

ALGORITMIA

PRÁCTICAS – SESIÓN 2.1



ESTRUCTURA GENERAL DE UNA FUNCIÓN RECURSIVA

2

El siguiente esquema describe el MODELO GENERAL en el que deben encuadrarse las funciones recursivas:

$\{ Q(\bar{x}) \}$
función $f(\bar{x}: T_1)$ retorna $(\bar{y}: T_2)$
caso
 $Bt(\bar{x}) \rightarrow \text{triv}(\bar{x})$
 $Bnt(\bar{x}) \rightarrow c(f(s(\bar{x})), \bar{x})$
fcaso
ffunción
 $\{ R(\bar{x}, \bar{y}) \}$

donde los parámetros formales \bar{x} e \bar{y} han de entenderse como tuplas $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ e $\{ y_1, y_2, \dots, y_m \}$, respectivamente



TIPOS DE FUNCIONES RECURSIVAS

3

Según que el **elemento sucesor $s(\bar{x})$ sea único o no**, pueden presentarse los dos tipos de funciones recursivas siguientes:

- ❑ **Función recursiva lineal o simple:** cuando la función recursiva genera A LO SUMO UNA LLAMADA INTERNA por cada llamada externa.
- ❑ **Función recursiva no lineal o múltiple:** cuando genera DOS O MÁS LLAMADAS INTERNAS por cada llamada externa.

Nota.- Si aparecieran varias llamadas recursivas, cada una en una alternativa diferente de una instrucción condicional, la recursividad seguiría siendo lineal ya que, en tiempo de ejecución, las alternativas son mutuamente excluyentes y a lo sumo se produciría una invocación.



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA LINEAL O SIMPLE

4

$\{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

fcaso

ffunción

$\{ p = a^n \}$



LINEAL O SIMPLE: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

5

$\{a \geq 0 \wedge n \geq 0\}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

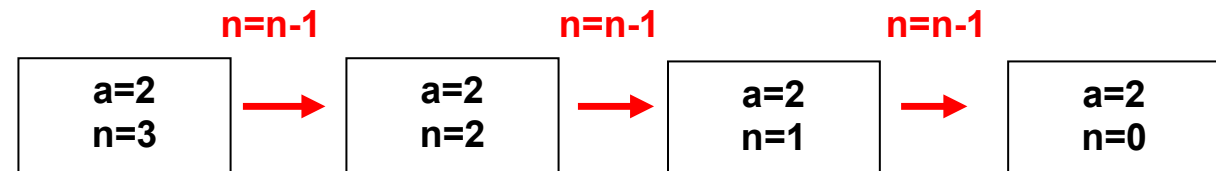
fcaso

ffunción

$\{p = a^n\}$

$$a^n \quad n=0 \Rightarrow a=1$$
$$n > 0 \quad a * (n-1)$$

$s(a, n) = (a, n-1)$



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA NO LINEAL O MÚLTIPLE

6

$\{ n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

$n = 1 \rightarrow 3$

$n > 1 \rightarrow 2 * POTENCIA3(n-1) + 3 * POTENCIA3(n-2)$

fcaso

ffunción

$\{ f = 3^n \}$



NO LINEAL O MÚLTIPLE: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

$$n = 3 \\ 3^3$$

7

$\{n \geq 0\}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$$n = 0 \rightarrow 1$$

$$n = 1 \rightarrow 3$$

$$n > 1 \rightarrow 2 * POTENCIA3(n-1) + 3 * POTENCIA3(n-2)$$

fcaso

ffunción

$\{f = 3^n\}$

$$3^2 \\ 3^1 = 3 \quad 3^0 = 1$$

$$n > 1 = 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^0$$

$$27$$

$$3^3$$

$$s_1(n)=n-1$$

$$n=3$$

$$s_2(n)=n-2$$

$$n=n-1$$

$$n=n-2$$

$$2 \cdot 9 = 18$$

$$n=2$$

$$n=1$$

$$3^1 \rightarrow 3 \cdot 3$$

$$n=n-1$$

$$n=n-2$$

$$2 \cdot 3$$

$$n=1$$

$$n=0$$

$$3^0$$

$$1 \cdot 3$$



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA LINEAL O SIMPLE

8

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$



LINEAL O SIMPLE: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

9

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

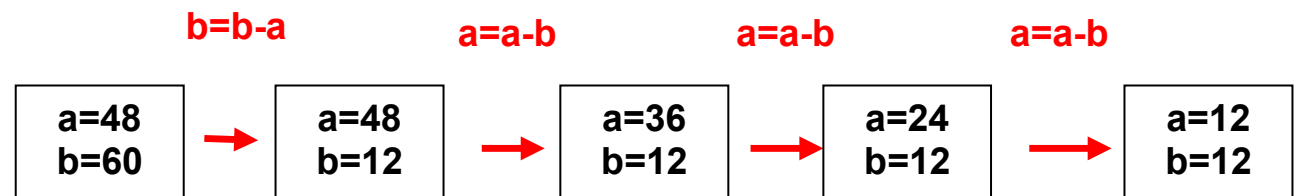
$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$

$s(a,b)=\text{si } a > b \text{ entonces } a = a - b \text{ sino } b = b - a \text{ fsi}$



TIPOS DE FUNCIONES RECURSIVAS

10

Según que el comportamiento de la **función c** (función de combinación) pueden presentarse los dos tipos de funciones recursivas siguientes:

- ❑ **Función recursiva no final o no de cola:** cuando la función c es necesaria, esto es, $f(\bar{x}) = c(f(s(\bar{x})), \bar{x})$
- ❑ **Función recursiva final o de cola:** cuando la función c no es necesaria, esto es, $f(\bar{x}) = f(s(\bar{x}))$



FUNCIÓN RECURSIVA NO FINAL O NO DE COLA

11

Cuando la función c es necesaria, esto es, $f(\bar{x}) = c(f(s(\bar{x})), \bar{x})$.-

$\{ Q(\bar{x}) \}$

función $f(\bar{x}: T1)$ retorna $(\bar{y}: T2)$

caso

$Bt(\bar{x}) \rightarrow \text{triv}(\bar{x})$

$Bnt(\bar{x}) \rightarrow c(f(s(\bar{x})), \bar{x})$

fcaso

ffunción

$\{ R(\bar{x}, \bar{y}) \}$



FUNCIÓN RECURSIVA FINAL O DE COLA

12

Cuando la función c no es necesaria, esto es, $f(\bar{x}) = f(s(\bar{x}))$.-

$\{ Q(\bar{x}) \}$

función $f(\bar{x}: T1)$ retorna $(\bar{y}: T2)$

caso

$Bt(\bar{x}) \rightarrow \text{triv}(\bar{x})$

$Bnt(\bar{x}) \rightarrow f(s(\bar{x}))$

fcaso

ffunción

$\{ R(\bar{x}, \bar{y}) \}$



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA NO FINAL O NO DE COLA

13

$\{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

fcaso

ffunción

$\{ p = a^n \}$



NO FINAL O NO DE COLA: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

14

$\{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

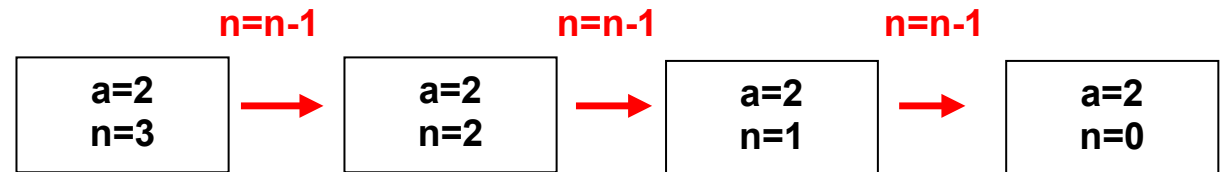
$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

fcaso

ffunción

$\{ p = a^n \}$

$s(a, n) = (a, n-1)$



NO FINAL O NO DE COLA: SOLUCIÓN CASO TRIVIAL

15

$\{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

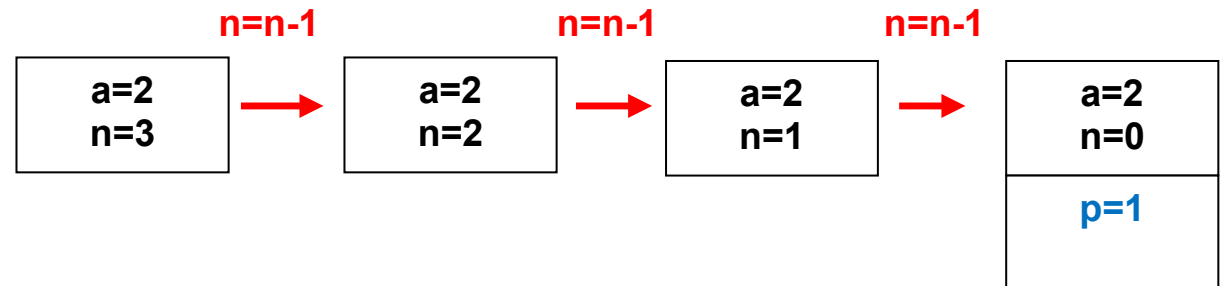
$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

fcaso

ffunción

$\{ p = a^n \}$

$s(a, n) = (a, n-1)$



Caso base $\rightarrow n=0 \rightarrow$ La función retorna 1.



NO FINAL O NO DE COLA: ASCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

16

$\{ a \geq 0 \wedge n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA (a, n :entero) retorna (p :entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

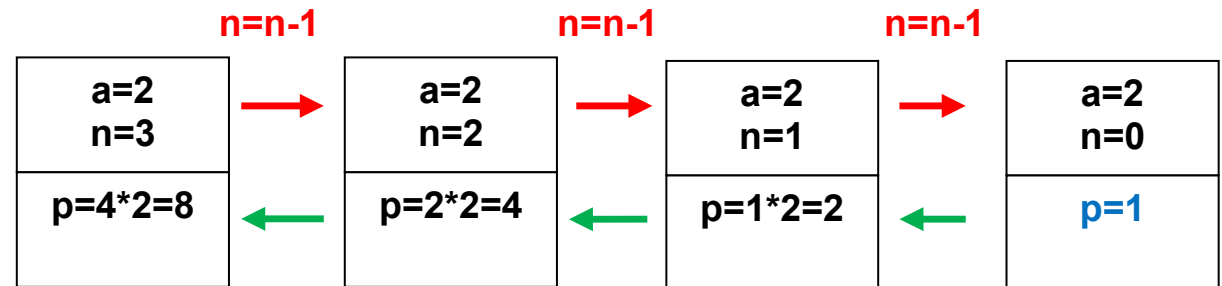
$n > 0 \rightarrow \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$

fcaso

ffunción

$\{ p = a^n \}$

$s(a, n) = (a, n-1)$



$p = p' * a$
III

$\text{POTENCIA}(a, n) = \text{POTENCIA}(a, n-1) * a$



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA FINAL O DE COLA

17

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$



FINAL O DE COLA: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

18

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

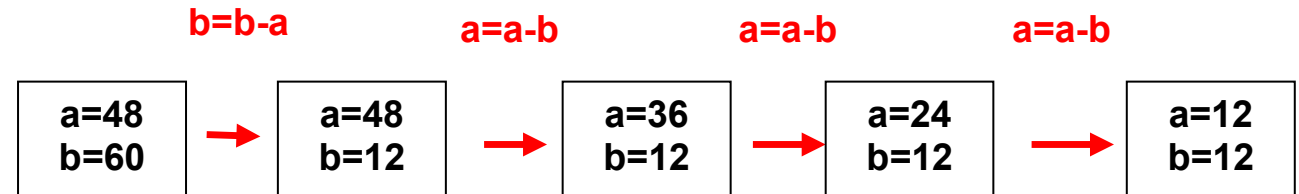
$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$

$s(a,b)=\text{si } a > b \text{ entonces } a = a - b \text{ sino } b = b - a \text{ fsi}$



FINAL O DE COLA: SOLUCIÓN CASO TRIVIAL

19

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

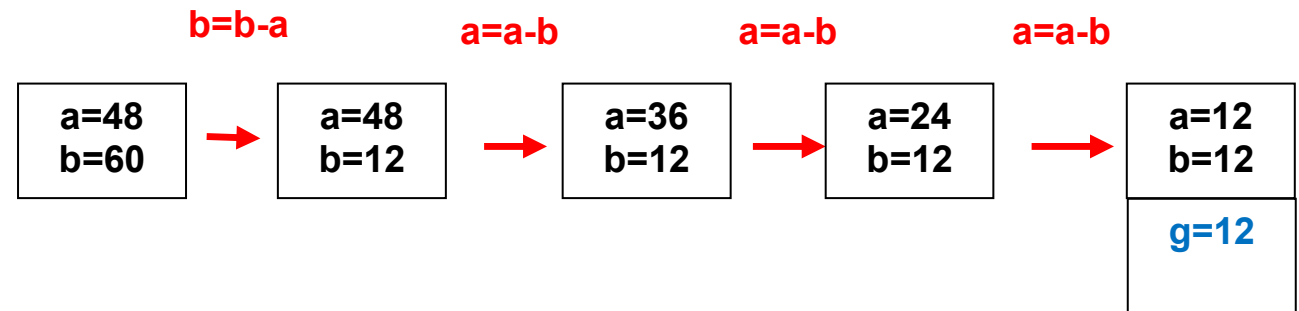
$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$

$s(a,b)=\text{si } a > b \text{ entonces } a = a - b \text{ sino } b = b - a \text{ fsi}$



Caso base $\rightarrow a=b \rightarrow$ La función retorna a, en nuestro ejemplo, 12.



FINAL O DE COLA: ASCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

20

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$

Funcion MCD (a, b:entero) retorna (g:entero)

caso

$a = b \rightarrow a$

$a > b \rightarrow \text{MCD}(a-b, b)$

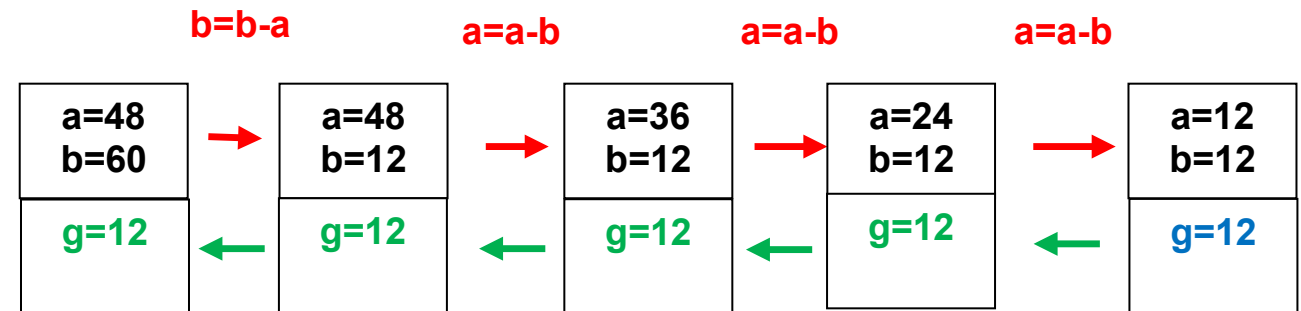
$a < b \rightarrow \text{MCD}(a, b-a)$

fcaso

ffunción

$\{ g = \text{mcd}(a,b) \}$

$s(a,b)=\text{si } a > b \text{ entonces } a = a - b \text{ sino } b = b - a \text{ fsi}$



$g = g'$
III

$\text{MCD}(a,b)=\text{MCD}(a-b,b) \text{ si } a>b$
 $\text{MCD}(a,b)=\text{MCD}(a,b-a) \text{ si } a<b$



EJEMPLO DE FUNCIÓN RECURSIVA NO FINAL O NO DE COLA

21

$\{ n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

$n = 1 \rightarrow 3$

$n > 1 \rightarrow 2 * POTENCIA3(n-1) + 3 * POTENCIA3(n-2)$

fcaso

ffunción

$\{ f = 3^n \}$



NO FINAL O NO DE COLA: DESCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

22

$\{ n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

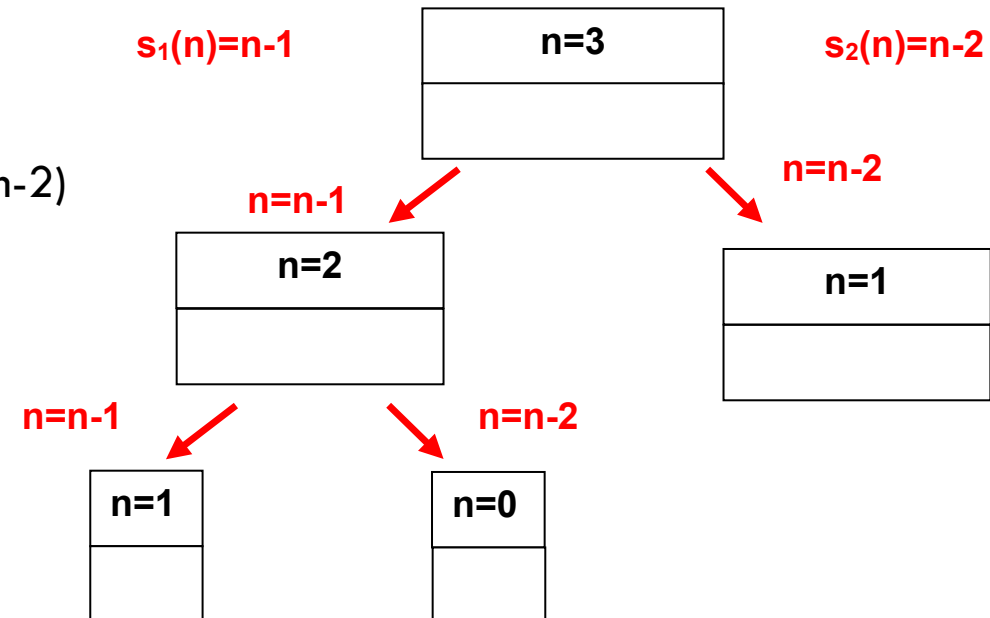
$n = 1 \rightarrow 3$

$n > 1 \rightarrow 2 * POTENCIA3(n-1) + 3 * POTENCIA3(n-2)$

fcaso

ffunción

$\{ f = 3^n \}$



NO FINAL O NO DE COLA: SOLUCIÓN CASOS TRIVIALES

23

$\{ n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

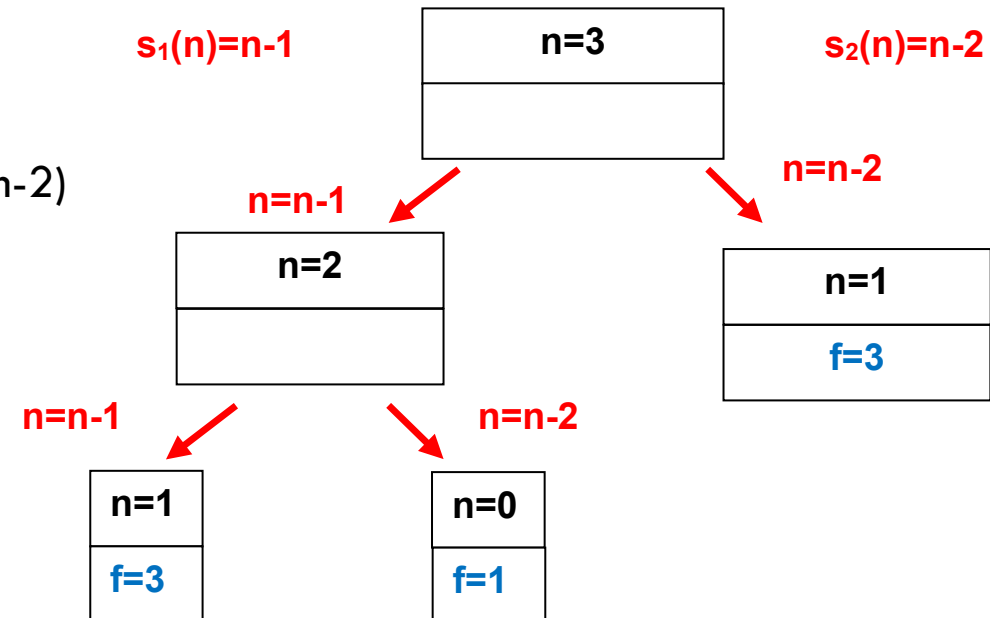
$n = 1 \rightarrow 3$

$n > 1 \rightarrow 2 * \text{POTENCIA3}(n-1) + 3 * \text{POTENCIA3}(n-2)$

fcaso

ffunción

$\{ f = 3^n \}$



NO FINAL O NO DE COLA: ASCENSO CADENA DE LLAMADAS RECURSIVAS

24

$\{ n \geq 0 \}$

Funcion POTENCIA3 (n:entero) retorna (f:entero)

caso

$n = 0 \rightarrow 1$

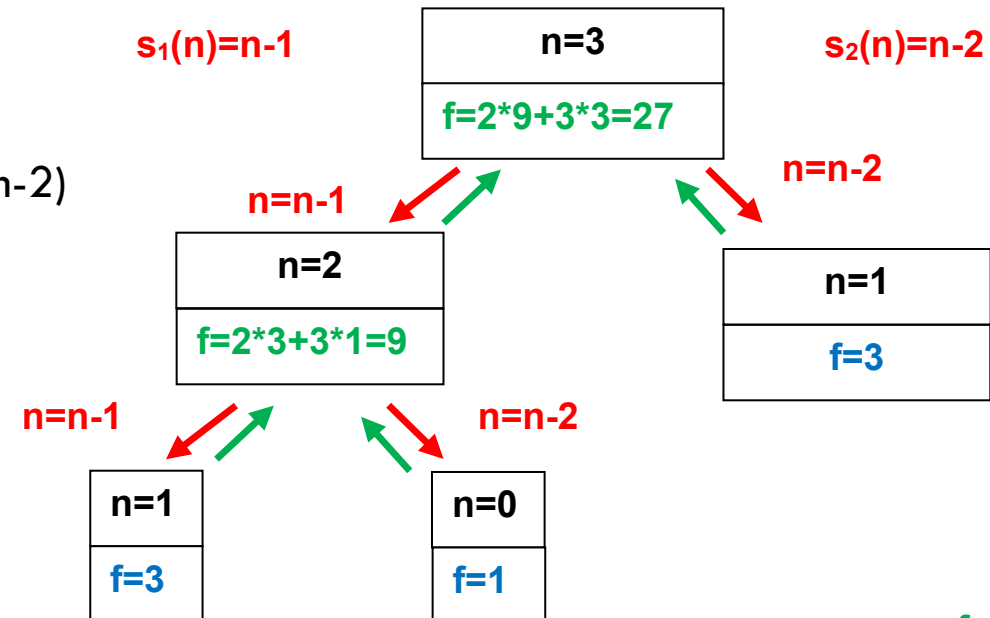
$n = 1 \rightarrow 3$

$n > 1 \rightarrow 2 * \text{POTENCIA3}(n-1) + 3 * \text{POTENCIA3}(n-2)$

fcaso

ffunción

$\{ f = 3^n \}$



$$f = 2*f_1 + 3*f_2$$

III

$$F(n) = 2*F(n-1) + 3*F(n-2)$$



TAREAS PARA EL ALUMNO

25

- ❑ **Revisar que la postcondición** se cumple en cada uno de los resultados (intermedios y finales) que figuran en los ejemplos de las **diapositivas 16, 20 Y 24**.
- ❑ **Al alumno se le facilita un código fuente (sesion_2_1_practicas_recursion_alumno_2021_2022.c)** que incluye la implementación “directa” del algoritmo que figura en la diapositiva 4 (función POTENCIA). En dicho código fuente aparece otra función, POTENCIA_entresijos, que añade sentencias de escritura a la función POTENCIA. Dichas sentencias tienen como objetivo mostrar por pantalla los valores de los parámetros correspondientes a cada invocación a la función, así como sus resultados.
- ❑ **Renombrar el código fuente proporcionado** incluyendo nombre y apellidos del alumno.
- ❑ **Añadir a dicho código fuente** la implementación de los algoritmos de las diapositivas 6 y 8 (POTENCIA3 y MCD). Proceder de forma similar al ejemplo expuesto anteriormente (implementación “directa” e implementación con sentencias de escritura). Ejecutar el programa, observando la evolución de los datos de las diferentes invocaciones a las funciones (POTENCIA, POTENCIA3 y MCD) así como los resultados.



TAREAS PARA EL ALUMNO

26

- ❑ **Añadir a dicho código fuente** la implementación de las funciones recursivas vistas hasta ahora, o propuestas para su realización, en clases expositivas: factorial, número_cifras, suma_cifras, semifactorial, fibonacci, rayuela y plano.
- ❑ Al finalizar la sesión de prácticas, **entregar a través del Campus Virtual** el fichero fuente final reuniendo las tareas realizadas por el alumno.

