

Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus.

Auszug
aus der Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Hamburgischen Universität
vorgelegt von
Ernst Ising
aus Bochum.

HAMBURG 1924

Genehmigt von der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Hamburgischen Universität
auf Antrag von Professor Dr. W. Lenz

Professor Dr. E. Hecke
Dekan

Hamburg, den 31. Juli 1924

Die vollständige Dissertation ist zur Zeit nicht gedruckt; zwei in Maschinschrift hergestellte Exemplare sind auf der Staats- und Universitätsbibliothek in Hamburg und auf der Preußischen Staatsbibliothek in Berlin hinterlegt, von denen sie nach Maßgabe der Bestimmungen für die Handschriftenverleihung entliehen werden können.

Der Dekan
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Hamburgischen Universität
Professor Dr. P. P. Koch

Hamburg, den 30. Oktober 1924

Meinen lieben Eltern

in größter Dankbarkeit gewidmet.

Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus

Einleitung: Die Weißsche Theorie des Ferromagnetismus.

Als erster hat Ewing¹⁾ 1890 versucht, die Eigenschaften der festen ferromagnetischen Körper aus der Wechselwirkung der Elementarmagnete, aus denen sich diese Körper aufbauen, modellmäßig zu erklären. Hierauf weiterbauend hat P. Weiß²⁾ eine formal befriedigende Erklärung der Erfahrungstatsachen gegeben unter den folgenden Annahmen. Erstens sollen sich die ferromagnetischen Salze aus frei drehbaren magnetischen Dipolen zusammensetzen. Zweitens, es handelt sich bei dem Verhalten eines magnetischen Körpers um einen thermischen Gleichgewichtszustand. Bekanntlich gelangt M. P. Langevin auf dieser Grundlage im Fall paramagnetischer Gase zu einer Erklärung des Curieschen Gesetzes. Drittens nimmt Weiß an, daß auf jeden Elementarmagneten ein sogenanntes molekulares Feld wirkt, das proportional der Magnetisierungsintensität ist. Diese drei Annahmen, besonders die erste und dritte, dürften aber kaum dem wirklichen physikalischen Verhalten entsprechen. Auf eine Möglichkeit, vor allem das Curiesche Gesetz und die spontane Magnetisierung, wie man sie bei Magnetit und Pyrrhotin beobachtet, zu erklären, hat W. Lenz³⁾ aufmerksam gemacht. In Folgendem soll untersucht werden, ob auf Grund dieser Vorschläge Ferromagnetismus erklärt werden kann.

Hauptteil: § 1. Annahmen.

Wir denken uns einen Ferromagneten aus regelmäßig angeordneten Elementarmagneten (magnetischen Dipolen) aufgebaut. Die Richtung des magnetischen Moments dieser Elementarmagnete, die wir kurz Elemente nennen, soll nur wenige der Kristallstruktur entsprechend orientierte, energetisch ausgezeichnete Lagen einnehmen. Mit jeder Lage soll auch die entgegengesetzte möglich sein. Die Elemente gehen infolge der Wärmeagitation aus einer zulässigen Lage in eine andere über. Außer von einem

¹⁾ J. A. Ewing, Proc. Roy. Soc. 48, 342, 1890.

²⁾ P. Weiß, Journ. de Phys. 4 VI. 661, 1907 und Phys. Zeitschr. IX, 358, 1908.

³⁾ W. Lenz, Phys. Zeitschr. XXI, 614, 1920.

äußeren Magnetfeld sollen die Elemente noch durch die Kräfte beeinflusst werden, die sie gegenseitig auf einander ausüben. Diese Kräfte mögen etwa elektrischer Natur sein; wir nehmen an, daß sie mit der Entfernung rasch abklingen, so daß wir in erster Näherung nur die Wirkung benachbarter Elemente auf einander zu berücksichtigen brauchen. Diese letztere Annahme steht in einem gewissen Gegensatz zur Hypothese des molekularen Feldes von P. Weiß. Wenn wir noch ansetzen, daß unter den Stellungen, die zwei Elemente zu einander einnehmen, diejenigen die geringste innere Energie erfordern, bei denen beide Elemente gleichgerichtet sind, so können wir hoffen, zu einer Erklärung der spontanen Magnetisierung zu gelangen, da diesem Zustand dann eine besonders kleine Energie (etwa Null) entspricht. Die Annahme eines thermischen Gleichgewichtszustandes mit Maxwell-Boltzmannscher Verteilung wollen wir zunächst beibehalten.

§ 2. Die Berechnung des mittleren Moments für die einfachsten Modelle.

Wir wollen jetzt an einem möglichst einfachen Modell untersuchen, ob unter den gemachten Voraussetzungen der Ferromagnetismus erklärbar ist. Wir betrachten einen linearen Magneten bestehend aus n Elementen. Von diesen kann jedes zwei Stellungen einnehmen, bei denen die Richtung seines Dipolmoments m mit der Anordnungsrichtung des Gesamtmagneten zusammenfällt. Nur benachbarte Elemente sollen auf einander wirken. Es erfordert die Energie ϵ um von zwei gleichgerichteten benachbarten Elementen das eine umzuklappen.

Um mit Hilfe des Boltzmannschen Wahrscheinlichkeitsansatzes das mittlere Moment oder die Intensität \mathfrak{J} der Magnetisierung zu bestimmen, müssen wir abzählen, wie viel Anordnungen mit einem bestimmten Moment und mit einer bestimmten Energie möglich sind. Bezüglich der Methode sei auf das Original verwiesen. \mathfrak{J} läßt sich dann leicht berechnen, wenn man die Zustandssumme

$$Z = \sum e^{-\frac{\text{Energie}}{kT}}$$

kennt. Es ist über alle möglichen Anordnungen zu summieren; k bezeichnet die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur. Hinsichtlich der Methode dieser Summation sei wieder auf das Original verwiesen. \mathfrak{J} ist bis auf den Faktor m gleich der logarithmischen Ableitung von Z nach

$$\alpha = \frac{(m \mathfrak{H})}{kT},$$

wo \mathfrak{H} das äußere Magnetfeld bezeichnet. Man findet

$$(1.) \quad \mathfrak{J} = m \cdot n \cdot \frac{\sum \sin \alpha}{\sum \sin^2 \alpha + e^{-\frac{2\epsilon}{kT}}}$$

Dasselbe ergibt sich, wenn wir mehrere Ketten haben, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, und auch im Fall eines flächenhaften Modells, bei dem die Elemente einer Kette überhaupt nicht auf einander wirken. Dagegen erfordert es hier die Energie ε um von zwei gleichgerichteten unmittelbar benachbarten Elementen das eine umzuklappen. n bezeichnet immer die Gesamtzahl der Elemente.

§ 3. Diskussion des Ergebnisses.

Bei all diesen Modellen verschwindet bei den gemachten Annahmen das mittlere Moment \mathfrak{J} mit α d. h. mit dem äußerem Feld \mathfrak{H} . Für dieses Verhalten kommen zwei Gründe in Frage. Entweder hat, wenn man sich für $\mathfrak{H} = 0$ die Wahrscheinlichkeiten als Funktion des Moments \mathfrak{M} aufträgt, diese Kurve zwei gleiche symmetrisch zu $\mathfrak{M} = 0$ gelegene Maxima oder nur ein einziges und zwar aus Symmetriegründen bei $\mathfrak{M} = 0$. In beiden Fällen ergibt die Mittelung $\mathfrak{J} = 0$, was jedoch falls die Wahrscheinlichkeit zwei Maxima hat, nicht der Wirklichkeit entspricht; es wird dann vielmehr das Moment um einen der beiden Werte schwanken, denen ein Maximum entspricht. Wie eine weitere Rechnung zeigt, hat die Wahrscheinlichkeit nur ein einziges Maximum. Der größere Energieaufwand des unmagnetischen Zustands wird durch seine außerordentlich große Komplexibilität kompensiert.

Auf das weitere Verhalten von \mathfrak{J} , wie es durch Gleichung (1) gegeben ist, eingehend wiesen wir darauf hin, daß für große Werte von α , die sich jedoch praktisch nicht realisieren lassen ($\alpha < 1,5$) Sättigungserscheinungen eintreten. Je größer ε ist, um so eher und besser wird die Sättigung erreicht.

Für hinreichend kleine α ($\alpha < e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$) finden wir für das mittlere Moment pro Atom

$$|\overline{m}| = \frac{|m|^2 H}{kT} e^{\frac{\varepsilon}{kT}}$$

Für kleine ε ist also das Curiesche Gesetz erfüllt. Einen Curiepunkt, d. h. Übergang von Ferro- in Paramagnetismus zeigt unser vereinfachtes Modell nicht.

§ 4. Kompliziertere Fälle.

Um sich zu überzeugen, daß nicht eine zu große Idealisierung der Modelle an ihrem Versagen schuld ist, wurde in einigen etwas komplizierteren Fällen das mittlere Moment berechnet. Läßt man für die Elemente außer den beiden früheren Stellungen $2r$ weitere $\frac{1}{r+1}$ zu, so ändert sich das Ergebnis für kleine α im Wesentlichen um den Faktor $\frac{1}{r+1}$. Betrachtet man sodann eine Doppelkette, bei der sich gleichzeitig die Elemente ein und derselben Kette als auch der beiden verschiedenen Ketten beeinflussen, so bleibt auch hier das frühere Resultat im Wesentlichen dasselbe. Sogar in dem idealisierten Grenzfall

eines räumlichen Modells, bei dem es unendlich viel Energie erfordert, um von zwei nebeneinander liegenden gleichgerichteten Elementen, das eine umzuklappen, so daß nur ein schichtweises Umklappen vorkommt, verschwindet das mittlere Moment mit dem äußeren Feld. Auch die Berücksichtigung der gegenseitigen Wirkung zweitbenachbarter Elemente ist auf das frühere Ergebnis ohne besonderen Einfluß. In all diesen Fällen kann man sich wieder leicht davon überzeugen, daß das Verschwinden nicht durch die statistische Mittelbildung vorgetäuscht ist, indem man zeigt, daß das Moment der wahrscheinlichsten Anordnung mit \mathfrak{H} verschwindet.

Schluß: Ergebnis.

Es ist gezeigt, daß für lineare Ketten und gewisse Modifikationen kein Ferromagnetismus unter den obigen Voraussetzungen entsteht. Es besteht die Vermutung, daß auch beim dreidimensionalen analogen Modell ein ferromagnetisches Verhalten nicht erzielt wird. Daher scheint der Schluß berechtigt, daß unsere Annahme eines thermischen Gleichgewichtszustandes nicht zulässig ist. Wir können dann den Weißschen Ansatz des molekularen Feldes zwar formal als richtig betrachten, jedoch dafür jetzt folgende Deutung vorschlagen: Die Wahrscheinlichkeiten sind nicht einfach durch den Boltzmannschen Ansatz gegeben; es besitzt vielmehr jede Stellung gegenüber einer einmal erreichten eine gewisse Unwahrscheinlichkeit, die um so größer ist, je mehr Umklappungen zu ihrer Verwirklichung erforderlich sind. Wir müssen uns etwa die Vorstellung bilden, daß die Umklappungen mehr Energie benötigen als an einer Stelle vorkommt, solange die Temperatur unterhalb des Curieschen Punktes liegt, oder daß sie nur erfolgen, wenn gewisse weitere Bedingungen uns noch unbekannter Natur erfüllt sind. Auf diese prinzipielleren Fragen können wir hier nicht eingehen, da dies den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würde.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung von Herrn Professor Dr. W. Lenz und unter seiner Anleitung ausgeführt. Herrn Professor Dr. W. Lenz spreche ich auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank aus.

Lebenslauf.

Am 10. Mai des Jahres 1900 wurde ich, Ernst Ising, als Sohn des Kaufmanns Gustav Ising und seiner Ehefrau Thekla geb. Löwe zu Köln a. Rh. geboren. Kurze Zeit darauf zogen meine Eltern nach Bochum i. Westf., wo ich Ostern 1907 auf die Schule kam. Im Juni des Jahres 1918 bestand ich auf dem dortigen Gymnasium die Reifeprüfung. Nach kurzer militärischer Ausbildung begann ich Ostern 1919 mit dem Studium der Mathematik und Physik auf der Universität Göttingen. Nach einsemestriger Unterbrechung setzte ich meine Studien in Bonn fort, wo ich mich u. a. auch mit Astronomie beschäftigte. Zwei Semester später ging ich nach Hamburg. Dort wandte ich mich auf Veranlassung von Herrn Professor Dr. W. Lenz besonders der theoretischen Physik zu und begann Ende des Jahres 1922 unter seiner Anleitung mit Untersuchungen über Ferromagnetismus, die zu dem vorliegenden Ergebnis führten.

