Grupo SoftRobots - Mecanismo de quatro barras

Cesar Augusto Alves de Meira

30 de janeiro de 2025

1 Introdução

O objetivo desse texto é explorar os artigos [1] e [2]. Principalmente o artigo [1] que trata da otimização de uma garra de rigidez variável. O trabalho em foco possuí certo nível de complexidade e se vale de diferentes conceitos, sendo um dos principais a análise cinemática de um mecanismo de 4 barras, quanto a posição e a velocidade. Posto isso o objetivo desse texto é detalhar os conceitos dessa análise cinemática, de forma a auxiliar a compreensão do artigo em estudo.
O artigo [2] apresenta uma expressão para análise de velocidade, porém omite a expressão de posição, de forma que é replicada a técnica de Freudenstein conforme apresentado em [3].
A estrutura deste texto consiste inicialmente na idealização do mecanismo de quatro barras, como uma cadeia vetorial no R^2 e exemplos de operações vetoriais. Na seção seguinte é explorada modelagem analítica da cinemática do mecanismo de quatro barras pela técnica de Freudenstein. Posteriormente é feita a dedução das equações da velocidade e é efetuada comparação com a forma apresentada por [2]. A ultima seção é composta por implementação e resultados das comparações.

2 Mecanismo de quatro barras

Um mecanismo é definido como um conjunto de elos e juntas configurados de forma a produzir um movimento desejado. Um caso tipico de espaço dimensional utilizado na análise de mecanismo é o R^2, em que o objeto de estudo são os mecanismos planares. Nesse caso, são consideradas as bases canônicas $e_1 = [1, 0]$ e $e_2 = [0, 1]$ para descrição de objetos de relevância do mecanismo, como por exemplo a posição das juntas.

2.1 Cadeia vetorial fechada

Um mecanismos de 4 barras pode ser idealizado como uma cadeia vetorial no espaço vetorial R^2, em que se aplicam as leis de adição, subtração e multiplicação por escalares. Para exemplificar esse conceitos, serão demonstrados 3 casos de cadeias vetoriais e suas representações matemáticas.

a) A primeira cadeia vetorial representada pela Figura 1 é composta por 4 vetores, a expressão matemática equivalente é dada pela Equação 1

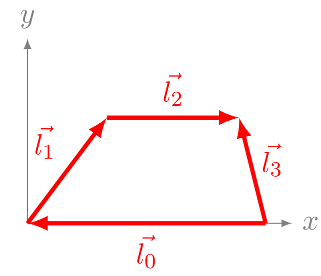

Figura 1: Cadeia vetorial a

$$\vec{l_1} + \vec{l_2} + \vec{l_3} - \vec{l_0} = 0 \tag{1}$$

Lembrando que a soma de 2 vetores, expresso de forma gráfica, é dada pela conexão do inicio do primeiro vetor com a ponta do segundo vetor. Isso é o que pode ser observado na Figura 1 e na sua respectiva equação, que a soma dos vetores $\vec{l_1} + \vec{l_2} + \vec{l_3}$ é um novo vetor que vai do inicio de $\vec{l_1}$ até a ponta do vetor $\vec{l_3}$.

b) A segunda cadeia vetorial representada pela Figura 2 ilustra o efeito da mudança de direção do vetor $\vec{l_3}$,

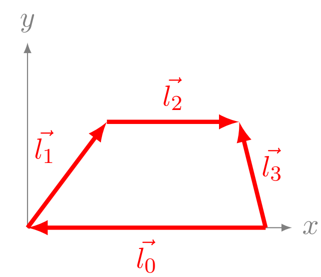

Figura 2: Cadeia vetorial b

A representação matemática para essa cadeia,

$$\vec{l_1} + \vec{l_2} = \vec{l_0} + \vec{l_3}$$

Considerando que os vetores são representados pelos pares ordenados,

$$\vec{l_0} = (9, 0)$$

$$\vec{l_1} = (3, 4)$$

$$\vec{l_2} = (5, 0)$$

$$\vec{l_3} = (-1, 4)$$

Para esclarecer, a soma $l_1 + l_2$ é um novo vetor dado pelo par ordenado $(8, 4)$. Somando os vetores $\vec{l_1} + \vec{l_2}$,

$$\hat{i}] \quad 3 + 5 = 8$$

$$\hat{j}] \quad 4 + 0 = 4$$

Somando os vetores $\vec{l_0} + \vec{l_3}$,

$$\hat{i}] \quad 9 + (-1) = 8$$

$$\hat{j}] \quad 0 + 4 = 4$$

Confirmando a validade da equação da cadeia vetorial.
Considerando uma nova configuração:

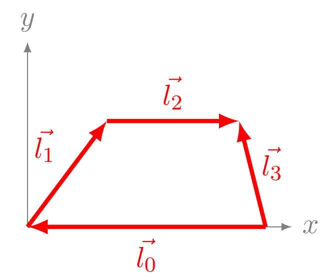

Figura 3: Cadeia vetorial c

A representação matemática para essa cadeia:

$$\vec{l_1} + \vec{l_2} = \vec{l_3} - \vec{l_0}$$

$$\vec{l_1} + \vec{l_2} - \vec{l_3} + \vec{l_0} = 0$$

considerando que os vetores são representados pelos pares ordenados:

$$\vec{l_0} = (-9, 0)$$

$$\vec{l_1} = (3, 4)$$

$$\vec{l_2} = (5, 0)$$

$$\vec{l_3} = (-1, 4)$$

podemos confirmar a igualdade,

$$\hat{i}] \quad 3 + 5 = -1 - (-9) = 8$$

$$\hat{j}] \quad 4 + 0 = 4 - 0 = 4$$

Com a representação vetorial estabelecida, a próxima seção aborda a modelagem analítica da cinemática do mecanismo de quatro barras.

2.2 Análise de posição

No trabalho de [2] não são apresentadas as equações vetoriais de posição do mecanismo de quatro barras, de forma que foi utilizado o artigo [3], que faz a aplicação da técnica de Freudenstein. Essa metodologia é utilizada para modelagem analítica da posição do mecanismo de 4 barras, sendo função de apenas um angulo de entrada.
Para aplicar essa metodologia, será utilizada a cadeia vetorial do o caso c) (Figura 3), adaptando a expressão para considerar os ângulos entre os elos, conforme ilustrado pela Figura 4

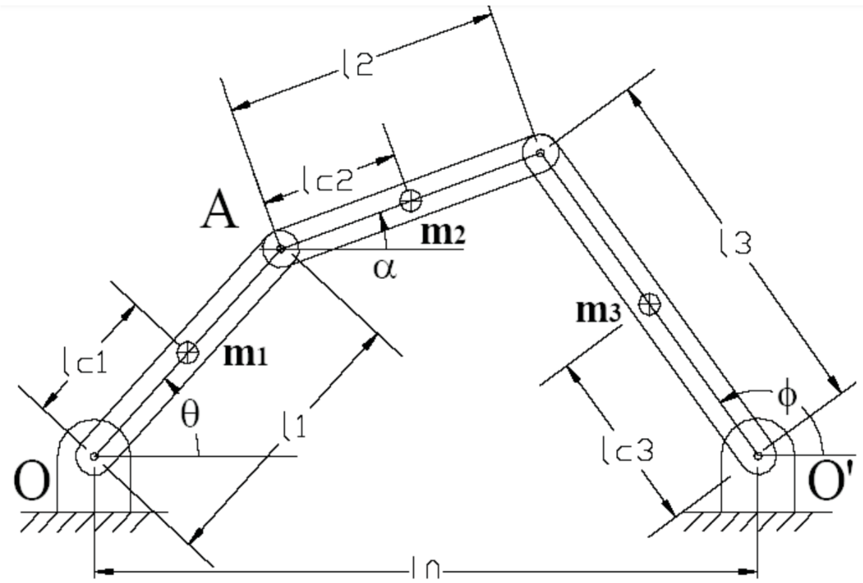

Figura 4: Mecanismo de 4 barras na configuração 1 - fonte: [3]

Teremos uma equação considerando apenas a direção x e outra para direção y. Iniciando a análise pela direção x, podemos projetar os vetores nesse eixo, de forma que obtemos a expressão,

$$|l_1|cos(\theta) + |l_2|cos(\alpha) - |l_3|cos(\phi) + |l_0|cos(\beta) = 0$$

o valor de β para o mecanismo em análise sempre será 180, porque esse é considerado como elo fixo, ou a base do mecanismo, em função disso temos que $\cos(180) = -1$, resultando em,

$$|l_1|cos(\theta) + |l_2|cos(\alpha) - |l_3|cos(\phi) - l_0 = 0$$

Considerando a direção $\hat{j}$ ou y, o l_0 será 0 para esse mecanismo, ou seja, ele não possuí magnitude na direção em análise, assumindo o valor 0.

$$|l_1|sin(\theta) + |l_2|sin(\alpha) - |l_3|sin(\phi) = 0$$

reescrevendo as duas equações, invertendo os sinais,

$$-|l_1|cos(\theta) - |l_2|cos(\alpha) + |l_3|cos(\phi) + l_0 = 0 \tag{2}$$

$$-|l_1|sin(\theta) - |l_2|sin(\alpha) + |l_3|sin(\phi) = 0 \tag{3}$$

É possível reescrever as equações em termos da coordenada generalizada θ.
Rearranjando as equações,

$$|l_2|cos(\alpha) = l_0 - |l_1|cos(\theta) + |l_3|cos(\phi) \tag{4}$$

$$|l_2|sin(\alpha) = -|l_1|sin(\theta) + |l_3|sin(\phi) \tag{5}$$

Em formato matricial, podemos escrever:

$$l_2 \begin{bmatrix} c(\alpha) \\ s(\alpha) \end{bmatrix} = -l_1 \begin{bmatrix} c(\theta) \\ s(\theta) \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} c(\phi) \\ s(\phi) \end{bmatrix} + l_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A técnica de Freudenstein consiste em manipular o sistema, somando o quadrado das duas equações. Elevando a Equação 4 ao quadrado e expandido,

$$(l_2 \cos\alpha)^2 = (l_0 - l_1 \cos\theta + l_3 \cos\phi)^2$$
$$l_2^2 \cos^2\alpha = l_0^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta + l_1^2 \cos^2\theta + l_3^2 \cos^2\phi + 2l_0 l_3 \cos\phi - 2l_1 l_3 \cos\theta \cos\phi$$

Realizando o mesmo procedimento para a Equação 5 na direção $\hat{j}$

$$(l_2 \sin\alpha)^2 = (-l_1 \sin\theta + l_3 \sin\phi)^2$$

$$l_2^2 \sin^2\alpha = l_1^2 \sin^2\theta - 2l_1 l_3 \sin\theta \sin\phi + l_3^2 \sin^2\phi$$

Agora, somamos as duas equações resultantes:

$$l_2^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = l_0^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta + l_1^2 \cos^2\theta + l_3^2 \cos^2\phi + 2l_0 l_3 \cos\phi - 2l_1 l_3 \cos\theta \cos\phi$$

$$+ l_1^2 \sin^2\theta - 2l_1 l_3 \sin\theta \sin\phi + l_3^2 \sin^2\phi$$

Aplicando as identidades trigonométricas

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta + 2l_0 l_3 \cos\phi - 2l_1 l_3(\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi)$$

aplicando a distributiva no ultimo termo

$$l_2^2 = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta + 2l_0 l_3 \cos\phi - 2l_1 l_3(\cos\theta \cos\phi) - 2l_1 l_3(\sin\theta \sin\phi)$$

Rearranjando,

$$\underbrace{l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta}_{k_3} + \underbrace{2l_3(l_0 - l_1 \cos\theta)}_{k_2} \cos\phi - \underbrace{2l_1 l_3 \sin\theta}_{k_1} \sin\phi = 0$$

Que pode ser escrito como,

$$k_1(\theta) \sin\phi + k_2(\theta) \cos\phi + k_3(\theta) = 0 \tag{7}$$

Em que:
- $k_1(\theta) = -2l_1 l_3 \sin\theta$
- $k_2(\theta) = 2l_3(l_0 - l_1 \cos\theta)$
- $k_3(\theta) = l_0^2 + l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2l_0 l_1 \cos\theta$

A equação 7 pode ser utilizada para calcular o angulo ϕ a partir do angulo θ de entrada.

2.2.1 Substituição de meio ângulo

Nosso objetivo é escrever todos os ângulos em função de θ. De forma que podemos aplicar a substituição de Weierstrass (fórmula tangente de meio ângulo):

$$t = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{8}$$

$$\sin(\phi) = \frac{2t}{1+t^2} \tag{9}$$

$$\cos(\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{10}$$

Aplicando a substituição na Equação 7, obtemos uma expressão quadrática na forma,

$$(k_3 - k_2)t^2 + (2k_1)t + (k_3 + k_2) = 0 \tag{11}$$

Resolvendo para t,

$$t = \frac{-k_1 \pm \sqrt{-k_3^2 + k_2^2 + k_1^2}}{k3 - k2} \tag{12}$$

Substituindo a Equação 8 em 12, o autor de referencia apresenta uma expressão de ϕ em função de θ,

$$\phi(\theta) = 2 \arctan 2(-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}, k_3 - k_2) \tag{13}$$

Essa equação apresentada por [3] é um pouco diferente do que foi obtido em máxima. Um ponto importante é que a função arco tangente mencionada aqui é uma variação da função atan, que toma 2 valores de entrada, por isso a separação por virgula. A equação obtida no Máxima possuí a forma,

$$\phi(\theta) = 2 \arctan \left(\frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 - k_2} \right) \tag{14}$$

Dividindo a Equação 5 pela 4, obtemos a expressão para α,

$$\alpha = \arctan 2(-l_1 \sin\theta + l_3 \sin\phi, l_0 - l_1 \cos\theta + l_3 \cos\phi) \tag{15}$$

Todo esse desenvolvimento algébrico foi efetuado via o software wxMaxima, os comandos estão disponíveis no GitHub, conforme link inserido ao final do documento. Obtidas as expressões analáticas para posição do mecanismo de quatro barra, a próxima seção aborda a modelagem analítica da velocidade.

2.3 Análise de velocidade

Nessa seção serão exploradas duas formas de expressar a velocidade em um mecanismo de quatro barras, na primeira forma, a equação da velocidade é obtida a partir da derivada temporal da expressão da posição que é uma forma comumente utilizada. No segundo caso será analisada a expressão da velocidade que aparece no artigo [2], que também é derivada a partir das expressões de posição, porém resulta em uma forma alternativa das equações de velocidade.
O objetivo é verificar se as duas formas apresentam os mesmos resultados, e entender os detalhes que não são apresentados pelo autor do artigo [2].
Para obter uma forma compacta das equações de posição é efetuada manipulação da Equação 6,

$$-l_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} - l_2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} l_3 \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} + l_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} l_0 & -l_1 \cos(\theta) & -l_2 \cos(\alpha) & l_3 \cos(\phi) \\ 0 & -l_1 \sin(\theta) & -l_2 \sin(\alpha) & l_3 \sin(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Considerando que o sistema está em movimento, é possível afirmar que todos ângulos são função do tempo, porém não conhecemos a expressão explicita que descreve essa dependência. Nessa condição podemos aplicar a regra da cadeia,

$$\begin{bmatrix} 0 & l_1 \sin(\theta)\dot{\theta} & l_2 \sin(\alpha)\dot{\alpha} & -l_3 \sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 & -l_1 \cos(\theta)\dot{\theta} & -l_2 \cos(\alpha)\dot{\alpha} & l_3 \cos(\phi)\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipulando a expressão obtemos,

$$\begin{bmatrix} 0 & l_1\sin(\theta) & l_2\sin(\alpha) & -l_3\sin(\phi) \\ 0 & -l_1\cos(\theta) & -l_2\cos(\alpha) & l_3\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser reescrito em uma forma final,

$$\begin{bmatrix} l_2\sin(\alpha) & -l_3\sin(\phi) \\ -l_2\cos(\alpha) & l_3\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta) \\ l_1\cos(\theta) \end{bmatrix} \dot{\theta} \tag{17}$$

Dada uma velocidade de entrada $\dot{\theta}$, é possível calcular as velocidades dos ângulos dependentes, $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$.

2.3.1 Forma alternativa

No trabalho [2], não são apresentadas as equações de posição, passando direto para a equação de velocidade na forma,

$$\dot{\alpha} l_1 E\vec{u}_1 = \dot{\phi} l_3 E\vec{v}_1 - \dot{\phi} l_2 E\vec{u}_2 - \dot{\gamma} l_2 E\vec{u}_2 \tag{18}$$

em seguida, o autor apresenta o sistema de equações (3×3) das velocidades em forma matricial,

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \vec{v}\dot{\phi} \tag{19}$$

em que **A**, **v** e **E**,

$$\mathbf{A}_{[3\times3]} = \begin{bmatrix} l_1 E\vec{u}_1 & 0 & l_2 E u_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{[3\times1]} = \begin{bmatrix} l_3 E\vec{v}_1 - l_2 E\vec{u}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

detacando que,

$$l_1 E\vec{u}_1 = l_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \end{bmatrix}$$

as variáveis, $\dot{\alpha}, \dot{\gamma}, \dot{\beta}$ e $\dot{\phi}$ são velocidades angulares associadas aos ângulos do mecanismo de 4 barras. A representação gráfica dos vetores mencionados pode ser observada conforme a Figura 5.

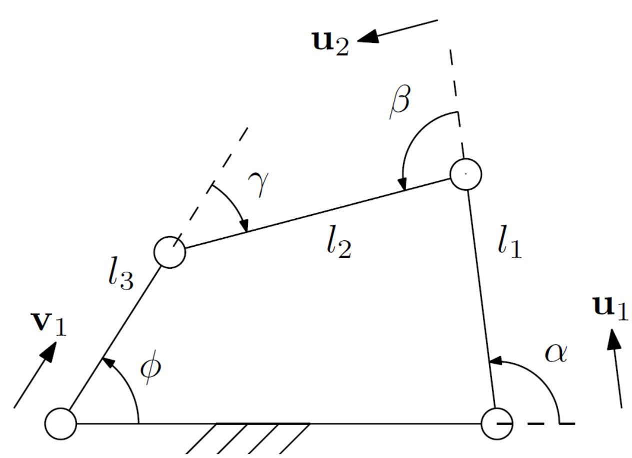

Figura 5: Mecanismo de quatro barras configuração 2 - Fonte: [2]

Note que [2] utiliza uma notação diferente de [3], de forma que é preciso ficar atento com as diferenças entre angulos e elos. Manipulando a Equação 19 temos por fim,

$$\begin{bmatrix} l_1 E\vec{u}_1 & 0 & l_2 E u_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 E\vec{v}_1 - l_2 E\vec{u}_2 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} \tag{20}$$

2.4 Aplicação

Considerando um mecanismo conforme a nomenclatura apresentada na Figura 4 e com as dimensões dos elos apresentadas na Tabela 1.

Elo	0	1	2	3
comprimento	80	20	66	56

Tabela 1: Dimensões dos elos

Para uma volta completa de 360° no ângulo de entrada θ, aplicando as equações de posição desenvolvidas, teremos os gráficos de ϕ e α em função de θ, conforme ilustrado pelas Figuras 6, 7 respectivamente.

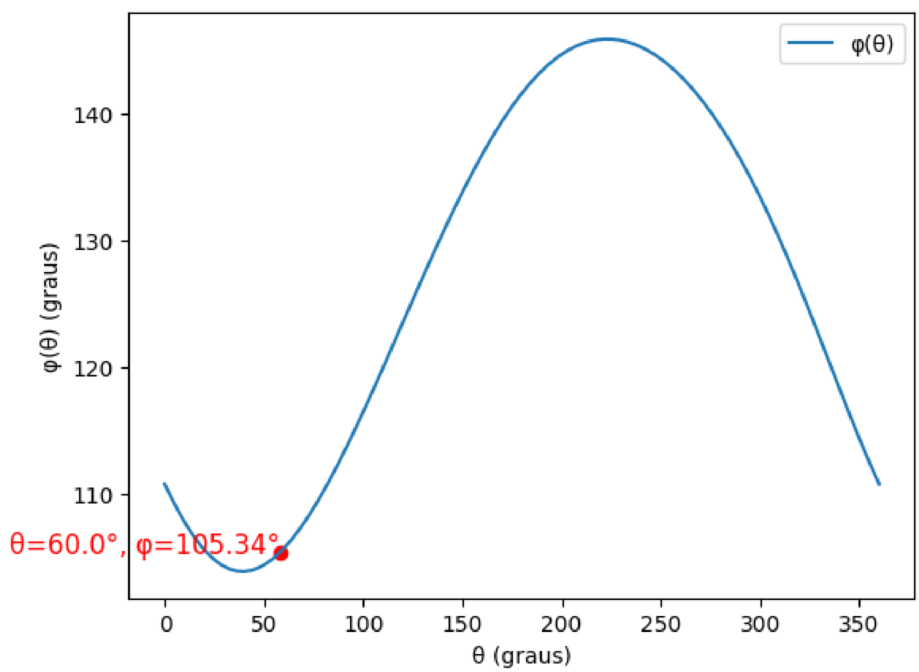

Figura 6: Angulo ϕ em função de θ

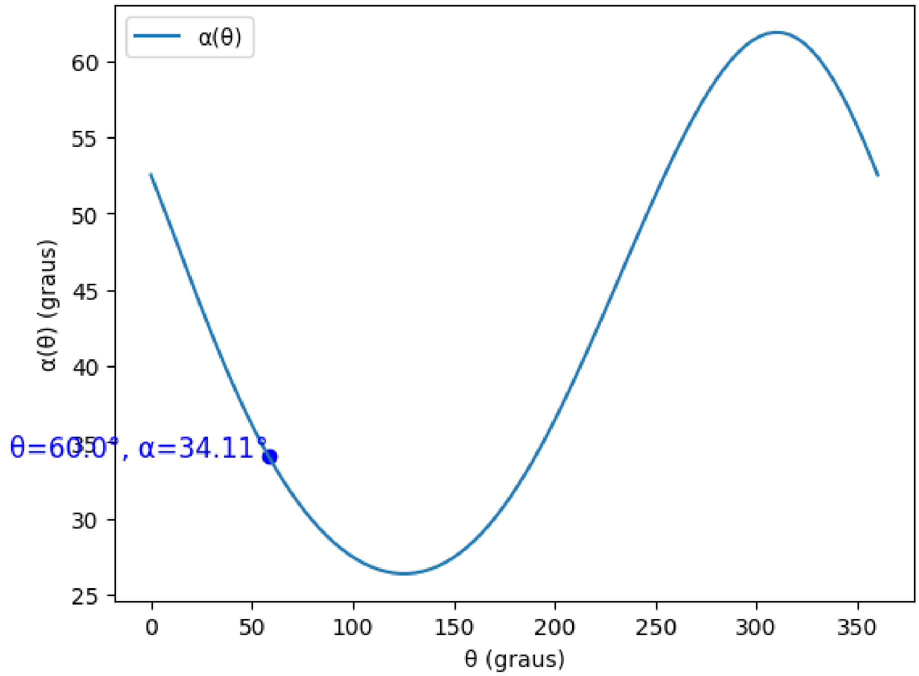

Figura 7: Angulo α em função de θ

Para análise da velocidade, considerando velocidade angular de entrada constante em $\dot{\theta} = 25\ rad/s$ e aplicando a Equação 17 obtemos os gráficos de $\dot{\phi}$ e $\dot{\alpha}$ conforme as Figuras 8 e 9 respectivamente.

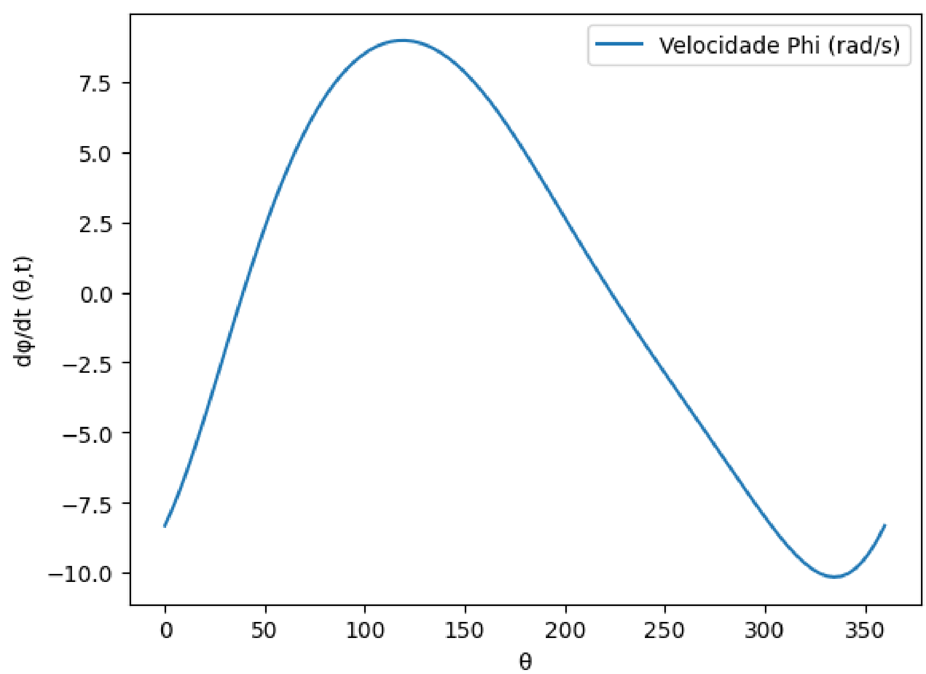

Figura 8: Velocidade angular $\dot{\phi}$ en função de θ

Para essas análises, foram desenvolvidos códigos escritos em Python, que estão disponíveis no

GitHub conforme link apresentado no final do documento.

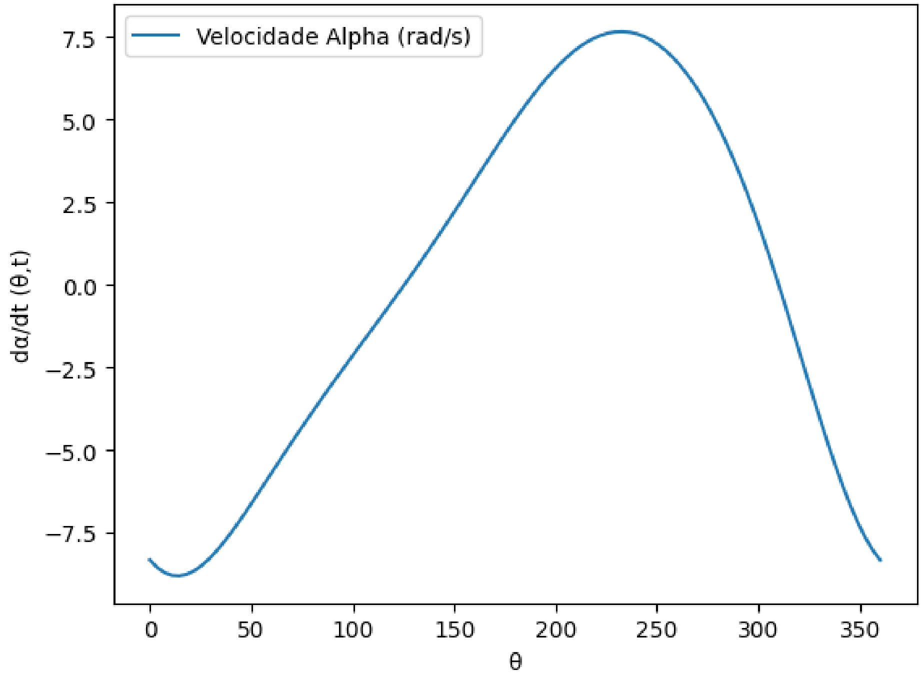

Figura 9: Velocidade angular $\dot{\alpha}$ en função de θ

2.4.1 Comparação

Como mencionado anteriormente, as nomenclaturas adotadas nas análises de velocidade são diferentes, de forma que é necessário verificar as equivalências entre as variáveis para efetuar a comparação. A Tabela 2 demonstra as equivalências entre as configurações para uma posição de entrada especifica ($\theta = 60°$).

Freudenstein	l_0	l_1	l_2	l_3	θ	α_1	ϕ
Garra	l_0	l_3	l_2	l_1	ϕ	$\gamma = \theta - \alpha_1$	α
Valor	80	20	66	56	60°	33,69° ou 26,31°	105,63°

Tabela 2: Equivalência de variáveis

Foi efetuada apenas a verificação da velocidade angular ϕ (configuração 1) com relação a α (configuração 2). A implementação do cálculo conforme a técnica alternativa expressada na Equação 20 foi implementada em Julia e consta ao final do documento. O gráfico de velocidade obtido a partir da Equação 19, proposta por [2] pode ser observado conforme a Figura 10.

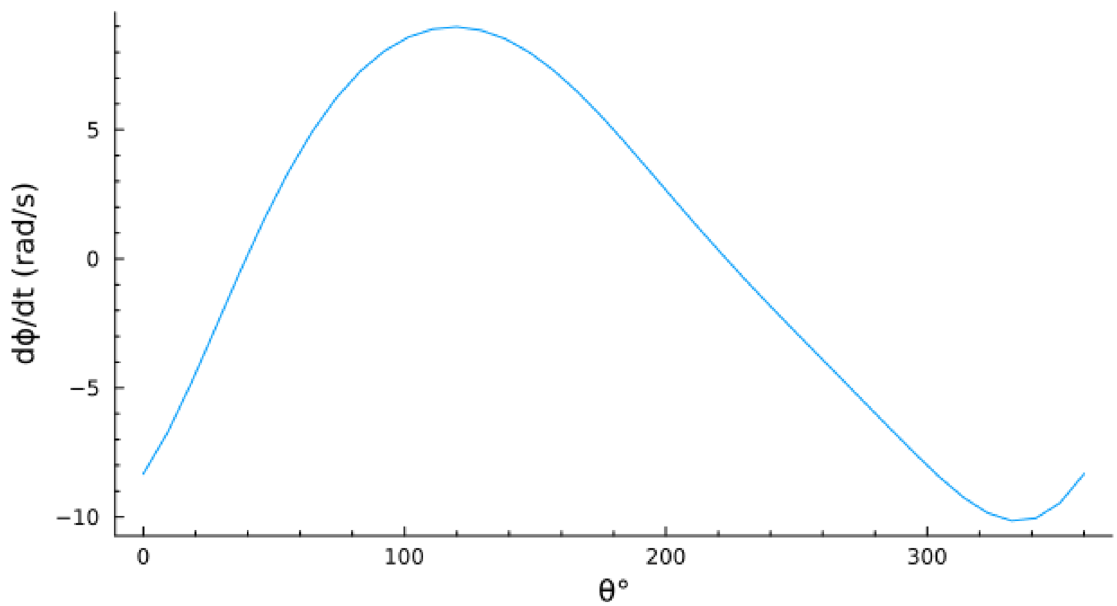

Figura 10: Velocidade angular

Feita essa comparação confirmamos a validade da técnica alternativa como método para calculo de velocidade angular das juntas do mecanismo de quatro barras, destacando que a comparação proposta só é adequada para o angulo ϕ com α, dado que a expressão da velocidade da configuração 1 foi obtida de forma distinta da configuração 2. Para estudos futuros recomenda-se a realização da dedução da expressão da posição para a configuração 2, para novo calculo de velocidade e nova comparação entre as técnicas. Isso pode ser feito de duas formas:

- Aplicação da técnica de Freudenstein para configuração 2 (Figura 5)
- Integração das expressões da velocidade apresentadas na Equação 18

3 Conclusão

Os artigos em estudo foram verificados em detalhe quanto às técnicas apresentadas para análise do mecanismo de quatro barras, tanto em relação a posição como a velocidade, aumentando o entendimento por meio de códigos para a parte analítica e numérica. Esse artigo, bem como o material auxiliar produzido são recursos válidos para auxiliar estudantes na exploração da matéria de mecanismos que é base para aplicações em robótica, principalmente em dispositivos do tipo garra e mãos robóticas.
Todos os códigos utilizados para esta análise estão disponíveis em: GitHub - Freudenstein 4-Bar

4 Implementação

O código em Julia desenvolvido para análise de posição e velocidade está apresentado a seguir. Para análise de posição é preciso utilizar as funções auxiliares,

```
function solve_alpha(l0,l1,l2,l3,θ,φ)

    x = l0 - l1*cos(θ) + l3*cos(φ)
    y = - l1*sin(θ) + l3*sin(φ)

    α = atan(y , x)
    #α = θ - α

    return α
end

function angs(l0,l1,l2,l3,θ)
    k1 = -2*l1*l3*sin(θ)
    k2 = 2*l3*(l0-(l1*cos(θ)))
    k3 = l0^2 + l1^2 -l2^2 + l3^2 - 2*l0*l1*cos(θ)

    Δ = k1^2 + k2^2 - k3^2
    a = +k1 + sqrt(Δ)

    φ = (2 * atan(k3 - k2 , a))+π
    α = solve_alpha(l0,l1,l2,l3,θ,φ)
    return φ,α
end
```

A função main para definir a posição de um mecanismo de quatro barras e imprimir os gráficos:

```
function main(l0, l1, l2, l3)
    θs = range(0, stop=2π, length=40)
    φs = []
    αs = []

    for θ in θs
        phi,alpha = angs(l0, l1, l2, l3, θ)
        push!( φs, phi )
        push!( αs, alpha )
    end

    return φs, αs, θs
end

φs, αs, θs = main(l0,l1,l2,l3)

display(plot(rad2deg.(θs), rad2deg.(φs), label="φ(θ)", xlabel="θ", ylabel="φ(θ)"
    , title="Variacao de φ com θ"))

display(plot(rad2deg.(θs), rad2deg.(αs), label="α(θ)", xlabel="θ", ylabel="α(θ)"
    , title="Variacao de α com θ"))
```

Para a velocidade, são necessárias as funções auxiliares,

```
"""
Monta as matrizes A e v para calculo das velociades angulares

"""
```

```
function A_i(l1,l2,l3,u1,u2,v1)
    E = [0 -1 ; 1 0]

    A = [l1*E*u1 zeros(2) l2*E*u2;
     1 1 -1]

    v = [(l3*E*v1)-(l2*E*u2);1]

    return A,v
end

```
Retorna vetor unitário a partir de uma magnitude e um ângulo

```
function unitario(v,θ)
    vi = v*cos(θ)
    vj = v*sin(θ)
    nm = [vi,vj]

    n = nm/norm(nm)

    return n
end
```

Exemplo de função que calula as velocidades angulares pela técnica de Birglen.

```
function velocidades()
    l0 = 80
    l3 = 20
    l2 = 66
    l1 = 56

    φs, αs, θs = main(l0,l3,l2,l1)

    u1s = []
    u2s = []
    v1s = []

    vs = []

    tamanho = length(θs)

    for (φ, α, θ) in zip(φs, αs, θs)
        push!(u1s, unitario(l3, φ))
        push!(u2s, -unitario(l2, α))
        push!(v1s, unitario(l1, θ))
    end

    ϕv = 25.0 #rad / s

    for i in 1:tamanho
        Ai,vi = A_i(l1,l2,l3,u1s[i],u2s[i],v1s[i])

        vel_i = (Ai \ vi) * ϕv
        push!(vs,vel_i[1])
    end

    return vs,θs
end

vs,θs = velocidades()
display(plot(rad2deg.(θs), vs, label=false, xlabel="θ°", ylabel="dφ/dt (rad/s)",
     size=(1000/1.6,550/1.6),grid=false,minorticks=5))
```

Referências

[1] Jérôme Bastien and Lionel Birglen. Variable stiffness soft robotic fingers using snap-fit kinematic reconfiguration. *IEEE Transactions on Robotics*, 39(6):4567–4580, 2023. doi: 10.1109/TRO.2023.3303850.

[2] Lionel Birglen. Enhancing versatility and safety of industrial grippers with adaptive robotic fingers. In *2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 2911–2916, 2015. doi: 10.1109/IROS.2015.7353778.

[3] Chin Pei Tang. Lagrangian dynamic formulation of a four-bar mechanism with minimal coordinates. http://www.usp.br/ldsv/wp-content/uploads/2014/10/Fourbar_Lagrange_10.pdf., 2010.