_{i=0}^{\log n}\left(1 + \sum_{j=m}^{n} 1\right) = 4 + \log n + \sum_{i=0}^{\log n}\sum_{j=2^i}^{n} 1 = \\
&= 4 + \log n + \sum_{i=0}^{\log n}(n - 2^i + 1) = 4 + \log n + \sum_{i=0}^{\log n} n - \sum_{i=0}^{\log n} 2^i + \sum_{i=0}^{\log n} 1 = \\
&= 4 + \log n + n(1 + \log n) - \left(1 + \sum_{i=1}^{\log n} 2^i\right) + (1 + \log n) = \\
&= 5 + 2\log n + n + \mathrm{n}\log n - \left(1 + 2^{\log n}\right) = 4 + 2\log n + \mathrm{n}\log n \in \theta(n \log n)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$T(n) \in \Omega(\log n) \wedge T(n) \in O(n \log n)$$

Ejemplo 19

Talla: **n**
Mejor y peor caso: **Sí**

- Mejor caso ($A[(1+n)\ div\ 2] = x$)

$$T_{MC}(n) = 5 \in \theta(1)$$

- Peor caso ($(\forall m)(A[m] \neq x)$)
  Observar que en el peor caso, cada iteración del bucle *mientras* trata aproximadamente la mitad de la sección del vector de la iteración anterior, es decir, se pasa de la sección $A[i \dots j]$ a la sección $A[i \dots m-1]$ o a la sección $A[m+1 \dots j]$ donde m es la posición del elemento central. Por tanto, dado que el bucle comienza con una sección a tratar de tamaño n, itera hasta que la sección a tratar sea vacía y dicha sección a tratar se va dividiendo reiteradamente por 2 ($n, n\ div\ 2, n\ div\ 2^2, \dots$), el bucle mientras itera $1 + \log n$ veces.

$$T_{pC}(n) = 3 + \sum_{i=0}^{\log n} 2 = 3 + 2(1 + \log n) = 5 + 2\log n \in \theta(\log n)$$