Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus.

Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Hamburgischen Universität
vorgelegt von

Ernst Jsing
aus Bochum.

Hamburg
1924.

Genehmigt von der

Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Hamburgischen Universität

auf Antrag von Professor Dr. W. Lenz.

Hamburg, den 31. Juli 1924.

Prof. Dr. E. Hecke.

Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus.

Jnhaltsverzeichnis:

Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus.

Einleitung: Uebersicht und Kritik der bisherigen Theorien.

Die magnetischen Eigenschaften der festen Körper und insbesondere der Ferromagnetismus stellen Erscheinungsgebiete dar, die heute noch keineswegs durch die theoretische Physik vollständig aufgeklärt sind. Im Laufe der Zeit haben sich bestimmte Vorstellungen über den Aufbau der Materie aus kleinsten Magneten gebildet. Diese Elementarmagnete werden in den Atomen durch das Umlaufen von Elektronen (Ampéresche Molekularströme) erzeugt. Bei einer Reihe von Atomen wird erst durch äusseres Magnetfeld ein Moment induziert; man spricht dann von Diamagnetismus. Andere Atome besitzen dagegen ein dauernd von Null verschiedenes Moment, und die Wirkung eines äusseren Feldes beteht in einer Gleichrichtung dieser Momente. Hier haben wir para- bzw. ferromagnetisches Verhalten. Weniger befriedigend sind die Vorstellungen und Hypothesen, die man über die Anordnungs- und Bewegungsmöglichkeiten der Elementarmagnete und ihre Wechselwirkung gemacht hat. Nach Kirwan (Gilberts Ann. 6. 391. 1800.) und W. Weber liegen im para- und ferromagnetischen Körpern im unmagnetischen Zustand die Elementarmagnete ungeordnet durcheinander, sodass ihre Achsen alle möglichen Richtungen einnehmen und nach aussen keine Magnetisierung in Erscheinung tritt. Durch ein äusseren Magnetfeld können dann alle Elementarmagnete in die Feldrichtung gedreht werden. Diese Theorie gestattet eine einfache Erklärung der Sättigungserscheinungen und der Tatsache, dass beim Zerbrechen eines Magneten in kleine Teile wieder Magnete und zwar von der ursprünglichen Polstärke entstehen. Um jedoch die Tatsache zu erklären, dass nicht schon bei kleinsten Feldern Sättigung eintritt, wie dies bei freier Drehbarkeit der Elementarmagnete der Fall wäre, nimmt W. Weber (Pogg. Ann. 87. 167. 1852.) eine konstante Richtkraft an, die jeden Elementarmagneten in seine ursprüngliche Richtung zurückzudrehen sucht. Diese Theorie liefert nicht die richtige Abhängigkeit der Susceptibilität vom äusseren Feld und sie vermag auch die Hysteresiserscheinungen nicht zu erklären. Um letzteren Mangel abzuhelfen, machte Maxwell die Annahme, dass die Gleichgewichtslagen der Elementarmagnete dauernd geändert werden können, falls nur das angelegte Feld eine bestimmte Grenze übersteigt. G. Wiedemann hat versucht, die Richtkraft durch die Hypothese eines Reibungswiderstandes zu ersetzen.

Von all diesen willkürlichen Annahmen über Richtkräfte, Reibungswiderstand u.s.w. kann man absehen, da man, wie dies zuerst J. A. Ewing (Proc. Roy. Soc. 48. 342. 1890.) experimentell und theoretisch gezeigt hat, die ferromagnetischen Erscheinungen durch eine gegenseitige Wirkung der Elementarmagnete aufeinander zu erklären vermag. Diese Theorie findet eine gute Bestätigung in den Untersuchungen von P. Weiss (Journ. de Phys. 4 IV. 469. 829. 1905; Phys. Zeitschrift 6. 779. 1905.) an Magnetit und Pyrrhotin. Diese ferromagnetischen Kristalle sind bei tiefen Temperaturen spontan gesättigt magnetisiert. Diese Magnetisierung lässt sich durch äussere Felder in ihrer Stärke nur wenig beeinflussen, dagegen lässt sich ihre Richtung der Kristallsymmetrie entsprechend bei Pyrrhotin um je 60°, bei Magnetit um je 90° plötzlich umklappen. Ferner hat P. Weiss die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur untersucht. Nachdem M. P. Langevin (Ann. Chim. Phys. (8) 5. 70. 1905.) gezeigt hatte, dass sich das experimentell gefundene Curiesche Gesetz für paramagnetische Gase ableiten lässt unter den Annahmen freier Drehbarkeit der Elementarmagnete und eines thermischen Gleichgewichtszustandes mit Maxwell-Boltzmannscher Verteilung hat P. Weiss diese Annahmen auch für die paramagnetischen Salze als gültig angenommen, da dieselben ebenfalls das Curiesche Gesetz befolgen. (Journ. de Phys. 4 VI. 661. 1907;

Phys. Zeitschr. 9. 358. 1908.) Um diese Theorie auch auf die ferromagnetischenKörper auszudehnen, hat P. Weiss angenommen, dass auf jeden Elementarmagneten ein sogenanntes molekulares Feld wirkt, das proportional der Magnetisierungsintensität ist; danach wirken auf einen bestimmten Elementarmagneten so viele der übrigen, wie zur Bildung des mittleren Momentes in seiner Umgebung beitragen, also auch verhältnismässig recht entfernte, während in Wirklichkeit nur die Nachbarn einen Einfluss ausüben werden. Trotzdem geben die Folgerungen aus dieser Theorie die Erfahrungstatsachen gut wieder. Später hat Weiss (C. R. 156. 1674. 1913) geglaubt, auf die Hypothese der freien Drehbarkeit der Elementarmagnete, die mit unseren heutigen Kenntnissen über den Kristallbau unverträglich ist, verzichten zu können, indem er annahm, dass die Elementarmagnete um Gleichgewichtslagen schwingen, die gleichmässig über alle Richtungen verteilt sind; doch lässt sich dann nicht mehr das Curiesche Gesetz ableiten, wie O. Stern (Zeitschr. f. Phys. I. 147. 1920) gezeigt hat. Auf eine Möglichkeit aus einfachen plausiblen Annahmen, das Curiesche Gesetz und die spontane Magnetisierung der Kristalle abzuleiten, hat W. Lenz (Phys. Zeitschr. 21. 614. 1920.) aufmerksam gemacht, dem ich für die Anregung zu den folgenden Untersuchungen zu grossem Dank verpflichtet bin. Auf diese Vorschläge werde ich im nächsten Abschnitt ausführlich eingehen, um anschliessend die sich daraus ergebenden Folgerungen zu entwickeln.

Hauptteil I. Das mittlere magnetische Moment der einfachen linearen Kette und verwandter Modelle.

§ 1. Annahmen.

Wir denken uns einen Ferromagneten aus regelmässig angeordneten Elementarmagneten (magnetischen Dipolen) aufgebaut. Diese Elementarmagnete, die wir kurz Elemente nennen wollen, sollen nur wenige der Kristallsymmetrie entsprechende energ**é**tisch ausgezeichnete Lagen einnehmen. Mit jeder Lage soll auch die entgegengesetzte möglich sein. Diese Annahmen sind durch die oben erwähnten Beobachtungen von Weiss an Pyrrhotin und Magnetit und die Vorstellungen der Quantentheorie nahegelegt. Die Elemente gehen infolge der Wärmeagitation von einer möglichen Lage in eine andere über. Dass solche Umklapperscheinungen im festen Körper überhaupt stattfinden, wird verständlich, wenn man an die, bei der Selbst- und Fremddiffusion beobachteten Tatsache des Platzwechsels der Atome denkt.

Ausser von einem angelegten äusseren Magnetfeld sollen die Elemente noch durch die Kräfte beeinflusst werden, die sie gegenseitig auf einander ausüben. Ueber diese Kräfte, die etwa elektrischer Natur sein mögen (vgl. W. Schottky, Phys. Zeitschr. 23. 448. 1922.), können wir keine näheren Angaben machen; wir nehmen jedoch an, dass sie mit der Entfernung rasch abklingen, so dass wir im Allgemeinen in erster Näherung nur die Wirkung benachbarter Elemente zu berücksichtigen brauchen. Die letztere Annahme steht in einem gewissen Gegensatz zur Hypothese des molekularen Feldes, von dem P. Weiss (C. R. 157. 1405. 1913. und C. R. 158. 29. 1914.) gezeigt hat, dass es nicht magnétischer Natur sein kann. Wir setzen an, dass unter allen möglichen Stellungen, die zwei benachbarte Atome zu einander einnehmen können, diejenigen die geringste Energie erfordern, bei denen beide gleichgerichtet sind. (Fig. 1)

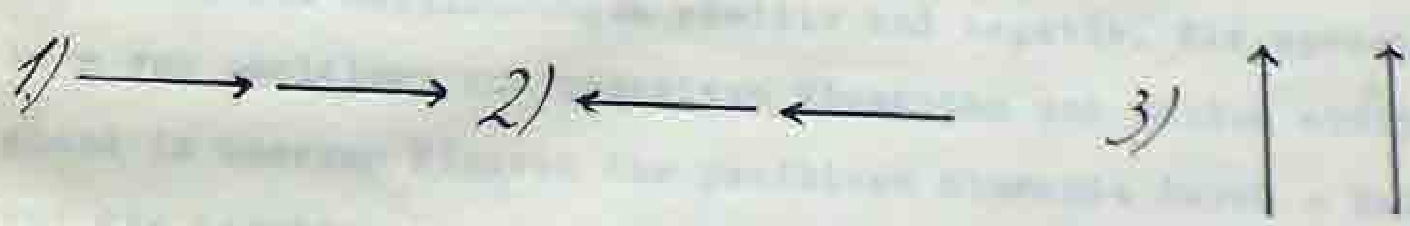

Fig. 1.

So können wir hoffen, zu einer Erklärung der spontanen Magnetisierung zu gelangen.

Gerade diese Erscheinung der spontanen Magnetisierung und die Tatsache, dass ein einmal magnetisierter Körper nicht von selbst umpolt, obwohl sicherlich keine Richtung vor der entgegengesetzten energetisch ausgezeichnet ist, lässt es als fraglich erscheinen, ob wir es beim Ferromagnetismus wirklich mit mit einem thermischen Gleichgewichtszustand zu tun haben, wie dies P. Weiss annimmt. Wir werden jedoch unseren Rechnungen gleichfalls das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz zugrunde legen und später auf die hier aufgeworfene Frage zurückkommen.

Wir beginnen jetzt unsere eigentliche Aufgabe, die Untersuchung, ob durch die gemachten Voraussetzungen der Ferromagnetismus erklärbar ist. Wir werden diese Aufgabe zunächst an einem möglichst einfachen Modell durchführen und zwar an einem linearen Magneten, dessen Elemente nur 2 Stellungen einnehmen können. Wir werden hier bereits alle wesentlichen Ergebnisse vorfinden. Jn einem zweiten Teil werden wir uns sodann ein Urteil darüber zu bilden suchen, wie diese Ergebnisse bei einem räumlichen Modell, das sich bisher nicht durchrechnen liess, abzuändern sind.

§ 2. Das mittlere magnetische Moment.

Unter einem linearen Magneten verstehen wir n Elemente, die auf einer Geraden in gleichen Abständen angeordnet sind. Bei den beiden Stellungen, die jedes Element einnehmen kann, soll sein Dipolmoment mit der Anordnungsrichtung des Gesamtmagneten zusammenfallen, also jedes Element kann nur um 180° umklappen. Die beiden möglichen Stellungen unterscheiden wir durch die Bezeichnungen positiv und negativ. Wir sprechen kurz von positiven und negativen Elementen und werden entsprechend in unseren Figuren die positiven Elemente durch + Zeichen und die negativen durch - Zeichen andeuten. Wir haben also für zwei Elemente die in Figur 2 dargestellten Anordnungsmöglichkeiten.

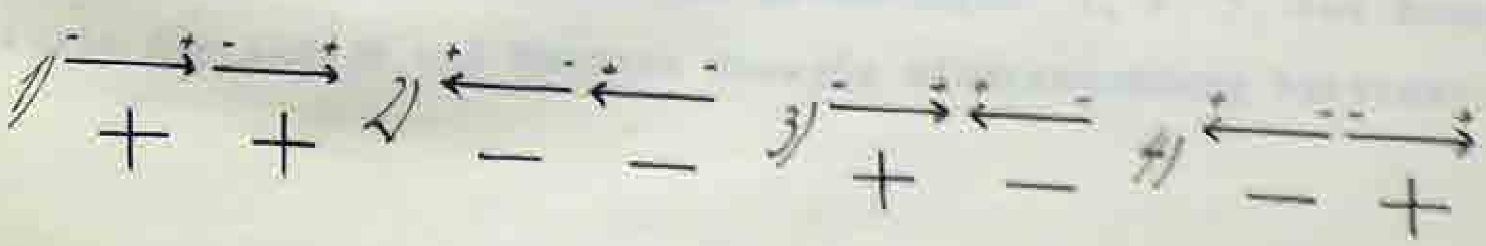

Fig. 2.

Nur benachbarte Elemente solle aufeinander wirken. Wir setzen fest, dass, die in unserer Bezeichnung in Fig. 3 dargestellten Zustände, bei denen alle Elemente gleichgerichtet sind, keine innere Energie besitzen.

1) + + + + + + + + +

2) — — — — — — — — —

Fig. 3.

Erfordert es die innere Energie e_i um von zwei gleichgerichteten Elementen (Fig. 2, 1 und 2) das eine ~~umse~~ 180° umzuklappen (Fig. 2, 3 und 4), so steckt in einer Anordnung von n Elementen, bei der an σ Stellen gleichnamige Pole benachbarter Elemente (Plus- und Minus-Zeichen) zusammen treffen, die innere Energie

1)
$$E_i = \sigma \cdot e_i$$

Jedes Element besitze ein magnetisches Dipolmoment m. Dann ist das Moment einer Anordnung mit ν_1 positiven und ν_2 negativen Elementen

(2)
$$M = m(\nu_1 - \nu_2)$$

Eine solche Anordnung erfordert in einem äusseren Magnetfeld $\mathfrak{H}$ die äussere Energie.

(3)
$$E_a = -(M\mathfrak{H}) = (m\mathfrak{H})\cdot[\nu_2 - \nu_1]$$

gegenüber dem feldlosen Zustand. Jn unserem jetzigen Falle, wo nur positive und negative Elemente vorkommen, ist

(4)
$$\nu_1 + \nu_2 = n$$

Durch ν_1, ν_2 und σ ist nach den Gleichungen 1, 2, 3, das Moment sowie die innere und äussere Energie einer Anordnung bestimmt.

Wenn wir daher das mittlere Moment unseres Magneten berechnen wollen, müssen wir wissen, wie viel Anordnungen mit ν_1 positiven und ν_2 negativen Elementen und σ Energiestellen – so bezeichnen wir kurz die Stelle in der Kette, wo sich gleichnamige Pole benachbarter Elemente gegenüber stehen – möglich sind. Jst diese Anzahl gleich

$$N(\nu_1, \nu_2, \sigma)$$

so ist nach Boltzmann die Wahrscheinlichkeit für einen Zustand bestimmter Energie und bestimmten Momentes, wenn T die absolute Temperatur und k die Boltzmannsche Konstante ist,

(5) $$w(\nu_1, \nu_2, \sigma) = \frac{1}{Z} N(\nu_1, \nu_2, \sigma)\, e^{-\frac{E_1(\sigma) + E_2(\nu_1, \nu_2)}{kT}}$$

Die Grösse Z, die sogenannte Zustandssumme, bestimmt sich aus der Beziehung

$$1 = \sum_{\nu_1+\nu_2=n} \sum_{0}^{n-1} {}_{\sigma}\; w(\nu_1, \nu_2, \sigma)$$

Wir finden, wenn wir für E_1 und E_2 die Werte aus Gleichung (1) und (3) einsetzen,

$$Z = \sum_{\nu_1+\nu_2=n} \sum_{0}^{n-1} {}_{\sigma}\; N(\nu_1, \nu_2, \sigma)\, e^{[\nu_1-\nu_2]\frac{(m\,\mathfrak{H})}{kT} - \sigma\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Führen wir die Abkürzungen

(6) $$\alpha = \frac{(m\,\mathfrak{H})}{kT}$$

und

(7) $$\beta = \frac{\varepsilon_1}{kT}$$

ein, so ist

(8) $$Z = \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2=n \\ \sigma=0}}^{n-1} N(\nu_1, \nu_2, \sigma)\, e^{+(\nu_1-\nu_2)\alpha + \sigma\beta}$$

Jndem man jedes Moment

(2) $$M = m(\nu_1 - \nu_2)$$

mit der Wahrscheinlichkeit $w(k_1,k_2,\sigma)$ multipliziert und über alle zulässigen Werte von $k_1 k_2$ und σ summiert, erhält man das mittlere Moment oder die Intensität der Magnetisierung

$$J = m \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ \sigma=1}}^{n-1} w(k_1,k_2,\sigma)[k_1-k_2]$$

$$= m\,\frac{1}{Z} \sum_{\substack{k_1+k_2=n\\ \sigma=1}}^{n-1} A(k_1,k_2,\sigma)[k_1-k_2]\,e^{\alpha[k_1-k_2]-\sigma\beta}$$

oder wegen der Definition von Z (Gleichung 8)

(9) $$J = m\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\log Z$$

§ 3. Berechnung der Zahl der Anordnungsmöglichkeiten.

Die Bestimmung der Grössen $A(k_1 k_2 \sigma)$ lässt sich leicht durchführen, wenn man weiss, wie oft sich eine Zahl m als Summe von r ganzen Zahlen ≥ 1 darstellen lässt, wobei verschiedene Anordnungen der Summanden als verschiedene Darstellungen zu zählen sind. Wir beantworten daher zunächst diese Frage.

Multipliziert man die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{x}{1-x}$$

r mal mit sich selbst -

$$\left(\sum_1^{\infty} x^i\right)^r = \sum_{i_1 i_2 \dots i_r = 1}^{\infty} x^{i_1+i_2+\dots+i_r} = \sum_{m=r}^{\infty} f_r(m)\,x^m -$$

so setzt sich in dem Produkt jeder Exponentadditiv aus r ganzen Zahlen ≥ 1 zusammen und zwar kommt jede denkbare Summe aus r solchen Zahlen im eingangs definierten Sinne genau einmal vor. Wenn wir nun alle Glieder, die denselben Exponenten m haben, zusammenfassen, so gibt der Koeffizient dieses Gliedes $f_r(m)$ an, wie oft sich m als Summe von r ganzen Zahlen ≥ 1 darstellen lässt. Man findet

(10) $$f_r(m) = \binom{m-1}{r-1},$$

denn nach dem binomischen Satz ist

(11) $\sum_{r}^{\infty} \nu_r(m)\, X^m = X^r(1-X)^{-r} = \sum_{r}^{\infty} \binom{m-1}{r-1} X^m$

Es erweist sich als zweckmässig, die in der Anzahl $N(\nu_1, \nu_2, \sigma)$ zusammengefassten Anordnungen in zwei Gruppen einzuteilen, und zwar je nachdem, ob die Anordnung an dem einen Ende der Kette, sagen wir etwa an dem linken, mit einem positiven Element beginnt oder mit einem negetiven. Um die Anzahl $N_1(\nu_1, \nu_2, \sigma)$ der Anordnungen, deren erstes Element links positiv ist, zu finden, lassen wir eine solche Anordnung in der folgenden Weise entstehen.

Die ν_1 positiven Elemente seien zunächst lückenlos in einer Reihe angeordnet. Jn dieser Kette markieren wir uns in beliebiger Weise s Punkte $(s < \nu_1)$, an denen die Reihe zur Einfügung von negetiven Elementen in noch zu erörternder Zahl auseinander geschoben werden soll. Denkt man sich an einer dieser Stellen negative Elemente eingeschoben, so entstehen, wie Fig. 4 zeigt, zwei Energiestellen.

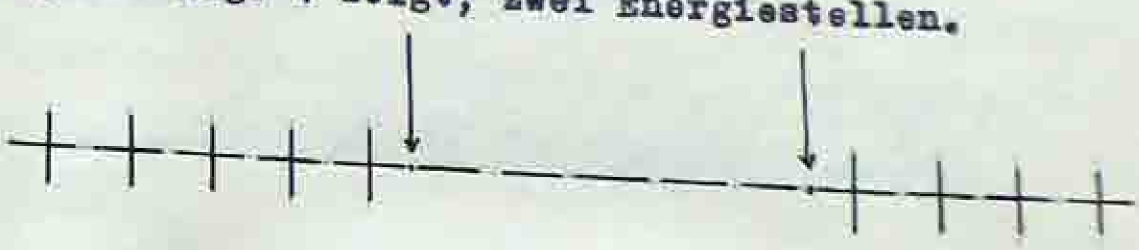

Fig. 4.

Man hat also an jedem der s Punkte zwei Energiestellen unterzubringen. Wir führen eine Grösse δ ein, die die Werte 1 oder 0 annimmt, je nachdem, ob wir am rechten Ende der Kette negative Elemente anfügen werden oder nicht. Jst $\delta = 1$, so ~~tut~~ müssen wir rechts vom äussersten positiven Element eine weitere Energiestelle anbringen. Bei beliebiger Verteilung der ν_2 negativen Elemente auf die $s+\delta$ Stellen erhält man Anordnungen, die alle dieselbe innere Energie

$$\sigma e_1 = (2s+\delta)\, e_1 \qquad (\delta = 0 \text{ oder } 1)$$

und dasselbe Moment $M[\nu_1-\nu_2]$ und damit auch dieselbe äussere Energie besitzen, und deren erstes Element links positiv ist. Wenn man daher die sich so ergebenden Möglichkeiten abzählt, erhält man die gesuchte Zahl $N_1^t(\nu_1,\nu_2,\sigma)$

Hierzu ist erforderlich, die Anzahl der Möglichkeiten zu kennen

a) zur Unterbringung der s Paare von Energiestellen zwischen den positiven Elementen und

b) zur Verteilung der ν_2 negativen Elemente auf die durch die Energiestellen geöffneten $(s+\delta)$ Lücken. Nun lassen sich (a) die s Plätze für die Energiestellenpaare auf $\binom{\nu_1-1}{s}$ verschiedene Weisen auswählen. Sodann kann man (b) ν_2 nach Gleichung (10) auf $\binom{\nu_2-1}{s+\delta-1}$ Arten als Summe von $(s+\delta)$ Zahlen ≥ 1 darstellen. Jede Aufteilung der negativen Elemente in $(s+\delta)$ Portionen ist ja eine solche Darstellung von ν_2 als Summe von $(s+\delta)$ Zahlen. Da wir bei jeder Verteilung der Energiestellen die negativen Elemente noch in beliebiger Weise in den Lücken unterbringen dürfen, so ist

$$N_1^t(\nu_1,\nu_2,\sigma) = \binom{\nu_1-1}{s}\binom{\nu_2-1}{s+\delta-1} \tag{12}$$

wobei

$\sigma = 2s+\delta$ und $\delta = 0$ oder 1 ist.

Die übrigen, links mit einem negativen Element beginnenden Anordnungen erhält man durch Vertauschen der negativen und positiven Elemente beim obigen Verfahren; ihre Anzahl $N_2^t(\nu_1,\nu_2,\sigma)$ ergibt sich daher, wenn man in Gleichung (12) ν_1 und ν_2 vertauscht. Durch Addition von N_1^t und N_2^t erhält man schliesslich

$$N^t(\nu_1,\nu_2,2s+\delta) = \binom{\nu_1-1}{s}\binom{\nu_2-1}{s+\delta-1} + \binom{\nu_2-1}{s}\binom{\nu_1-1}{s+\delta-1} \tag{13}$$

§ 4. Ausführung der Summation.

a) Exakte Summation.

Nachdem wir somit alle Anordnungsmöglichkeiten nach ihrem Moment und ihrer Energie sortiert und abgezählt haben, können wir uns der Berechnung des mittleren Momentes $\overline{J}$ zuwenden. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um die Bestimmung der Zustandssumme Z, wie Gleichung (9) zeigt. Es ist wegen Gleichung (8) und (13), wenn wir aus formalen Gründen vorübergehend

(14) $$A_1 = e^{\alpha}, \quad A_2 = e^{-\alpha} \quad \text{und} \quad B = e^{-\beta}$$

setzen,

(15) $$Z = \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{1} \left[\binom{n_1-1}{s}\binom{n_2-1}{s+t-1} + \binom{n_2-1}{s}\binom{n_1-1}{s+t-1} \right] A_1^{t} A_2^{t} B^{2s+t}$$

Wir haben nur die Nebenbedingung

(4) $$n_1 + n_2 = n$$

zu berücksichtigen, dagegen dürfen wir über s beliebig weit summieren, da unser Ausdruck für zu grosse Werte von s wegen der bekannten Eigenschaft der Binomialkoeffizienten von selbst verschwinden.

Jn sehr einfacher Weise, die sich auch leicht auf kompliziertere Fälle übertragen lässt, gelingt die Summation, wenn man Z als Funktion von n auffasst und zunächst

(16) $$F(x) = \sum_{0}^{\infty} Z_{(n)} x^{n}$$

betrachtet, wobei x eine beliebige hinreichend kleine Variable ist. Wir hoffen dabei $F(x)$ in geschlossener Form darstellen zu können und rückwärts $Z(n)$ durch Entwicklung nach Potenzen von x in summierter Form zu erhalten. Diese Methode beseitigt die störende Nebenbedingung $n_1 + n_2 = n$, da wir die Summation über n in Gleichung (16) dadurch ausführen können, dass wir über r_1 und r_2 unabhängig von einander von 0 bis ∞ summieren. Diese beiden Summationen lassen sich mit Hilfe von Gleichung

(11) $$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r} = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m-1}{r-1} x^{m}$$

ausführen. Danach ist, wenn wir vorübergehend

$$Z_i = \frac{xA_i}{1-xA_i} \qquad (i=1 \text{ und } 2)$$

einführen,

$$F(x) = \sum_{\substack{0\le s<\infty \\ \sigma=0,1}} B^{2s+\sigma}\left[\left(\sum_{r_1=0}^{\infty}\binom{r_1-1}{s}(xA_1)^{r_1}\right)\left(\sum_{r_2=0}^{\infty}\binom{r_2-1}{s+\sigma-1}(xA_2)^{r_2}\right) + \left(\sum_{r_1=0}^{\infty}\binom{r_1-1}{s+\sigma-1}(xA_1)^{r_1}\right)\left(\sum_{r_2=0}^{\infty}\binom{r_2-1}{s}(xA_2)^{r_2}\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{0\le s<\infty \\ \sigma=0,1}} B^{2s+\sigma}(Z_1Z_2)^{s}\left[Z_1Z_2^{\sigma} + Z_2Z_1^{\sigma}\right]$$

$$= \frac{Z_1+Z_2+2BZ_1Z_2}{1-B^2Z_1Z_2}$$

$$= \frac{x\left[A_1+A_2-2A_1A_2(1-B)x\right]}{1-(A_1+A_2)x+A_1A_2(1-B^2)x^2}$$

$$= \frac{2x\left[\operatorname{ch}\alpha-(1-B)x\right]}{1-2\operatorname{ch}\alpha\cdot x+(1-B^2)x^2}$$

denn $A_1+A_2 = 2\operatorname{ch}\alpha$ und $A_1A_2 = 1$ (Gleichung 14). Damit ist bereits $F(x)$ in geschlossener Form gewonnen. Um nun $Z_1(n)$ zu erhalten, nehmen wir eine Partialbruchzerlegung von $F(x)$ vor und entwickeln jeden Bruch nach Potenzen von x. Wenn wir hierzu m_1 und m_2 aus der Gleichung

$$(1-m_1 x)(1-m_2 x) = 1-(2\,ch\,\alpha)x + (1-B^2)x^2$$

bestimmen, so ergibt sich

(17)
$$m_1 = ch\,\alpha + \sqrt{sh^2\alpha + B^2}$$
$$m_2 = ch\,\alpha - \sqrt{sh^2\alpha + B^2}$$

und es ist

$$F(x) = \frac{2x\left[ch\,\alpha - x(1-B)\right]}{(1-m_1 x)(1-m_2 x)}$$

$$= \frac{a_1 x}{1-m_1 x} + \frac{a_2 x}{1-m_2 x}$$

a_1 und a_2 bestimmen sich zu:

$$a_1 = \frac{2\left[m_1\,ch\,\alpha - 1 + B\right]}{m_1 - m_2}$$

$$a_2 = \frac{2\left[m_2\,ch\,\alpha - 1 + B\right]}{m_2 - m_1}$$

Die Entwickelung von $F(x)$ nach Potenzen von x ergibt

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{a_1}{m_1} m_1^{\,n} + \frac{a_2}{m_2} m_2^{\,n}\right) x^n$$

und wegen Gleichung (16)

(18) $$Z(n) = \frac{a_1}{m_1} m_1^{\,n} + \frac{a_2}{m_2} m_2^{\,n}$$

Da n eine sehr grosse Zahl ist (Grössenordnung 10^{8}), so dürfen wir in Gleichung (18) das Glied $a_2 m_2^{\,n-1}$ neben dem ersten Glied vernachlässigen, denn es ist immer $m_1 > 1$ und $m_2 < 1$ (Gl. 17), wenn wir nur von dem Fall unendlich grosser Wechselwirkung bei verschwindendem äusseren Feld ($\beta = 0,\ \alpha = 0$) absehen. Man findet weiter durch eine einfache Rechnung

$$a_1 = m_1 + \frac{B(1-B)}{\sqrt{sh^2\alpha + B^2}}$$

$$a_2 = -m_2 + \frac{B(1-B)}{\sqrt{sh^2\alpha + B^2}}$$

daraus sieht man, dass

$$1 \leq \frac{a_1}{m_1} \leq 2$$

und, dass $\frac{a_1}{m_1}$ mit wachsendem α monoton abnimmt und infolgedessen bei der logarithmischen Ableitung von Z nach α einen zu vernachlässigenden Beitrag liefert. Somit finden wir für die Jntensität der Magnetisierung (Gleichung 9)

$$J = m \frac{\partial}{\partial\alpha} \log Z = m\, n \frac{\partial}{\partial\alpha} \log m_1$$

$$(19) \qquad J = m\, n \frac{sh\,\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + e^{-4\beta}}}.$$

Haben wir nicht eine, sondern zwei Ketten der oben beschriebenen Art, so haben wir, um alle Anordnungsmöglichkeiten zu erhalten, jeden Zustand der einen Kette mit jedem Zustand der anderen zu kombinieren, d. h. die Zustandssumme ist in diesem Fall

$$Z_2 = \Big(\sum_{r_1+r_2=n} \sum_{\sigma=1}^{n-1} A(r_1, r_2, \sigma) A_1^{r_1} A_2^{r_2} B^{\sigma}\Big)\Big(\sum_{\mu_1+\mu_2=n} \sum_{\tau=1}^{n-1} A(\mu_1, \mu_2, \tau) A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} B^{\tau}\Big) = Z^2$$

Es ist dabei angenommen, dass sich die Elemente verschiedener Ketten nicht beeinflussen. Haben wir n_1 solche parallele Ketten, so finden wir entsprechend für die Zustandssumme

$$Z_{n_1} = Z^{n_1}$$

und infolgedessen für das mittlere Moment

(20) $$\bar{J} = m\, n\, \mathfrak{M}_1 \frac{sh\,\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + e^{4\beta}}}$$

__§ 4 Ausführung der Summation.__

__b) Näherungsmethode.__

Mit verschwindendem äusseren Feld ($\alpha = \frac{m\mathfrak{H}}{kT} = 0$) verschwindet auch das mittlere Moment $\bar{J}$, wir haben also keine Hysteresiserscheinung. Dieses Ergebnis ist bei unserem Ansatz ganz selbstverständlich. Zu jeder Stellung kommt diejenige vor, bei der alle Elemente entgegengesetzt gerichtet sind, und die somit das entgegengesetzt gleiche Moment hat. Diese beiden Anordnungen erfordern für $\mathfrak{H} = 0$ dieselbe Energie, sodass sich im Mittel kein Moment ergeben kann, da sich die Momente der verschiedenen Stellungen paarweise aufheben. Das unerwünschte Ergebnis

$$\bar{J} = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{H} = 0$$

scheint also nur eine Folge der statistischen Mittelbildung über alle möglichen Lagen zu sein, und man kann daran denken, es dadurch zu beseitigen, dass man etwa die Anordnungen mit positivem und die mit negetivem Moment zunächst gesondert betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit $w(\mathfrak{M}, E, \sigma)$ ist eine Funktion des Moments $\mathfrak{M}$ und der Anzahl σ, der Energiestellen. Wir denken uns für den Fall $\mathfrak{H} = 0$ zu jedem festen $\mathfrak{M}$ den jeweils grössten Wert von $w(\mathfrak{M}, E, \sigma)$ ermittelt und die so gefundenen Grössen als Funktion von $\mathfrak{M}$ aufgetragen. Wir erhalten dabei eine gerade Funktion von $\mathfrak{M}$, da für $\mathfrak{H} = 0$ die positive und die negetive Richtung nicht vor einander ausgezeichnet sind. Diese Funktion kann nun entweder zwei gleiche symmetrisch zu $\mathfrak{M} = 0$ gelegene Maxima haben (Fig.5)

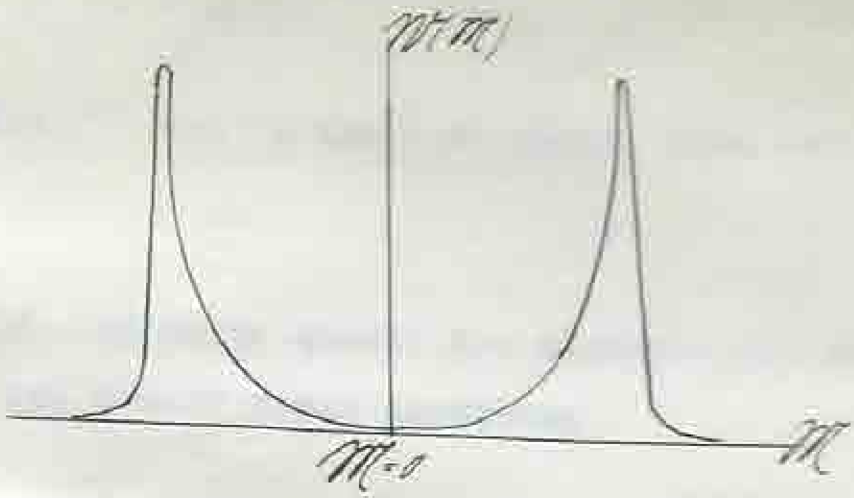

Fig. 5.

oder nur ein einziges, und zwar aus Symmetriegründen $(\mathfrak{M}=0)$ bei $\mathfrak{M}=0$ (Fig. 6)

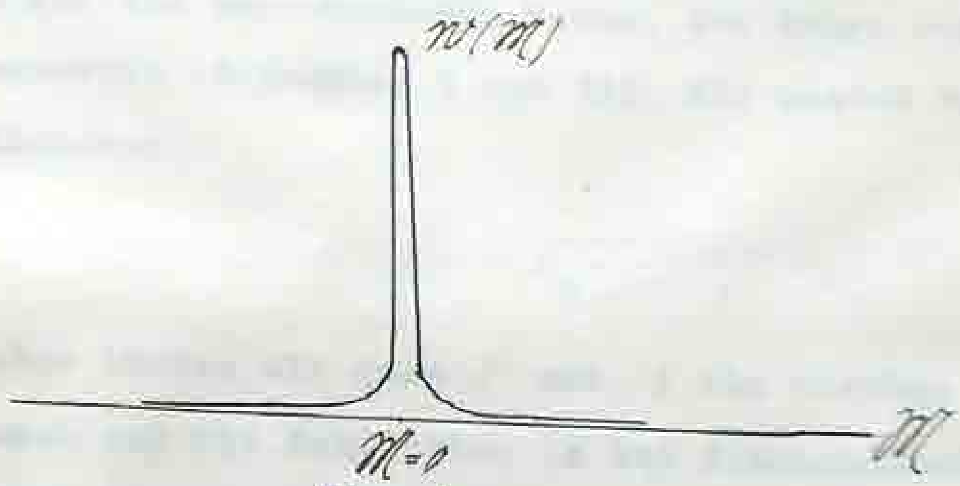

Fig. 6.

Jn beiden Fällen ergibt sich bei der statistischen Mittelbildung für die Jntensität der Magnetisierung $\mathfrak{J}=0$, was jedoch, falls die Wahrscheinlichkeit zwei Maxima hat (Fig. 5), keineswegs dem wirklich physikalischen Verhalten entspricht. Jn diesem Falle schwankt das Moment um einen der beiden Werte, zudem ein Maxima von w gehört, und es ist sehr unwahrscheinlich, dass das Moment von selbst einmal auch bei langer Beobachtungszeit in den anderen Wert übergeht, dem das zweite Maximum von w entspricht. Es liegt dann eben kein thermischer Gleichgewichtszustand, sondern nur ein Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit vor.

Um zu entscheiden, welche von beiden angegebenen Möglichkeiten vorliegt, führen wir jetzt eine zweite Berechnung von $\mathfrak{J}$ durch. Zur Vereinfachung setzen wir

$$r_1 - 1 = p + r \qquad r_2 - 1 = p - r$$

wo jetzt r von $-p$ bis $+p$ läuft. Dann ist

$$n = r_1 + r_2 = 2(p-1)$$

alsó p die halbe Anzahl der Elemente der Kette. Ferner ist jetzt das Moment einer Anordnung

$$\mathfrak{M}^r = \mu (r_1 - r_2) = 2r\mu$$

Wir nehmen noch an, dass $p+r$, $p-r$ und s gross gegen 1 sind, was das Resultat rechtfertigen wird. Dann können wir die verschiedenen Terme, aus denen sich $W(r,s)$ zusammensetzt (Gleichung 5 und 13), als gleich betrachten und schreiben

$$W(r,s) = \frac{1}{Z'} \binom{p+r}{s} \binom{p-r}{s} A_1^{2r} B^{2s}$$

Ausserdem dürfen wir dann r und s als stetige Variable auffassen und die Fakultäten in den Binomialkoeffisienten mit Hilfe der Stirlingschen Formel umformen. Es ist dann

$$W(r,s) = \frac{1}{Z'} e^{f(r,s)}$$

wo

$$\begin{aligned} f(r,s) = {} & (p+r)\lg(p+r) + (p-r)\lg(p-r) \\ & - (p+r-s)\lg(p+r-s) - (p-r-s)\lg(p-r-s) \\ & - 2s\lg s + r\lg A_1^2 + s\lg B^2 \end{aligned}$$

Jn ganz anologer Weise wie früher haben wir (vergl. Gleichung 15 und 19)

(15a) $$Z' = \int_{s=0}^{p} \int_{r=-(p-s)}^{p-s} e^{f(r,s)}\, dr\, ds$$

und

(9a) $$\mathfrak{M} = \mu \frac{\partial}{\partial a} \lg Z'$$

Wir wollen jetzt zunächst die Maxima von $W(r,s)$ aufsuchen. Bezeichnen wir durch den Jndex 0 die Koordinaten, denen die Maxima von W entsprechen, so haben wir für diese folgende Gleichungen:

(21) a) $$\frac{\partial f(r_0,s_0)}{\partial r} = \lg \frac{(p+r_0)(p-r_0-s_0)}{(p-r_0)(p+r_0-s_0)} A^2 = 0$$

oder

a') $$p^2 - r_0^2 = s_0[p + r_0 \operatorname{cotg} h\alpha]$$

und

b) $$\frac{\partial f(r_0,s_0)}{\partial s} = \lg (p+r_0-s_0)(p-r_0-s_0)\frac{B^2}{s_0^2} = 0$$

oder

b') $$(p-s_0)^2 - r_0^2 = s_0^2 B^{-2}$$

oder

b'') $$p^2 - r_0^2 = s_0[2p + s_0(B^{-2}-1)]$$

Aus (a') und (b') ergibt sich

$$s_0 = \frac{B^2}{1-B^2}[r_0 \operatorname{cotg} h\alpha - p]$$

Diesen Wert von s_0 setzen wir in (a') ein, dann finden wir

$$(p^2-r_0^2)(1-B^2) = B^2[r_0^2(\operatorname{cotg} h\alpha)^2 - p^2]$$

oder

$$p^2 = r_0^2\left(1 + \frac{B^2}{sh^2\alpha}\right)$$

oder $$r_0 = \pm \frac{p \cdot sh\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + B^2}}$$

Setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\Pi = +\sqrt{sh^2\alpha + B^2}$$

so ist, wenn wir noch den Wert für ν_0 in die Gleichung für s_0 einführen

$$s_0 = \frac{\mu B^2}{1-B^2}\left(\pm \frac{\mathrm{ch}\,\alpha}{\mathfrak{F}} - 1\right)$$

Da aber die Anzahl der Energiestellen nicht negativ sein kann, so ist nur das Pluszeichen zulässig. Die Wahrscheinlichkeit $w(\nu, s)$ hat also immer nur ein einziges Maximum und zwar bei

a) $$\nu_0 = \mu \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathfrak{F}}$$

(22)

b) $$s_0 = \frac{\mu B^2}{\mathfrak{F}(\mathrm{ch}\,\alpha + \mathfrak{F})}$$

Diesem wahrscheinlichsten Zustand entspricht das Moment

$$M_0 = 2\nu_0 \cdot m$$

(23) $$M_0 = m\,n \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha + e^{-2\beta}}}$$

Wir sehen, dass M_0 mit dem mittleren Moment $\bar{J}$ (Gleichung 19) zusammenfällt.

Man bestätigt leicht, dass wir es bei (ν_0, s_0) wirklich mit einem Maximum zu tun haben, indem man zeigt, dass

$$\frac{\partial^2 f(\nu_0, s_0)}{\partial \nu^2} < 0$$

und dass

$$\left(f_{\nu\nu} f_{ss} - f_{\nu s}^2\right)_{\nu_0 s_0} = \frac{4\mu^2}{\mu^2 - \nu_0^2} > 0$$

Führen wir zunächst die zweite Berechnung von $\bar{J}$ zu Ende, so haben wir Z' zu ermitteln. Dazu entwickeln wir $f(\nu, s)$ an der Stelle des Maximums (ν_0, s_0) in eine semikonvergente Reihe, die wir mit den quadratischen Gliedern abbrechen. Nach Gleichung (15a) findet man

$$Z' = e^{f(\nu_0, s_0)} \cdot \pi$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$K = \int_{s=0}^{p} \int_{r=-(p-s)}^{p-s} e^{\Sigma L\left[f_{rr}(r_0 s_0)(r-r_0)^2 + 2 f_{rs}(r_0 s_0)(r-r_0)(s-s_0) + f_{ss}(r_0 s_0)(s-s_0)^2 \right]} \, dr \, ds$$

Von diesem Faktor K lässt sich leicht zeigen, dass er kleiner als π ist und mit wachsendem α monoton abnimmt; infolgedessen werden wir den Beitrag, den K bei der logarithmischen Ableitung von Z' liefert, vernachlässigen dürfen. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (21a, 21b) findet man

$$Z' = K \cdot \left(\frac{p^2 - r_0^2}{(p - s_0)^2 - r_0^2} \right)^p$$

Mittels Gleichung (21b', 22a) erhält man weiter

$$Z' = K \cdot \left(\frac{p \, B^2}{s_0 \, A} \right)^{2p}$$

Setzt man für s_0 den Wert aus Gleichung (22b) ein, so ergibt sich

$$Z' = K \left(\operatorname{sh} \alpha + A \right)^{2p}$$

oder

$$Z' = K \cdot \left(\operatorname{sh} \alpha + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + e^{-2\beta}} \right)^n$$

da $2p = n$ und $A = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + B^2}$

gesetzt war.

Für die Jntensität der Magnetisierung finden wir sodann nach Gleichung (9a) unter Berücksichtigung des oben über den Faktor K Gesagten

(19) $$J = m \cdot n \, \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + e^{-2\beta}}}$$

also dasselbe Ergebnis, dass uns bereits die erste Rechnung geliefert hatte.

§ 5. Diskussion des Ergebnisses.

Die zweite Berechnung von $\mathfrak{J}$ zeigt uns jedoch, dass der tiefere Grund für das Verschwinden des mittleren Moments mit dem äusseren Feld nicht darin besteht, dass sich, wie wir es im Anfang des vorigen Paragraphen annahmen, die Momente sich paarweise zerstören, sondern dass dies Verhalten in ganz anderer Weise durch unseren Ansatz bedingt ist. Jst die Anzahl n der Elemente sehr gross - eine Voraussetzung, die der zweiten Rechnung zugrunde lag -, so ist das mittlere Moment $\mathfrak{J}$ von der wahrscheinlichsten Anordnung ganz allein bestimmt, was ja darin zum Ausdruck kommt, dass wir bei der Ermittlung von $\mathfrak{J}$ dán Beitrag des Faktors K vernachlässigen durften. Für die Maximalwahrscheinlichkeit ist es aber ohne Einfluss, wenn wir den Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Anordnungen einschränken, wofern wir nicht gerade die wahrscheinlichsten Anordnungen selbst ausschliessen. Aus dieser Bemerkung folgt aber, dass, wenn wir für $\mathfrak{H} \geq 0$ nur die Anordnungen betrachten, deren Moment $m \geq 0$ ist, dass dann für das mittlere Moment immer noch gilt

$$\mathfrak{J} = m\, n \frac{sh\,\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + e^{-2\beta}}} \qquad (\alpha \geq 0)$$

also

$$\mathfrak{J} = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{H} = 0$$

Letzteres gilt natürlich nur bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler, der um so kleiner ist, je grösser n ist. Das Verschwinden von $\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{H}$ ist also wesentlich dadurch bedingt, dass die Komplexionszahl der Anordnungen mit dem Moment Null sehr viel grösser ist, als die für die Anordnungen mit irgend einem anderen Moment. Hieraus folgt aber, dass es unmöglich ist, unter den gemachten Annahmen zur einer vollständigen Erklärung des Ferromagnetismus zu gelangen.

Wir gehen jetzt dazu über, den Verlauf der Abhängigkeit der Magnetisierungsintensität J vom äusseren Feld H, der inneren Energie ε und der Temperatur T, wie er uns durch Gleichung (19) gegeben ist, für $H \neq 0$ zu untersuchen. Wir betrachten zunächst den Fall

$$\beta = \frac{\varepsilon}{kT} = 0$$

Hier haben wir reinen Paramagnetismus. Das jeweilige Verhältnis von der Magnetisierungsintensität zur Sättigungsintensität

$$J_0 = n\,m$$

ist dann einfach

$$\frac{|J|}{|J_0|} = \mathrm{Lgh}\,\alpha$$

wie wir es in der Kurve I der Figur 7 (Seite 52) dargestellt haben. Diese steigt bekanntlich für kleine α geradlinig an, wir haben also eine Proportionalität zwischen J und α. J wächst linear mit H und mit $\frac{1}{T}$; das Curiesche Gesetz ist also erfüllt. Für hinreichend kleine α haben wir für das mittlere Moment pro Atom, falls wir annehmen, dass H in die positive Richtung weist,

$$|\overline{m}| = \frac{|m|^2 H}{kT}$$

Für grosse Werte von α nähert sich die Kurve asymptotisch dem Wert I, doch lassen sich praktisch die dazu notwendigen magnetischen Felder nicht realisieren. Die grössten Werte, die α annehmen kann, liegen etwas bei 1,5. Dabei nehmen wir an, dass

$H = 5 \cdot 10^4$ Gauss

$T = 1\text{-}2 \cdot 10^0$ (absolut)

m = 6 Bohrsche Magnetonen

$\sim 6 \cdot 10^{-20}$ CGS ist.

Wir lassen jetzt die Wechselwirkungsenergie ε

zwischen den Elementen anwachsen. Wir erhalten dabei zunächst, ganz ähnliche Kurven wie oben, nur steigen sie steiler an und nähern sich eher dem Wert I, und zwar gilt um so mehr, je grösser ϵ_1 ist. Die Sättigungsintensität wird also, wie dies zu erwarten war, um so eher und besser erreicht, je stärker sich die Elemente beeinflussen. Solange $\alpha < e^{-\beta}$ ist, findet man für das mittlere Moment pro Element

$$\overline{|m|} = \frac{|m|^2 H}{kT} e^{\frac{\epsilon_1}{kT}}$$

Für $\alpha > e^{-\beta}$ schreibt man dagegen zweckmässig

$$\frac{\overline{|m|}}{|m|} = \pm\left(1+\left(\frac{e^{-\beta}}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sim \pm\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\beta}}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2\right]$$

Jn der Grenze sehr starker Wechselwirkung (ferromagnetischer Fall) ist $\frac{\overline{|m|}}{|m|} = \pm 1$ je nachdem ob $H > 0$ oder $H < 0$ ist. Jn der Kurve II der Figur 7 ist $\beta = \frac{\epsilon_1}{kT} = 3$ gesetzt; dabei halten wir uns an die Angabe von W. Schottky, der in der oben zitierten Arbeit für die Umpolung eines Atoms im Kristall eine Energie von der Grössenordnung $3 \cdot 6 \cdot 10^{-13}$ Erg entsprechend einigen tausend Grad berechnet.

Zum Schluss dieses Abschnittes sei noch ein idealisierter Grenzfall eines flächenhaften Modells erwähnt. Die Elemente seien in einer Ebene in n parallelen Ketten angeordnet und es enthalte jede Kette n_1 Elemente. Jedes Element kann wie früher die beiden Stellungen einnehmen, bei denen sein magnetisches Dipolmoment in die Anordnungsrichtung seiner Kette fällt. Es sollen aber jetzt die Elemente innerhalb einer Kette überhaupt nicht auf einander wirken, dagegen erfordere es die Energie ϵ_1, wenn in zwei benachbarten Ketten von zwei gleichgerichteten Elementen eines umgeklappt wird, jedoch nur, wenn die beiden Elemente unmittelbar nebeneinander liegen.

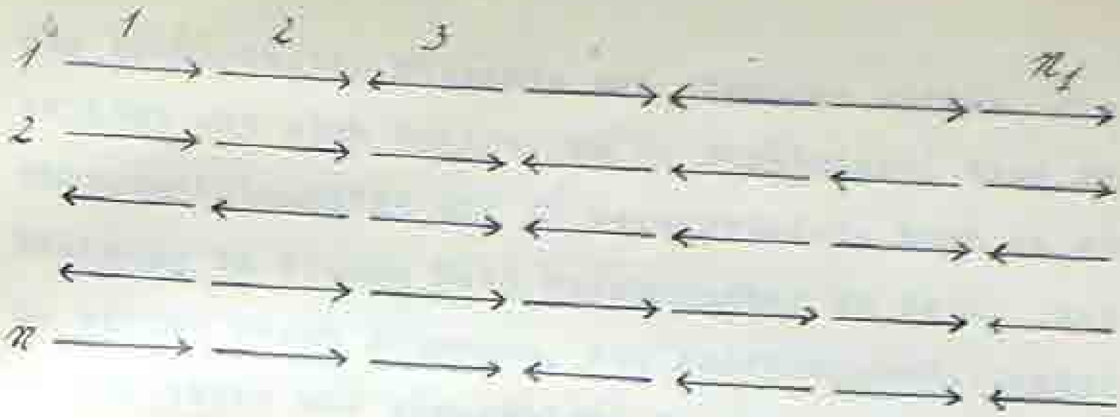

Fig. 8.

Es ist zweckmässig, bei diesem in Figur 8 angedeuteten Modell die Anordnung der Elemente in anderer Weise aufzufassen; man kann nämlich sagen, die Elemente sind in n_1 Querreihen angeordnet, von denen jede n hebeneinander liegende Elemente enthält. Von einer solchen Querreihe gilt aber abgesehen von dem gar nicht in Betracht kommenden Umstand, dass die Richtung des äusseren Feldes und der Dipolmomente jetzt normal zur Anordnungsrichtung der Elemente liegt, genau dasselbe , was wir oben über die einfache Kette gesagt haben. Daraus folgt für das mittlere Moment unseres Modells

$$\bar{J} = m \cdot n \cdot n_1 \cdot \frac{sh\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + e^{-4\beta}}}$$

entsprechend Gleichung (20).

Die Wechselwirkung zwischen Elementen verschiedener Ketten allein macht sich in derselben Weise geltend wie die Wechselwirkung zwischen den Elementen der einzelnen Ketten unter sich.

II. Komplizierte Fälle.

§ 6. Die lineare Kette bei Zulassung von Querstellungen .

a) Die Anordnungsmöglichkeiten.

Mittels der bisher betrachteten Modelle gelangen wir unter den am Anfang gemachten Annahmen nur zu einer Erklärung des Paramagnetismus, und es ist möglich, dass vielleicht nur eine zu grosse Jdealisierung ein ferromagnetisches Verhalten nicht in Erscheinung treten liess. Es ist ja denkbar, dass ein räumliches Modell , bei dem alle irgend-wie benachbarten Elemente auf einander wirken, die nötige Stabilität mit sich bringt, um zu verhindern, dass die Magnetisierungsintensität mit $\mathfrak{H}$ verschwindet. Doch es scheint die Rechnung in diesem Fall durchführbar zu sein; jedenfalls ist es bisher nicht gelungen, die Anordnungsmöglichkeiten geeignet zu sortieren und abzuzählen. Um uns jedoch einen Ueberblick über die Verhältnisse zu verschaffen, wollen wir jetzt die folgenden drei Betrachtungen durchführen, in denen wir gewisse vereinfachende Annahmen des Früheren fallen lassen.

Wir müssen annehmen, dass die Elemente in einem ferromagnethischen Kristall nicht nur zwei verschiedene Stellungen einnehmen können, wie wir es bisher angesetzt haben. Wir wollen deshalb jetzt untersuchen, welchen Einfluss es hat, wenn wir weitere Stellungen neben der positiven und negativen zulassen. Wir betrachten wieder einen linearen Magneten, bestehend aus r Elementen. Jedes dieser Elemente soll aber jetzt ausser den beiden Längsstellungen parallel der Kette noch r weitere Stellungen senkrecht zur Ausdehnungsrichtung der Kette einnehmen können, die wir kurz Querstellungen nennen wollen. Die Anzahl r lassen wir zunächst unbestimmt, da dadurch die Rechnung nicht komplizierter wird. Wir müssen jedoch annehmen, dass r geradzahlig ist, da keine Richtung vor der entgegengesetzten ausgezeichnet sein soll. Denken wir an die sechszählige Achse des Pyrrhotin als Längsrichtung, so ist r=6; bei Magnetit dagegen haben wir r = 4 zu setzen entsprechend der vierzähligen Symmetrie der Achsen. Die r Querstellungen seien alle gleichberechtigt.

Wir müssen vor allen Dingen wissen, wie viel Stellungen möglich sind mit ν_1 positiven, ν_2 negativen und ν_3 quergestellten Elementen – $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = n$ – und mit σ_{12} σ_{23} bezw. σ_{31} Energiestellen zwischen positiven und negativen, negativen und quergestellten bezw. quergestellten und positiven Elementen. Es ist wieder zweckmässig, zunächst unter diesen Anordnungen nur die zu zählen, deren erstes Element links positiv gerichtet ist. Durch zyklische Vertauschung der Jndizes 1, 2, 3, erhält man später die Anzahl der mit einem negativen bezw. quergestellten Element beginnenden Anordnungen. Bei der Abzählung verfahren wir zunächst wie oben im Fall ohne Querstellungen. Wir denken die ν_1 positiven Elemente in einer Reihe angeordnet, zwischen ihnen verteilen wir an s_{12} Punkten je zwei Energiestellen, wie sie zwischen positiven und negativen Elementen auftreten, und, falls $\delta_2 = 1$ ist, eine weitere am rechten Ende. Dazwischen ordnet man schliesslich die negativen Elemente an. Die Anzahl dieser Anordnungen beträgt nach Gleichung (12)

$$\binom{\nu_1 - 1}{s_{12}} \binom{\nu_2 - 1}{s_{12} + \delta_2 - 1}$$

Jetzt sind noch die quergestellten Elemente in die Kette einzufügen. Dass soll an s_{13} Punkten zwischen positiven und an s_{23} Punkten zwischen negativen Elementen geschehen und weiter an s Punkten, wo jetzt positive und negative Elemente zusammenstossen. Wir führen δ_3 ein, eine Grösse, die die Werte 1 oder 0 annehmen soll, je nachdem, ob wir am rechten Ende der Kette quergestellte Elemente unterbringen werden oder nicht. An jede dieser $(s_{13} + s_{23} + s + \delta_3)$ Stellen soll mindestens ein quergestelltes Element zu liegen kommen d. h. wir haben als Summe von $(s_{13} + s_{23} + s + \delta_3)$ Zahlen ≥ 1 darzustellen und das ist auf

$$\binom{\nu_3 - 1}{s_{13} + s_{23} + s + \delta_3 - 1}$$

Arten möglich (nach Gleichung 10). Die gesuchte Anzahl von Anordnungsmöglichkeiten hängt weiter davon ab, wie oft wir die s_{13}, s_{23} bzw. s Punkte auswählen können. Nach der Verteilung der negativen Elemente an $(s_{12} + \delta_2)$ Stellen zwischen den positiven Elementen stossen an

$(\nu_1 - 1 - s_{12})$ Punkten positive Elemente unter sich, an $(\nu_2 - \delta_2 - s_{12})$ Punkten negative Elemente unter sich und an $(2s_{12} + \delta_2)$ Punkten positive und negative Elemente zusammen. Unter diesen Punkten sind jeweils die s_{13}, s_{13} bzw. s Stellen auszuwählen, was für die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten die Faktoren

$$\binom{\nu_1 - 1 - s_{12}}{s_{13}}\binom{\nu_2 - \delta_2 - s_{12}}{s_{23}} \quad \text{bzw.} \quad \binom{2s_{12} + \delta_2}{s}$$

liefert.

Die gesuchte Anzahl ist damit, da wir die Einzelanordnungsmöglichkeiten beliebig mit einander kombinieren dürfen,

$$N_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}) = \binom{\nu_1 - 1}{s_{12}}\binom{\nu_2 - 1}{s_{12} + \delta_2 - 1}\binom{\nu_3 - 1}{s_{13} + s_{23} + s + \delta_3 - 1}$$
$$\cdot \binom{\nu_1 - 1 - s_{12}}{s_{13}}\binom{\nu_2 - \delta_2 - s_{12}}{s_{23}}\binom{2s_{12} + \delta_2}{s}$$

(23)
$$N_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}) = \binom{\nu_1 - 1}{s_{12} + s_{13}}\binom{\nu_2 - 1}{s_{12} + s_{23} + \delta_2 - 1}$$
$$\cdot \binom{\nu_3 - 1}{s_{13} + s_{23} + s + \delta_3 - 1}\binom{s_{12} + s_{13}}{s_{13}}\binom{s_{12} + s_{23} + \delta_2 - 1}{s_{23}}\binom{2s_{12} + \delta_2}{s}$$

Was die Verteilung der Energiestellen anbetrifft, so sind an den ausgewählten s_{13}, s_{23} und s Punkten je zwei Energiestellen, wie sie zwischen quergestellten und positiven bzw. negativen Elementen auftreten, einzufügen, und eine weitere, falls $\delta_2 \cdot \delta_3$ oder $(1 - \delta_2) \cdot \delta_3$ gleich 1 ist. Natürlich sind an den Stellen, wo zunächst positive und negative Elemente sich gegenüberstanden und jetzt quergestellte Elemente eingeführt sind, die ursprünglichen Energiestellen zu entfernen. Diese Bemerkung ist selbstverständlich für die Abzählung der Anordnungsmöglichkeiten belanglos. Danach erhalten wir für die Anzahl der Energiestellen zwischen positiven und negativen, negativen und quergestellten bzw. quergestellten und positiven Elementen

$$\sigma_{12} = 2s_{12} - s + k_2$$

$$\sigma_{23} = 2s_{23} + s + k_2 k_3 \qquad \text{bzw.}$$

$$\sigma_{31} = 2s_{31} + s + (1-k_2)k_3$$

§ 6b Die Summationen.

Die Berechnung des mittleren Moments erfolgt nun in genau der gleichen Weise wie früher. Man hat zunächst die Zustandssumme

$$(24) \quad Z_1 = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \sum_{\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}=0}^{\infty} N_1(k_1, k_2, k_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}) \cdot A_1^{k_1} A_2^{k_2} A_3^{k_3} B_{12}^{\sigma_{12}} B_{23}^{\sigma_{23}} B_{31}^{\sigma_{31}}$$

zu bilden. A_1 und A_2 haben die alte Bedeutung.

$$A_1 = e^{\alpha} \qquad \alpha = \frac{\mu H}{kT}$$

$$A_2 = e^{-\alpha}$$

$$A_3 = \gamma e^{-\frac{\varepsilon_q}{kT}}$$

wobei ε_q die äussere Energie bezeichnet, die eine Querstellung erfordert. Die Grössen B_{ik} rühren von der inneren Energie her. Es ist

$$B_{ik} = e^{-\frac{\varepsilon_{ik}}{kT}}$$

ε_{12}, ε_{23} bzw. ε_{31} ist die Energie, die auftritt, wenn an einer Stelle ein positives und negatives, ein negatives und quergestelltes bzw. ein quergestelltes und positives Element zusammenstossen.

Es ist über $r_1+r_2+r_3=n$ und über $\sigma_{12}\ \sigma_{23}\ \sigma_{31}$ oder über $s_{12},\ s_{13},\ s_{23}$ und s von 0 bis ∞ zu summieren, denn für zu grosse Werte von s_{ik} und s verschwinden die Binomialkoeffizienten. Die Summationen lassen sich wieder bequem ausführen, wenn man Z_1 als Funktion von n betrachtet und

$$V_1(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, Z_1(n)\, x^n$$

bildet. Dadurch ist die Nebenbedingung $r_1+r_2+r_3=n$ beseitigt, denn wir können jetzt über $r_1\ r_2$ und r_3 unabhängig von einander von 0 bis ∞ summieren. Diese drei Summationen lassen sich in gleicher Weise mit Hilfe von Gleichung (11) ausführen, und man erhält, wenn man vorübergehend

$$Z_i = \frac{xA_i}{1-xA_i} \qquad (i = 1,2,3)$$

setzt,

$$V_1(x) = \sum_{0}^{1}{}_{\delta_2,\delta_3} \sum_{0}^{\infty}{}_{s_{12},s_{23},s_{31},s} \binom{s_{12}+s_{13}}{s_{13}} \binom{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1}{s_{23}} \binom{2s_{12}+\delta_2}{s}$$

$$\cdot B_{12}^{\sigma_{12}} B_{23}^{\sigma_{23}} B_{31}^{\sigma_{31}} \cdot \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{r_1} \binom{r_1-1}{s_{12}+s_{13}} (xA_1)^{r_1} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{r_2} \binom{r_2-1}{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1} (xA_2)^{r_2} \right) \left(\sum_{0}^{\infty}{}_{r_3} \binom{r_3-1}{s_{31}+s_{23}+s+\delta_3-1} (xA_3)^{r_3} \right)$$

$$= \sum_{0}^{1}{}_{\delta_2,\delta_3} \sum_{0}^{\infty}{}_{s_{12},s_{23},s_{31},s} \binom{s_{12}+s_{13}}{s_{13}} \cdot \binom{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1}{s_{23}} \cdot$$

$$\binom{2s_{12}+\delta_2}{s} \cdot B_{12}^{2s_{12}+s+\delta_2}\, B_{23}^{2s_{23}+s+\delta_2\delta_3}$$

$$B_{31}^{2s_{31}+s+(1-\delta_2)\delta_3}\, Z_1^{s_{12}+s_{13}+1}\, Z_2^{s_{12}+s_{23}+\delta_2}\, Z_3^{s_{31}+s_{23}+s+\delta_3}$$

Jetzt lassen sich die Summationen über s_1 s_{13} und s_{23} mit Hilfe des binomischen Satzes erledigen. Wir finden

$$\overline{V}_1(x) = \sum_{0}^{1} {}_{\delta_2 \delta_3} \sum_{0}^{\infty} {}_{s_2} \; Z_3^{\delta_3} \, B_{23}^{\delta_2 \delta_3} \, B_{31}^{(1-\delta_2)\delta_3} \left(B_{12} + Z_3 B_{13} B_{23}\right)^{s_2+\delta_2}$$

$$\left(\frac{Z_1}{1 - B_{13}^2 Z_1 Z_3}\right)^{s_2+1} \left(\frac{Z_2}{1 - B_{23}^2 Z_2 Z_3}\right)^{s_2+\delta_2}$$

$$= \sum_{0}^{1} {}_{\delta_2 \delta_3} \frac{Z_1 \left(B_{12} + Z_3 B_{13} B_{23}\right)^{\delta_2} Z_2^{\delta_2} Z_3^{\delta_3} B_{23}^{\delta_2 \delta_3} B_{31}^{(1-\delta_2)\delta_3}}{1 - B_{12}^2 Z_1 Z_2 - B_{23}^2 Z_2 Z_3 - B_{31}^2 Z_3 Z_1 - 2 B_{12} B_{23} B_{31} Z_1 Z_2 Z_3}$$

$$= \frac{Z_1 \left[1 + Z_2 B_{12} + Z_3 B_{13} + Z_2 Z_3 B_{23} \left(B_{12} + B_{13} - B_{23}\right)\right]}{1 - B_{12}^2 Z_1 Z_2 - B_{23}^2 Z_2 Z_3 - B_{31}^2 Z_3 Z_1 - 2 B_{12} B_{23} B_{31} Z_1 Z_2 Z_3}$$

Wir haben bisher nur die Anordnungen berücksichtigt, deren erstes Element links positiv ist. Die Anordnungen, die links mit einem negativen Element bzw. einem quergestellten Element beginnen, erhalten wir bei dem obigen Verfahren, wenn wir zunächst die negativen bezw. quergestellten Elemente anordnen und nachträglich die übrigen einfügen. Die zugehörigen Zustandssummen, Z_2 und Z_3, gehen folglich aus Z_1 hervordurch zyklische Vertauschung der Jndázes 1, 2, 3. Das Entsprechende gilt auch von den Funktionen

$$\overline{V}_2(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} \, Z_2(n) \, x^n$$

$$\overline{V}_3(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} \, Z_3(n) \, x^n$$

Um also jetzt sämtliche Anordnungen zu berücksichtigen, bilden wir

$$\overline{F}(x) = \overline{V}_1(x) + \overline{V}_2(x) + \overline{V}_3(x)$$

$$F(x) = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Dabei ist, da sich der Nenner von $F(x)$ bei beliebiger Vertauschung der Jndizes nicht ändert, der

$$\text{Nenner} = 1 - \beta_{12}^2 z_1 z_2 - \beta_{23}^2 z_2 z_3 - \beta_{31}^2 z_3 z_1 - 2\beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} \cdot z_1 z_2 z_3$$

und der

$$\text{Zähler} = z_1 + z_2 + z_3 + 2(z_1 z_2 \beta_{12} + z_2 z_3 \beta_{23} + z_3 z_1 \beta_{31}) + z_1 z_2 z_3 \left[2(\beta_{12}\beta_{23} + \beta_{23}\beta_{31} + \beta_{31}\beta_{12}) - (\beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{31}^2)\right]$$

Wir gehen jetzt wieder auf x zurück, indem wir für die Abkürzungen z_i die Werte $\frac{xA_i}{1-xA_i}$ einsetzen und gleichzeitig Zähler und Nenner mit $\prod_{(i)}(1-xA_i)$ erweitern. Dabei erhalten wir $F(x)$ in der Form

$$F(x) = \frac{x\, G(x)}{\prod_{(i)}(1-m_i x)}$$

Wir haben den Nenner, der eine Funktion 3ten Grades von ist, sogleich in seine drei Linearfaktoren zerlegt, was für das Folgende nützlich ist. Die Grössen m_i sind aus der Gleichung

$$\prod_{(i)}^{3}(1-m_i x) = 1 - x\left[A_1 + A_2 + A_3\right] + x^2\left[A_1A_2(1-\beta_{12}^2) + A_2A_3(1-\beta_{23}^2) + A_3A_1(1-\beta_{31}^2)\right] - x^3 A_1A_2A_3\left[1 - (\beta_{12}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{31}^2) + 2\beta_{12}\beta_{23}\beta_{31}\right]$$

zu bestimmen.

Für die Funktion $G(x)$ des Zählers, die im Folgenden keine grosse Rolle spielen wird, finden wir

$$g(x) = [A_1 + A_2 + A_3] - 2x[A_1 A_2 (1-B_{12}) +$$
$$+ A_2 A_3 (1-B_{23}) + A_3 A_1 (1-B_{31})]$$
$$+ x^2 A_1 A_2 A_3 [3 - 2(B_{12} + B_{23} + B_{31})$$
$$+ 2(B_{12} B_{23} + B_{23} B_{31} + B_{31} B_{12}) - (B_{12}^2 + B_{23}^2 + B_{31}^2)]$$

Die Gesamtzustandssumme

$$Z(n) = Z_1(n) + Z_2(n) + Z_3(n)$$

gewinnt man als Koeffizienten von x^n bei einer Entwicklung von $F(x)$ nach Potenzen von x. Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$F(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x\, a_i}{1 - m_i x}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} {}_n \left(\sum_{i=1}^{3} a_i m_i^{n-1} \right) x^n$$

$$= \sum_{0}^{\infty} {}_n Z(n)\, x^n$$

folglich ist

$$Z(n) = \sum_{1}^{3} {}_i\, a_i m_i^{n-1}$$

Von den Zählern der Partialbrüche

$$a_i = \frac{m_i^2\, g\left(\frac{1}{m_i}\right)}{\prod\limits_{k=1 (k \neq i)} (m_i - m_k)}$$

lässt sich durch längere Betrachtungen zeigen, dass sie analog wie früher im Wesentlichen mit m_i übereinstimmen.

Wie bei Gleichung (9) gilt auch hier für das mittlere magnetische Moment $\bar{\gamma}$.

$$J = m \frac{\partial}{\partial \alpha} \log Z$$

Diese Gleichung können wir jedoch im Allgemeinen etwas vereinfachen. Wir verstehen unter m_1 die für grosse Werte von α grösste der drei Wurzeln m_i und schreiben

$$Z = m_1^n \left(\frac{A_1}{m_1} + \frac{A_2 m_2^{n-1}}{m_1^n} + \frac{A_3 m_3^{n-1}}{m_1^n} \right)$$

wobei wir nur m_1^n ausgeklammert haben; dann liefert der Faktor von m_1^n bei der logarithmischen Ableitung nur einen zu vernachlässigenden Beitrag, so dass

$$J = m\, n \frac{\partial}{\partial \alpha} \log m_1$$

Es genügt für unsere Zwecke, in einem speziellen Fall den Wert von m_1 und damit den Ausdruck von J näher zu betrachten. Um möglichst einfach zum Ziel zu kommen, wollen wir versuchen, ob es gelingt, bei plausiblen Annahmen über die Wechselwirkungsenergie eine der drei Grössen m_i zum Verschwinden zu bringen. Zunächst einmal müssen wir aus Symmetriegründen annehmen, dass es dieselbe innere Energie erfordert, wenn ein positives oder ein negatives Element mit einem quergestellten zusammenkommt, d. h. $B_{13} = B_{23}$ Setzt man dann in $\prod_{i=1}^{3}(1 - m_i x)$ den Koeffizienten von x^3 gleich 0, so findet man

$$B_{13} = B_{23} = +\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + B_{12})}$$

Dieser Wert liegt mit B_{12} immer zwischen 0 und 1 und ist in diesem Bereich immer grösser als B_{12}, was besagt, da $B_{ik} = e^{-\frac{\varepsilon_{ik}}{kT}}$ ist, dass die Wechselwirkung zwischen einem positiven und negativen Element grösser ist als die zwischen einem quergestellten und einem negativen oder einem positiven Element. Der angebene Wert ist also für unsere Zwecke brauchbar. Führen wir diesen

Wert jetzt in $\overline{F(x)}$ ein, so steht im Nenner

$$\prod_{i=1}^{3}(1-w_i x) = 1 - x[A_1+A_2+A_3] + (1-B_2)\left[1+B_2+\frac{A_3}{2}(A_1+A_2)\right]x^2$$

wobei wegen Gleichung (14)

$$A_1 A_2 = 1 \qquad A_1 + A_2 = 2\,\mathrm{ch}\,a$$

und

$$A_3 = r\,e^{-\frac{\varepsilon_x}{kT}}$$

ist.

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$w_1 = \mathrm{ch}\,a + \frac{A_3}{2} + W$$

wo

$$W = \sqrt{\left(\mathrm{ch}\,a + \frac{A_3}{2}\right)^2 - (1-B_2)[1+B_2+A_3\,\mathrm{ch}\,a]}$$

Für die Intensität der Magnetisierung finden wir

(19a) $$J = \mathfrak{m}\,n\,\frac{\mathrm{sh}\,a}{W}\left[1-\frac{1}{2}(1-B_2)\frac{A_3}{w_1}\right]$$

(vgl. Fig. 7. Kurve III. Seite 51).

Das Resultat hat sich nur unwesentlich gegenüber dem Fall ohne Querstellungen geändert. Die Kurve zeigt jetzt für kleine Werte von α einen weniger steilen, aber immer noch ungefähr geradlinigen Anstieg. Nehmen wir an, dass ε_a und ε_2 sehr klein sind, so finden wir für das mittlere Moment pro Element, solange α hinreichend klein ist.

$$\overline{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}^2 H}{kT}\,\frac{2}{2+r}$$

Jst speziell r = 4 d.h. die Elemente haben kubische Symmetrie, so ist

$$\overline{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}^2 H}{3kT}$$

Wir erhalten damit den Faktor $\frac{1}{3}$, wie er auch bei Langewin auftritt.

§ 6c. Diskussion der Maximaleigenschaften.

Weiter sehen wir, dass auch in dem jetzt behandelten Fall das mittlere Moment $\mathfrak{J}$ mit dem äusseren Feld verschwindet, wie es nach dem zu Anfang des Paragraphen 4b Gesagten nicht anders zu erwarten ist. Wir wollen uns jedoch jetzt wiederum davon überzeugen, dass dieses Verschwinden nicht etwa nur vorgetäuscht wird als Folge der statistischen Mittelung über alle möglichen Lagen. Zu diesem Zweck zeigen wir, dass für den Fall $\mathfrak{H}=0$ aus den Gleichungen zur Bestimmung der Maximalwahrscheinlichkeit die Beziehung

$$\nu_1=\nu_2$$

folgt, d.h. aber nach Gleichung (2), dass bei der wahrscheinlichsten Anordnung das Moment mit dem äusseren Felde verschwindet. Wir können uns darauf beschränken, die Wahrscheinlichkeiten der Anordnungen zu vergleichen, deren erstes Element links positiv ist. Das ist eine für das Ergebnis unwesentliche Einschränkung. Sie bietet uns aber den Vorteil, dass wir die Wahrscheinlichkeiten sofort angeben können. Dieselben sind nach Gleichung (5) und (24)

$$W_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31}) = \frac{1}{Z_1} N_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31}) \, A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} A_3^{\nu_3} B_{12}^{\sigma_{12}} B_{23}^{\sigma_{23}} B_{31}^{\sigma_{31}}$$

Durch die Grössen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ sind die betreffenden Anordnungen, zu denen diese Wahrscheinlichkeiten gehören charakterisiert. Die Nebenbedingung

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3 = n$$

berücksichtigen wir, indem wir

$$\nu_3 = n - \nu_1 - \nu_2$$

setzen.

Wir werden im Folgenden Grössen von der Ordnung 1 neben $\nu_1, \nu_2, s_{12}, s_{13}, s_{23}$ und s vernachlässigen, daletztere im Allgemeinen mit n vergleichbar sind. Die Maxima der Wahrscheinlichkeiten findet man, wenn man die Werte von $\nu_1 \nu_2$ s_{12} s_{23} s_{31} und s aufsucht, für die die Faktoren gleich 1 werden, mit denen sich die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren, wenn wir eine dieser Zahlen um 1 vergrössern. Wir erhalten dabei folgende 6 Gleichungen:

a) $$\frac{\nu_1}{(\nu_1 - s_{12} - s_{13})} \frac{(n - \nu_1 - \nu_2 - s_{13} - s_{23} - s)}{(n - \nu_1 - \nu_2)} = A_3$$

b) $$\frac{\nu_2}{(\nu_2 - s_{12} - s_{23})} \cdot \frac{(n - \nu_1 - \nu_2 - s_{13} - s_{23} - s)}{(n - \nu_1 - \nu_2)} = A_3$$

c) $$\frac{(\nu_1 - s_{12} - s_{13})(\nu_2 - s_{12} - s_{23}) \cdot 2 B_{12}^2}{s_{12}(2 s_{12} - s)} = 1$$

d) $$\frac{(\nu_1 - s_{12} - s_{13})(n - \nu_1 - \nu_2 - s_{13} - s_{23} - s) B_{13}^2}{s_{13}(s_{13} + s_{23} + s)} = 1$$

e) $$\frac{(\nu_2 - s_{12} - s_{23})(n - \nu_1 - \nu_2 - s_{13} - s_{23} - s) B_{23}^2}{s_{23}(s_{13} + s_{23} + s)} = 1$$

f) $$\frac{(n - \nu_1 - \nu_2 - s_{13} - s_{23} - s)(2 s_{12} - s)}{s(s_{13} + s_{23} + s)} \frac{B_{13} B_{23}}{B_{12}} = 1$$

Wir müssen wir früher die Annahme machen

$$B_{13} = B_{23}$$

Eigentlich hätten wir dieses Gleichungssystem vollständig aufzulösen; wir beschränken uns jedoch darauf, folgendes festzustellen. Die Division von a) durch b) ergibt

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\nu}_2} = \frac{\bar{\nu}_1 - \mathfrak{s}_{12} - \mathfrak{s}_{13}}{\bar{\nu}_2 - \mathfrak{s}_{12} - \mathfrak{s}_{23}} = \frac{\mathfrak{s}_{12} + \mathfrak{s}_{13}}{\mathfrak{s}_{12} + \mathfrak{s}_{23}}$$

Weiter findet mann aus d) und e)

$$\frac{\bar{\nu}_1 - \mathfrak{s}_{12} - \mathfrak{s}_{13}}{\bar{\nu}_2 - \mathfrak{s}_{12} - \mathfrak{s}_{23}} = \frac{\mathfrak{s}_{13}}{\mathfrak{s}_{23}}$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt bereits

$$\mathfrak{s}_{13} = \mathfrak{s}_{23}$$

und damit

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 ,$$

was wir ja zeigen wollten. Wir sehen damit, dass das Verschwinden des mittleren Momentes wesentlich durch unseren Ansatz bedingt ist und nicht durch die Mittelbildung über lange Beobachtungszeiten.

§ 7. Die Doppelkette bei gleichzeitiger Wirkung benachbarter Elemente derselben und verschiedener Ketten.

Die Betrachtungen des vorigem Paragraphen lassen sich durch einige kleine Abänderungen auch für eine Doppelkette verwerten, deren Elemente wieder nur die beiden Stellungen parallel den Ketten einnehmen können. Dafür aber soll jetzt gleichzeitig die Wechselwirkung zwischen benachbarten Elementen sowohl derselben als auch verschiedener Ketten berücksichtigt werden. Jn den folgenden Betrachtungen fassen wir immer zwei benachbarte nebeneinander liegende Elemente aus den beiden Ketten zu einem Gebilde, einem Element oder besser gesagt Elementpaar, zusammen. Wir wollen also jetzt unter den früheren positiven und negatiben Elementen Paare von positiven und negativen Elementen verstehen, während wir uns unter den früheren quergestellten Elementen sogenannte positiv-negative Elementpaare, bestehend aus einem positiven und einem negatiben Element, denken wollen. Wir haben dementsprechend zu setzen

$$A_1 = e^{2\alpha}, \quad A_2 = e^{-2\alpha}, \quad A_3 = e^{-\frac{\overline{\varepsilon}_1}{kT}}$$

$\overline{\varepsilon}_1$ ist die innere Energie, die erforderlich ist, um von zwei neben einander liegenden, gleichgerichteten Elementen verschiedener Ketten eines umzuklappen. Dadurch, dass wir in A_3 den Faktor r = 1 gesetzt haben, tun wir zunächst so, als ob die positiv-negativen Elementpaare nur einer bestimmten Stellung fähig wären derart, dass das positive Element immer in der einen und das negative Element immer in der anderen Kette liegt. Das ist aber nicht der Fall, und wir müssen jetzt noch berücksichtigen, dass an $\overline{s}$ Stellen positiv - negative Elementpaare gegen einander verdreht sein werden. Wir haben seiner Zeit die t_3 quergestellten Elemente auf $(s_{13}+s_{23}+s+\delta_3)$ Stellen verteilt, infolgedessen stossen noch an $(t_3-s_{13}-s_{23}-s-\delta_3)$ Punkten quergestellte Elemente unter sich zusammen. Unter diesen Punkten können wir die $\overline{s}$ Stellen beliebig auswählen, dementsprechend ist $N(t_1, t_2, t_3, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})$ um den Faktor

$$\binom{t_3-s_{13}-s_{23}-s-\delta_3}{\overline{s}}$$

zu vergrössern. An jeder dieser $\overline{s}$ Stellen tritt eine Energie ε_2 auf wie zwischen einem positiven und einem negativen Elementpaar.

Damit haben wir noch immer nicht alle Anordnungsmöglichkeiten berücksichtigt. Wir haben die positiv-negativen Elementpaare auf $(s_{13}+s_{23}+s+\delta_3)$ Stellen verteilt. Es können bei allen positiv-negativen Elementpaaren, die an einer dieser Stellen untergebracht sind, gleichzeitig die positiven Elemente mit den negativen vertauscht werden. Diese Vertauschungen liefern, wie man leicht sieht, für die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten den Faktor.

$$2^{s_{13}+s_{23}+s+\delta_3}$$

während sie für die Energieverhältnisse ohne Einfluss sind. Damit können wir die Zustandsumme $\overline{Z}_1(n)$, soweit sie von Anordnungen herrühren, die links mit einem positiven Element beginnen, angeben. Dieselbe ist nach Gleichung (24)

$$\overline{Z}_1(n) = \sum_{\delta_2\delta_3=0}^{1} \sum_{s_{12},s_{23},s_{31},s,\bar{s}=0}^{\infty} \sum_{l_1+l_2+l_3=n} \binom{l_1-1}{s_{12}+s_{13}} \binom{l_2-1}{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1} \binom{l_3-1}{s_{13}+s_{23}+s+\delta_3-1} \binom{s_{12}+s_{13}}{s_{13}}$$
$$\binom{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1}{s_{23}} \binom{2s_{12}+\delta_2}{s} \binom{s_{13}+s_{23}+s+\delta_3-1}{\bar{s}}$$
$$2^{s_{13}+s_{23}+s+\delta_3} A_1^{l_1} A_2^{l_2} A_3^{l_3} B_{12}^{2s_{12}+\bar{s}-s+\delta_2}$$
$$B_{23}^{2s_{23}+s+\delta_2\delta_3} B_{31}^{2s_{31}+s+\delta_3(1-\delta_2)}$$

Wir bilden wieder eine Funktion

$$\overline{F}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{Z}_1(n) \cdot x^n$$

Es lassen sich dann ganz entsprechend wie früher die Summationen über l_1, l_2 und l_3 ausführen. Setzt man wieder

$$\overline{Z}_i = \frac{x A_i}{1 - x A_i} \qquad (i = 1 \text{ und } 2)$$

wie oben, aber jetzt

$$\overline{Z}_3 = \frac{2xA_3}{1 - xA_3(1+B_{12})}$$

so liefert die Summation über $\overline{s}$

$$\overline{F_1(x)} = \sum_{\delta_2,\delta_3=0}^{1} \sum_{s_{12}, s_{23}, s_{31}, s = 0}^{\infty} \binom{s_{12}+s_{13}}{s_3} \cdot \binom{s_{12}+s_{23}+\delta_2-1}{s_{23}}$$

$$\binom{2s_{12}+\delta_2}{s} \cdot \overline{Z}_1^{\,s_{12}+s_{13}+1} \; \overline{Z}_2^{\,s_{12}+s_{23}+\delta_2}$$

$$\overline{Z}_3^{\,s_{13}+s_{23}+s+\delta_3} \; B_{12}^{\,2s_{12}+\delta_2-s} \; B_{23}^{\,2s_{23}+s+\delta_2\delta_3}$$

$$B_{31}^{\,2s_{31}+s+(1-\delta_2)\delta_3}$$

Hier sieht man, dass $\overline{F_1(x)}$ und $\overline{F(x)}$ formal vollständig übereinstimmen, so dass wir sofort das Endresultat der Summationen angeben können. Es ist

$$\overline{F(x)} = \overline{F_1(x)} + \overline{F_2(x)} + \overline{F_3(x)}$$

$$= \frac{x \cdot \overline{G}(x)}{\prod_{i=1}^{3}(1-\overline{m}_i x)}$$

wobei jetzt aber

$$\prod_{i=1}^{3}(1-\overline{m}_i x) = 1 - x[A_1 + A_2 + A_3(1+B_{12})] + x^2[A_1A_2(1-B_{12}^2)$$

$$+ A_2A_3(1+B_{12}-2B_{23}^2) + A_3A_1(1+B_{12}-2B_{31}^2)] \mp x^3 \cdot$$

$$A_1A_2A_3[1+B_{12}-2B_{23}^2-2B_{31}^2-B_{12}^2(1+B_{12})+4B_{12}B_{23}B_{31}]$$

$$\overline{G}(x) = [A_1 + A_2 + 2A_3] - x[2A_1A_2(1-B_{12}) + A_2A_3 \cdot$$

und

$$(3+B_{12}-4B_{23}) + A_3A_1(3+B_{12}-4B_{31})] + 2x^2 \cdot$$

$$A_1A_2A_3[2-B_{12}^2-2B_{23}-2B_{31}+2(B_{12}B_{23}+B_{23}B_{31}+B_{31}B_{12})$$

$$\mp(B_{12}^2+B_{23}^2+B_{31}^2)]$$

Jn genau derselben Weise wie oben finden wir schliesslich

$$J = m\, n\, \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \overline{m}_1$$

wo $\overline{m}_1$ wieder die grösste der drei Wurzeln $\overline{m}_i$ bezeichnet.

Wir nehmen jetzt an

$$B_{13} = B_{23} = B$$

und

$$B_{12} = B^2$$

d.h. es erfordert die gleiche Energie, obeim positives Elementpaar oder ein negatives mit einem positiv-negativen Elementpaar zusammentrifft. Wir haben in diesem Fall jeweils eine Energiestelle im ursprünglichen Sinn, wie Fig. 9 a und b zeigt; dagegen erfordert es doppelt soviel Energie, wenn irgendwo ein positives und ein negatives Elementpaar zusammenstossen, wobei zwei Energiestellen auftreten (Fig. 9c).

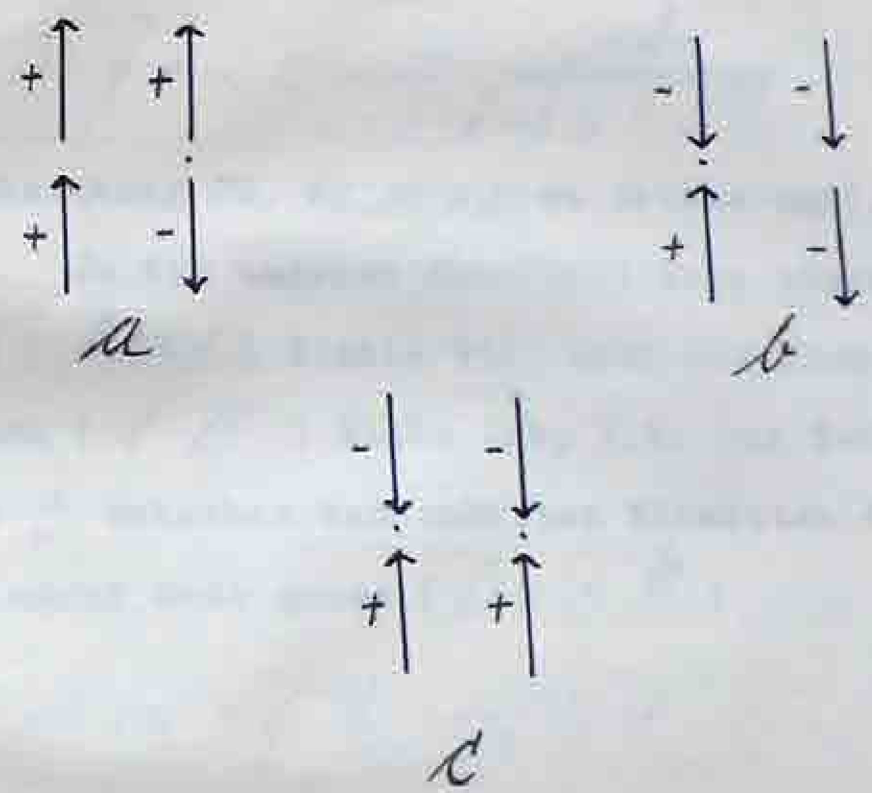

Fig. 9.

Wir erinnern noch daran, dass wir als Nullniveau für die innere Energie den Fall gewählt haben, wo alle Elemente gleichgerichtet sind, also keine Energiestellen auftreten. Unter unseren Annahmen erhalten wir für $\overline{m_1}$ die vereinfachte Gleichung.

$$\prod_{i=1}^{3}(1-\overline{m_i}\,x) = 1 - x[A_1 + A_2 + A_3(1+B^2)] + x^2(1-B^2)$$

$$[A_3(A_1+A_2) + 1 + B^2] - x^3 A_3 (1-B^2)^3$$

Es ist der jetzigen Bedeutung von A_1 und A_2 entsprechend

$$A_1 A_2 = 1 \quad ; \quad A_1 + A_2 = 2\,\mathrm{ch}\,2\alpha$$

Setzen wir die Wechselwirkungsenergie $\overline{\varepsilon_1}$ zwischen benachbarten Elementen verschiedener Ketten gleich 0, d.h. $A_3 = 1$, so erhalten wir, wie es sein muss, ein uns bekanntes Ergebnis, und zwar

$$\overline{m_1} = \left(\mathrm{ch}\,\alpha + \sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha + B^2}\right)^2$$

und

$$J = 2\,n\,m\,\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha + e^{2\beta}}}$$

(vgl. Gleichung 20, wo $n_1 = 2$ zu setzen ist).

Jn dem anderen Grenzfall sehr starker Wechselwirkung ($A_3 \ll 1$) finden wir, wenn wir noch annehmen, dass auch ($1-B^2$) klein ist, d.h. die Wechselwirkungsenergie ε_1 zwischen benachbarten Elementen derselben Kette ist nicht sehr gross ($B = e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}$)

$$\overline{m_1} = \mathrm{ch}\,2\alpha + \tfrac{1}{2} A_3 (1+B^2) +$$

$$+\sqrt{\left(\mathrm{ch}\,2\alpha + \tfrac{1}{2}A_3(1+B^2)\right)^2 - (1-B^4) - 2\,\mathrm{ch}\,2\alpha\, A_3 (1-B^4) + \dots}$$

Wir haben in der Gleichung für $\overline{m}_1$ das Glied mit x^3 vernachlässigt. Wenn wir

$$W = \sqrt{\left(ch\,2\alpha + \frac{1}{2} A_3 (1+B^3)\right)^2 - (1-B^3) - 2\, ch\,2\alpha\, A_3 (1-B^3)}$$

setzen, so ergibt sich

$$J = 2\, n\, m\, \frac{sh\,2\alpha}{W} \left(1 - \frac{A_3 (1-B^3)}{ch\,2\alpha + \frac{A_3}{2}(1+B^3) + W}\right)$$

Um recht deutlich zu sehen, wie sich die Wechselsirkung zwischen benachbarten Elementen verschiedener Ketten bemerkbat macht, lassen wir dieselbe recht gross werden, dann dürfen wir $b = 0$ setzen, wobei

$$J = 2\, n \cdot m \frac{sh\,2\alpha}{\sqrt{(sh\,2\alpha)^2 + e^{-4 \cdot \frac{e_1}{kT}}}}$$

Wir sehen, dass sich gegenüber dem Fall ohne Wechselwirkung (Gleichung 19)der Parameter α d.h. das äussere Feld und die innere Energie e_1 um den Faktor 2 vergrössert haben.

Jn diesem Grenzfall lässt sich die Behandlung auch auf ein räumliches Modell ausdehnen. Haben wir nämlich n_1 parallele Ketten, so haben wegen unserer Annahmen jeweils die n_1 in einer Querschicht nebeneinander liegenden Elemente alle dieselbe Richtung, so dass wir jede solche Schicht jetzt als Element betrachten können, das zum Gesamtmoment den Beitrag plus oder minus $n_1\, m$ liefert. Damit ist der Fall auf die einfache lineare Kette zurückgeführt. Man findet danach

$$J = n_1 \cdot n \cdot m \frac{sh(n_1 \alpha)}{\sqrt{sh^2(n_1 \alpha) + e^{-n_1 \cdot \frac{2e_1}{kT}}}}$$

d.h. gegenüber Gleichung (20) eine Vergrösserung des äusseren Magnetfeldes und eine Vergrösserung der Wechselwirkungsenergie zwischen Elementen derselben Kette um den Faktor n_1 . Dieses Modell wäre praktisch stets spontan gesättigt magnetisiert. Doch wechselt dir Richtung der Magnetisierung mit der des äusseren Feldes. Nur für $\mathfrak{H} = 0$ verschwindet das mittlere Moment $\overline{J}$ und es lässt sich genau wie im vorigen Paragraphen zeigen, dass das Moment der wahrscheinlichsten Anordnung mit $\mathfrak{H} = 0$ verschwindet.

§ 8. Die liniare Kette bei Wechselwirkung zwischen erst- und zweit- benachbarten Elementen.

Drittens untersuchen wir, wie sich unsere bisherigen Ergebnisse ändern, wenn wir annehmen, dass auch die Stellungen von zweitbenachbarten Elementen zu einander auf die Energieverhältnisse von Einfluss sind. Wir setzen wieder fest, dass in den Fällen, wo alle Elemente gleichgerichtet sind, die innere Energie verschwindet. Es erfordere die Energie ε_i, um von zwei nächstbenachbarten Elementen, die die gleiche Richtung haben, eines umzuklappen und die Energie ε_i', um von zwei zweitbenachbarten Elementen das eine umzuklappen. Kommt es also σ mal vor, dass nächstbenachbarte Elemente entgegengesetzt gerichtet sind, und τ mal, dass zweitbenachbarte Elemente entgegengesetzt gerichtet sind, so steckt in einer solchen Anordnung die innere Energie

$$\sigma \varepsilon_i + \tau \varepsilon_i'$$

Wir fragen nun, wie viel Anordnungen von n_1 positiven und n_2 negativen Elementen diese innere Energie besitzen. Wir beschränken uns zunächst wieder auf die Anordnungen, deren erstes Element links positiv ist. Um die Anordnungsmöglichkeiten bequem abzählen zu können, lassen wir eine gewünschte Anordnung in der folgenden Weise allmählich entstehen. Wir bilden uns zunächst eine Kette, die mit einem positiven Element links beginnend abwechselnd aus einem positiven und einem negativen Element besteht. In dieser Kette sollen bereits alle $\sigma = 2s+\delta$ Energiewerte ϵ_i auftreten. Diese Kette enthält dann $(s+1)$ positive und $(s+\delta)$ negative Elemente. Die Kette endet rechts mit einem positiven oder negativen Element, je nachdem, ob $\delta = 0$ oder $\delta = 1$ ist. Bringt man im Innern dieser Kette an einer Stelle weitere Elemente, positive oder negative, so kommt es jetzt wie Fig. 10 zeigt, zwei Mal vor, dass zweitbenachbarte Elemente entgegengesetzt gerichtet sind.

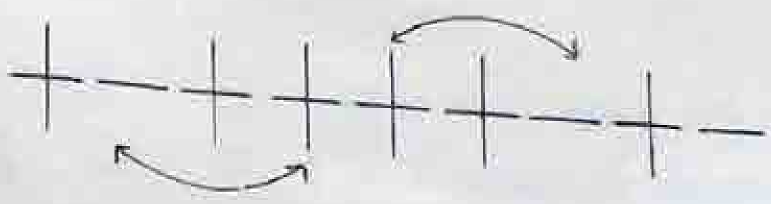

Fig. 10.

Bringen wir also die noch nicht verteilten $(n_1 - s - 1)$ positiven und $(n_2 - s - \delta)$ negativen Elemente an n_1 bzw. n_2 Stellen im Jnnern der Kette unter, so tritt dabei $2(n_1+n_2)$ mal die Energie ϵ_i' auf. Die n_1 und n_2 Punkte, wo wir die Elemente einfügen, lassen sich, wie man leicht sieht, auf

$$\binom{s-1+\delta}{n_1} \quad \text{bzw.} \quad \binom{s}{n_2}$$

Weisen auswählen. Wir führen noch die Grössen ϵ_1, ϵ_1' und ϵ_2 ein, die die Werte 1 oder 0 annehmen, je nachdem wir am linken bzw. rechten Ende der Kette positive bzw. negative Elemente unterbringen oder nicht. Danach haben wir die $(n_1 - s - 1)$ positive Elemente auf $(n_1 + \epsilon_1 + \epsilon_1'(1-\delta))$ und die $(n_2 - \delta - s)$ negativen Elemente auf $(n_2 + \epsilon_2\delta)$ Stellen zu verteilen. Das geht nach Gleichung (10) auf

$$\binom{n_1 - s - 2}{n_1 + \epsilon_1 + \epsilon_1'(1-\delta) - 1} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n_2 - s - \delta - 1}{n_2 - \epsilon_2\delta - 1}$$

Arten.

Jst eine der Grössen ε_1, $\varepsilon_1'(1-\delta)$ und $\varepsilon_2\delta$ gleich 1, so kommt es ein weiteres Mal vor, dass zwei ~~zwei~~ benachbarte Elemente entgegengesetzt gerichtet sind, so dass

$$\tau = 2(r_1 + r_2) + \varepsilon_1 + \varepsilon_1'(1-\delta) + \varepsilon_2\delta$$

Die Ermittlung der Zustandssumme

$$Z_1(n) = \sum \binom{\nu_1 - s - 2}{r_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1'(1-\delta) - 1} \binom{\nu_2 - s - \delta - 1}{r_2 + \varepsilon_2\delta - 1} \binom{s - 1 + \delta}{r_1} \binom{s}{r_2} A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} B^{2s+\delta} C^{\tau}$$

(es ist über s, r_1 und r_2 von 0 bis ∞, über $\nu_1 + \nu_2 = n$ und über $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_2$ von 0 bis 1 zu summieren) erfolgt in ganz analoger Weise wie in den früher betrachteten Fällen. Wir wollen sie daher nur kurz andeuten. Es ist wie früher zur Abkürzung gesetzt

(14) $\quad A_1 = e^{\alpha}; \quad A_2 = e^{-\alpha} \quad B = e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}}$

und ausserdem jetzt

$$C = e^{-\frac{\varepsilon_1'}{kT}}$$

Man betrachtet wieder

$$F_1(x) = \sum_0^{\infty} Z_1(n)\, x^n$$

Setzt man vorübergehend

$$z_i = \frac{x A_i}{1 - x A_i} \qquad (i = 1, 2)$$

so liefert die Summation über ν_1 und ν_2

$$F_1(x) = \sum z_1^{r_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1'(1-\delta)}\, z_2^{r_2 + \varepsilon_2\delta} \binom{s - 1 + \delta}{r_1} \binom{s}{r_2} \cdot (xA_1)^{s+1} \cdot (xA_2)^{s+\delta} \cdot B^{2s+\delta} \cdot C^{\tau}$$

Jetzt lassen sich die Summationen über r_1 und r_2 ausführen. Man erhält

$$\overline{F}_1(x) = \sum (1+e^2 z_1)^{-s-1+\delta} (1+e^2 z_2)^{-s} (xA_1)^{s+1} (xA_2)^{s+\delta} B^{2s+\delta} (e z_1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_1'(1-\delta)} (e z_2)^{\varepsilon_2 \delta}$$

Nun ist die Summation über s auszuführen und dann sind für $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_1'$ und ε_2 die Werte 0 und 1 einzusetzen. Durch Vertauschen der Jndizes 1 und 2 erhält man den Ausdruck $\overline{F}_2(x)$, der den Anordnungen entspricht, die links mit einem negativen Element beginnen. Man erhält schliesslich

$$\overline{F}(x) = \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) = \frac{x \cdot G(x)}{\prod_{i=1}^{4} (1 - m_i x)}$$

Für das mittlere Moment kommt nur die grösste unter den Wurzeln m_i in Betracht, die wir mit m_1 bezeichnen und die aus der Gleichung

$$\prod_{i=1}^{4} (1 - m_i x) = 1 - 2\,\mathrm{ch}\,\alpha\, x + x^2 \left[1 - B^2 \left\{ 1 + 2\,\mathrm{ch}\,\alpha\, (e^2-1) x + (e^2-1)^2 x^2 \right\} \right]$$

zu bestimmen ist. Man findet

$$m_1 = \mathrm{ch}\,\alpha + W$$

wo

$$W = \sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha + B^2 \left[e^2 + \left(\frac{e^2-1}{2\,\mathrm{ch}\,\alpha} \right)^2 \right]}$$

und weiter

$$\overline{M} = m\, n \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \log m_1$$

$$F = -m\,n \cdot \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\pi}\left[1 - \frac{B^2(c^2-1)^2}{2\operatorname{ch}^2\alpha(\operatorname{ch}\alpha+\pi)}\right]$$

Da im Allgemeinen die Energie ε_1', die erforderlich ist, um von 2 zweitbenachbarten Elementen das eine umzuklappen, klein sein wird, so ist $c = e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}}$ ungefähr gleich 1, sodass wir die Glieder mit $(c^2-1)^2$ vernachlässigen dürfen. Dann sieht man aber, dass sich die Wechselwirkung zwischen zweitbenachbarten Elementen bemerkbat macht, wie eine Vergrösserung der Wechselwirkung zwischen nächstbenachbarten Elementen, denn an Stelle von $B^2 \cdot e^{-\frac{2\varepsilon}{kT}}$ in Gleichung (19) ist jetzt $B^2c^2 < B^2$ getreten. Das wntspricht einer Vergrösserung von ε_1.

Wir stellen auch hiär wieder wie im Paragraphen 6c) für den Fall $\varepsilon_1 = 0$ die Gleichungen zur Bestimmung der Maximalwahrscheinlichkeit auf. Dieselben lauten:

a) $$\frac{r_1 - s}{r_1 - s - x_1} \cdot \frac{r_2 - s - x_2}{r_2 - s} = 1$$

b) $$\frac{s^2(r_1-s-x_1)\cdot(r_2-s-x_2)\,B^2}{(s-x_1)(s-x_2)\cdot(r_1-s)\cdot(r_2-s)} = 1$$

c) $$\frac{1}{x_1^2}\cdot(s-x_1)(r_1-s-x_1)\cdot c^2 = 1$$

d) $$\frac{1}{x_2^2}\cdot(s-x_2)(r_2-s-x_2)\cdot c^2 = 1$$

Die Gleichung a) können wir auch in der Form

$$\frac{r_1 - s}{r_2 - s} = \frac{r_1 - s - x_1}{r_2 - s - x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

schreiben. Die Division von c) und d) ergibt

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{s-\nu_1}{s-\nu_2}$$

oder $\nu_1 = \nu_2$ und weiter

$$\nu_1 = \nu_2$$

d.h. aber wiederum das Moment der wahrscheinlichsten Anordnung verschwindet mit dem äusseren Feld.

Schluss: Ergebnis.

Wenn wir also nicht annehmen, wie dies P. Weiss tut, dass auch recht entfernte Elemente einen Einfluss auf einander ausüben - und das scheint uns auf keinen Fall zulässig zu sein- so gelangen wir bei unseren Annahmen nicht zu einer Erklärung des Ferromagnetismus. Es ist zu vermuten, dass diese Aussage auch für ein räumliches Modell zutrifft, bei dem nur Elemente der näheren Umgebung aufeinander wirken. Jn allen betrachteten Fällen, unter denen sich auch einige idealisierte räumliche Modelle befanden, stellte sich für $\mathfrak{H} = 0$ ein Zustand ein, der von allen Energieunterschieden abgesehen die meisten Anordnungsmöglichkeiten besass. Obwohl diese Anordnungen im Mittel eine verhältnismässig grosse Energie erfordern. Diese grösste Komplexionszahl kommt aber im räumlichen Modell ebenfalls den Anordnungen mit dem Moment Null zu. Es scheint daher der Schluss berechtigt, dass eine unserer Annahmen nicht zutreffend ist. Hiermit kommen wir auf die schon am Anfang aufgeworfene Frage zurück, ob wir es beim Ferromagnetismus wirklich mit einem thermischen Gleichgewichtszustand zu tun haben. Jst dies nämlich nicht der Fall, so können wir den Weiss`schen Ansatz des molekularen Feldes, der die Erfahrungstatsachen überraschend gut wiedergibt, zwar formal als richtig betrachten, jedoch dafür jetzt folgende Deutung vorschlagen. Da kein thermischer Gleichgewichtszustand vorliegt, so sind die Wahrscheinlichkeiten nicht einfach durch den Boltzmannschen Ansatz gegeben. Es besitzt vielmehr jede Stellung gegenüber einer einmal erreichten eine gewisse Unwahrscheinlichkeit, die umso grösser ist, je mehr Umklappungen zu ihrer Verwirklichung erforderlich sind. Wir müssen uns etwa die Vorstellung bilden, dass die Umklappungen der Elemente mehr Energie benötigen, als an einer Stelle vorkommt, solange die Temperatur unterhalb des Curieschen Punktes liegt, oder dass sie nur erfolgen, wenn gewisse weitere Bedingungen uns noch unbekannter Natur erfüllt sind. Auf diese Fragen prinzipielleren Charrakters können wir jedoch hier nicht näher eingehen, da dies den Rahmen dieser Arbeit wesentlich übersteigen würde.

Die vorliegende Arbeit wurde von mir auf Veranlassung von Herrn Professor Dr. W. Lenz und unter seiner Anleitung ausgeführt. Dabei habe ich nur die im Text zitierten Quellen benutzt. Herrn Professor Dr. Lenz spreche ich auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank aus.

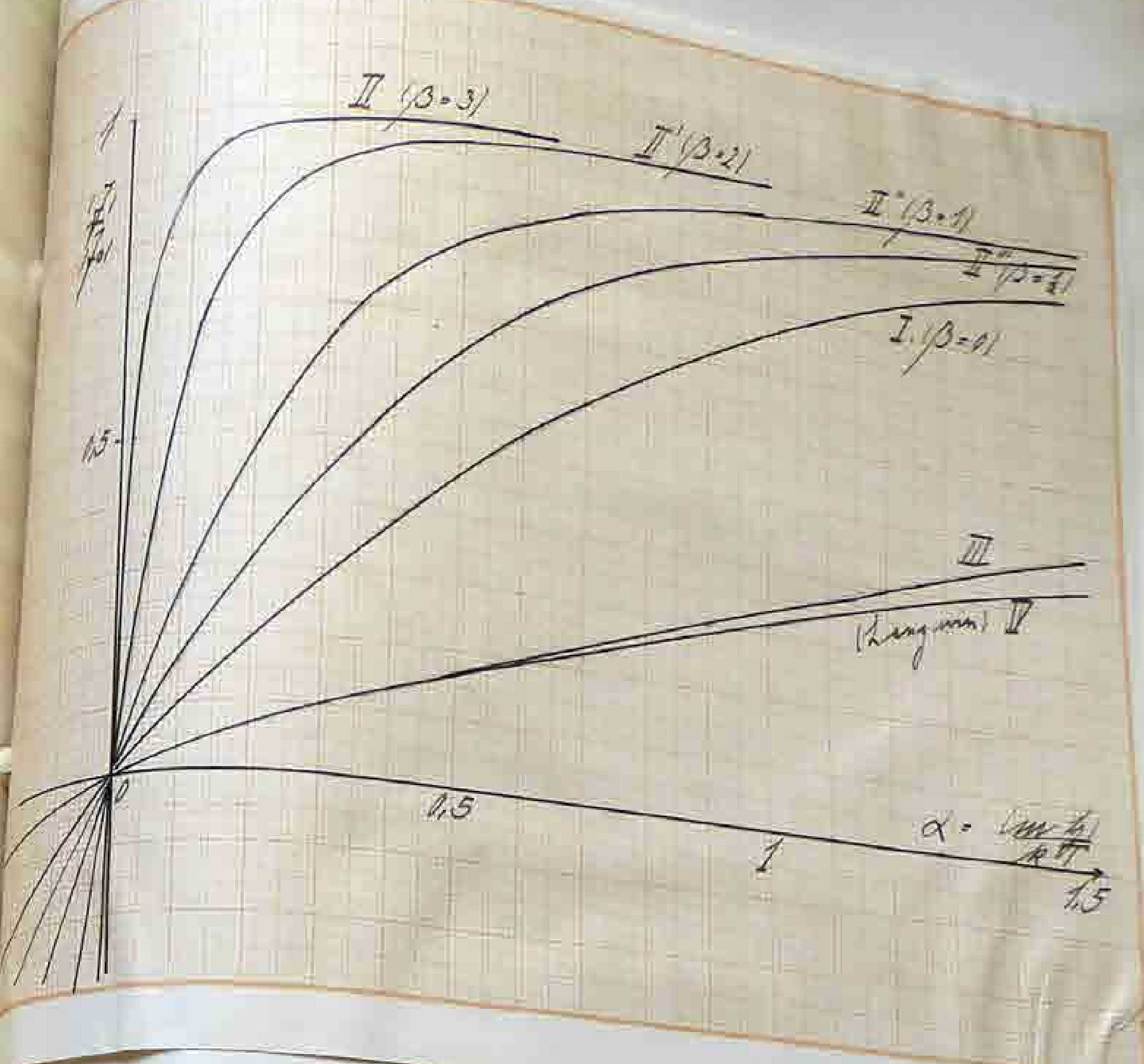

Fig. 7

I $\frac{J}{J_{01}} = \mathrm{tg}\,h\,\alpha$; II, II' II'' und II''' $\frac{J}{J_{01}} = \frac{sh\,\alpha}{\sqrt{sh^2\alpha + e^{-2\beta}}}$

Für $\beta = \frac{e_i}{RT}$ sind die Kurve 3, 2 1 und $\frac{1}{2}$ gesetzt.

III. $\frac{J}{J_{01}} = \frac{sh\,\alpha}{ch\,\alpha + 2}$ (Gl. 19a. für $A_3 = 4$ und $B_{12} = 1$)

IV $\frac{J}{J_{01}} = \frac{ch\,\alpha}{sh\,\alpha} - \frac{1}{\alpha}$ (nach Langevin.)