

# Análise cinemática - Mecanismo de 4 barras

Cesar Meira

*Instituto SENAI de Inovação em Sistemas de Manufatura*

---

## Resumo

O objetivo desse texto é explorar os artigos<sup>[1][2]</sup>. Principalmente o trabalho<sup>[1]</sup> que trata da otimização de uma garra de rigidez variável. O artigo em foco possui certo nível de complexidade e se vale de diferentes conceitos, sendo um dos principais a análise cinemática de um mecanismo de 4 barras, quanto a posição e a velocidade. Posto isso o objetivo desse texto é detalhar os conceitos dessa análise cinemática, de forma a auxiliar a compreensão do artigo em estudo. O autor<sup>[2]</sup> apresenta uma expressão para análise de velocidade, porém omite a expressão de posição, de forma que é replicada a técnica de Freudenstein<sup>[4]</sup>.

---

## Conteúdo

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                     | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Mecanismo de 4 barras</b>          | <b>2</b>  |
| 2.1      | Cadeia vetorial fechada . . . . .     | 2         |
| 2.2      | Análise de posição . . . . .          | 4         |
| 2.2.1    | Substituição de meio ângulo . . . . . | 7         |
| 2.3      | Análise de velocidade . . . . .       | 8         |
| 2.3.1    | Forma alternativa . . . . .           | 9         |
| 2.4      | Aplicação . . . . .                   | 10        |
| 2.4.1    | Comparação . . . . .                  | 12        |
| <b>3</b> | <b>Conclusão</b>                      | <b>13</b> |
| <b>4</b> | <b>Implementação</b>                  | <b>14</b> |

---

## 1 Introdução

---

A estrutura deste artigo consiste inicialmente na idealização do mecanismo de quatro barras, como uma cadeia vetorial no  $\mathbb{R}^2$  e exemplos de operações vetoriais. Na seção seguinte é explorada modelagem analítica da cinemática do mecanismo de quatro barras pela técnica de Freudenstein. Posteriormente é feita a dedução

das equações da velocidade e é efetuada comparação com a forma apresentada por Birglen<sup>[2]</sup>. A ultima seção é composta por implementação e resultados das comparações.

## 2 Mecanismo de 4 barras

Um mecanismo é definido como um conjunto de elos e juntas configurados de forma a produzir um movimento desejado. Um caso típico de espaço dimensional utilizado na análise de mecanismo é o  $R^2$ , em que o objeto de estudo são os mecanismos planares. Nesse caso, são consideradas as bases canônicas  $e_1 = [1, 0]$  e  $e_2 = [0, 1]$  para descrição de objetos de relevância do mecanismo, como por exemplo a posição das juntas.

### 2.1 Cadeia vetorial fechada

Um mecanismos de 4 barras pode ser idealizado como uma cadeia vetorial no espaço vetorial  $R^2$ , em que se aplicam as leis de adição, subtração e multiplicação por escalares. Para exemplificar esse conceitos, serão demonstrados 3 casos de cadeias vetoriais e suas representações matemáticas.

- a) A primeira cadeia vetorial representada pela Figura 1 é composta por 4 vetores, a expressão matemática equivalente é dada pela Equação 1

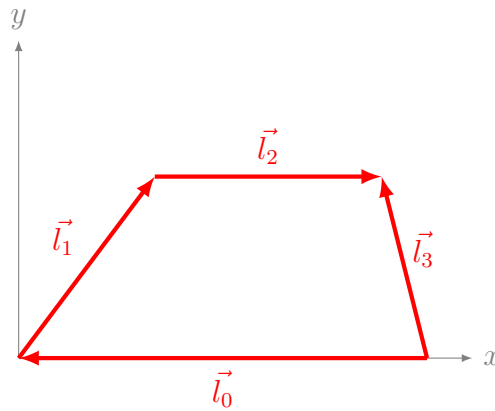


Figura 1: Cadeia vetorial a)

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 - \vec{l}_0 = 0 \quad (1)$$

Lembrando que a soma de 2 vetores, expresso de forma gráfica, é dada pela conexão do início do primeiro vetor com a ponta do segundo vetor. Isso é o que pode ser observado na Figura 1 e na sua respectiva equação, que a soma dos vetores  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3$  é um novo vetor que vai do início de  $\vec{l}_1$  até a ponta do vetor  $\vec{l}_3$ .

- b) A segunda cadeia vetorial representada pela Figura 2 ilustra o efeito da mudança de direção do vetor  $\vec{l}_3$ ,

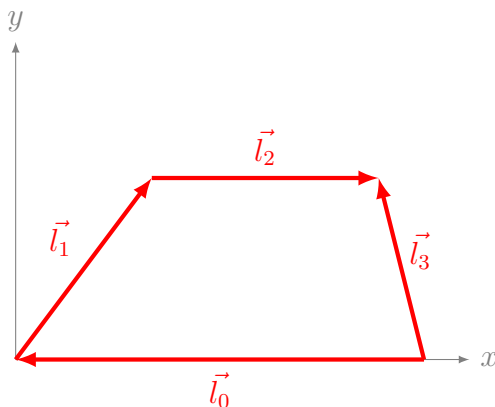


Figura 2: Cadeia vetorial b)

A representação matemática para essa cadeia,

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3$$

Considerando que os vetores são representados pelos pares ordenados,

$$\vec{l}_0 = (9, 0)$$

$$\vec{l}_1 = (3, 4)$$

$$\vec{l}_2 = (5, 0)$$

$$\vec{l}_3 = (-1, 4)$$

Para esclarecer, a soma  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$  é um novo vetor dado pelo par ordenado  $(8, 4)$ . Somando os vetores  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$ ,

$$\hat{i}] \quad 3 + 5 = 8$$

$$\hat{j}] \quad 4 + 0 = 4$$

Somando os vetores  $\vec{l}_0 + \vec{l}_3$ ,

$$\hat{i}] \quad 9 + (-1) = 8$$

$$\hat{j}] \quad 0 + 4 = 4$$

Confirmando a validade da equação da cadeia vetorial. Considerando uma nova configuração (Figura 3):

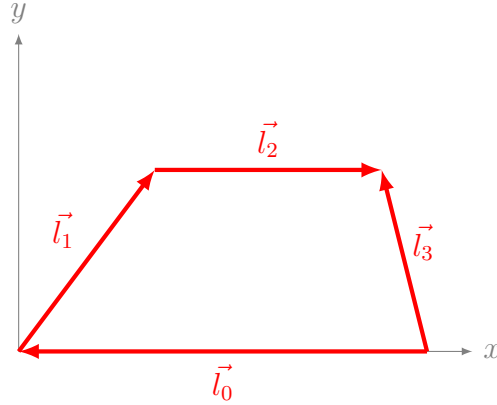


Figura 3: Cadeia vetorial c)

A representação matemática para essa cadeia:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3 - \vec{l}_0$$

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 - \vec{l}_3 + \vec{l}_0 = 0$$

considerando que os vetores são representados pelos pares ordenados:

$$\vec{l}_0 = (-9, 0)$$

$$\vec{l}_1 = (3, 4)$$

$$\vec{l}_2 = (5, 0)$$

$$\vec{l}_3 = (-1, 4)$$

podemos confirmar a igualdade,

$$\begin{array}{l} \hat{i}] \quad 3 + 5 = -1 - (-9) = 8 \\ \hat{j}] \quad 4 + 0 = 4 - 0 = 4 \end{array}$$

Com a representação vetorial estabelecida, a próxima seção aborda a modelagem analítica da cinemática do mecanismo de quatro barras.

## 2.2 Análise de posição

No trabalho de Birglen<sup>[2]</sup> não são apresentadas as equações vetoriais de posição do mecanismo de quatro barras, de forma que foi utilizado o artigo<sup>[4]</sup>, que faz a aplicação da técnica de Freudenstein. Essa metodologia é utilizada para modelagem analítica da posição do mecanismo de 4 barras, sendo função de apenas um ângulo de entrada.

Para aplicar essa metodologia, será utilizada a cadeia vetorial do o caso c) (Figura 3), adaptando a expressão para considerar os ângulos entre os elos, conforme ilustrado pela Figura 4.

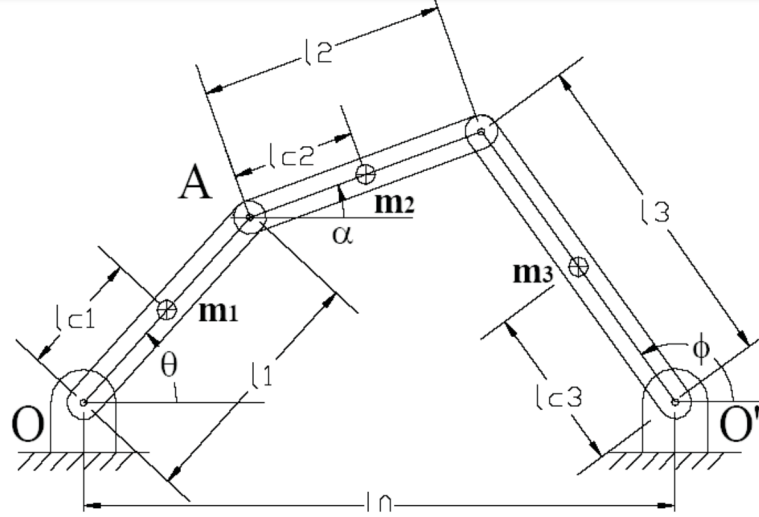


Figura 4: Mecanismo de 4 barras - configuração 1 - fonte: Tang<sup>[4]</sup>

Teremos uma equação considerando apenas a direção x e outra para direção y. Iniciando a análise pela direção x, podemos projetar os vetores nesse eixo, de forma que obtemos a expressão,

$$|l_1|\cos(\theta) + |l_2|\cos(\alpha) - |l_3|\cos(\phi) + |l_0|\cos(\beta) = 0$$

o valor de  $\beta$  para o mecanismo em análise sempre será 180, porque esse é considerado como elo fixo, ou a base do mecanismo, em função disso temos que  $\cos(180) = -1$ , resultando em,

$$|l_1|\cos(\theta) + |l_2|\cos(\alpha) - |l_3|\cos(\phi) - l_0 = 0$$

Considerando a direção  $\hat{j}$  ou y, o  $l_0$  será 0 para esse mecanismo, ou seja, ele não possui magnitude na direção em análise, assumindo o valor 0.

$$|l_1|\sin(\theta) + |l_2|\sin(\alpha) - |l_3|\sin(\phi) = 0$$

reescrevendo as duas equações, invertendo os sinais,

$$-|l_1|\cos(\theta) - |l_2|\cos(\alpha) + |l_3|\cos(\phi) + l_0 = 0 \quad (2)$$

$$-|l_1|\sin(\theta) - |l_2|\sin(\alpha) + |l_3|\sin(\phi) = 0 \quad (3)$$

É possível reescrever as equações em termos da coordenada generalizada  $\theta$ . Rearranjando as equações,

$$|l_2|\cos(\alpha) = l_0 - |l_1|\cos(\theta) + |l_3|\cos(\phi) \quad (4)$$

$$|l_2|\sin(\alpha) = -|l_1|\sin(\theta) + |l_3|\sin(\phi) \quad (5)$$

Em formato matricial, podemos escrever:

$$l_2 \begin{bmatrix} c(\alpha) \\ s(\alpha) \end{bmatrix} = -l_1 \begin{bmatrix} c(\theta) \\ s(\theta) \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} c(\phi) \\ s(\phi) \end{bmatrix} + l_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A técnica de Freudenstein consiste em manipular o sistema, somando o quadrado das duas equações. Elevando a Equação 4 ao quadrado e expandido,

$$(l_2 \cos \alpha)^2 = (l_0 - l_1 \cos \theta + l_3 \cos \phi)^2$$

$$l_2^2 \cos^2 \alpha = l_0^2 - 2l_0l_1 \cos \theta + l_1^2 \cos^2 \theta + l_3^2 \cos^2 \phi + 2l_0l_3 \cos \phi - 2l_1l_3 \cos \theta \cos \phi$$

Realizando o mesmo procedimento para a Equação 5 na direção  $\hat{j}$

$$(l_2 \sin \alpha)^2 = (-l_1 \sin \theta + l_3 \sin \phi)^2$$

$$l_2^2 \sin^2 \alpha = l_1^2 \sin^2 \theta - 2l_1l_3 \sin \theta \sin \phi + l_3^2 \sin^2 \phi$$

Agora, somamos as duas equações resultantes:

$$\begin{aligned} l_2^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) &= l_0^2 - 2l_0l_1 \cos \theta + l_1^2 \cos^2 \theta + l_3^2 \cos^2 \phi + 2l_0l_3 \cos \phi - 2l_1l_3 \cos \theta \cos \phi \\ &\quad + l_1^2 \sin^2 \theta - 2l_1l_3 \sin \theta \sin \phi + l_3^2 \sin^2 \phi \end{aligned}$$

Aplicando as identidades trigonométricas

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_0l_1 \cos \theta + 2l_0l_3 \cos \phi - 2l_1l_3(\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)$$

aplicando a distributiva no ultimo termo

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_0l_1 \cos \theta + 2l_0l_3 \cos \phi - 2l_1l_3(\cos \theta \cos \phi) - 2l_1l_3(\sin \theta \sin \phi)$$

Rearranjando,

$$\underbrace{l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_0l_1 \cos \theta}_{k_3} + \underbrace{2l_3(l_0 - l_1 \cos \theta) \cos \phi}_{k_2} - \underbrace{2l_1l_3 \sin \theta \sin \phi}_{k_1} = 0$$

Que pode ser escrito como,

$$k_1(\theta) \sin \phi + k_2(\theta) \cos \phi + k_3(\theta) = 0 \quad (7)$$

Em que:

$$- k_1(\theta) = -2l_1l_3 \sin \theta$$

$$- k_2(\theta) = 2l_3(l_0 - l_1 \cos \theta)$$

$$- k_3(\theta) = l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_0l_1 \cos \theta$$

A Equação 7 pode ser utilizada para calcular o ângulo  $\phi$  a partir do ângulo  $\theta$  de entrada.

### 2.2.1 Substituição de meio ângulo

Nosso objetivo é escrever todos os ângulos em função de  $\theta$ . De forma que podemos aplicar a substituição de Weierstrass (fórmula tangente de meio ângulo):

$$t = \tan \left( \frac{\phi}{2} \right) \quad (8)$$

$$\sin(\phi) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (9)$$

$$\cos(\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (10)$$

Aplicando a substituição na Equação 7, obtemos uma expressão quadrática na forma,

$$(k_3 - k_2)t^2 + (2k_1)t + (k_3 + k_2) = 0 \quad (11)$$

Resolvendo para t,

$$t = \frac{-k_1 \pm \sqrt{-k_3^2 + k_2^2 + k_1^2}}{k_3 - k_2} \quad (12)$$

Substituindo a Equação 8 em 12, o autor de referencia apresenta uma expressão de  $\phi$  em função de  $\theta$ ,

$$\phi(\theta) = 2 \arctan 2(-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}, k_3 - k_2) \quad (13)$$

Essa equação apresentada por Tang<sup>[4]</sup> é um pouco diferente do que foi obtido em máxima. Um ponto importante é que a função arco tangente mencionada aqui é uma variação da função atan, que toma 2 valores de entrada, por isso a separação por vírgula. A equação obtida no Máxima possui a forma,

$$\phi(\theta) = 2 \arctan \left( \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 - k_2} \right) \quad (14)$$

Dividindo a Equação 5 pela 4, obtemos a expressão para  $\alpha$ ,

$$\alpha = \arctan 2(-l_1 \sin \theta + l_3 \sin \phi, l_0 - l_1 \cos \theta + l_3 \cos \phi) \quad (15)$$

Todo esse desenvolvimento algébrico foi efetuado via o software wxMaxima, os comandos estão disponíveis no GitHub, conforme link inserido ao final do documento. Obtidas as expressões analíticas para posição do mecanismo de quatro barra, a próxima seção aborda a modelagem analítica da velocidade.

### 2.3 Análise de velocidade

Nessa seção serão exploradas duas formas de expressar a velocidade em um mecanismo de quatro barras, na primeira forma, a equação da velocidade é obtida a partir da derivada temporal da expressão da posição que é uma forma comumente utilizada. No segundo caso será analisada a expressão da velocidade que aparece no artigo<sup>[2]</sup>, que também é derivada a partir das expressões de posição, porém resulta em uma forma alternativa das equações de velocidade.

O objetivo é verificar se as duas formas apresentam os mesmos resultados, e entender os detalhes que não são apresentados pelo autor do artigo<sup>[2]</sup>.

Para obter uma forma compacta das equações de posição é efetuada manipulação da Equação 6,

$$\begin{aligned} -l_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} + l_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} l_0 & -l_1 \cos(\theta) & -l_2 \cos(\alpha) & l_3 \cos(\phi) \\ 0 & -l_1 \sin(\theta) & -l_2 \sin(\alpha) & l_3 \sin(\phi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando que o sistema está em movimento, é possível afirmar que todos ângulos são função do tempo, porém não conhecemos a expressão explícita que descreve essa dependência. Nessa condição podemos aplicar a regra da cadeia,

$$\begin{bmatrix} 0 & l_1 \sin(\theta) \dot{\theta} & l_2 \sin(\alpha) \dot{\alpha} & -l_3 \sin(\phi) \dot{\phi} \\ 0 & -l_1 \cos(\theta) \dot{\theta} & -l_2 \cos(\alpha) \dot{\alpha} & l_3 \cos(\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipulando a expressão obtemos,

$$\begin{bmatrix} 0 & l_1 \sin(\theta) & l_2 \sin(\alpha) & -l_3 \sin(\phi) \\ 0 & -l_1 \cos(\theta) & -l_2 \cos(\alpha) & l_3 \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser reescrito em uma forma final,

$$\begin{bmatrix} l_2 \sin(\alpha) & -l_3 \sin(\phi) \\ -l_2 \cos(\alpha) & l_3 \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\theta) \\ l_1 \cos(\theta) \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (17)$$



Dada uma velocidade de entrada  $\dot{\theta}$ , é possível calcular as velocidades dos ângulos dependentes,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\phi}$ .

### 2.3.1 Forma alternativa

No trabalho<sup>[2]</sup>, não são apresentadas as equações de posição, passando direto para a equação de velocidade na forma,

$$\dot{\alpha}l_1E\vec{u}_1 = \dot{\phi}l_3E\vec{v}_1 - \dot{\beta}l_2E\vec{u}_2 - \dot{\gamma}l_2E\vec{u}_2 \quad (18)$$

em seguida, o autor apresenta o sistema de equações  $(3 \times 3)$  das velocidades em forma matricial,

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \vec{v}\dot{\phi} \quad (19)$$

em que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{A}_{[3 \times 3]} = \begin{bmatrix} l_1E\vec{u}_1 & 0 & l_2E\vec{u}_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{[3 \times 1]} = \begin{bmatrix} l_3E\vec{v}_1 - l_2E\vec{u}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

detacando que,

$$l_1E\vec{u}_1 = l_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix}$$

as variáveis,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\phi}$  são velocidades angulares associadas aos ângulos do mecanismo de 4 barras. A representação gráfica dos vetores mencionados pode ser observada conforme a Figura 5.

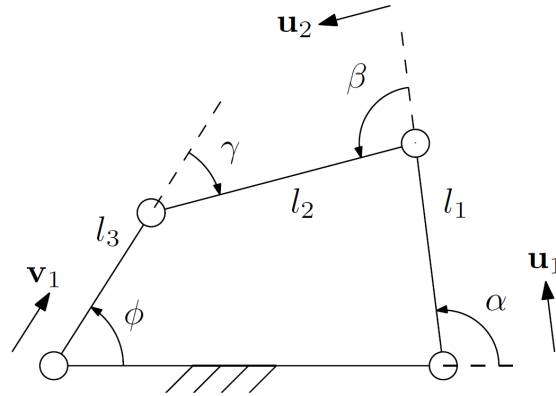


Figura 5: Mecanismo de quatro barras - configuração 2 - Fonte: Birglen<sup>[2]</sup>

Note que Birglen<sup>[2]</sup> utiliza uma notação diferente de Tang<sup>[4]</sup>, de forma que é preciso ficar atento com as diferenças entre ângulos e elos. Manipulando a Equação 19

temos por fim,

$$\begin{bmatrix} l_1 E\vec{u}_1 & 0 & l_2 E\vec{u}_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 E\vec{v}_1 - l_2 E\vec{u}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (20)$$

## 2.4 Aplicação

Nessa seção será efetuada análise de posição pela técnica de Freudenstein, considerando um mecanismo conforme a nomenclatura apresentada na Figura 4 e com as dimensões dos elos apresentadas na Tabela 1.

|             |       |       |       |       |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| Elo         | $l_0$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
| Comprimento | 80    | 20    | 66    | 56    |

Tabela 1: Dimensões dos elos em milímetros

Para uma volta completa de  $360^\circ$  no ângulo de entrada  $\theta$ , aplicando as equações de posição desenvolvidas, teremos os gráficos de  $\phi$  e  $\alpha$  em função de  $\theta$ , conforme ilustrado pelas Figuras 6, 7 respectivamente.

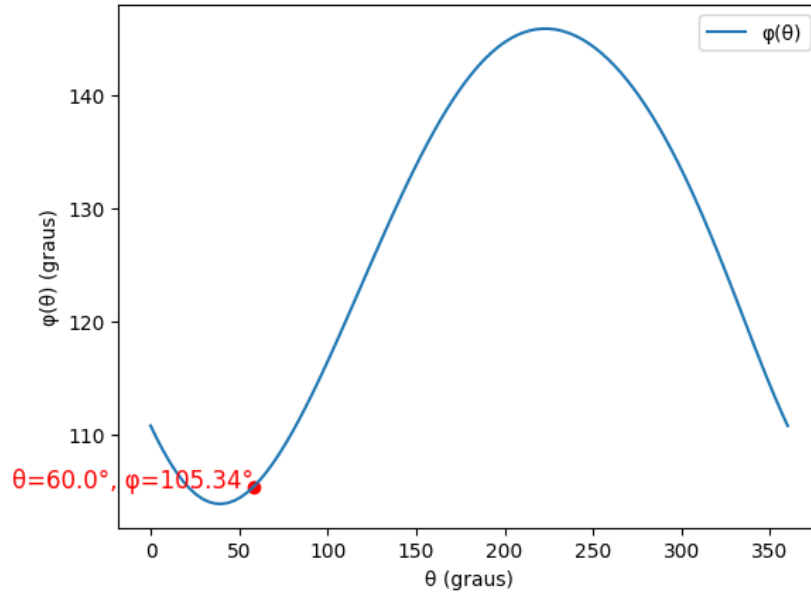


Figura 6: Ângulo  $\phi$  em função de  $\theta$

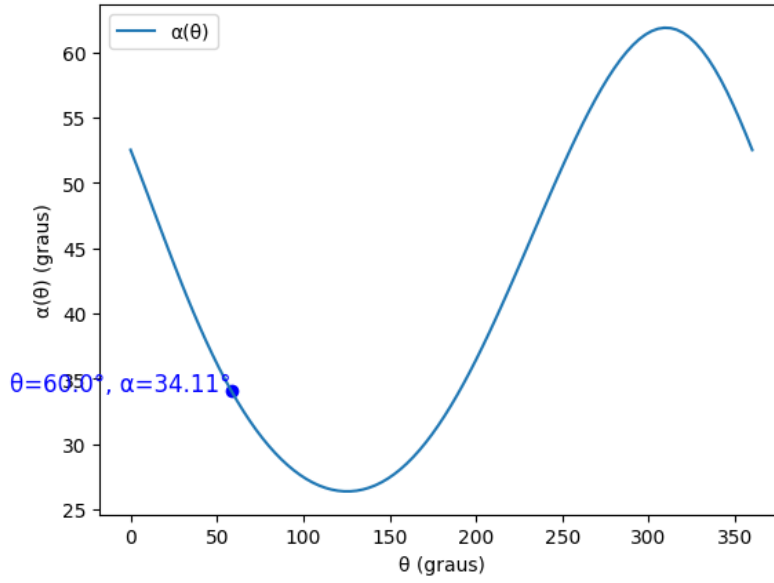


Figura 7: Ângulo  $\alpha$  em função de  $\theta$

Para análise da velocidade, considerando velocidade angular de entrada constante em  $\dot{\theta} = 25 \text{ rad/s}$  e aplicando a Equação 17 obtemos os gráficos de  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\alpha}$  conforme as Figuras 8 e 9 respectivamente.

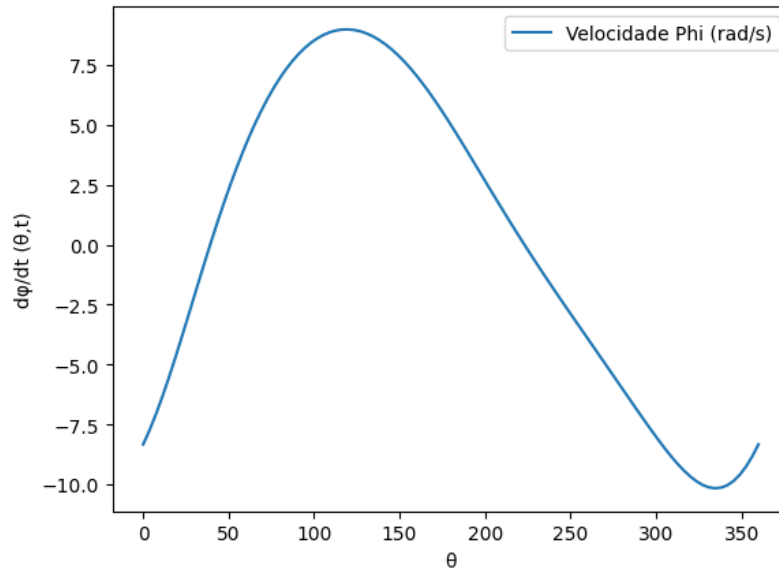


Figura 8: Velocidade angular  $\dot{\phi}$  em função de  $\theta$

Para essas análises, foram desenvolvidos códigos escritos em Python, que estão disponíveis no GitHub conforme link apresentado no final desse documento.

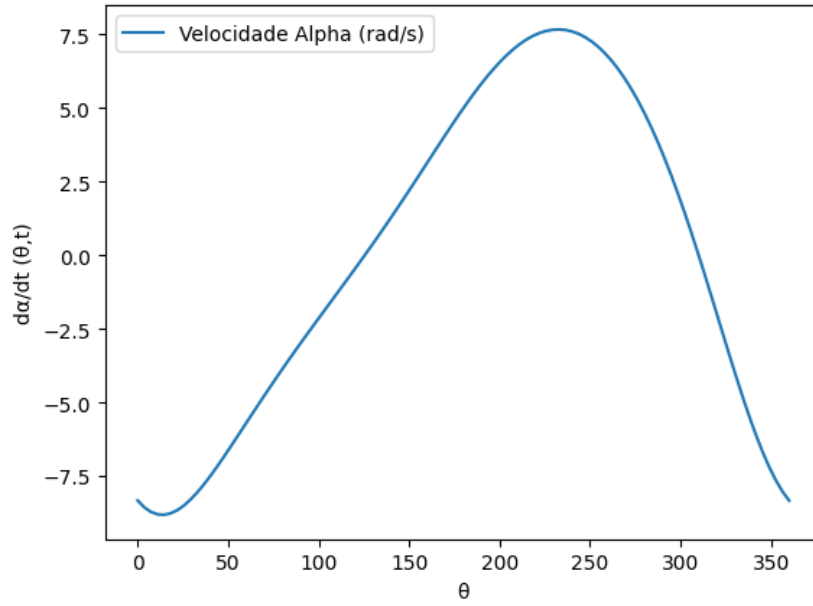


Figura 9: Velocidade angular  $\dot{\alpha}$  em função de  $\theta$

#### 2.4.1 Comparação

Como mencionado anteriormente, as nomenclaturas adotadas nas análises de velocidade são diferentes, de forma que é necessário verificar as equivalências entre as variáveis para efetuar a comparação. A Tabela 2 demonstra as equivalências entre as configurações para uma posição de entrada específica ( $\theta = 60^\circ$ ).

|                           |       |       |       |       |            |                 |                   |                |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|------------|-----------------|-------------------|----------------|
| Configuração 1 (Figura 4) | $l_0$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $\theta$   | $\alpha$        | $\theta - \alpha$ | $\phi$         |
| Configuração 2 (Figura 5) | $l_0$ | $l_3$ | $l_2$ | $l_1$ | $\phi$     | $\phi - \gamma$ | $\gamma$          | $\alpha$       |
| Valor                     | 80    | 20    | 66    | 56    | $60^\circ$ | $33,69^\circ$   | $26,31^\circ$     | $105,63^\circ$ |

Tabela 2: Equivalência de variáveis

Foi efetuada apenas a verificação da velocidade angular  $\phi$  (configuração 1) com relação a  $\alpha$  (configuração 2). A implementação do cálculo conforme a técnica alternativa expressada na Equação 20<sup>[2]</sup> foi efetuada em Julia e consta ao final do documento. O gráfico de velocidade obtido pode ser observado conforme a Figura 10.

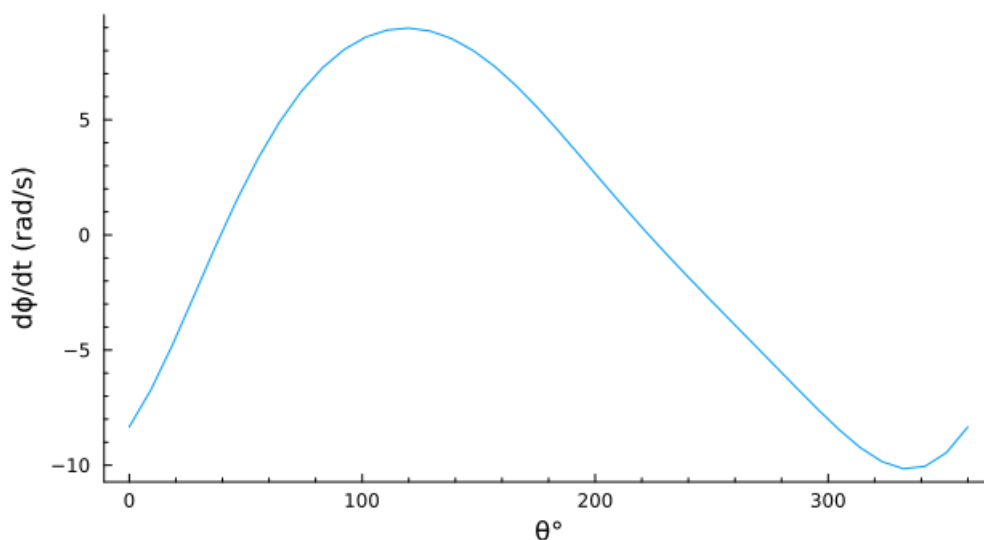


Figura 10: Velocidade angular

Feita essa comparação confirmamos a validade da técnica alternativa como método para cálculo de velocidade angular das juntas do mecanismo de quatro barras, destacando que a comparação proposta só é adequada para o ângulo  $\phi$  com  $\alpha$ , dado que a expressão da velocidade da configuração 1 foi obtida de forma distinta da configuração 2.

### 3 Conclusão

Os artigos em estudo foram verificados em detalhe quanto às técnicas apresentadas para análise do mecanismo de quatro barras, tanto em relação a posição como a velocidade, aumentando o entendimento por meio de códigos para a parte analítica e numérica. Esse artigo, bem como o material auxiliar produzido são recursos válidos para auxiliar estudantes na exploração da matéria de mecanismos que é base para aplicações em robótica, principalmente em dispositivos do tipo garra e mãos robóticas.

Para estudos futuros recomenda-se:

- Obtenção da expressão de posição para configuração 2 (Figura 5)
- Análise de mecanismos de quatro barras sobrepostos<sup>[2]</sup>
- Análise dinâmica<sup>[4]</sup>

Todos os códigos utilizados para esta análise estão disponíveis em: [GitHub - Freudenstein 4-Bar](#)<sup>[3]</sup>

## 4 Implementação

O código em Julia desenvolvido para análise de posição e velocidade está apresentado a seguir. Para análise de posição é preciso utilizar as funções auxiliares,

```
function solve_alpha(l0,l1,l2,l3,θ,φ)

    x = l0 - l1*cos(θ) + l3*cos(φ)
    y = - l1*sin(θ) + l3*sin(φ)

    α = atan(y , x)
    #α = θ - α

    return α
end

function angs(l0,l1,l2,l3,θ)
    k1 = -2*l1*l3*sin(θ)
    k2 = 2*l3*(l0-(l1*cos(θ)))
    k3 = l0^2 + l1^2 - l2^2 + l3^2 - 2*l0*l1*cos(θ)

    Δ = k1^2 + k2^2 - k3^2
    a = +k1 + sqrt(Δ)

    φ = (2 * atan(k3 - k2 , a))+π
    α = solve_alpha(l0,l1,l2,l3,θ,φ)
    return φ,α
end
```

A função main para definir a posição de um mecanismo de quatro barras e imprimir os gráficos:

```
function main(l0, l1, l2, l3)
    θs = range(0, stop=2π, length=40)
    φs = []
    αs = []

    for θ in θs
        phi,alpha = angs(l0,l1, l2, l3, θ)
        push!( φs, phi )
        push!( αs, alpha )
    end

    return φs, αs, θs
end

φs, αs, θs = main(l0,l1,l2,l3)

display(plot(rad2deg.(θs), rad2deg.(φs), label="φ(θ)", xlabel="θ", ylabel="φ(θ)"
, title="Variacao de φ com θ"))
```

```
display(plot(rad2deg.( $\theta$ s), rad2deg.( $\alpha$ s), label=" $\alpha(\theta)$ ", xlabel=" $\theta$ ", ylabel=" $\alpha(\theta)$ "
, title="Variacao de  $\alpha$  com  $\theta$ "))
```

Para a velocidade, são necessárias as funções auxiliares,

```


    ...
Monta as matrizes A e v para calculo das velociades angulares
    ...

function A_i(l1,l2,l3,u1,u2,v1)
    E = [0 -1 ; 1 0]

    A = [l1*E*u1 zeros(2) l2*E*u2;
          1 1 -1]

    v = [(l3*E*v1)-(l2*E*u2);1]

    return A,v
end

    ...
Retorna vetor unitário a partir de uma magnitude e um ângulo
    ...

function unitario(v, $\theta$ )
    vi = v*cos( $\theta$ )
    vj = v*sin( $\theta$ )
    nm = [vi,vj]

    n = nm/norm(nm)

    return n
end


```

Exemplo de função que calula as velocidades angulares pela técnica de Birglen.

```

function velocidades()
    l0 = 80
    l3 = 20
    l2 = 66
    l1 = 56

     $\varphi$ s,  $\alpha$ s,  $\theta$ s = main(l0,l3,l2,l1)

    u1s = []
    u2s = []
    v1s = []

    vs = []

    tamanho = length( $\theta$ s)

    for ( $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ) in zip( $\varphi$ s,  $\alpha$ s,  $\theta$ s)

```

```

        push!(u1s, unitario(l3,  $\varphi$ ))
        push!(u2s, -unitario(l2,  $\alpha$ ))
        push!(v1s, unitario(l1,  $\theta$ ))
    end

     $\phi v = 25.0$  #rad / s

    for i in 1:tamanho
        Ai,vi = A_i(l1,l2,l3,u1s[i],u2s[i],v1s[i])

        vel_i = (Ai \ vi) *  $\phi v$ 
        push!(vs,vel_i[1])
    end

    return vs, $\theta s$ 
end

vs, $\theta s$  = velocidades()
display(plot(rad2deg. $\theta s$ ), vs, label=false, xlabel=" $\theta^\circ$ ", ylabel=" $d\varphi/dt$  (rad/s)",
    size=(1000/1.6,550/1.6),grid=false,minorticks=5))

```

## Referências

- [1] Jérôme Bastien and Lionel Birglen. Variable stiffness soft robotic fingers using snap-fit kinematic reconfiguration. *IEEE Transactions on Robotics*, 39(6):4567–4580, 2023.
- [2] Lionel Birglen. Enhancing versatility and safety of industrial grippers with adaptive robotic fingers. In *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2911–2916, 2015.
- [3] ISI Manufatura. freudenstein\_4bar. [https://github.com/isimanufatura/freudenstein\\_4bar](https://github.com/isimanufatura/freudenstein_4bar), 2024. Acesso em: 04 fev. 2025.
- [4] Chin Pei Tang. Lagrangian dynamic formulation of a four-bar mechanism with minimal coordinates. [http://www.usp.br/ldsv/wp-content/uploads/2014/10/Fourbar\\_Lagrange\\_10.pdf](http://www.usp.br/ldsv/wp-content/uploads/2014/10/Fourbar_Lagrange_10.pdf), 2010.